Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Боднарчук Ірина Миколаївна

УДК 519.21

РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ МІРАМИ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Радченко Вадим Миколайович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2017

ЗМІСТ

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

(Ω, F, P) − повний ймовірнісний простір

X − довільна множина (в деяких частинах роботи на неї накладатимуться певні умови)

B − довільна σ-алгебра підмножин X (в деяких частинах роботи на неї накладатимуться певні умови)

R − множина дійсних чисел

Z − множина цілих чисел

N − множина натуральних чисел

$\mathbf{1}_A$ − характеристична функція множини A

$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([b,\ c])}$ − норма простору Бєсова $B_{22}^{\alpha}([b,\ c])$

$\|g\|_{L_2([b,\ c])} = \left(\int_b^c |g(s)|^2 ds \right)^{1/2}$ − норма простору Бєсова $L_2([b,\ c])$

$\mathsf{E}\xi$ − математичне сподівання випадкової величини ξ

$\mathsf{P}\lim_{n\to\infty} \xi_n$ − границя за ймовірністю послідовності ξ_n

$\|\xi\| = \sup\{\delta : \mathsf{P}\{|\xi| \geq \delta\} \geq \delta\}$

$L_0 = L_0(\Omega, F, \mathsf{P})$ − простір класів еквівалентності дійснозначних випадкових величин з топологією збіжності за ймовірністю

м. н. – майже напевно

ВСТУП

Актуальність теми.

Теорія стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь за останні десятиріччя, активно розвиваючись, знайшла свої застосування в радіоелектроніці та електротехніці, квантовій механіці, теорії автоматичного керування, космічних дослідженнях. Стохастичними рівняннями описуються зміни на ринку фінансів та цінних паперів, що в останні роки значно підвищило інтерес спеціалістів-практиків до даної галузі математики.

В процесі розвитку теорії стохастичних рівнянь розширюється множина інтегровних процесів та стохастичних мір, за якими беруться інтеграли. Так, параболічне рівняння з мартингальними мірами вперше було розглянуто в роботі J. B. Walsh [123]. Зокрема, J. B. Walsh показав, що розв'язки деяких стохастичних рівнянь в частинних похідних можуть бути записані, як інтеграли від невипадкових функцій за мартингальними мірами. Такий підхід було розвинено далі S. Albeverio, J.-L. Wu і T.-S. Zhang [43] та R. C. Dalang [55]. Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних вивчались як стохастичні рівняння в нескінченновимірних просторах (а саме, в гільбертових та банахових) у роботах P.-L. Chow [52], G. Da Prato і J. Zabczyk [62], L. Gawarecki і V. Mandrekar [71], S. Peszat і J. Zabczyk [103].

Зазвичай розглядалися диференціальні рівняння зі стохастичними мірами, що задовольняють певні припущення — такі, як існування моментів, неперервність, мартингальність, невід'ємність тощо. Широко дослідженими є стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних з вінерівським процесом (V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro [46], I. Gyöngy [72], A. Millet, P.-L. Morien [94], J. van Neerven, M. C. Veraar і L. Weis [97] та ін.), дробовим броунівським рухом (R. Balan, C. Tudor [45], A. Boudaoui, T. Caraballo і A. Oauhab [48], Yu. S.

Mishura [95, 96], L. Quer-Sardanyons і S. Tindel [111]), рівняння з мартингальними мірами (R. C. Dalang і M. Sanz-Solé [59, 60], M. Sanz-Solé і A. Süss [117], J. B. Walsh [123]) та мірами Леві (E. Hausenblas [73], S. Peszat і J. Zabczyk [103], C. I. Prévôt [108], T. Taniguchi [120]).

Рівняння з частинними похідними зі стохастичними мірами, на які накладається лише умова сигма-адитивності, певним чином узагальнють вказані вище рівняння, та залишаються мало дослідженими. Саме такі рівняння розглядаються в даній дисертаційній роботі. Для хвильових рівнянь та рівнянь параболічного типу із загальними стохастичними мірами досліджено питання існування, єдиності та регулярності м'яких розв'язків. Наявність лише умови сигма-адитивності міри, яка задає випадковий вплив, дозволяє застосовувати отримані результати для аналізу стохастичних систем, попередня інформація про поведінку яких є мінімальною. Тому, вивчення регулярності розв'язків рівнянь з частинними похідними зі стохастичними мірами є актуальним.

Рівняння з частинними похідними зі стохастичними мірами, на які накладається лише умова сигма-адитивності, певним чином узагальнють вказані вище рівняння, та залишаються мало дослідженими. Саме такі рівняння розглядаються в даній дисертаційній роботі. Для хвильових рівнянь та рівнянь параболічного типу із загальними стохастичними мірами досліджено питання існування, єдиності та регулярності м'яких розв'язків. Наявність лише умови сігма-адитивності міри, яка задає випадковий вплив, дозволяє застосовувати отримані результати для аналізу стохастичних систем, попередня інформація про поведінку яких є мінімальною. Тому, вивчення регулярності розв'язків рівнянь з частинними похідними зі стохастичними мірами є актуальним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем № 11БФ038-02 "Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (номер державної реєстрації 0111U006561) та № 16БФ038-02 "Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем" (номер державної реєстрації 0116U002530), що виконуються на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, і входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт "Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів".

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв'язання таких задач:

- доведення існування та єдиності м'яких розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(x)$, $x\in\mathbb{R}$ і $\mu(t)$, $t\in[0,\ T]$ та встановлення неперервності за Гельдером їх траєкторій;

- встановлення неперервної залежності м'яких розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(x)$, $x\in\mathbb{R}$ і $\mu(t)$, $t\in[0,\ T]$ від даних;

- доведення існування та єдиності м'якого розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x)$, $x\in\mathbb{R}$ та встановлення неперервності за Гельдером його траєкторій;

- доведення існування та єдиності м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області $((t,\vec{x})\in[0,\ T]\times\mathbb{R}^d,\ d\geq1)$ зі стохастичною мірою $\mu(t)$, $t\in[0,\ T]$ та встановлення неперервності за Гельдером його траєкторій;

- дослідження асимптотичної поведінки м’якого розв’язку задачі Коші для рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x),\ x \in \mathbb{R}$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

- дослідження асимптотичної поведінки м’якого розв’язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області $((t,\vec{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d,\ d \geq 1)$ зі стохастичною мірою $\mu(t),\ t \in [0,\ T]$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

Об’єкт дослідження. Об’єктом дослідження є м’які розв’язки диференціальних рівнянь в частинних похідних зі стохастичними мірами (а саме, хвильових рівнянь, параболічного рівняння та рівняння теплопровідності).

Предмет дослідження. Предметом дослідження є властивості м’яких розв’язків диференціальних рівнянь в частинних похідних зі стохастичними мірами.

Методика дослідження. В десертаційній роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу, теорії міри та математичної фізики. Зокрема, ключовим моментом при дослідженні регулярності та асимптотичної поведінки інтегралів за стохастичними мірами є отримана А. Камонт дискретна характеризація просторів Бєсова (див. [81]).

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- доведено існування та єдиність м’яких розв’язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t),\ t \in [0,\ T]$ та $\mu(x),\ x \in \mathbb{R}$ та встановлено неперервність за Гельдером їх траєкторій;

- встановлено неперервну залежність м’яких розв’язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$ та $\mu(x),\ x\in\mathbb{R}$ від даних;

- доведено існування та єдиність м'якого розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x),\ x\in\mathbb{R}$ та встановлено неперервність за Гельдером його траєкторій;

- доведено існування та єдиність м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області ($(t,\vec{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d,\ d\geq 1$) зі стохастичною мірою $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$ та встановлено неперервність за Гельдером його траєкторій;

- досліджено асимптотичну поведінку м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x),\ x\in\mathbb{R}$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

- досліджено асимптотичну поведінку м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області ($(t,\vec{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d,\ d\geq 1$) зі стохастичною мірою $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

Практичне значення отриманих результатів. В цілому дисертаційна робота носить теоретичний характер. Однак, результати даної роботи можуть бути застосовані для аналізу стохастичних систем, попередня інформація про поведінку яких є мінімальною, і ми не можемо накладати спеціальні умови на стохастичні міри, пов'язані з даними системами. Крім того, отримані результати та застосована в роботі методика можуть бути використані при подальшому вивченні стохастичних рівнянь, що розглядаються, та аналогічних до них.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних статтях співавтору проф. Радченку В. М. належать постановка задачі та загальне керівництво роботою, співавтору проф. Шевченку Г. М. належать консультації та обговорення.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на

- міжнародній конференції “Stochastic analysis and random dynamics” , Львів, 2009 р.

- міжнародній конференції “Stochastic Processes in Abstract Spaces” , Київ, 2015 р.

- XVII міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 2016 р.

- XIV міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспіран- тів та молодих науковців “ Шевченківська весна – 2016 ” , Київ, 2016 р.

- міжнародній конференції “Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics” , Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару “Стохастичні диференціальні рівняння” при кафедрі загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару “Теорія ймовірностей та математична статистика” при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару “Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики” при кафедрі математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару при кафедрі вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів, 2016 р.

- засіданні наукового семінару “Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2017 р.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 робіт, а саме:

- 6 статтей, три з яких 3 ([5, 6, 8]) опубліковано у фахових виданнях України, англомовні переклади яких включено до наукометричної бази даних Scopus, та три статті [3, 4, 7] опубліковано в наукових виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН України.
- 5 тез доповідей на конференціях [125, 126, 127, 128, 129].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 141 сторінку, список використаних джерел займає 17 сторінок і містить 129 найменувань.

Перший розділ містить короткий історичний огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **другому розділі** наводяться деякі означення та твердження, що мають безпосереднє відношення до змісту дисертаційної роботи — означення та властивості стохастичної міри та інтеграла за стохастичною мірою, оцінка стохастичного інтеграла за допомогою норми простору Бєсова, властивості м'якого розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності, теорема про фундаментальний розв'язок параболічного рівняння.

Зокрема, відзначимо наступне означення.

Означення 2.1 Довільне σ-адитивне відображення $\mu : B \to L_0$ називається *стохастичною мірою.*

Третій розділ дисертації присвячений доведенню існування, єдиності та неперервності за Гельдером м'яких розв'язків задач Коші для стохастичних хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t), t \in [0,T]$ та $\mu(x), x \in \mathsf{R}$, а також встановленню неперервної залежності вказаних розв'язків від даних.

Розглядаються наступні стохастичні хвильові рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут $(t,x) \in [0,T] \times \mathsf{R}$, $T > 0, a > 0$. У рівнянні (3.1) стохастична міра μ визначена на борельовій σ-алгебрі підмножин R, а в (3.2) — на борельовій σ-алгебрі підмножин $[0,T]$.

Символічні записи (3.1) та (3.2) розуміємо у наступному м'якому сенсі

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+at) - u_0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}} d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds \qquad (3.3)$$

та

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)-u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{(0,\,t]} d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy, \qquad (3.15)$$

відповідно. Тут $u(t,x)=u(t,x,\omega):[0,T]\times\mathsf{R}\times\Omega\to\mathsf{R}$ — невідома вимірна випадкова функція.

У даному розділі розглядаються наступні припущення.

A1.1. Функції $u_0(y)=u_0(y,\omega):\mathsf{R}\times\Omega\to\mathsf{R}$, $v_0(y)=v_0(y,\omega):\mathsf{R}\times\Omega\to\mathsf{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega\in\Omega$: $|u_0(y,\omega)|\le C(\omega)$, $|v_0(y,\omega)|\le C(\omega)$.

A1.2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(y_1)-u_0(y_2)|\le C(\omega)|y_1-y_2|^{\beta(u_0)},\quad 0<\beta(u_0)\le 1.$$

A1.3. $f(s,y,v):[0,T]\times\mathsf{R}\times\mathsf{R}\to\mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)|\le C$.

A1.4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $v\in\mathsf{R}$:

$$|f(s,y,v_1)-f(s,y,v_2)|\le C|v_1-v_2|.$$

A1.5. $\sigma(s,y):[0,T]\times\mathsf{R}\to\mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

A1.6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s_1,y_1)-\sigma(s_2,y_2)|\le C(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)}+|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)}),\quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1.$$

A1.7. $|\mu((0,t])|\le C(\omega),\quad \forall t\in(0,T]$.

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

Основним результатом підрозділу 3.3 є наступна теорема.

Теорема 3.1 *Нехай виконуються припущення* A1.1 – A1.6. *Тоді*

1) Рівняння (3.3) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (3.3), то для всіх* $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$ $u(t,x) = v(t,x)$ *м. н.*

2) Якщо функція $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau > 1/2$, *то для будь-яких фіксованих* $K > 0$ *та* $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \beta(u_0)]$, $\gamma_1 < 1 - 1/(2\beta(\sigma))$, $\gamma_2 < 1/2$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,x)$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x_1) - \bar{u}(t_2,x_2)| \le C(\omega)\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}\right),$$

$$t_i \in [0,T], |x_i| \le K, i = 1,2.$$

3) Якщо функція $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau > 1/2$, *то випадкова функція* $u(t,x)$ *маємо модифікацію, що неперервно залежить від даних.*

Під неперервною залежністю мається на увазі наступне. Нехай маємо такі дві задачі Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial x^2} + f_i(t,x,u_i(t,x)) + \sigma_i(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u_i(0,x) = u_{0i}(x), \qquad \dfrac{\partial u_i(0,x)}{\partial t} = v_{0i}(x), \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{3.13}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, а розв'язок розглядається у м'якому сенсі. Нехай функції $u_{0i}, v_{0i}, f_i, \sigma_i, i = 1,2$, задовольняють умови A1.1 – A1.6 та $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}$ виконується

$$|u_{01}(x) - u_{02}(x)| < \delta \quad м.н., \quad |v_{01}(x) - v_{02}(x)| < \delta \quad м.н.,$$

$$|\sigma_1(t,x) - \sigma_2(t,x)| < \delta, \quad |f_1(t,x) - f_2(t,x)| < \delta. \tag{3.14}$$

Тоді $\forall \rho \in (0,1/2)$ $\exists Q = Q(\omega) > 0$, що $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| < C(\omega)\delta^{\rho} \text{ м.н.}$$

Основними результатами підрозділу 3.4 є наступні теореми.

Теорема 3.6 *Нехай виконуються припущення* A1.1 – A1.6. *Тоді*

1) Рівняння (3.15) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (3.15), то для всіх* $t\in[0,T], x\in\mathbb{R}$ $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

2) Якщо також справджується A1.7, то для будь-яких фіксованих $\delta>0, K>0$ *та* $\gamma_1,\gamma_2\in[0,\beta(u_0)]$ *таких, що* $\gamma_1<3/2-1/(2\beta(\sigma))$ *та* $\gamma_2<1/2$, *стохастична функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,x)$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x_1)-\bar{u}(t_2,x_2)|\le C(\omega)\left(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|x_1-x_2|^{\gamma_1}\right),$$

$$t_i\in[\delta,T], |x_i|\le K, i=1,2.$$

Нехай крім (3.2) маємо наступні задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial t^2}=a^2\,\dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2}+f_j(t,x,u_j(t,x))+\sigma_j(t,x)\dot{\mu}(t),\\ u_j(0,x)=u_{0j}(x), \qquad \dfrac{\partial u_j(0,x)}{\partial t}=v_{0j}(x),\end{cases}$$

де $j\ge 1$, $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, $T>0, a>0$, а розв'язки розглядаються у м'якому сенсі, тобто,

$$u_j(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_{0j}(x+at)-u_{0j}(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_{0j}(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f_j(s,y,u(s,y))dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{(0,t]}d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma_j(s,y)dy. \qquad (3.16)$$

Для даних рівнянь розглядатимемо наступні припущення.

A1.1*. Функції $u_{0j}(y)=u_{0j}(y,\omega):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$, $v_{0j}(y)=v_{0j}(y,\omega):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega\in\Omega$:

$$|u_{0j}(y,\omega)|\le C(\omega), \quad |v_{0j}(y,\omega)|\le C(\omega).$$

A1.2*. $u_{0j}(y)$ неперервна за Гельдером:

$$\left|u_{0j}(y_1)-u_{0j}(y_2)\right|\le C(\omega)\left|y_1-y_2\right|^{\beta(u_0)},\quad 0<\beta(u_0)\le 1.$$

A1.3*. $f_j(s,y,v):[0,T]\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|f_j(s,y,v)|\le C$.

A1.4*. $f_j(s,y,v)$ ліпшицева за $v\in\mathrm{R}$:

$$\left|f_j(s,y,v_1)-f_j(s,y,v_2)\right|\le C\left|v_1-v_2\right|.$$

A1.5*. $\sigma_j(s,y):[0,T]\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $\left|\sigma_j(s,y)\right|\le C$.

A1.6*. $\sigma_j(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$\left|\sigma_j(s_1,y_1)-\sigma_j(s_2,y_2)\right|\le C(\left|s_1-s_2\right|^{\beta(\sigma)}+\left|y_1-y_2\right|^{\beta(\sigma)}),\quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1.$$

Зауважимо, що тут константи C та $C(\omega)$ спільні для всіх $j\ge 1$.

Теорема 3.3. *Нехай для довільного* $j\ge 1$ *елементи рівнянь (3.15) та (3.16) задовольняють припущення* A1.1–A1.7 *та* A1.1*–A1.6*, A1.7 *відповідно. Нехай також* $U_j=\sup\limits_{y\in\mathrm{R}}|u_{0j}(y)-u_0(y)|\to 0,\quad j\to\infty\quad$ *м.н.*,

$$V_j=\sup_{y\in\mathrm{R}}|v_{0j}(y)-v_0(y)|\to 0,\quad j\to\infty\quad \text{м.н.},$$

$$\Sigma_j=\sup_{(s,y)\in[0,T]\times\mathrm{R}}|\sigma_j(s,y)-\sigma(s,y)|\to 0,\quad j\to\infty,$$

$$F_j=\sup_{(s,y,v)\in[0,T]\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}}|f_j(s,y,v)-f(s,y,v)|\to 0,\quad j\to\infty.$$

Тоді для довільного $\delta>0$ *виконується*

$$|u_j(t,x)-u(t,x)|\to 0,\quad j\to\infty\quad \text{м.н.},\quad \forall(t,x)\in[\delta,T]\times\mathrm{R}.$$

В **четвертому розділі** дисертаційної роботи доводиться існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x), x\in\mathrm{R}$. Також досліджується асимптотична поведінка м'якого розв'язку рівняня теплопровідності (часткового випадку параболічного рівняння) при необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати.

Отже, досліджується наступна задача Коші

$$\begin{cases} Lu(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))dt + \sigma(t,x)d\mu(x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \qquad (4.1)$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathrm{R}$, μ — стохастична міра, визначена на $\sigma-$алгебрі борельових множин з R, а оператор L має вигляд

$$Lu(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \qquad (4.2)$$

де функції a, b, c визначено в циліндрі

$$\bar{S} = [0,T] \times \mathrm{R} = \{(t,x) : t \in [0,T],\ x \in \mathrm{R}\}.$$

Також розглядається частковий випадок задачі (4.1) (рівняння теплопровідності)

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dt + f(t,x,u(t,x))dt + \sigma(t,x)d\mu(x), t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \qquad (4.4)$$

В даному розділі вивчаються м'які розв'язки задач (4.1) та (4.4), а саме, такі вимірні випадкові функції $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathrm{R} \times \Omega \to \mathrm{R}$, що $\forall (t,x)$ задовольняють інтегральні рівняння

$$u(t,x) = \int_{\mathrm{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_{\mathrm{R}} p(t,x;s,y) f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+ \int_{\mathrm{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds, \qquad (4.3)$$

де $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $Lu(t,x) = 0$ та

$$u(t,x) = \int_{\mathrm{R}} p(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_{\mathrm{R}} p(t-s,x-y) f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+ \int_{\mathrm{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t-s,x-y)\sigma(s,y)ds, \qquad (4.16)$$

де $p(t,x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

Розглядаються наступні припущення.

A2.1. Функція $u_0(y)=u_0(y,\omega):\mathrm{R}\times\Omega\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $\left|u_0(y,\omega)\right|\le C(\omega)$.

A2.2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером за $y\in\mathrm{R}$, а саме,

$$\left|u_0(y_1)-u_0(y_2)\right|\le C(\omega)\left|y_1-y_2\right|^{\beta(u_0)},\quad \beta(u_0)\ge 1/2.$$

A2.3. $f(s,y,z):[0,T]\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|\,f(s,y,z)\,|\le C$.

A2.4. $f(s,y,z)$ ліпшицева за $y\in\mathrm{R},\ z\in\mathrm{R}$, тобто,

$$\left|\,f(s,y_1,z_1)-f(s,y_2,z_2)\right|\le C\left(\left|y_1-y_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right).$$

A2.5. Функція $\sigma(s,y):[0,T]\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $\left|\sigma(s,y)\right|\le C$.

A2.6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером за $y\in\mathrm{R}$, тобто,

$$\left|\sigma(s,y_1)-\sigma(s,y_2)\right|\le C\left|y_1-y_2\right|^{\beta(\sigma)},\quad \beta(\sigma)>1/2.$$

A2.7. $\sup_{s\in[0,T],z\in\mathrm{R}}|\,f(s,y,z)\,|\to 0, u_0(y)\to 0, |\,y\,|\to\infty.$

A2.8. Функція $|\,y\,|^{\tau}$ інтегровна на R за μ для деякого $\tau>3/2$.

P. Фундаментальний розв’язок оператора L є однорідним за просторовою змінною:

$$p(t,x;s,y)=p(t,x-y;s,0).$$

L1. Функції $a(t,x),b(t,x),c(t,x)$ — неперервні та обмежені в $\bar{S}$ за сукупністю змінних t та x, і для деяких $\alpha_0>0, A>0$ всюди в $\bar{S}$ виконуються нерівності

$$|\,a(t,x)-a(t^0,x^0)\,|\le A\left(\left|x-x^0\right|^{\alpha_0}+\left|t-t^0\right|^{\alpha_0}\right),$$

$$|\,b(t,x)-b(t,x^0)\,|\le A\left|x-x^0\right|^{\alpha_0},$$

$$|\,c(t,x)-c(t,x^0)\,|\le A\left|x-x^0\right|^{\alpha_0}.$$

L2. Оператор L — рівномірно параболічний в $\bar{S}$, тобто, існують такі додатні сталі λ_0,λ_1, що $\lambda_0\le a(t,x)\le\lambda_1$ для всіх $(t,x)\in\bar{S}$.

Основними результатами даного розділу є наступні теореми.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються припущення* A2.1 – A2.6, L1, L2. *Тоді*

1. Рівняння (4.3) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (4.3), то для всіх* t *та* x*:* $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

Якщо додатково виконується припущення P *та функція* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$*, то*

2. Для будь-яких фіксованих $t\in[0,T], K>0, \gamma_1<1/2,$ *випадкова функція* $u(t,x), x\in[-K,K],$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

3. Для будь-яких фіксованих $\delta>0, K>0, \gamma_1<1/2, \gamma_2<1/4,$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$ *таку, що для деякого* $C_{\tilde{u}}(\omega)>0$ *виконується*

$$|\tilde{u}(t_1,x_1)-\tilde{u}(t_2,x_2)|\le C_{\tilde{u}}(\omega)(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|x_1-x_2|^{\gamma_1}),$$
$$t\in[\delta,T],\ x\in[-K,K].$$

Теорема 4.2. *Нехай виконуються припущення* A2.1 – A2.8. *Тоді для розв'язку рівняння (4.16) існує модифікація* $u(t,x)$ *така, що при кожному* $t\in[0,T]$ *і кожному* $\omega\in\Omega$ *виконується*

$$|u(t,x)|\to 0,\quad |x|\to\infty.$$

В **п'ятому розділі** вивчається задача Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області зі стохастичною мірою $\mu(t), t\in[0,T]$. Доводиться існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку даної задачі. Досліджується асимптотична поведінка розв'язку при необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати.

У даній частині роботи розглядається рівняння

$$\begin{cases} du(t,\vec{x})=a^2\Delta_{\vec{x}}u(t,\vec{x})dt+f(t,\vec{x},u(t,\vec{x}))dt+\sigma(t,\vec{x})d\mu(t),\\ u(0,\vec{x})=u_0(\vec{x}),\end{cases}\tag{5.1}$$

де $(t,\vec{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $a\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$, $\Delta_{\vec{x}}$ — оператор Лапласа та μ —

стохастична міра, визначена на борельовій $\sigma-$алгебрі підмножин $[0, T]$.

Як і в попередніх розділах, символічний запис (5.1) розуміється у м'якому сенсі, тобто

$$u(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y}$$

$$+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y}$$

$$+ \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}. \tag{5.2}$$

Тут $p(t,\vec{x}) = \left(4a^2\pi t\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4a^2 t}}$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності, $u(t,\vec{x}) = u(t,\vec{x},\omega):[0, T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція.

Будемо розглядати наступні припущення.

А3.1. $u_0(\vec{y}) = u_0(\vec{y},\omega):\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена для кожного $\omega\in\Omega$: $|u_0(\vec{y},\omega)|\le C(\omega)$.

А3.2. $u_0(\vec{y})$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(\vec{y}_1)-u_0(\vec{y}_2)|\le C(\omega)|\vec{y}_1-\vec{y}_2|^{\beta(u_0)},\quad 0<\beta(u_0)\le 1.$$

А3.3. $f(s,\vec{y},v):[0, T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,\vec{y},v)|\le C$.

А3.4. $f(s,\vec{y},v)$ ліпшицева за $\vec{y}\in\mathbb{R}^d, v\in\mathbb{R}$:

$$|f(s,\vec{y}_1,v_1)-f(s,\vec{y}_2,v_2)|\le C\left(|\vec{y}_1-\vec{y}_2|+|v_1-v_2|\right).$$

А3.5. $\sigma(s,\vec{y}):[0, T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,\vec{y})|\le C$.

А3.6. $\sigma(s,\vec{y})$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s_1,\vec{y}_1)-\sigma(s_2,\vec{y}_2)|\le C(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)}+|\vec{y}_1-\vec{y}_2|^{\beta(\sigma)}),\quad 1/2<\beta(\sigma)<1.$$

А3.7. μ неперервна за Гельдером:

$$|\mu((s_1,s_2])|\le C(\omega)|s_1-s_2|^{\beta(\mu)},\quad s_1,s_2\in[0, T],\quad \beta(\mu)>0.$$

А3.8. $|u_0(\vec{y})| \to 0, \quad \sup_{s\in[0,T],v\in\mathbb{R}} |f(s,\vec{y},v)| \to 0, \quad \sup_{s\in[0,T]} |\sigma(s,\vec{y})| \to 0, \quad |\vec{y}| \to \infty.$

Основними результатами даного розділу є наступні теореми.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються припущення* А3.1 – А3.6. *Тоді*

(i) Рівняння (5.2) має розв'язок $u(t,\vec{x})$. *Якщо* $v(t,\vec{x})$ *— інший розв'язок (5.2), то для всіх* $t\in[0,T], \vec{x}\in\mathbb{R}^d$ $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

(ii) Для будь-яких фіксованих $t\in[0,T]$, $K>0$, $\gamma_1<\beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1\le\beta(u_0)$ *стохастична функція* $u(t,\vec{x}), |\vec{x}|\le K$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

(iii) Якщо також справедливе припущення А3.7, то для будь-яких фіксованих $\delta>0, K>0$ *та* γ_1,γ_2 *таких, що* $\gamma_1<\beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1\le\beta(u_0)$, $\gamma_2\le\beta(\mu)\wedge\beta(u_0)$ *та* $\gamma_2<\beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$, *випадкова функція* $u(t,\vec{x})$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,\vec{x})$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,\vec{x}_1)-\bar{u}(t_2,\vec{x}_2)|\le C(\omega)\left(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_i\in[\delta,T], \quad |\vec{x}_i|\le K, i=1,2.$$

Теорема 5.2. *Нехай виконуються припущення* А3.1 – А3.6 *та* А3.8. *Тоді для розв'язку рівняння (5.2) існує така модифікація* $u(t,\vec{x})$, *що для будь-яких фіксованих* $t\in[0,T], \omega\in\Omega$ *виконується*

$$|u(t,\vec{x})|\to 0, \quad |\vec{x}|\to\infty.$$

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи. Також, для порівняння, наведено деякі відомі результати для аналогічних задач.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору Радченку Вадиму Миколайовичу за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. L_0-значні міри та інтеграли за ними.

Вперше поняття стохастичної міри зустрічається в роботах S. Bochner [47]. Далі стохастичні міри, з різними означеннями даного поняття, досліджували A. Prekopa [105, 106, 107], А. В. Скороход [36, 37], Ю. В. Прохоров [18], M. Metiveir і J. Pellaumail [90] та інші. Докладно були вивчені стохастичні міри з незалежними приростами (А. В. Скороход [36, розділ 2]), невід'ємні стохастичні міри (Б. А. Севастьянов [35, розділ XII]), досліджено зв'язок з теорією точкових процесів (O. Kallenberg [79]).

В даній роботі досліджуються стохастичні міри в їх загальному означенні, тобто, міри зі значеннями в лінійному метричному просторі $L_0(\Omega, \mathsf{F}, P)$. Тому ми можемо використовувати результати для функцій множин, що приймають значення в лінійних топологічних та метричних просторах.

Важливою властивістю L_0-значних мір, визначених на σ-алгебрі, є обмеженість множини їх значень. Цей результат був незалежно доведений M. Talagrand [119] та N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts [80], а згодом L. Drewnowski [69] узагальнив його на випадок банаховозначних мір. Дана властивість стала основою при визначенні інтеграла за стохастичною (загальною випадковою) мірою від дійсної функції в дослідженнях В. М. Радченка [26].

Інтеграл за випадковим процесом вперше був побудований у роботах N. Wiener [124] та R. E. A. C. Paley, N. Wiener, A. Zygmund [104]. Це був інтеграл від дійсної функції за процесом броунівського руху. Узагальнення даного результату відбувалося в кількох напрямках. H. Cramer [53] запропонував теорію стохастичних інтегралів за ортогональними стохастичними мірами (див. також [12]). K. Itô [77] поширив означення інтеграла Вінера на випадок інтеграла від випадкової неупереджуючої функції за вінерівським процесом, а згодом побудував кратний стохастичний інтеграл від невипадкової функції [78] та інтеграл за пуассонівською стохастичною мірою.

J. L. Doob [67] підкреслив мартингальну природу інтегралу Іто. Враховуючи те, що мартингальна властивість вінерівського процесу була основою при визначенні інтегралу Іто, J. L. Doob запропонував стохастичний інтеграл за мартингалом. Для подальшого розвитку даного інтеграла необхідно було мати змогу розкладати субмартингал на суму мартингала та передбачуваного зростаючого процесу. P.-A. Meyer знайшов умови, за яких можливо це зробити, та вказав, як можна використати таке представлення для узагальнення стохастичного інтеграла [91].

Таким чином, в процесі розвитку теорії стохастичних інтегралів було досліджено інтеграл за мартингалом (P. Courrége [54], H. Kunita, S. Watanabe [85]), за локальним мартингалом (P.- A. Meyer [92]), за семімартингалом (P.- A. Meyer [93], C. Doleans-Dade [66] та ін.).

Згодом А. В. Скороход [38] запропонував конструкцію узагальненого інтеграла за гауссівською стохастичною мірою, визначеного на широкому класі випадкових функцій. Незалежно від даного результату схожу конструкцію запропонував M. Hitsuda [74]. В той самий час інтеграл такого виду, але з більш жорсткими умовами щодо інтегранда, був побудований Ю. Л. Далецьким та С. М. Парамоновою [14, 15]. Дана теорія набула розвитку в роботах А. А. Дороговцева [16, 17], D. Nualart і E. Pardoux [99, 100].

P. Turpin [122] побудував інтеграл від дійсної функції за мірою зі значеннями в лінійному топологічному просторі з семінормою. При цьому вимагалось виконання певних умов обмеженості щодо даної векторозначної міри. За цих умов означення інтеграла є коректним, він має стандартні елементарні властивості та справедлива теорема про мажоровану збіжність. В. М. Радченко [19] показав, що з результатів M. Talagrand [119] та допоміжної нерівності з роботи B. Maurey, G. Pisier [88] випливає, що довільна L_0-значна міра задовольняє потрібну умову (див. також [26]). Використавши означення та основні властивості інтеграла, введеного P. Turpin, В. М. Радченко представив теорію інтегрування за загальними стохастичними мірами. Зокрема, було доведено ряд граничних теорем для стохастичних інтегралів при збіжності підінтегральних функцій та збіжності мір [20, 21, 23, 24, 25, 27], доведено повноту простору інтегровних функцій [29], представлено критерій інтегровності, показано, що інтеграл за стохастичною мірою також є стохастичною мірою [26].

Оскільки в даній дисертаційній роботі досліджується неперервність за Гельдером залежних від параметра інтегралів за загальними стохастичними мірами, то відмітимо, що В. М. Радченко [28] навів достатні умови існування неперервної модифікації таких інтегралів.

Крім того, визначено інтеграл Стратоновича за стохастичною мірою, що має неперервні траєкторії, та доведено існування і єдиність розв’язку стохастичного рівняння з даним інтегралом (див. [114]). В публікації В. М. Радченка та Н. О. Стефанської [34] розглянуто пряме та обернене перетворення Фур’є стохастичних мір, а отримані результати застосовано у дослідженні рівняння теплопровідності.

Інтегрування за загальними стохастичними мірами розглянуто і в роботі S. Kwapień, W. A. Woyczińskі [86]. Означення стохастичного інтеграла від дійсної функції цілком аналогічне означенню В. М. Радченка і також базується на твердженні про обмеженість за ймовірністю множини значень стохастичної міри. Детально розглянуто приклади загальних стохастичних мір, наведено основні властивості інтеграла, зокрема, аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність.

В роботі В. М. Радченка [33] побудовано інтеграл за загальною стохастиною мірою від випадкової функції. Інтеграл визначено на відрізках як границя інтегральних сум спеціального виду. При цьому, на підінтегральні функції накладається умова належності її траєкторій просторам Бєсова. Розглянуто деякі властивості такого інтеграла та досліджено стохастичне рівняння, що містить цей інтеграл.

Серед інших інтеграторів також останнім часом активно досліджуються стійкі процеси (див., наприклад, G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu [116]), дробовий броунівський рух (L. Decreusefond, A. S. Üstünel [64], J. Memin, Yu. S. Mishura, E. Valkeila [89, 96]) та процеси Леві (D. Applebaum [44], S. Peszat, J. Zabczyk [103]).

1.2. Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних

Паралельно з інтегралами за стохастичними мірами багатьма авторами вивчалися стохастичні диференціальні та інтегральні рівняння. До початку 60-х років XX-го століття більшість робіт з теорії стохастичних диференціальних рівнянь стосувалися звичайних стохастичних диференціальних рівнянь. З того часу диференціальні рівняння в частинних похідних зі стохастичною складовою, коефіцієнтами або збуренням, почали привертати увагу багатьох дослідників. З одного боку, цей інтерес був зумовлений необхідністю описувати випадковий вплив у таких природничих науках, як фізика, хімія, біологія — поширення хвиль у випадковому середовищі (див. В. І. Татарський [39], J. B. Keller [82]), турбулентні потоки (P.-L. Chow [51], E. A. Novikov [98]), популяційна біологія (D. A. Dawson [63], W. H. Fleming [70]) тощо. З іншого боку, розвиток теорії стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних зумовлений внутрішнім розвитком теорії випадкових процесів та стохастичного аналізу. Сучасний виклад теорії стохастичного інтегрування та стохастичних диференціальних рівнянь представлено, наприклад, в роботах [52, 56, 110].

Переважно, стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних розглядалися, як стохастичні диференціальні рівняння в нескінченновимірних просторах, а саме, в гільбертових та банахових. Стохастичні диференціальні рівняння було введено K. Itô [76] (та незалежно, в іншій формі і для дещо ширшого класу процесів, І. І. Гіхманом [10]). Дана теорія була розвинена в роботах І. І. Гіхмана та А. В. Скорохода [11, 12].

Дослідження диференціальних рівнянь в гільбертовому просторі беруть свій початок в роботах В. В. Баклана [1], Т. Л. Чантладзе [41], Ю. В. Далецкого [13]. Пошук відповідей на основні теоретичні питання про існування та єдиність розв’язку, що, за великої кількості різноманітних додаткових умов, активно відбувався в 70-80-х роках минулого століття, триває і нині. Зокрема, В. В. Баклан довів теорему про існування розв’язку стохастичного параболічного рівняння, використовуючи метод, що зараз називається методом напівгруп, та розв’язок у сенсі Іто — м’який розв’язок (див. [52, 62, 102, 103]). Застосування методу напівгруп дозволяє однаково вивчати різні види диференціальних рівнянь в частинних похідних, та за допомогою напівгруп визначаються м’які розв’язки стохастичних диференціальних рівнянь, дослідженню яких присвячена дана дисертаційна робота.

Вперше стохастичне диференціальне рівняння параболічного типу, породжене гауссівським білим шумом, було введено та обговорено в роботі J. B. Walsh [123, розділ V]. Зокрема, для кабельного рівняння J. B. Walsh довів існування та єдиність слабкого розв’язку, а також показав, що для довільного $\varepsilon > 0$ траєкторії даного розв’язку неперервні за Гельдером з показниками $1/4 - \varepsilon$ за часовою змінною, та $1/2 - \varepsilon$ — за просторовою. Для аналогічного рівняння із загальною стохастичною мірою В. М. Радченко [30] отримав показники гельдеровості м’якого розв’язку, менші за 1/18 та 1/6 (за часовою та просторовою змінними відповідно). Такі ж самі показники було одержано і для рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою в [112]. J. Dettweiler, L. Weis, J. van Neerven [65] розглядали задачу Коші для параболічного рівняння з гауссівським білим шумом. Вони довели, що слабкий розв'язок задовольняє умову Гельдера за часовою змінною з показником α та за просторовою змінною з показником β, де $2\alpha+\beta<1/2$.

Регулярність розв'язку параболічного рівняння з крайовою умовою Діріхле, породженого циліндричним вінерівським процесом, досліджено в роботі J. Printems [109]. А саме, показано, що траєкторії розв'язку неперервні за Гельдером за часовою змінною з показником, що залежить від даних задачі, але не перевищує $1/2$. Схожий результат для м'якого розв'язку стохастичного рівняння в гільбертовому просторі з аналогічним процесом отримано R. Serrano [118].

G. Da Prato, J. Zabczyk [62] вивчали стохастичні еволюційні рівняння в нескінченновимірних просторах з вінерівським процесом. Довели теореми існування та єдиності різних видів розв'язків (сильного, м'якого та слабкого) таких рівнянь. Крім того, дослідили неперервну залежність розв'язків від початкових даних.

Відмітимо також деякі результати щодо неперервності. I. Gyöngy [72] довів неперервність траєкторій слабкого розв'язку параболічного рівняння з білим шумом, а V. Radchenko, M. Zähle [115] — м'якого розв'язку рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою на фракталах. Неперервність траєкторій розв'язків диференціальних рівнянь в гільбертовому просторі з вінерівським процесом отримав P.-L. Chow [52].

Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних з процесом Леві, як диференціальні рівняння в гільбертовому просторі, розглянуто в роботі S. Peszat, J. Zabczyk [103]. Зокрема, для параболічних та хвильових рівнянь доведено теореми існування та єдиності, а для випадку вінерівського процесу показано неперервність траєкторій. E. Hausenblas [73] та C. I. Prévôt [108] досліджували диференціальне рівняння в гільбертовому просторі з пуассонівською стохастичною мірою. Доведено, що існує єдиний м'який розв'язок, який є ліпшицевим ([108]) та càdlàg процесом ([73]).

Існування та єдиність розв'язків задач Коші для параболічних рівнянь з дробовим броунівським рухом досліджували R. Balan, C. Tudor [45], A. Boudaoui, T. Caraballo, A. Oauhab [48], B. Oksendal, T. Zhang [101]. R. Balan і C. Tudor також дали представлення k-го моменту розв'язку рівняння теплопровідності, а B. Oksendal, T. Zhang навели умови, за яких розв'язки лінійного та квазілінійного рівнянь теплопровідності з мультипараметричним дробовим броунівським рухом є неперервними.

Хвильові рівняння з гаусівськими процесами розглядали V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro [46], A. Millet, P.-L. Morien [94], L. Quer-Sardanyons, S. Tindel [111]. Зокрема, у своїй роботі V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro показали, що хвильове рівняння з вінерівським процесом має м'який розв'язок, який неперервно залежить від даних. Для рівняння з процесом, що є білим шумом за часовою змінною та корельованим за двовимірною просторовою змінною, в [94] доведено гельдеровість розв'язку з показником, що залежить від даних задачі, але не перевищує $1/2$. У випадку, коли стохастичний вплив заданий двопараметричним дробовим броунівським рухом з параметрами $H_1, H_2 \in (1/2, 1)$, досліджено умови існування і єдиності розв'язку, та доведено, що цей розв'язок є неперервним за Гельдером з показниками $\eta < H_1$ та $\hat{\eta} < H_2$ за часовою та просторовою змінними відповідно (див. [111]).

R. C. Dalang та M. Sanz-Solé вивчали рівняння в частинних похідних з мартингальними мірами. Для хвильового рівняння в тривимірному просторі в

[59] доведено, що існує м'який розв'язок, неперервний за Гельдером за сукупністю змінних з показником, що залежить від даних задачі (зокрема, не перевищує показники гельдеровості функцій, які визначають значення розв'язку в початковий момент часу). Схожий результат отримано в [60] при дослідженні регулярності за часовою змінною розв'язку рівняння, що містить частинні похідні другого порядку за часом. В роботі M. Sanz-Solé, A. Süss [117] показано, що розв'язки стохастичних хвильового рівняння та рівняння теплопровідності з мартингальною мірою мають абсолютно неперервні розподіли, та щільності розподілів належать простору Бєсова.

В даній дисертаційній роботі досліджується асимптотична поведінка м'яких розв'язків рівнянь теплопровідності. Відмітимо, що серед асимптотичних властивостей розв'язків найбільш дослідженою є експоненційна стабільність за часом (див., наприклад, P.-L. Chow [52], L. Gawarecki, V. Mandrekar [71] — рівняння з вінерівським процесом, C. Marinelli, M. Röckner [87] — з процесом Пуассона, T. Taniguchi [120] — з процесом Леві). В роботах V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach, O. A. Tymoshenko [49] та V. V. Buldygin, O. A. Tymoshenko [50] досліджувались умови, за яких розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь з вінерівським процесом є асимптотично еквівалентними розв'язкам звичайних диференціальних рівнянь при необмеженому зростанні часової змінної. В. М. Радченко [31] показав, що за певних умов м'який розв'язок рівняння теплопровідності зі стохастиною мірою прямує до нуля м. н., якщо значення часової координати прямує до нескінченності.

Оскільки в дисертаційній роботі при дослідженні стохастичних рівнянь використовується ітераційний процес побудови м'яких розв'язків, то зазначимо деякі відомі результати в цьому напрямку. R. C. Dalang [57] розглядав хвильове рівняння з гаусівським процесом (див. також [58]). Досліджуючи існування та єдиність розв'язку, R. C. Dalang застосував ітераційну схему Пікара та показав, що вона збігається в сенсі $L_p(\Omega), p \geq 1$. Аналогічний підхід використано в роботах R. C. Dalang [55] та R. C. Dalang, L. Quer-Sardanyons [61], для дослідження стохастичних рівнянь, що містять частинні похідні другого порядку, з гауссівським процесом. М'який розв'язок рівняння теплопровідності з білим шумом в R^{d+1} і з невипадковими початковими даними розглядався в роботі D. Khoshnevisan [84] (див. також [83]). Для доведення існування та єдиності розв'язку D. Khoshnevisan теж досліджував збіжність відповідної ітераційної схеми в сенсі $L_p(\Omega)$.

РОЗДІЛ 2
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Даний розділ містить стислий огляд тих відомостей з теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу і математичної фізики, які ми використовуємо в основному тексті роботи (розділи 3-5). Метою цього розділу є забезпечення змістовної частини дисертації зручними посиланнями на ключові означення, загальновідомі результати та допоміжні твердження.

2.1. Стохастичні міри: означення, властивості, приклади

Всюди в роботі рівність або нерівність випадкових величин (якщо не вказано інакше) — це їх рівність або нерівність м. н.

Нехай X — довільна множина, B — σ-алгебра підмножин X. Нехай також $L_0 = L_0(\Omega, \mathsf{F}, P)$ — простір класів еквівалентності дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P). Збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю.

Означення 2.1 Довільне σ-адитивне відображення $\mu : \mathsf{B} \to L_0$ називається *стохастичною мірою.*

Еквівалентним означенням стохастичної міри є наступне (див. [26, с. 14, означення]).

Означення 2.1*. *Стохастичною мірою* μ називається набір випадкових величин $\{\mu(A), A \in \mathsf{B}\}$ такий, що $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для $A \cap B = \varnothing$ та $\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$ для $A_n \downarrow \varnothing$.

Відмітимо, що, взагалі кажучи, ми не вимагаємо від міри μ невід'ємності або існування моментів. В [86] таке відображення μ називається загальною стохастичною мірою.

Означення 2.2 Набір випадкових величин $\{\xi_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ називається *обмеженим за ймовірністю,* якщо

$$\lim_{c\to\infty} \sup_\gamma P\{|\xi_\gamma| > c\} = 0.$$

Теорема 2.1 ([69, теорема], [119, теорема A]) *Для будь-якої стохастичної міри* μ *множина випадкових величин* $\{\mu(A), A \in \mathsf{B}\}$ *обмежена за ймовірністю.*

Наведемо приклади стохастичних мір.

Приклад 2.1 Нехай $X = [0, T] \subset \mathsf{R}$, B — σ-алгебра борельових підмножин $[0, T]$. $M(t), 0 \le t \le T$ — квадратично інтегровний мартингал. Тоді

$$\mu_M(A) = \int_0^T \mathbf{1}_A(t)\,dM(t), \quad A \in \mathsf{B}$$

є стохастичною мірою.

Більш того, побудована таким чином стохастична міра є σ-адитивним відображенням $\mu_M : \mathsf{B} \to L_2(\Omega, \mathsf{F}, P)$. Ця властивість випливає з ізометрії, що була встановлена при означенні інтеграла за мартингалом (див., наприклад, [42, теорема 11.3]).

Приклад 2.2 Нехай $X = [0, T] \subset \mathsf{R}$, B — σ-алгебра борельових підмножин $[0, T]$. $B^H(t), 0 \le t \le T$ — дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H > 1/2$. Тоді

$$\mu_{B^H}(A) = \int_0^T \mathbf{1}_A(t)\,dB^H(t), \quad A \in \mathsf{B}$$

є стохастичною мірою.

Стохастичний інтеграл від невипадкової функції за дробовим броунівським рухом побудовано в [89]. З нерівності (1.5) [89] випливає, що дана функція множин є неперервною за ймовірністю в $\varnothing$.

Приклад 2.3 Нехай $X = [0, T] \subset \mathsf{R}$, B — σ-алгебра борельових підмножин $[0, T]$. Розглядаємо $X(t), 0 \le t \le T$ — процес з незалежними приростами, траєкторії якого неперервні справа та мають границі зліва (наприклад, дійснозначний процес Леві). Для довільного $(a, b] \subset [0, T]$ покладемо

$$\mu_X((a, b]) = X(b) - X(a).$$

В [86, розділ 7] наведено в різних формах необхідні і достатні умови того, що дана функція множин μ_X продовжується до стохастичної міри на вказаній $\mathcal{B}$. Наведемо одну з них.

Позначимо

$$[\![x]\!] = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad |x| \le 1, \\ x/|x|, & \text{якщо} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Випадкова функція множин μ_X продовжується до стохастичної міри на $\mathcal{B}$ тоді і тільки тоді, коли виконується

$$\sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=T} \sum_{i=1}^{n} |E[\![X(t_i) - X(t_{i-1})]\!]| < \infty$$

(теорема 8.3.1 (і) та наслідок 8.2.1 [86]).

Означення 2.3 Ряд випадкових величин $\sum_n \xi_n$ збігається *безумовно за ймовірністю,* якщо для будь-якої взаємно однозначної перестановки індексів $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum_n \xi_{\sigma(n)}$ збігається за ймовірністю.

Приклад 2.4 Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борельових підмножин X, $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — послідовність випадкових величин така, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ збігається безумовно за ймовірністю. Нехай також m_n — знакозмінні дійсні міри на $\mathcal{B}$, та $\forall A \in \mathcal{B} : |m_n(A)| \le 1$. Тоді функція множин

$$\mu_\xi(A) = \sum_{n \ge 1} \xi_n m_n(A)$$

є стохастичною мірою на $\mathcal{B}$.

Збіжність за ймовірністю даного ряду випливає з [9, с. 238, наслідок 1] (див. також [86, теорема А.1.1]), а те, що так визначена μ_ξ є стохастичною мірою, — з [68, теорема 8.6].

Крім того, α-стійкі міри, визначені на σ-алгебрі, також є стохастичними мірами (див. [116, розділ 3]).

2.2. Означення та основні властивості інтеграла за стохастичною мірою

Всюди в даному підрозділі:

f, f_n — вимірні функції, що визначені на X та приймають значення в $\mathbb{R}$;

μ — стохастична міра, визначена на $(X, \mathcal{B})$;

$\|\xi\| = \sup\{\delta : \mathsf{P}\{|\xi| \geq \delta\} \geq \delta\}$ — квазінорма випадкової величини ξ в просторі $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

В роботі [122] дається побудова інтеграла від дійсної вимірної функції за мірою, що приймає значення в топологічному векторному просторі. Ми будемо використовувати означення стохастичного інтеграла, введене в [26], яке є переформулюванням означення 7.3.4 [122] на випадок стохастичної міри.

Для простої вимірної функції

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k \,{}_{A_k}(x),$$

де

$$A_k \in \mathcal{B}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, \quad \cup A_k = X,$$

покладемо

$$\int_X f^{(0)} d\mu = \sum_{k=1}^{l} c_k \mu(A_k).$$

Означення 2.4 Вимірна функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *інтегровною за стохастичною мірою* μ, якщо існує послідовність простих вимірних функцій

$f_n^{(0)}$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\left|g^{(0)}(x)\right| \le \left|f(x)-f_n^{(0)}(x)\right|} \left\| \int_X g^{(0)} d\mu \right\| = 0$$

(в супремумі беруться прості вимірні функції $g^{(0)}$).

Тоді покладемо

$$\int_X f\, d\mu = \mathrm{P}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n^{(0)} d\mu.$$

Для інтегровної f та $A \in \mathrm{B}$ покладемо

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f_A\, d\mu.$$

За [26, с. 20, теорема] (див. також [122, теорема 7.3.5]) дане означення є коректним, а довільна вимірна обмежена функція $f : X \to \mathrm{R}$ — інтегровна за μ. Так визначений інтеграл є лінійним за f та за μ. Більш того, справедлива наступна лема.

Лема 2.1 ([26, лема 1.1]) *Нехай функція f інтегровна за μ. Тоді функція множин*

$$\eta(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathrm{B},$$

є випадковою мірою.

Означення 2.5 Множина $A \in \mathrm{B}$ називається μ-*нехтовною,* якщо $\forall B \subset A,\ B \in \mathrm{B}:\ \mu(B) = 0$ м.н.

Означення 2.6 Послідовність випадкових величин ξ_n збігається до випадкової величини ξ μ-*майже всюди* (пишемо μ-м. в.), якщо множина $\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\}$ є μ-нехтовною.

Наступні твердження (теорема 2.2 та наслідок 2.1) є переформулюваннями теореми 7.3.6 [122] та наслідка 7.3.7 [122] для випадку стохастичної міри.

Теорема 2.2 ([26, с. 21, теорема]) *Нехай дано $f_n, n \ge 1$, всі інтегровні за μ,* *та вимірну* f, $f_n \to f$ μ*-м. в. Нехай*

$$\forall H_k \in \mathrm{B}, H_k \downarrow \varnothing: \quad \lim_{k\to\infty} \sup_n \sup_{\left|f^{(0)}(x)\right| \le \left|f_n(x)\right|} \left\| \int_{H_k} f^{(0)} d\mu \right\| = 0.$$

Тоді f *є інтегровною за* μ *та*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|g(x)| \le \left|f_n(x) - f(x)\right|} \left\| \int_X g\, d\mu \right\| = 0. \tag{2.1}$$

Наслідок 2.1 ([26, с. 20, наслідок], аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність) *Нехай функції* g *та* $f_n, n \ge 1$, *є інтегровними за* μ, $|f_n(x)| \le g(x)$, $f_n \to f$ μ*-м. в. Тоді* f *є інтегровною за* μ *та виконується (2.1).*

2.3. Оцінки стохастичного інтеграла

В даному підрозділі ми наведемо оцінки інтеграла за стохастичною мірою за допомогою норми простору Бєсова.

2.3.1 Простори Бєсова.

Розглянемо простір Бєсова $B_{22}^{\alpha}([b,c]), 1/2 < \alpha < 1, b, c \in \mathrm{R}$. Норма в даному функціональному просторі визначається наступним чином

$$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])} = \|g\|_{L_2([b,c])} + \left(\int_0^{c-b} \left(w_{2,[b,c]}(g,r) \right)^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2}, \tag{2.2}$$

де

$$\|g\|_{L_2([b,c])} = \left(\int_b^c |g(s)|^2 ds \right)^{1/2},$$

та

$$w_{2,[b,c]}(g,r) = \sup_{0 \le h \le r} \left(\int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Детальніше простори Бєсова розглянуто в роботах [2], [40], [121]. В [81] представлено дискретну характеризацію зазначених просторів на множині $[0,1]^d, d \in \mathrm{N}$. Надалі нам буде потрібне таке представлення на множині $[b,c]$.

Щоб мати можливість його використовувати, покажемо справедливість наступного співвідношення норм відповідних просторів.

Нехай $g(z,\tau): Z\times[b,c]\to \mathrm{R}$, Z — довільна множина. Тоді $g(z,b+(c-b)s): Z\times[0,1]\to \mathrm{R}$ та має місце співвідношення ([8, нерівність (4)])

$$\underline{C}_{c-b}\|g(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([b,c])} \le \|g(z,b+(c-b)\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,1])} \le \overline{C}_{c-b}\|g(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([b,c])},$$

$$\underline{C}_{c-b} = (c-b)^{-1/2}((c-b)^{\alpha}\wedge 1),\quad \overline{C}_{c-b} = (c-b)^{-1/2}((c-b)^{\alpha}\vee 1). \qquad (2.3)$$

Отримується вона наступним чином.

$$\|g(z,b+(c-b)\cdot)\|^2_{L_2([0,1])} = \int_0^1 |\, g(z,b+(c-b)s)\,|^2\, ds = \left| \begin{matrix} b+(c-b)s=\tau, \\ ds=\dfrac{d\tau}{c-b} \end{matrix} \right|$$

$$= (c-b)^{-1}\int_b^c |\, g(z,\tau)\,|^2\, d\tau = (c-b)^{-1}\|g(z,\cdot)\|^2_{L_2([b,c])}.$$

З іншого боку,

$$\int_0^{1-h} |\, g(z,b+(c-b)(s+h)) - g(z,b+(c-b)s)\,|^2\, ds = |\, b+(c-b)s=\tau\,|$$

$$= (c-b)^{-1}\int_b^{c-(c-b)h} |\, g(z,\tau+(c-b)h) - g(z,\tau)\,|^2\, d\tau$$

$$= (c-b)^{-1}\int_b^{c-\tilde{h}} |\, g(z,\tau+\tilde{h}) - g(z,\tau)\,|^2\, d\tau,$$

де $\tilde{h} = (c-b)h$ та $0\le \tilde{h} \le (c-b)r \le (c-b)$. Тоді

$$\int_0^1 w^2_{2,[0,1]}(g(z,b+(c-b)\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr$$

$$= (c-b)^{-1}\int_0^1 \left(\sup_{0\le\tilde{h}\le(c-b)r} \left(\int_b^{c-\tilde{h}} |\, g(z,\tau+\tilde{h}) - g(z,\tau)\,|^2\, d\tau \right)^{1/2} \right)^2 r^{-2\alpha-1}dr$$

$$\overset{(c-b)r=\tilde{r}}{=} (c-b)^{2\alpha-1}\int_0^{c-b} \left(\sup_{0\le\tilde{h}\le\tilde{r}} \left(\int_b^{c-\tilde{h}} |\, g(z,\tau+\tilde{h}) - g(z,\tau)\,|^2\, d\tau \right)^{1/2} \right)^2 \tilde{r}^{-2\alpha-1}d\tilde{r}$$

$$= (c-b)^{2\alpha-1}\int_0^{c-b} w^2_{2,[b,c]}(g(z,\cdot),\tilde{r})\tilde{r}^{-2\alpha-1}d\tilde{r}.$$

Таким чином, ми отримали

$$\left\| g(z, b + (c-b)\cdot) \right\|_{B^{\alpha}_{22}([0,1])} = (c-b)^{-1/2} \left\| g(z,\cdot) \right\|_{L_2([b,\,c])}$$

$$+ (c-b)^{\alpha - 1/2} \left(\int_0^{c-b} w^2_{2,[b,\,c]} (g(z,\cdot), \widetilde{r}) \widetilde{r}^{\,-2\alpha-1} d\widetilde{r} \right)^{1/2},$$

що й доводить справедливість (2.3).

Зауваження 2.1 *Якщо* $c - b = 1$, *то*

$$\left\| g(z, b + (c-b)\cdot) \right\|_{B^{\alpha}_{22}([0,1])} = \left\| g(z,\cdot) \right\|_{B^{\alpha}_{22}([b,\,c])}.$$

2.3.2. Оцінка інтеграла на множині $[0,t]$.

Покладемо для довільного $t \in [0, T]$

$$\Delta^{(t)}_{kn} = ((k-1)2^{-n} t, k 2^{-n} t], \quad n \ge 0, \quad 1 \le k \le 2^n.$$

Нехай функція $g(z,s) : Z \times [0, T] \to \mathsf{R}$ така, що $\forall z \in Z : g(z,\cdot)$ неперервна на $[0, T]$. Тут $Z = Z_0 \times [0, T], Z_0$ — довільна множина, а $z = (z_0, t)$. Позначимо

$$g_n(z,s) = g(z,0)_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \le k \le 2^n} g(z, (k-1)2^{-n} T \wedge t)_{\Delta^{(T)}_{kn}}(s).$$

Тоді за [32, Лема 3] випадкова функція

$$\eta(z) = \int_{(0,\,t]} g(z,s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

має таку модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z) = \int_{(0,\,t]} g_0(z,s) d\mu(s)$$

$$+ \sum_{n \ge 1} \left(\int_{(0,\,t]} g_n(z,s) d\mu(s) - \int_{(0,\,t]} g_{n-1}(z,s) d\mu(s) \right), \tag{2.4}$$

що для всіх $\varepsilon > 0, \omega \in \Omega, z \in Z$

$$\left| \widetilde{\eta}(z) \right| \le \left| g(z,0) \mu((0,t]) \right|$$

$$+ \left\{ \sum_{n \ge 1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| g(z, k2^{-n} T \wedge t) - g(z, (k-1)2^{-n} T \wedge t) \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_{n\ge 1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t]\right)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Для цієї модифікації за [81, Теорема 1.2] справедлива оцінка

$$|\tilde\eta(z)|\le|g(z,0)\mu((0,t])|+C\|g(z,T\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,1])}$$

$$\times\left\{\sum_{n\ge 1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t]\right)\right|^2\right\}^{1/2},$$

де $\alpha=\varepsilon/2+1/2$.

Враховуючи співвідношення (2.3) і те, що $\overline{C}_T=T^{-1/2}(T^{\alpha}\vee 1)=C$, матимемо

$$|\tilde\eta(z)|\le|g(z,0)\mu((0,t])|+C\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}$$

$$\times\left\{\sum_{n\ge 1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t]\right)\right|^2\right\}^{1/2}. \tag{2.5}$$

Відмітимо, що модифікація $\tilde\eta$ є спільною для всіх $z_0\in Z_0$, а константа C залежить від α,T та не залежить від z,ω.

Розглянемо тепер окремо норму $\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}$. Виразимо її за допомогою норми простору Бєсова на $[0,\,t]$. Отже,

$$\|g(z,\cdot\wedge t)\|^2_{L_2([0,T])}=\int_0^T|g(z,s\wedge t)|^2\,ds$$

$$=\int_0^t|g(z,s\wedge t)|^2\,ds+\int_t^T|g(z,t)|^2\,ds=\|g(z,\cdot)\|^2_{L_2([0,t])}+(T-t)|g(z,t)|^2,$$

а тому,

$$\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{L_2([0,T])}\le\|g(z,\cdot)\|_{L_2([0,t])}+|g(z,t)|\sqrt{T-t}.$$

Далі для модуля неперервності маємо

$$w_{2,[0,T]}(g(z,\cdot\wedge t),r) = \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{T-h}|g(z,(s+h)\wedge t)-g(z,s\wedge t)|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$=\sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{(t-h)\vee 0}|g(z,s+h)-g(z,s)|^2 ds+\int_{(t-h)\vee 0}^{t\wedge(T-h)}|g(z,t)-g(z,s)|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\le \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{(t-h)\vee 0}|g(z,s+h)-g(z,s)|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$+\sup_{0\le h\le r}\left(\int_{(t-h)\vee 0}^{t\wedge(T-h)}|g(z,t)-g(z,s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Нехай $C_t = 1+\{t<T\}$. Тоді

$$\frac{1}{C_t}\int_0^T w_{2,[0,T]}^2(g(z,\cdot\wedge t),r)r^{-2\alpha-1}dr \le \int_0^t w_{2,[0,t]}^2(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr$$

$$+\int_0^T r^{-2\alpha-1}\int_{(t-r)\vee 0}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2 dsdr$$

$$\le \int_0^t w_{2,[0,t]}^2(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr+\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2 dsdr$$

$$+\int_t^T r^{-2\alpha-1}\int_0^t|g(z,t)-g(z,s)|^2 dsdr = \int_0^t w_{2,[0,t]}^2(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr$$

$$+\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2 dsdr$$

$$+\frac{1}{2\alpha}(t^{-2\alpha}-T^{-2\alpha})\int_0^t|g(z,t)-g(z,s)|^2 ds$$

$$\le \int_0^t w_{2,[0,t]}^2(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr+\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2 dsdr$$

$$+t^{-2\alpha}\{t<T\}\int_0^t|g(z,t)-g(z,s)|^2 ds.$$

Таким чином, ми одержали наступне

$$\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}\le\|g(z,\cdot)\|_{L_2([0,t])}+|g(z,t)|\sqrt{T-t}$$

$$+C_t^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t w_{2,[0,t]}^2(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_t^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_t^{\frac{1}{2}}t^{-\alpha}\{t<T\}\left(\int_0^t|g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_t^{\frac{1}{2}}\|g(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])}+|g(z,t)|\sqrt{T-t}$$

$$+C_t^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)}|g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C_t^{\frac{1}{2}}t^{-\alpha}\{t<T\}\left(\int_0^t|g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

2.3.3. Оцінка інтеграла на множині $[j,\ j+1]$.

Надалі ми також будемо розглядати стохастичний інтеграл на множині $[j,\ j+1],\ j\in\mathbb{R}$. Згідно з зауваженням 2.1, у цьому випадку оцінка інтеграла за допомогою норми простору Бєсова має простіший вигляд.

Для довільного $j\in\mathbb{R}$ та $n\ge 0$ покладемо

$$d_{kn}^{[j]}=j+k2^{-n},\ 0\le k\le 2^n;\quad \Delta_{kn}^{[j]}=\left(d_{(k-1)n}^{[j]},d_{kn}^{[j]}\right],\ 1\le k\le 2^n.$$

Нехай Z — довільна множина. Розглянемо функції

$$g(z,x):Z\times[j,\ j+1]\to\mathbb{R}$$

та

$$g_n(z,x)=g(z,j)\mathbb{1}_{j}(x)+\sum_{1\le k\le 2^n}g\left(z,d_{(k-1)n}^{[j]}\right)\mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{[j]}}(x),\quad n\ge 0.$$

Лема 2.2 ([112, лема 3.2]) *Нехай* μ *визначена на борельовій* σ*-алгебрі підмножин* $\mathbb{R}$, Z *— довільна множина та* $g(z,x):Z\times[j,\ j+1]\to\mathbb{R}$ *— функція така, що для деякого* $1/2<\alpha<1$ *та для кожного* $z\in Z$ $g(z,\cdot)\in B_{22}^{\alpha}([j,\ j+1])$. *Тоді випадкова функція*

$$\eta(z)=\int_{[j,\ j+1]}g(z,x)\,d\mu(x),\quad z\in Z,$$

має таку модифікацію $\tilde{\eta}(z)$*, що для деякої константи* C *(незалежної від* z, j, ω*) та для довільного* $\omega \in \Omega$

$$
|\tilde{\eta}(z)| \le |g(z,j)\mu([j, j+1])|
$$

$$
+ C\|g(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,\, j+1])} \left\{ \sum_{n\ge1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta^{[j]}_{kn}\right)\right|^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.7}
$$

Відмітимо, що модифікація $\tilde{\eta}(z)$ має вигляд

$$
\tilde{\eta}(z) = \int_{[j,\, j+1]} g_0(z,x)\,d\mu(x)
$$

$$
+ \sum_{n\ge1} \left(\int_{[j,\, j+1]} g_n(z,x)\,d\mu(x) - \int_{[j,\, j+1]} g_{n-1}(z,x)\,d\mu(x) \right), \tag{2.8}
$$

та для неї справедлива проміжна оцінка (яку ми теж будемо використовувати)

$$
|\tilde{\eta}(z)| \le |g(z,j)\mu([j, j+1])|
$$

$$
+ \left\{ \sum_{n\ge1} \sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n\varepsilon} \left| g\left(z, d^{[j]}_{(k-1)n}\right) - g\left(z, d^{[j]}_{(k'-1)(n-1)}\right) \right|^2 \right\}^{1/2}
$$

$$
\times \left\{ \sum_{n\ge1} \sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\varepsilon} \left|\mu\left(\Delta^{[j]}_{kn}\right)\right|^2 \right\}^{1/2}, \tag{2.9}
$$

де номер k' такий, що $\Delta^{[j]}_{kn} \subset \Delta^{[j]}_{k'(n-1)}$.

Крім того, надалі ми будемо користуватися наступною лемою.

Лема 2.3 ([112, лема 3.1]) *Нехай* $f_l : X \to \mathbb{R}, l \ge 1,$ *— вимірні функції такі, що* $\bar{f}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} |f_l(x)|$ *— інтегровна за* μ*. Тоді*

$$
\sum_{l=1}^{\infty} \left(\int_X f_l\, d\mu \right)^2 < \infty \quad \text{м. н.}
$$

2.4. М’який розв’язок рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою на прямій

Нехай маємо наступне рівняння

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dt + f(t,x,u(t,x))dt + \sigma(t,x)d\mu(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.10}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, μ — стохастична міра, визначена на борельовій σ-алгебрі підмножин $\mathbb{R}$.

Розглядаємо м'який розв'язок рівняння (2.10), тобто

$$\begin{aligned} u(t,x) = & \int_{\mathbb{R}} p(t, x-y) u_0(y) dy \\ & + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t-s, x-y) f(s,y,u(s,y)) dy \\ & + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t-s, x-y) \sigma(s,y) ds. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Тут

$$p(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},$$

$u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція.

Нехай виконуються наступні припущення.

А1. Функція $u_0(y) = u_0(y,\omega) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_0(y,\omega)| \leq C(\omega)$.

А2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \leq C(\omega) |y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0) \geq 1/6.$$

А3. $f(s,y,v) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)| \leq C$.

А4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $y, v \in \mathbb{R}$:

$$|f(s,y_1,v_1) - f(s,y_2,v_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |v_1 - v_2|).$$

А5. $\sigma(s,y) : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)| \leq C$.

А6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером за $y \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(s,y_1) - \sigma(s,y_2)| \leq C |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}, \quad \beta(\sigma) > 1/2.$$

Покладемо $\tilde{\beta} = \min\{2\beta(\sigma), 3/2\}$.

Теорема 2.3 ([112, теорема]) *Нехай виконуються припущення* A1–A6.

1) Рівняння (2.11) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *інший розв'язок (2.11), тоді для всіх* t *та* x $u(t,x) = v(t,x)$ *м. н.*

2) Нехай функція $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau > 3/2$. *Тоді для довільних фіксованих* $t \in [0, T],\ K > 0,\ \gamma_1 < \dfrac{\tilde{\beta} - 1}{2\tilde{\beta}}$, *випадковий процес* $(t,x),\ x \in [-K, K]$, *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

3) Нехай функція $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau > 5/2$. *Тоді для довільних фіксованих* $\delta > 0, K > 0, \gamma_2 < \dfrac{\tilde{\beta} - 1}{6\tilde{\beta}}, \gamma_1 < \dfrac{\tilde{\beta} - 1}{2\tilde{\beta}}$, *випадкова функція* $u(t,x)$ *має таку модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$, *що для деякого* $L_{\tilde{u}} > 0$

$$|\tilde{u}(t_1, x_1) - \tilde{u}(t_2, x_2)| \le L_{\tilde{u}} \left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1} \right),$$

$$t \in [\delta, T], \quad x \in [-K, K].$$

2.5. Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння

Розглядаємо лінійне однорідне параболічне рівняння виду

$$Lu(t,\vec{x}) \equiv \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,\vec{x}) \frac{\partial^2 u(t,\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} b_i(t,\vec{x}) \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial x_i} + c(t,\vec{x}) u(t,\vec{x}) - \frac{\partial u(t,\vec{x})}{\partial t} = 0 \qquad (2.12)$$

в циліндрі

$$S = (0, T] \times \mathbb{R}^d = \left\{ (t, \vec{x}) : t \in (0, T],\ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \right\},\ d \ge 1.$$

Нехай також

$$\bar{S} = [0, T] \times \mathbb{R}^d = \left\{ (t, \vec{x}) : t \in [0, T],\ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Теорема 2.4 ([75, 4, теорема 1]) *Нехай всі коефіцієнти рівняння (2.12)* *обмежені та неперервні в* $\bar{S}$ *за сукупністю змінних* $t, \vec{x}$ *та задовольняють умову Гельдера за* $\vec{x}$*:*

$$\left.\begin{aligned} |a_{ij}(t,\vec{x}) - a_{ij}(t,\vec{x}^0)| &\le A\left|\vec{x} - \vec{x}^0\right|^{\alpha_0}, \\ |b_i(t,\vec{x}) - b_i(t,\vec{x}^0)| &\le A\left|\vec{x} - \vec{x}^0\right|^{\alpha_0}, \\ |c(t,\vec{x}) - c(t,\vec{x}^0)| &\le A\left|\vec{x} - \vec{x}^0\right|^{\alpha_0}, \end{aligned}\right\} \quad (i, j = \overline{1,d},\ \alpha_0 > 0)$$

Нехай, крім цього, коефіцієнти a_{ij} *в* $\bar{S}$ *задовольняють умову Гельдера за* t*:*

$$|a_{ij}(t,\vec{x}) - a_{ij}(t^0,\vec{x})| \le A\left|t - t^0\right|^{\alpha_0}.$$

Припустимо також, що існує така стала $\lambda_0 > 0$*, що*

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,\vec{x})\xi_i\xi_j \ge \lambda_0 |\xi|^2, \quad \forall (t,\vec{x}) \in \bar{S}, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

За цих припущень існує єдиний фундаментальний розв'язок $p(t,\vec{x};s,\vec{y})$ *рівняння (2.12) в* S*. Для* $p(t,\vec{x};s,\vec{y})$ *справедливі оцінки:*

$$|p(t,\vec{x};s,\vec{y})| \le M(t-s)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\lambda|\vec{x}-\vec{y}|^2}{t-s}}, \tag{2.13}$$

$$\left|\frac{\partial p(t,\vec{x};s,\vec{y})}{\partial x_i}\right| \le M(t-s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{\lambda|\vec{x}-y|^2}{t-s}}, \tag{2.14}$$

$$\left|\frac{\partial^2 p(t,\vec{x};s,\vec{y})}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le M(t-s)^{-\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{\lambda|\vec{x}-y|^2}{t-s}},$$

$$\left|\frac{\partial p(t,\vec{x};s,\vec{y})}{\partial t}\right| \le M(t-s)^{-\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{\lambda|\vec{x}-\vec{y}|^2}{t-s}}, \tag{2.15}$$

де M *та* λ *— додатні сталі. Функція* $p(t,\vec{x};s,\vec{y})$ *додатна всюди при* $t > s$*. Якщо в* $\bar{S}$ *існують обмежені та неперервні похідні* $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ $(i, j = \overline{1,d})$*, що задовольняють умову Гельдера за* $\vec{x}$*, то*

$p(t,\vec{x};s,\vec{y})$, *як функція змінних* $s,\vec{y}$, *при* $t>s$ *задовольняє рівняння*

$$L^* p \equiv \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 [a_{ij}(s,\vec{y})p]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial [b_i(s,\vec{y})p]}{\partial y_i} + c(s,\vec{y})p + \frac{\partial p}{\partial s} = 0,$$

спряжене до (2.12).

РОЗДІЛ 3
ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

3.1. Вступ

В даному розділі розглядаємо наступні дві задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут $(t,x) \in [0,T] \times \mathsf{R}$, $T > 0, a > 0$. У рівнянні (3.1) стохастична міра μ визначена на борельовій σ-алгебрі підмножин R, а в (3.2) — на борельовій σ-алгебрі підмножин $[0,T]$.

Символічні записи (3.1) та (3.12) будемо розуміти у м'якому сенсі (3.3) та (3.15) відповідно.

За певних умов щодо функцій f, σ, u_0, v_0 та міри μ, для кожної з даних задач доведено існування та єдиність м'якого розв'язку. Показано, що розв'язки задовольняють умови Гельдера за сукупністю змінних t, x. Крім того, встановлено неперервну залежність вказаних розв'язків від даних. Зазначені результати опубліковано в роботах [3, 5].

3.2. Припущення

Будемо розглядати наступні припущення.

A1.1. Функції $u_0(y) = u_0(y,\omega) : \mathsf{R} \times \Omega \to \mathsf{R}$, $v_0(y) = v_0(y,\omega) : \mathsf{R} \times \Omega \to \mathsf{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$: $\quad |u_0(y,\omega)| \le C(\omega), \quad |v_0(y,\omega)| \le C(\omega).$

A1.2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \leq C(\omega)|y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1.$$

A1.3. $f(s, y, v) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s, y, v)| \leq C$.

A1.4. $f(s, y, v)$ ліпшицева за $v \in \mathbb{R}$:

$$|f(s, y, v_1) - f(s, y, v_2)| \leq C|v_1 - v_2|.$$

A1.5. $\sigma(s, y) : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s, y)| \leq C$.

A1.6. $\sigma(s, y)$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s_1, y_1) - \sigma(s_2, y_2)| \leq C(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

A1.7. $|\mu((0, t])| \leq C(\omega), \quad \forall t \in (0, T]$.

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

3.3. Хвильове рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x), x \in \mathbb{R}$

3.3.1. Формулювання основного результату. Розглядаємо м’який розв’язок задачі (3.1), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t, x) = u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, що

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} S(t, x - y)u_0(y)dy\right) + \int_{\mathbb{R}} S(t, x - y)v_0(y)dy$$

$$+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} S(t - s, x - y) f(s, y, u(s, y))dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t S(t - s, x - y)\sigma(s, y)ds.$$

Тут

$$S(t, x) = \frac{1}{2a} \mathbf{1}_{\{y : |y| < at\}}(x)$$

– фундаментальний розв’язок хвильового рівняння (3.1). Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$ (див.

[26, глава 3]).

Отже, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)-u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds. \tag{3.3}$$

Теорема 3.5 *Нехай виконуються припущення* A1.1 – A1.6. *Тоді*

1) Рівняння (3.3) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (3.3), то для всіх* $t\in[0,T], x\in\mathbb{R}$ $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

2) Якщо функція $|y|^\tau$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$, *то для будь-яких фіксованих* $K>0$ *та* $\gamma_1,\gamma_2\in[0,\beta(u_0)]$, $\gamma_1<1-1/(2\beta(\sigma))$, $\gamma_2<1/2$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,x)$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x_1)-\bar{u}(t_2,x_2)|\le C(\omega)\left(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|x_1-x_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_i\in[0,T], |x_i|\le K, i=1,2.$$

3) Якщо функція $|y|^\tau$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$, *то випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію, що неперервно залежить від даних.*

3.3.2 Гельдеровість стохастичного інтеграла за x.

Лема 3.1. *Нехай для деякого* $\tau>1/2$ *функція* $|y|^\tau$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *та виконуються припущення* A1.5, A1.6. *Тоді для довільних фіксованих* $K>0$, $\lambda\in(0,1-1/(2\beta(\sigma)))$ *та* $t\in[0,T]$ *випадкова функція*

$$\varphi(x)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\quad |x|\le K,$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником λ.

Доведення. Зафіксуємо довільні $t \in [0, T]$, $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R} : |x| \le K\}$, $x_1 < x_2$. Нехай

$$q(z, y) = \mathbf{1}_{\{y:|y-x_2|<at\}}(y) \int_0^{t-|y-x_2|/a} \sigma(s, y) ds$$

$$-\mathbf{1}_{\{y:|y-x_1|<at\}}(y) \int_0^{t-|y-x_1|/a} \sigma(s, y) ds, \quad z = (x_1, x_2, t), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тоді за лемою 2.1 маємо

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left| \int_{\mathbb{R}} q(z, y) d\mu(y) \right| = \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{(j,\, j+1]} q(z, y) d\mu(y) \right|$$

$$\le \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{(j,\, j+1]} q(z, y) d\mu(y) \right|. \tag{3.4}$$

Розглянемо спочатку стохастичний інтеграл $\int_{(j,\, j+1]} q(z, y) d\mu(y)$. Для його модифікації (2.8) справедлива оцінка (2.9), тобто,

$$\left| \int_{(j,\, j+1]} q(z, y) d\mu(y) \right| \le |q(z, j)| |\mu((j, j+1])|$$

$$+ \left\{ \sum_{n \ge 1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| q\left(z, d_{(k-1)n}^{[j]}\right) - q\left(z, d_{(k'-1)(n-1)}^{[j]}\right) \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \sum_{n \ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta_{kn}^{[j]}\right) \right|^2 \right\}^{1/2}. \tag{3.5}$$

Нагадаємо, що $d_{kn}^{[j]} = j + k2^{-n}, 1 \le k \le 2^n$, $\Delta_{kn}^{[j]} = (d_{(k-1)n}^{[j]}, d_{kn}^{[j]}]$, та номер k' обирається таким чином, щоб $\Delta_{kn}^{[j]} \subset \Delta_{k'(n-1)}^{[j]}$. При цьому, можливі два випадки:

$$1)\ d_{(k-1)n}^{[j]} = d_{(k'-1)(n-1)}^{[j]}, \quad \text{або} \quad 2)\ d_{(k-1)n}^{[j]} = d_{(k'-1)(n-1)}^{[j]} + 2^{-n}.$$

Нас цікавить другий випадок, адже в першому — відповідний модуль різниці з нерівності (3.5) рівний нулю.

Отже, для фіксованих z, k, n, j позначимо

$$A_1 = \{y : |y - x_1| < at\}, \quad A_2 = \{y : |y - x_2| < at\}$$

та

$$d = d^{[j]}_{(k-1)n}, \quad d' = d^{[j]}_{(k'-1)(n-1)}.$$

Тоді $\forall y \in A_2 \setminus A_1$:

$$|\,at - |\,y - x_2\,||\le|\,y - x_1\,| - |\,y - x_2\,||\le|\,x_1 - x_2\,|$$

та $\forall y \in A_1 \setminus A_2$:

$$|\,at - |\,y - x_1\,||\le|\,y - x_2\,| - |\,y - x_1\,||\le|\,x_1 - x_2\,|.$$

Розглянемо $\forall y \in \mathrm{R}$ величину $|\,q(z,y)\,|$. Враховуючи припущення А1.5, маємо

$$|\,q(z,y)\,| = \Bigg|\mathbf{1}_{A_1\cap A_2}(y)\int_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds$$

$$+\mathbf{1}_{A_2\setminus A_1}(y)\int_0^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds - {}_{A_1\setminus A_2}(y)\int_0^{t-|y-x_1|/a}\sigma(s,y)ds\Bigg|$$

$$\le C\,|\,x_2 - x_1\,|\,\mathbf{1}_{A_1\cap A_2}(y) + C\,|\,at - |\,y - x_2\,||\,\mathbf{1}_{A_2\setminus A_1}(y)$$

$$+ C\,|\,at - |\,y - x_1\,||\,\mathbf{1}_{A_1\setminus A_2}(y) \le C\,|\,x_2 - x_1\,|. \qquad (3.6)$$

Оцінимо тепер $J = \left|q(z,d) - q(z,d')\right|$ за допомогою додатного степеня величини $|\,d - d'\,| = 2^{-n}$. Отже,

$$J \le \left|\mathbf{1}_{A_1}(d)\int_0^{t-|d-x_1|/a}\sigma(s,d)ds - \mathbf{1}_{A_1}(d')\int_0^{t-|d'-x_1|/a}\sigma(s,d')ds\right|$$

$$+\left|\mathbf{1}_{A_2}(d)\int_0^{t-|d-x_2|/a}\sigma(s,d)ds - \mathbf{1}_{A_2}(d')\int_0^{t-|d'-x_2|/a}\sigma(s,d')ds\right| = J_1 + J_2.$$

Розглянемо доданок J_1, причому вважаємо, що $|\,d - x_1\,|\le|\,d' - x_1\,|$ (в іншому випадку міркування аналогічні, з взаємною заміною d та d').

1) $d \in \overline{A_1} \Rightarrow d' \in \overline{A_1}$ та маємо $J_1 = 0$.

2) $d \in A_1, d' \in \overline{A_1}$. Тоді за припущенням А1.5

$$J_1 = \left|\int_0^{t-|d-x_1|/a}\sigma(s,d)ds\right| \le C\,|\,at - |\,d - x_1\,||$$

$$\le C\,||\,d' - x_1\,| - |\,d - x_1\,|| \le C\,|\,d - d'\,| = C2^{-n}.$$

3) $d, d' \in A_1$. Тоді за припущеннями A1.5, A1.6

$$J_1 = \left| \int_{t-|d'-x_1|/a}^{t-|d-x_1|/a} \sigma(s,d)ds + \int_0^{t-|d'-x_1|/a} (\sigma(s,d) - \sigma(s,d'))ds \right|$$

$$\leq C\,|\,d-d'\,| + C\,|\,at - |\,d'-x_1\,\|\cdot|\,d-d'\,|^{\beta(\sigma)} \leq C\,|\,d-d'\,|^{\beta(\sigma)} = C2^{-n\beta(\sigma)}.$$

Тобто, ми одержали, що $J_1 \leq C2^{-n\beta(\sigma)}$. Аналогічно оцінюється і величина J_2. Таким чином,

$$J \leq C2^{-n\beta(\sigma)}. \tag{3.7}$$

З іншого боку, за (3.21)

$$J \leq \left|q(z,d)\right| + |\,q(z,d')\,| \leq C\,|\,x_2 - x_1\,|\,. \tag{3.8}$$

Перемножимо нерівності (3.8) та (3.7) у степенях λ та $1-\lambda$ відповідно (де $\lambda \in (0,1)$ — довільне), одержимо

$$J \leq C\,|\,x_2 - x_1\,|^{\lambda}\;2^{-n\beta(\sigma)(1-\lambda)}.$$

Отже, враховуючи зроблені вище оцінки та співвідношення

$$|\,x_2 - x_1\,| \leq C\,|\,x_2 - x_1\,|^{\lambda}, \quad x_1, x_2 \in \{x \in \mathrm{R} : |\,x\,| \leq K\},$$

зі співвідношень (3.4), (3.5) і нерівності Коші–Шварца маємо

$$|\,\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\,| \leq C\,|\,x_2 - x_1\,| \sum_{j \in \mathrm{Z}} |\,\mu((j,\; j+1])\,|$$

$$+ C\,|\,x_2 - x_1\,|^{\lambda} \sum_{j \in \mathrm{Z}} \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} 2^{-2n\beta(\sigma)(1-\lambda)} \right\}^{1/2}$$

$$\left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{[j]}\right)\right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq C\,|\,x_2 - x_1\,|^{\lambda} \left\{ \sum_{j \in \mathrm{Z}} (|\,j\,|+1)^{2\tau}\,|\,\mu((j,\; j+1])\,|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j \in \mathrm{Z}} (|\,j\,|+1)^{-2\tau} \right\}^{1/2}$$

$$+C|x_2-x_1|^{\lambda}\left\{\sum_{n\ge1}2^{n(\varepsilon-2\beta(\sigma)(1-\lambda)+1)}\right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_{j\in\mathrm{Z}}\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{2\tau}2^{-n\varepsilon}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{[j]}\right)\right|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{j\in\mathrm{Z}}(|j|+1)^{-2\tau}\right\}^{1/2}.$$

Тут $\varepsilon>0$ — довільне. Для того, щоб сума $\sum_{n\ge1}2^{n(\varepsilon-2\beta(\sigma)(1-\lambda)+1)}$ була скінченною, потрібно, щоб виконувалось $\varepsilon-2\beta(\sigma)(1-\lambda)+1<0$, тобто, $\lambda<1-\dfrac{\varepsilon+1}{2\beta(\sigma)}$. Отже, для довільного $0<\lambda<1-\dfrac{1}{2\beta(\sigma)}$ знайдеться таке $\varepsilon>0$, що вказана сума буде скінченною.

Застосовуючи лему 2.3 до сум зі стохастичними мірами, які мають вигляд $\sum_{l\ge1}\left(\int_{\mathrm{R}}f_l d\mu\right)^2$, де

$$\{f_l(y),l\ge1\}=\{(|j|+1)^{\tau}\mathbf{1}_{(j,\,j+1]}(y),j\in\mathrm{Z}\}$$

та

$$\{f_l(y),l\ge1\}=\{2^{-n\varepsilon/2}(|j|+1)^{\tau}\mathbf{1}_{\Delta_{kn}^{[j]}}(y),j\in\mathrm{Z},n\ge1,1\le k\le 2^n\},$$

у першому та другому доданках відповідно, а $\sum_{l\ge1}f_l$ інтегровні за μ для деякого $\tau>1/2$, ми отримаємо твердження леми.

3.3.3. Гельдеровість стохастичного інтеграла за t.

Лема 3.2. *Нехай для деякого* $\tau>1/2$ *функція* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* R *та виконуються припущення* A1.5, A1.6. *Тоді для довільних фіксованих* $\lambda_*\in(0,1/2)$ *та* $x\in\mathrm{R}$ *випадкова функція*

$$\hat{\varphi}(t)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\quad t\in[0,T],$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником λ_*.

Доведення. Зафіксуємо довільні $x\in\mathrm{R},0\le t_1<t_2\le T$ та покладемо для

$z=(x,t_1,t_2)$:

$$\hat{q}(z,y)=\mathbf{1}_{\{y:|y-x|<at_2\}}(y)\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds$$

$$-\mathbf{1}_{\{y:|y-x|<at_1\}}(y)\int_0^{t_1-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\quad y\in\mathbb{R}.$$

Тоді за лемою 2.1 маємо

$$\left|\hat{\varphi}(t_2)-\hat{\varphi}(t_1)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}\hat{q}(z,y)d\mu(y)\right|\le\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int_{(j,\,j+1]}\hat{q}(z,y)d\mu(y)\right|.$$

Розглянемо спочатку стохастичний інтеграл $\int_{(j,\,j+1]}\hat{q}(z,y)d\mu(y)$. Для його модифікації (2.8) справедлива оцінка (2.9), тобто,

$$\left|\int_{(j,\,j+1]}\hat{q}(z,y)d\mu(y)\right|\le\left|\hat{q}(z,j)\right|\left|\mu((j,j+1])\right|$$

$$+\left\{\sum_{n\ge1}2^{n\varepsilon}\sum_{1\le k\le2^n}\left|\hat{q}\left(z,d^{[j]}_{(k-1)n}\right)-\hat{q}\left(z,d^{[j]}_{(k'-1)(n-1)}\right)\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le2^n}\left|\mu\left(\Delta^{[j]}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{1/2}$$

де використано ті самі позначення, що й у доведенні леми 3.1.

Також покладемо $B_1=\{y:|y-x|<at_1\},B_2=\{y:|y-x|<at_2\}$. Тоді,

$$\forall y\in B_2\setminus B_1:\quad |at_2-|y-x||<|at_2-at_1|=C|t_2-t_1|. \qquad (3.9)$$

Враховуючи припущення А1.5, маємо $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$|\hat{q}(z,y)|=\left|\mathbf{1}_{B_1}(y)\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds+\mathbf{1}_{B_2\setminus B_1}(y)\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds\right|$$

$$\le C|t_2-t_1|+C|at_2-|y-x||\le C|t_2-t_1|. \qquad (3.10)$$

Оцінимо тепер величину $\hat{J}=|\hat{q}(z,d)-\hat{q}(z,d')|$ за допомогою додатного степеня величини $|d-d'|=2^{-n}$, де d,d' ті ж самі, що й у доведенні попередньої леми. Маємо

$$\hat{J} = \Big| \mathbf{1}_{B_2}(d) \int_0^{t_2 - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds - \mathbf{1}_{B_1}(d) \int_0^{t_1 - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds$$

$$- \mathbf{1}_{B_2}(d') \int_0^{t_2 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds + \mathbf{1}_{B_1}(d') \int_0^{t_1 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \Big|.$$

В залежності від розташування d, d', принципово різними є 4 випадки.

1) $d \in \overline{B_2}, d' \in B_2$. Тоді

$$\mathbf{1}_{B_1}(d') | at_1 - | d' - x || < | at_2 - | d' - x || \le || d - x | - | d' - x || \le | d - d' |,$$

і тому, за припущенням А1.5

$$\hat{J} \le \left| \int_0^{t_2 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \right| + \left| \mathbf{1}_{B_1}(d') \int_0^{t_1 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \right|$$

$$\le C | at_2 - | d' - x || + C\mathbf{1}_{B_1}(d') | at_1 - | d' - x || < C | d - d' | = C2^{-n}.$$

Надалі вважаємо, що $| d - x | \le | d' - x |$. В іншому випадку міркування аналогічні, якщо поміняти місцями d та d'.

2) $d, d' \in B_2 \setminus B_1$. Тоді за припущеннями А1.5, А1.6

$$\hat{J} = \left| \int_0^{t_2 - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds - \int_0^{t_2 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \right|$$

$$= \left| \int_0^{t_2 - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds - \int_{|d'-x|/a - |d-x|/a}^{t_2 - |d-x|/a} \sigma\big(s + | d - x | /a - | d' - x | /a, d'\big)ds \right|$$

$$\le \left| \int_{|d'-x|/a - |d-x|/a}^{t_2 - |d-x|/a} \big(\sigma(s,d) - \sigma\big(s + | d - x | /a - | d' - x | /a, d'\big)\big)ds \right|$$

$$+ \left| \int_0^{|d'-x|/a - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds \right|$$

$$\le C | at_2 - | d - x || \left(|| d - x | - | d' - x ||^{\beta(\sigma)} + | d - d' |^{\beta(\sigma)} \right)$$

$$\le C | t_2 - t_1 | 2^{-n\beta(\sigma)},$$

де в останній нерівності ми врахували співвідношення (3.9).

3) $d \in B_2 \setminus B_1, d' \in B_1$. Тоді $at_1 < | d - x |$, і тому, за попереднім пунктом, враховуючи припущення А1.5 та А1.6, маємо

$$\hat{J} = \left| \int_0^{t_2 - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds - \int_0^{t_2 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds + \int_0^{t_1 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \right|$$

$$\le C\,|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)} + \left| \int_0^{t_1 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \right|$$

$$\le C\,|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)} + C\,|at_1 - |d'-x|| \le C\,|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)} + C\,|d - d'|$$

$$\le C\left(|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)} + 2^{-n}\right).$$

4) $d, d' \in B_1$. Тоді робимо заміну змінної $s \to s + |d'-x|/a - |d-x|/a$ в інтегралі з d' і одержимо за А1.6

$$\hat{J} = \left| \int_{t_1 - |d-x|/a}^{t_2 - |d-x|/a} \sigma(s,d)ds - \int_{t_1 - |d'-x|/a}^{t_2 - |d'-x|/a} \sigma(s,d')ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_1 - |d-x|/a}^{t_2 - |d-x|/a} \left(\sigma(s,d) - \sigma(s + |d'-x|/a - |d-x|/a, d')\right) ds \right|$$

$$\le C\,|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)}.$$

Таким чином, маємо

$$\hat{J} \le C\left(|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)} + 2^{-n}\right). \tag{3.11}$$

З іншого боку, за оцінкою (3.10)

$$\hat{J} \le |q(z,d)| + |q(z,d')| \le C\,|t_2 - t_1|. \tag{3.12}$$

Нехай $n_0 \ge 1$ таке, що $2^{-n_0 - 1} < |t_2 - t_1| \le 2^{-n_0}$.

Тоді для $n \le n_0$ перемножимо нерівності (3.12) та (3.11) у степенях λ_1 та $1 - \lambda_1$ відповідно (де $\lambda_1 \in (0,1)$ — довільне) і одержимо

$$\hat{J} \le C\,|t_2 - t_1|^{\lambda_1} \left(|t_2 - t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)} + 2^{-n}\right)^{(1-\lambda_1)}$$

$$\le C\,|t_2 - t_1|^{\lambda_1} \left(|t_2 - t_1|^{\beta(\sigma)}\,2^{-n} + 2^{-n}\right)^{(1-\lambda_1)} \le C\,|t_2 - t_1|^{\lambda_1}\,2^{-n(1-\lambda_1)}.$$

Для $n \ge n_0 + 1$ перемножимо нерівності (3.12) та (3.11) у степенях λ_2 та

$1-\lambda_2$ відповідно (де $\lambda_2 \in (0,1)$ — довільне), матимемо

$$\hat{J} \le C\,|t_2-t_1|^{\lambda_2}\left(|t_2-t_1|\,2^{-n\beta(\sigma)}+2^{-n}\right)^{1-\lambda_2}$$

$$\le C\,|t_2-t_1|^{\lambda_2+(1-\beta(\sigma))(1-\lambda_2)}\;2^{-n\beta(\sigma)(1-\lambda_2)}$$

$$\le C\,|t_2-t_1|^{1-\beta(\sigma)(1-\lambda_2)}\;2^{-n\beta(\sigma)(1-\lambda_2)}.$$

Враховуючи дані оцінки, можемо записати

$$\sum_{n\ge 1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\hat{q}\left(t, d^{[j]}_{(k-1)n}\right)-\hat{q}\left(t, d^{[j]}_{(k'-1)(n-1)}\right)\right|^2$$

$$\le C\,|t_2-t_1|^{2\lambda_1} \sum_{1\le n\le n_0} 2^{n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n2(1-\lambda_1)}$$

$$+C\,|t_2-t_1|^{2-2\beta(\sigma)(1-\lambda_2)} \sum_{n\ge n_0+1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n2\beta(\sigma)(1-\lambda_2)}$$

$$\le C\,|t_2-t_1|^{2\lambda_1} \sum_{n\ge 1} 2^{n\varepsilon} 2^{-n(2(1-\lambda_1)-1)}$$

$$+C\,|t_2-t_1|^{2-2\beta(\sigma)(1-\lambda_2)} \sum_{n\ge 1} 2^{n\varepsilon} 2^{-n(2\beta(\sigma)(1-\lambda_2)-1)}$$

$$\le C\,|t_2-t_1|^{2\lambda_1}+C\,|t_2-t_1|^{2-2\beta(\sigma)(1-\lambda_2)},$$

якщо $2(1-\lambda_1)-1-\varepsilon>0$ та $2\beta(\sigma)(1-\lambda_2)-1-\varepsilon>0$, тобто,

$$\lambda_1<(1-\varepsilon)/2,\quad 1-\beta(\sigma)(1-\lambda_2)<(1-\varepsilon)/2.$$

Таким чином, $\forall\,\lambda_1,\lambda_2$ таких, що $\lambda_1<1/2$ та $1-\beta(\sigma)(1-\lambda_2)<1/2$, знайдеться таке $\varepsilon>0$, що відповідні суми будуть скінченними.

Далі, аналогічними міркуваннями, що й при завершенні доведення леми 3.4, отримуємо шукану оцінку.

□

3.3.4. Доведення теореми 3.1.

1) Існування та єдиність розв'язку. Покажемо, що рівняння (3.3) має розв'язок. Для цього побудуємо його за допомогою наступного процесу ітерації. Покладемо $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n\geq 0$:

$$u^{(n+1)}(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)-u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(s,y,u^{(n)}(s,y))dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds.$$

Вимірність такого процесу випливає з вимірності випадкових функцій u_0,v_0, теореми Фубіні (для другого та третього доданків) та [22, лема 2] і представлення інтеграла за стохастичною мірою у вигляді границі за ймовірністю інтегралів від простих функцій. Надалі ми беремо $\forall n,t,x$ одну і ту ж модифікацію стохастичного інтеграла, і тому наступні оцінки виконуватимуться $\forall\omega\in\Omega$. За припущеннями А1.3, А1.4 маємо

$$\left|u^{(n+1)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|\leq\frac{C_1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u^{(n)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy;$$

$$\left|u^{(2)}(t,x)-u^{(1)}(t,x)\right|\leq C_2t^2.$$

Позначимо $\qquad U_n(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|u^{(n+1)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|,\quad n\geq 1.$

Використовуючи попередні оцінки, за індукцією одержимо

$$U_n(t)\leq C_1\int_0^t(t-s)U_{n-1}(s)ds\leq 2C_2(C_1)^{n-1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)$ збігається рівномірно на $[0,T]$. Тому, поклавши $u(t,x)=\mathrm{P}\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(t,x)$, отримаємо шуканий розв'язок.

Відмітимо, що траєкторії правої частини рівності (3.3) неперервні за t,x

для модифікації (2.8) стохастичного інтеграла, а отже, випадкова функція u неперервна за ймовірністю. Таким чином, ми можемо обрати неперервну модифікацію u та виключити ті ω, що (3.3) не виконується для деяких раціональних t, x. Тоді наступні співвідношення виконуватимуться для всіх ω з множини ймовірності 1.

Покажемо єдиність. Нехай маємо два розв'язки рівняння (3.3): $u(t,x)$ і $v(t,x)$. Тоді $\forall t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$

$$u(t,x) - v(t,x) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \left(f(s,y,u(s,y)) - f(s,y,v(s,y)) \right) dyds.$$

Застосувавши аналогічні проведеним вище міркування, матимемо, що $|u(t,x) - v(t,x)| = 0$.

2) Регулярність розв'язку. Спочатку доведемо гельдеровість $u(t,x)$ за змінною x. Зафіксуємо довільні $t \in [0,T], x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R} : |x| \le K\}$, $x_1 < x_2$. Застосувавши лему 3.4 та використавши припущення А1.1 – А1.6, матимемо для відповідної модифікації стохастичного інтеграла

$$|u(t,x_2) - u(t,x_1)| \le \frac{1}{2a}\left| \int_{x_1+at}^{x_2+at} v_0(y)dy - \int_{x_1-at}^{x_2-at} v_0(y)dy \right|$$

$$+\frac{1}{2}(|u_0(x_2+at) - u_0(x_1+at)| - |u_0(x_2-at) - u_0(x_1-at)|)$$

$$+\frac{1}{2a}\left| \int_0^t ds \left(\int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy - \int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy \right) \right|$$

$$+\frac{1}{2a}\left| \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \right|$$

$$\le C(\omega)|x_2 - x_1| + C(\omega)|x_2 - x_1|^{\beta(u_0)} + C|x_2 - x_1| + C(\omega)|x_2 - x_1|^{\lambda}$$

$$\le C(\omega)|x_2 - x_1|^{\gamma}.$$

Аналогічно доводиться виконання умови Гельдера за часовою змінною $t \in [\delta, T]$ для стохастичної функції $u(t,x)$.

Таким чином, ми отримали модифікацію $\bar{u}^{(x)}$, неперервну за Гельдером за змінною x при фіксованому t, та модифікацію $\bar{u}^{(t)}$, що задовільняє умову Гельдера за t при кожному фіксованому x. Виключимо всі $\omega \in \Omega$, для яких $\bar{u}^{(x)}(t,x) \neq \bar{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,x) \in [\delta, T] \times [-K, K]$. Для всіх інших ω покладемо $\bar{u} = \bar{u}^{(x)} = \bar{u}^{(t)}$ для раціональних (t,x) та довизначимо на всю множину $[\delta, T] \times [-K, K]$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\bar{u}(t,x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та x.

3) Неперервна залежність від даних.

Під неперервною залежністю розв'язку задачі (3.1) від даних мається на увазі наступне. Нехай маємо такі дві задачі Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial x^2} + f_i(t,x,u_i(t,x)) + \sigma_i(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u_i(0,x) = u_{0i}(x), \qquad \dfrac{\partial u_i(0,x)}{\partial t} = v_{0i}(x), \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{3.13}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathsf{R}$, а розв'язок розглядається у м'якому сенсі. Нехай функції $u_{0i}, v_{0i}, f_i, \sigma_i, i = 1,2$, задовольняють умови A1.1 – A1.6, причому сталі $C, C(\omega)$ та показники $\beta(u_0) = \beta(u_{0i}), \beta(\sigma) = \beta(\sigma_i)$ спільні для $i = 1,2$. Нехай також $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathsf{R}, \forall v \in \mathsf{R}$ виконується

$$|u_{01}(x) - u_{02}(x)| < \delta \quad \text{м.н.}, \quad |v_{01}(x) - v_{02}(x)| < \delta \quad \text{м.н.},$$
$$|\sigma_1(t,x) - \sigma_2(t,x)| < \delta, \quad |f_1(t,x) - f_2(t,x)| < \delta. \tag{3.14}$$

Тоді $\forall \rho \in (0,1/2)$ $\exists Q = Q(\omega) > 0$, що $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathsf{R}$

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| < C(\omega)\delta^{\rho} \text{ м. н.}$$

Покажемо це. Нехай довільні $t, x \in [0,T] \times \mathsf{R}$ — фіксовані. За доведеним вище, існує єдиний розв'язок кожної з задач (3.13), який можна побудувати за допомогою процесу ітерації. Нехай $u_i^{(n)}(t,x), n \geq 0$ — відповідне n-те наближення розв'язку $u_i(t,x)$ таким процесом. Тоді

$$|u_1(t,x)-u_2(t,x)|=\mathrm{P}\lim_{n\to\infty}\left|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)\right|.$$

Отже, враховуючи припущення A1.1 – A1.6 та умови (3.14), одержимо

$$\left|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)\right|$$

$$\le\delta\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)+\frac{C_3}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)\right|dyds$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\left(\sigma_1(s,y)-\sigma_2(s,y)\right)ds\right|.$$

Розглянемо окремо інтеграл за стохастичною мірою. Покладемо

$$G(y)=\mathbf{1}_{\{y:|y-x|<at\}}(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\left(\sigma_1(s,y)-\sigma_2(s,y)\right)ds,\quad y\in\mathbb{R}.$$

Тоді для модифікації (2.8) стохастичного інтеграла $\int_{(j,\,j+1]}G(y)d\mu(y)$ справедлива оцінка (2.9) і аналогічно до доведення лем 3.1, 3.2, отримуємо з A1.1 – A1.6 та (3.14) $\left|\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\left(\sigma_1(s,y)-\sigma_2(s,y)\right)ds\right|$

$$\le\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int_{(j,\,j+1]}G(y)d\mu(y)\right|\le C_0(\omega)\delta^{\rho}.$$

Таким чином, маємо за індукцією $\left|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)\right|$

$$\le\delta\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)+\delta^{\rho}\frac{C_0(\omega)}{2a}+\frac{C_3}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)\right|dyds$$

$$\le\delta^{\rho}C_4(\omega)\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)+\delta^{\rho}C_4(\omega)C_3\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\right)+\ldots$$

$$+\delta^{\rho}C_4(\omega)C_3^{n-1}\left(\frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$\le\delta^{\rho}C_4(\omega)e^{T\sqrt{C_3}}\left(1+C_3^{-1/2}+C_3^{-1}\right)=\delta^{\rho}C(\omega).$$

Перейшовши до границі при $n\to\infty$, одержимо шукану оцінку.

Теорема доведена.

3.4. Хвильове рівняння зі стохастичною мірою $\mu(t), t \in [0, T]$

3.4.1. Формулювання основного результату. Розглядаємо м'який розв'язок задачі (3.2), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathsf{R} \times \Omega \to \mathsf{R}$, що

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathsf{R}} S(t,x-y)u_0(y)dy\right) + \int_{\mathsf{R}} S(t,x-y)v_0(y)dy$$

$$+ \int_0^t ds \int_{\mathsf{R}} S(t-s,x-y) f(s,y,u(s,y))dy + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathsf{R}} S(t-s,x-y)\sigma(s,y)dy.$$

Тут $S(t,x) = \frac{1}{2a}\mathbf{1}_{\{|x|<at\}}$ – фундаментальний розв'язок хвильового рівняння (3.2). Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$ (див. [26, глава 3]).

Отже, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+at) - u_0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)dy. \qquad (3.15)$$

Теорема 3.2. *Нехай виконуються припущення* A1.1 – A1.6. *Тоді*

1) Рівняння (3.15) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (3.15), то для всіх* $t \in [0,T], x \in \mathsf{R}$ $u(t,x) = v(t,x)$ *м. н.*

2) Якщо також справджується A1.7, то для будь-яких фіксованих $\delta > 0, K > 0$ *та* $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \beta(u_0)]$ *таких, що* $\gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ *та* $\gamma_2 < 1/2$, *стохастична функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,x)$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x_1) - \bar{u}(t_2,x_2)| \le C(\omega)\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}\right),$$

$$t_i \in [\delta, T], |x_i| \le K, i = 1,2.$$

Нехай крім (3.2) маємо наступні задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} + f_j(t,x,u_j(t,x)) + \sigma_j(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u_j(0,x) = u_{0j}(x), \qquad \dfrac{\partial u_j(0,x)}{\partial t} = v_{0j}(x), \end{cases}$$

де $j \geq 1$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathsf{R}$, $T > 0, a > 0$, а розв'язки розглядаються у м'якому сенсі, тобто, $u_j(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_{0j}(x+at) - u_{0j}(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_{0j}(y)dy$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f_j(s,y,u(s,y))dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma_j(s,y)dy. \tag{3.16}$$

Для даних рівнянь розглядатимемо наступні припущення.

А1.1*. Функції $u_{0j}(y) = u_{0j}(y,\omega) : \mathsf{R} \times \Omega \to \mathsf{R}$, $v_{0j}(y) = v_{0j}(y,\omega) : \mathsf{R} \times \Omega \to \mathsf{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$:

$$\left|u_{0j}(y,\omega)\right| \leq C(\omega), \quad \left|v_{0j}(y,\omega)\right| \leq C(\omega).$$

А1.2*. $u_{0j}(y)$ неперервна за Гельдером:

$$\left|u_{0j}(y_1) - u_{0j}(y_2)\right| \leq C(\omega)\left|y_1 - y_2\right|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1.$$

А1.3*. $f_j(s,y,v) : [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $|f_j(s,y,v)| \leq C$.

А1.4*. $f_j(s,y,v)$ ліпшицева за $v \in \mathsf{R}$:

$$\left|f_j(s,y,v_1) - f_j(s,y,v_2)\right| \leq C\left|v_1 - v_2\right|.$$

А1.5*. $\sigma_j(s,y) : [0,T] \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $\left|\sigma_j(s,y)\right| \leq C$.

А1.6*. $\sigma_j(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$\left|\sigma_j(s_1,y_1) - \sigma_j(s_2,y_2)\right| \leq C(\left|s_1 - s_2\right|^{\beta(\sigma)} + \left|y_1 - y_2\right|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

Зауважимо, що тут константи C та $C(\omega)$ спільні для всіх $j \geq 1$.

Теорема 3.3. *Нехай для довільного* $j \geq 1$ *елементи рівнянь (3.15) та (3.16) задовольняють припущення* A1.1 – A1.7 *та* A1.1* – A1.6*, A1.7 *відповідно. Нехай також*

$$U_j = \sup_{y \in \mathrm{R}} | u_{0j}(y) - u_0(y) | \to 0, \quad j \to \infty \quad \text{м.н.},$$

$$V_j = \sup_{y \in \mathrm{R}} | v_{0j}(y) - v_0(y) | \to 0, \quad j \to \infty \quad \text{м.н.},$$

$$\sum\nolimits_j = \sup_{(s,y) \in [0,T] \times \mathrm{R}} | \sigma_j(s,y) - \sigma(s,y) | \to 0, \quad j \to \infty, \tag{3.17}$$
$$F_j = \sup_{(s,y,v) \in [0,T] \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}} | f_j(s,y,v) - f(s,y,v) | \to 0, \quad j \to \infty.$$

Тоді для довільного $\delta > 0$ *виконується*

$$| u_j(t,x) - u(t,x) | \to 0, \quad j \to \infty \quad \text{м.н.}, \quad \forall (t,x) \in [\delta, T] \times \mathrm{R}.$$

3.4.2. Гельдеровість стохастичного інтеграла за x.

Лема 3.3. *Нехай виконуються припущення* A1.5, A1.6. *Тоді для довільних фіксованих* $t \in [0,T], K > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ *випадкова функція*

$$\varphi(x) = \int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y) dy, \quad | x | \leq K$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_1$.

Доведення. Нехай довільні $t \in (0,T], x_1, x_2 \in \{x \in \mathrm{R} : | x | \leq K\}$ — фіксовані. Покладемо для $s \leq t$

$$q(z,s) = \int_{x_1-a(t-s)}^{x_1+a(t-s)} \sigma(s,y) dy - \int_{x_2-a(t-s)}^{x_2+a(t-s)} \sigma(s,y) dy, \quad z = (x_1, x_2, t).$$

Тоді для модифікації (2.4) випадкової функції

$$\eta(z) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_{[0,t]} q(z,s) d\mu(s)$$

використаємо оцінку (2.5), причому модифікацію будуємо на множині

$Z\times[0,t]=\mathrm{R}\times\mathrm{R}\times[0,t]\times[0,t]$. У такому випадку дана оцінка має вигляд

$$\left|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\right|\le|q(z,0)\mu((0,t])|$$

$$+C\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])}\times\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(t)}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де стала C залежить від t.

Оцінимо норму простора Бєсова функції $q(z,\cdot)$ на $[0,t]$. Спочатку для $s\le t$ розглянемо $q(z,s)$. Маємо

$$|q(z,s)|=\left|\int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)}\sigma(s,y)dy-\int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|$$

$$\overset{A5}{\le}C\,|x_1-x_2|. \tag{3.18}$$

Тепер оцінимо величину $|q(z,s+h)-q(z,s)|, s\in[0,t-h]$. З одного боку, за (3.18)

$$|q(z,s+h)-q(z,s)|\le|q(z,s+h)|+|q(z,s)|\le C\,|x_1-x_2|. \tag{3.19}$$

З іншого боку, хочемо також отримати оцінку даної величини за допомогою степеня h. Отже,

$$|q(z,s+h)-q(z,s)|$$

$$=\left|\int_{x_1-a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy-\int_{x_1-a(t-s)}^{x_1-a(t-s-h)}\sigma(s,y)dy\right.$$

$$-\int_{x_1+a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s)}\sigma(s,y)dy-\int_{x_2-a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy$$

$$\left.+\int_{x_2-a(t-s)}^{x_2-a(t-s-h)}\sigma(s,y)dy+\int_{x_2+a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|$$

$$\le\left|\int_{x_1-a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right.$$

$$\left.-\int_{x_2-a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right|$$

$$+\left|-\int_{x_1-a(t-s)}^{x_1-a(t-s-h)}\sigma(s,y)dy+\int_{x_2-a(t-s)}^{x_2-a(t-s-h)}\sigma(s,y)dy\right|$$

$$+\left|-\int_{x_1+a(t-s-h)}^{x_1+a(t-s)}\sigma(s,y)dy+\int_{x_2+a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|=J_1+J_2+J_3.$$

В J_2 робимо заміну змінної $y\to y-x_2+x_1$ в інтегралі з x_1:

$$J_2=\left|\int_{x_2-a(t-s)}^{x_2-a(t-s-h)}(\sigma(s,y-(x_2-x_1))-\sigma(s,y))dy\right|\overset{A6}{\le} Ch\,|\,x_2-x_1\,|^{\beta(\sigma)}.$$

Аналогічно отримаємо, що $J_3\le Ch\,|\,x_1-x_2\,|^{\beta(\sigma)}$. Далі, так само, як і в (3.18)

$$J_1=\left|\int_{x_1-a(t-s-h)}^{x_2-a(t-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right.$$

$$\left.-\int_{x_1+a(t-s-h)}^{x_2+a(t-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right|\overset{A6}{\le} C\,|\,x_1-x_2\,|\,h^{\beta(\sigma)}.$$

Отже, враховуючи те, що $\beta(\sigma)\le 1$ та $h\le T, |\,x_2-x_1\,|\le 2K$, маємо

$|\,q(z,s+h)-q(z,s)\,|\le Ch\,|\,x_1-x_2\,|^{\beta(\sigma)}+C\,|\,x_1-x_2\,|\,h^{\beta(\sigma)}\le Ch^{\beta(\sigma)}\,|\,x_1-x_2\,|^{\beta(\sigma)}$.

Перемножимо цю нерівність, піднесену до степеня λ та (3.19), піднесену до степеня $1-\lambda$, для довільного $\lambda\in(0,1)$. Одержимо

$$\left(\int_0^t (w_{2,[0,t]}(g,r))^2\, r^{-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}$$

$$\le C\,|\,x_1-x_2\,|^{1-\lambda(1-\beta(\sigma))}\left(\int_0^t r^{2\lambda\beta(\sigma)-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}\le C\,|\,x_1-x_2\,|^{1-\lambda(1-\beta(\sigma))},$$

при $\beta(\sigma)\lambda>\alpha\Leftrightarrow\lambda>\dfrac{\alpha}{\beta(\sigma)}>\dfrac{1}{2\beta(\sigma)}$. Тоді для довільного

$$\tilde{\gamma}_1=1-\lambda(1-\beta(\sigma))<1-\frac{1}{2\beta(\sigma)}(1-\beta(\sigma))=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\beta(\sigma)}\in(1/2,1]$$

знайдеться відповідне α. Зауважимо, що $3/2-1/(2\beta(\sigma))\ge\beta(\sigma)$.

Крім того, з (3.18) маємо, що

$$|\,q(z,0)\,|\le C\,|\,x_1-x_2\,|,\quad \|q(z,\cdot)\|_{L_2([0,t])}\le C\,|\,x_1-x_2\,|.$$

Отже,

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|$$

$$\le C\,|x_1-x_2|^{\tilde\gamma_1}\left(|\mu((0,t])|+\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\le C(\omega)\,|x_1-x_2|^{\tilde\gamma_1},$$

де сума зі стохастичною мірою скінченна за лемою 2.3 ([112, Лема 3.1]), та $|\mu((0,t])|\le C(\omega)$ за теоремою 2.1.

Нагадаємо, що тут $C(\omega)$ залежить від значення змінної t. Проте, якщо додатково вимагати виконання припущення A1.7 та $\forall\delta>0$ розглядати стохастичний інтеграл для фіксованого $t\in[\delta,T]$, то отримаємо умову Гельдера зі сталою, що не залежить від t (аналогічно до випадку леми 3.4 нижче).

□

3.4.3. Гельдеровість стохастичного інтеграла за t.

Лема 3.4. *Нехай виконуються припущення* A1.5 – A1.7. *Тоді для довільних фіксованих* $x\in\mathbb{R}$, $\delta>0$ *та* $\tilde\gamma_2<1/2$ *випадкова функція*

$$\hat\varphi(t)=\int_{(0,t]}d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)\,dy,\quad t\in[\delta,T]$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником $\tilde\gamma_2$.

Доведення. Нехай $x\in\mathbb{R}$ фіксоване. Розглянемо модифікацію (2.4) випадкової функції

$$\hat\varphi(t)=\int_{(0,t]}d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)\,dy$$

$$=\int_{(0,t]}\hat q(z,s)\,d\mu(s),\quad z=(x,t)\in\mathbb{R}\times[\delta,T].$$

Тоді для довільних фіксованих $\delta\le t_1<t_2\le T$ та $z_i=(x,t_i)$, $i=1,2$ маємо

$$\hat{\varphi}(t_2)-\hat{\varphi}(t_1) = \int_{[0,t_2]}\hat{q}_0(z_2,s)d\mu(s) - \int_{[0,t_1]}\hat{q}_0(z_1,s)d\mu(s)$$

$$+\sum_{n\geq 1}\left(\int_{[0,t_2]}\hat{q}_n(z_2,s)d\mu(s) - \int_{[0,t_2]}\hat{q}_{n-1}(z_2,s)d\mu(s)\right)$$

$$-\sum_{n\geq 1}\left(\int_{[0,t_1]}\hat{q}_n(z_1,s)d\mu(s) - \int_{[0,t_1]}\hat{q}_{n-1}(z_1,s)d\mu(s)\right)$$

$$= \int_{[0,t_1]}(\hat{q}_0(z_2,s)-\hat{q}_0(z_1,s))d\mu(s)$$

$$+\sum_{n\geq 1}\left(\int_{[0,t_1]}\left(\hat{q}_n(z_2,s)-\hat{q}_n(z_1,s)\right)d\mu(s)\right.$$

$$\left.-\int_{[0,t_1]}\left(\hat{q}_{n-1}(z_2,s)-\hat{q}_{n-1}(z_1,s)\right)d\mu(s)\right)$$

$$+\int_{[t_1,t_2]}\hat{q}_0(z_2,s)d\mu(s)$$

$$+\sum_{n\geq 1}\left(\int_{[t_1,t_2]}\hat{q}_n(z_2,s)d\mu(s) - \int_{[t_1,t_2]}\hat{q}_{n-1}(z_2,s)d\mu(s)\right)$$

$$= I_{11}+I_{12}+I_{21}+I_{22} = I_1 + I_2.$$

Розглянемо спочатку доданок I_1. Для $s\in[0,t_1]$ та $\tilde{z}=(x,t_1,t_2)$ покладемо

$$Q(\tilde{z},s)=\hat{q}(z_2,s)-\hat{q}(z_1,s)=\int_{x-a(t_2-s)}^{x+a(t_2-s)}\sigma(s,y)dy-\int_{x-a(t_1-s)}^{x+a(t_1-s)}\sigma(s,y)dy.$$

Тоді аналогічно до (2.5) можемо записати

$$|I_1|\leq|Q(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])|$$

$$+C\|Q(\tilde{z},\cdot\wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}\times\left\{\sum_{n\geq 1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\leq k\leq 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t_1]\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

$$\leq C(\omega)\left(|Q(\tilde{z},0)|+\|Q(\tilde{z},\cdot\wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}\right),$$

де константа $C(\omega)$ не залежить від t_1, а остання нерівність отримується з використанням A1.7 наступним чином.

Позначимо через k_{n1} такий номер, що $t_1\in((k_{n1}-1)2^{-n}T,k_{n1}2^{-n}T]$. Маємо

$$\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t_1]\right)\right|^2=\sum_{1\le k\le k_{n1}-1}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2+\left|\mu\left(\Delta_{k_{n1}}^{(T)}\cap(0,t_1]\right)\right|^2$$

$$\le\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2+C(\omega),$$

а отже,

$$\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t_1]\right)\right|^2$$

$$\le\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2+C(\omega)\le C(\omega),$$

де в останній нерівності ми використали те, що сума зі стохастичною мірою скінченна за [112, Лема 3.1].

Розглянемо тепер окремо доданки правої частини співвідношення (3.20). Оцінимо спочатку величину $Q(\tilde z,s), s\in(0,t_1]$. Використаємо обмеженість σ, матимемо

$$|Q(\tilde z,s)|=\left|\int_{x-a(t_2-s)}^{x-a(t_1-s)}\sigma(s,y)dy-\int_{x+a(t_1-s)}^{x+a(t_2-s)}\sigma(s,y)dy\right|\le C\,|t_2-t_1|, \qquad (3.21)$$

де стала C не залежить від t_1,t_2. Тоді одержимо для $s\in[0,t_1-h], h\in[0,t_1]$

$$|Q(\tilde z,s+h)-Q(\tilde z,s)|\le C\,|t_2-t_1|. \qquad (3.22)$$

Оцінимо тепер величину $|Q(\tilde z,s+h)-Q(\tilde z,s)|$ за допомогою степеня h. Маємо

$$|Q(\tilde z,s+h)-Q(\tilde z,s)|$$

$$\le\left|\int_{x-a(t_2-s-h)}^{x+a(t_2-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right.$$

$$\left.-\int_{x-a(t_1-s-h)}^{x+a(t_1-s-h)}\left(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\right)dy\right|$$

$$+\left|\int_{x-a(t_1-s)}^{x-a(t_1-s-h)}\sigma(s,y)dy-\int_{x-a(t_2-s)}^{x-a(t_2-s-h)}\sigma(s,y)dy\right|$$

$$+\left|\int_{x+a(t_1-s-h)}^{x+a(t_1-s)}\sigma(s,y)dy-\int_{x+a(t_2-s-h)}^{x+a(t_2-s)}\sigma(s,y)dy\right|=F_1+F_2+F_3.$$

Для оцінки F_2 робимо заміну змінної в інтегралі з t_2: $y\to y-a(t_2-t_1)$. Тоді

$$F_2=\left|\int_{x-a(t_1-s)}^{x-a(t_1-s-h)}\left(\sigma(s,y)-\sigma(s,y-a(t_2-t_1))\right)dy\right|\overset{A6}{\leq} Ch\,|\,t_2-t_1\,|^{\beta(\sigma)}.$$

Аналогічним чином приходимо до оцінки

$$F_3\leq Ch\,|\,t_2-t_1\,|^{\beta(\sigma)}.$$

Далі маємо

$$F_1=\left|\int_{x-a(t_2-s-h)}^{x-a(t_1-s-h)}(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))dy\right.$$

$$\left.+\int_{x+a(t_1-s-h)}^{x+a(t_2-s-h)}(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y))dy\right|$$

$$\overset{A6}{\leq} Ch^{\beta(\sigma)}\,|\,t_2-t_1\,|.$$

Тобто, оскільки $\beta(\sigma)\leq 1, h\leq T$ та $|\,t_2-t_1\,|\leq T$, то

$$|\,Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)\,|\leq Ch^{\beta(\sigma)}\,|\,t_2-t_1\,|^{\beta(\sigma)}.$$

Тоді, враховуючи (3.22), для довільного $\lambda_*\in(0,1)$

$$|\,Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)\,|\leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\lambda_*(1-\beta(\sigma))}\;h^{\lambda_*\beta(\sigma)}, \tag{3.23}$$

та приходимо до співвідношення

$$\left(\int_0^{t_1}(w_{2,[0,t_1]}(Q(\tilde{z},\cdot),r))^2\,r^{-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}$$

$$\leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\lambda_*(1-\beta(\sigma))}\left(\int_0^{t_1}r^{2\lambda_*\beta(\sigma)-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}\leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\lambda_*(1-\beta(\sigma))},$$

при такому $\alpha \in (1/2,1)$, що $\lambda_* \beta(\sigma) > \alpha \Leftrightarrow \lambda_* > \dfrac{\alpha}{\beta(\sigma)} > \dfrac{1}{2\beta(\sigma)}$ $\Leftrightarrow 1-\lambda_*(1-\beta(\sigma)) < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$.

Отже, беручи до уваги (3.21), ми отримали, що для довільного $\widetilde{\gamma}_2 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ існує таке $\alpha \in (1/2,1)$, що виконується

$$\|Q(\widetilde{z},\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t_1])} \le \|Q(\widetilde{z},\cdot)\|_{L_2([0,t_1])} + C|t_2-t_1|^{\widetilde{\gamma}_2} \le C|t_2-t_1|^{\widetilde{\gamma}_2}.$$

Крім того, з (3.22) маємо

$$\int_0^{t_1} |Q(\widetilde{z},t_1) - Q(\widetilde{z},s)|^2 ds = \int_0^{t_1} |Q(\widetilde{z},s+(t_1-s)) - Q(\widetilde{z},s)|^2 ds \le C|t_2-t_1|^2,$$

та з (3.23)

$$\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1\wedge(T-r)} |Q(\widetilde{z},t_1) - Q(\widetilde{z},s)|^2 dsdr$$

$$\le C|t_2-t_1|^{2-2\lambda_*(1-\beta(\sigma))} \int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1} (t_1-s)^{2\lambda_*\beta(\sigma)} dsdr$$

$$\le C|t_2-t_1|^{2-2\lambda_*(1-\beta(\sigma))} \int_0^{t_1} r^{2\lambda_*\beta(\sigma)-2\alpha} dsdr \le C|t_2-t_1|^{2-2\lambda_*(1-\beta(\sigma))}.$$

Враховуючи те, що $C_{t_1} \le 2$ та $t_1^{-\alpha} \le \delta^{-\alpha}$, та підставивши отримані оцінки в (2.6) і в (3.20), одержимо

$$|I_1| \le C(\omega)|t_2-t_1|^{\widetilde{\gamma}_2}.$$

Тепер розглянемо величину I_2. Покладемо

$$\widetilde{q}_n(z_2,s) = \sum_{1\le k\le 2^n} \hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2) 1_{\Delta_{kn}^{(T)}}(s), \quad s\in[0,T].$$

Тоді за [86, Твердження 7.1.1] виконується

$$I_2 = \mathrm{Plim}_{n\to\infty} \int_{(t_1,t_2]} \widetilde{q}_n(z_2,s)d\mu(s), \quad \forall x,t_1,t_2.$$

Отже, випадкова функція

$$\int_{(t_1,t_2]} \widetilde{q}_0(z_2,s)d\mu(s) + \sum_{n\ge 1}\left(\int_{(t_1,t_2]} \widetilde{q}_n(z_2,s)d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \widetilde{q}_{n-1}(z_2,s)d\mu(s)\right)$$

є модифікацією для I_2, яку ми знову позначимо I_2. Тоді, аналогічно до (2.5) одержимо

$$|I_2| \le |\hat{q}(z_2,t_1)\mu((t_1,t_2])|$$
$$+\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n\varepsilon_0}\,|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2).\right.$$
$$\left.-\hat{q}(z_2,(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1)\wedge t_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\varepsilon_0}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де k' таке, що $\Delta_{kn}^{(T)}\subset\Delta_{k'(n-1)}^{(T)}$, та $\varepsilon_0>0$ — довільне.

Маємо

$$|\hat{q}(z_2,v)| = \left|\int_{x-a(t_2-v)}^{x+a(t_2-v)}\sigma(v,y)dy\right| \le C|t_2-v| \le C|t_2-t_1|,\quad v\in[t_1,t_2].$$

Далі,

$$\left|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)-\hat{q}(z_2,(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1)\wedge t_2)\right|$$
$$\le\left|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T+2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)-\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)\right|$$
$$\le C|t_2-t_1|, \tag{3.24}$$

де величина

$$\left|\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T+2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)-\hat{q}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)\right|$$

має вигляд $|\hat{q}(z_2,v+l)-\hat{q}(z_2,v)|$ для $v\in[t_1,t_2]$ і такого $l\in[0,2^{-n}T]$, що $v+l\in[t_1,t_2]$.

Таким чином,

$$|\hat{q}(z_2,v+l)-\hat{q}(z_2,v)|$$
$$=\left|\int_{x-a(t_2-v-l)}^{x+a(t_2-v-l)}\sigma(v+l,y)dy-\int_{x-a(t_2-v)}^{x+a(t_2-v)}\sigma(v,y)dy\right|$$

$$
=\left|\int_{x-a(t_2-v-l)}^{x+a(t_2-v-l)}(\sigma(v+l,y)-\sigma(v,y))dy\right.
$$

$$
\left.-\int_{x-a(t_2-v)}^{x-a(t_2-v-l)}\sigma(v,y)dy-\int_{x+a(t_2-v-l)}^{x+a(t_2-v)}\sigma(v,y)dy\right|
$$

$$
\overset{A5,A6}{\leq} C(t_2-v-l)l^{\beta(\sigma)}+Cl\leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\beta(\sigma)}\ l^{\beta(\sigma)}
$$

$$
\leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\beta(\sigma)}\ 2^{-n\beta(\sigma)},
$$

оскільки $l\leq|\,t_2-t_1\,|$, $l\leq 2^{-n}T$.

Тому, враховуючи (3.24), для $\lambda_0\in(0,1)$ маємо

$$
\left|\hat{q}(z_2,v+l)-\hat{q}(z_2,v)\right|\leq C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}\ 2^{-n\lambda_0\beta(\sigma)}.
$$

Застосовуючи отримані оцінки і такі ж міркування, як при обґрунтуванні (3.20), можемо записати

$$
|\,I_2\,|\leq C\,|\,t_2-t_1\,\|\,\mu((t_1,t_2])\,|+C\,|\,t_2-t_1\,|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}\left(\sum_{n\geq 1}2^{n(\varepsilon_0-2\lambda_0\beta(\sigma)+1)}\right)^{1/2}
$$

$$
\times\left(\sum_{n\geq 1}\sum_{1\leq k\leq 2^n}2^{-n\varepsilon_0}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\right)\right|^2\right)^{1/2}\leq C(\omega)\,|\,t_2-t_1\,|^{\tilde{\gamma}_2},
$$

при $\lambda_0\beta(\sigma)>1/2$ і відповідному $\varepsilon_0>0$. Тут показник $\tilde{\gamma}_2<1-\lambda_0\beta(\sigma)<1/2$. Відмітимо, що константа $C(\omega)$ не залежить від t_1,t_2.

Тобто, остаточно ми одержали для відповідної модифікації, що

$$
|\,\hat{\varphi}(t_2)-\hat{\varphi}(t_1)\,|\leq|\,I_1\,|+|\,I_2\,|\leq C(\omega)\,|\,t_2-t_1\,|^{\tilde{\gamma}_2}\ .
$$

□

3.4.4. Доведення теореми 3.2.

1) *Існування та єдиність розв’язку*. Доведення існування та єдиності розв’язку повторює доведення відповідного пункту теореми з [3], з

використанням ітераційного процесу, для якого $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n>0$

$$u^{(n+1)}(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)-u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(s,y,u^{(n)}(s,y))dy+\frac{1}{2a}\int_{[0,t]}d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy.$$

Розв'язок будуємо у вигляді рівномірної границі $u^{(n)}(t,x)$ при $n\to\infty$.

Зауважимо, що даний розв'язок має неперервну модифікацію на множині $[\delta,T]\times[-K,K]$. Ця властивість обґрунтована для розв'язку рівняння теплопровідності в [112, стор.247]. Аналогічні міркування справедливі і у нашому випадку.

2) *Гельдеровість*. Спочатку покажемо гельдеровість м'якого розв'язку задачі (3.15) за просторовою змінною.

Нехай довільні $t\in[\delta,T], x_1,x_2\in\{x\in\mathbb{R},|x|\le K\}$ — фіксовані. Тоді за припущеннями А1.1 – А1.7 та лемою 3.3 маємо

$$|u(t,x_1)-u(t,x_2)|$$

$$\le\frac{1}{2a}\left|\int_{x_1-at}^{x_2-at}v_0(y)dy-\int_{x_1+at}^{x_2+at}v_0(y)dy\right|+C(\omega)|x_1-x_2|^{\beta(u_0)}$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_0^t ds\int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy-\int_0^t ds\int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy\right|$$

$$+C(\omega)|x_1-x_2|^{\tilde{\gamma}_1}\le C(\omega)|x_1-x_2|^{\gamma_1}.$$

Аналогічно доводиться виконання умови Гельдера за часовою змінною $t\in[\delta,T]$ для стохастичної функції $u(t,x)$.

Таким чином, ми отримали модифікацію $\bar{u}^{(x)}$, неперервну за Гельдером за змінною x при фіксованому t, та модифікацію $\bar{u}^{(t)}$, що задовольняє умову Гельдера за t при кожному фіксованому x. Виключимо всі $\omega\in\Omega$, для яких $\bar{u}^{(x)}(t,x)\ne\bar{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,x)\in[\delta,T]\times\mathbb{R}$. Для всіх інших ω покладемо $\bar{u}=\bar{u}^{(x)}=\bar{u}^{(t)}$ для раціональних (t,x) та довизначимо на всю множину $[\delta,T]\times\mathsf{R}$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\bar{u}(t,x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та x. Теорема доведена.

3.4.5. Доведення теореми 3.3.

За теоремою 3.2, кожна із задач (3.15) та (3.16) має єдиний розв'язок, який можна побудувати за допомогою процесу ітерації. Нехай $u^{(n)}(t,x)$ та $u_j^{(n)}(t,x)$, $n\ge 0$ — відповідні n-ті наближення розв'язків $u(t,x)$ та $u_j(t,x)$ таким процесом. Зафіксуємо довільні $(t,x)\in(0,T]\times\mathsf{R}$ та $j\ge 1$. Тоді, за A1.4 маємо для $n\ge 1$:

$$\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|\le\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|v_{0j}(y)-v_0(y)|dy$$

$$+\frac{1}{2}(|u_{0j}(x+at)-u_0(x+at)|+|u_{0j}(x-at)-u_0(x-at)|)$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|f_j(s,y,u_j^{(n-1)}(s,y))-f(s,y,u_j^{(n-1)}(s,y))\right|dy$$

$$+C\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u_j^{(n-1)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy+\frac{1}{2a}\left|\int_{[0,t]}G_j(s)d\mu(s)\right|$$

$$\le V_j t+U_j+F_j\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2a}\left|\int_{[0,t]}G_j(s)d\mu(s)\right|$$

$$+C\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u_j^{(n-1)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy, \tag{3.25}$$

де $G_j(s)=G_j(t,x,s)=\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}(\sigma_j(s,y)-\sigma(s,y))dy$.

Розглянемо окремо інтеграл зі стохастичною мірою. Для модифікації (2.4) випадкової функції $\int_{[0,t]}G_j(s)d\mu(s)$ справджується нерівність (2.5). Оцінимо складові її правої частини.

Для довільного $s\in[0,t]$

$$|G_j(s)|=\left|\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}(\sigma_j(s,y)-\sigma(s,y))dy\right|\le 2a(t-s)\Sigma_j\le C\Sigma_j. \tag{3.26}$$

Тоді для $s, s+h \in [0,t]$

$$|G_j(s+h) - G_j(s)| \le C\Sigma_j. \qquad (3.27)$$

З іншого боку, маємо з А1.5 – А1.6 та А1.5* – А1.6*

$$|G_j(s+h) - G_j(s)| = \Big| \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} (\sigma_j(s+h,y) - \sigma_j(s,y))dy$$

$$- \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} (\sigma(s+h,y) - \sigma(s,y))dy - \int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s-h)} (\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y))dy$$

$$- \int_{x+a(t-s-h)}^{x+a(t-s)} (\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y))dy \Big| \le Ch^{\beta(\sigma)}.$$

Піднесемо дану нерівність до степеня $\tilde{\lambda} \in (0,1)$, а нерівність (3.27) — до степеня $1-\tilde{\lambda}$ та перемножимо їх. Одержимо

$$|G_j(s+h) - G_j(s)| < Ch^{\tilde{\lambda}\beta(\sigma)}\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}.$$

Тоді, враховуючи (3.41), можемо записати

$$\|G_j\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} = \|G_j\|_{L_2([0,t])} + \left(\int_0^t (w_{2,[0,t]}(G_j, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2}$$

$$\le C\Sigma_j + C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \left(\int_0^t r^{2\tilde{\lambda}\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \le C(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}),$$

для $\tilde{\lambda} > 1/(2\beta(\sigma))$ та відповідного α. При цьому, $1-\tilde{\lambda} < 1-1/(2\beta(\sigma))$.

Крім того,

$$\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1} \int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |G_j(t) - G_j(s)|^2 dsdr \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \left(\int_0^t r^{-2\alpha-1} \int_{t-r}^{t} (t-s)^{2\tilde{\lambda}\beta(\sigma)} dsdr \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}} \left(\int_0^t r^{2\tilde{\lambda}\beta(\sigma)-2\alpha} dr \right)^{\frac{1}{2}} \le C\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}};$$

та з (3.26) $$\left(\int_0^t |G_j(t) - G_j(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \le C\Sigma_j.$$

Підставимо отримані оцінки в (2.6). Беручи до уваги те, що $C_t \le 2$, одержимо

$$\left\|G_j\right\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])} \le C\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}\right)(1+t^{-\alpha}).$$

Такими ж міркуваннями, як і при обґрунтуванні (3.20), з урахуванням А1.7, зі співвідношення (2.5) приходимо до нерівності

$$\left|\int_{(0,t]} G_j(s)d\mu(s)\right| \le \left| G_j(0)\mu((0,t])\right|$$

$$+C\left\|G_j\right\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}\left\{\sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t])\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\le C\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}\right)\left(1+t^{-\alpha}\right)$$

$$\times\left(C(\omega)+\left\{\sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu(\Delta_{kn}^{(T)})\right|^2 + C(\omega)\right\}^{1/2}\right)$$

$$\le C(\omega)\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}\right)\left(1+t^{-\alpha}\right).$$

Оскільки $t \le T$, то з останньої оцінки та (3.25) маємо

$$\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right| \le \left(V_j T + U_j + F_j\frac{T^2}{2} + C(\omega)\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}\right)\right)\left(1+t^{-\alpha}\right)$$

$$+C\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u_j^{(n-1)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy. \qquad (3.28)$$

Доведемо, що $\forall n \ge 0$

$$\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right| \le S_j\left(t^{-\alpha} + \exp\{\tilde{C}t\}\left(1+\frac{\tilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right), \qquad (3.29)$$

де $S_j = V_j T + U_j + F_j\dfrac{T^2}{2} + C(\omega)\left(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}\right)$, $\tilde{C} = C2aT$, а C — стала зі співвідношення (3.28).

Для $n = 0$: $\left|u_j^{(0)}(t,x)-u^{(0)}(t,x)\right| = 0$ і потрібна нерівність задовольняється.

Припустимо, що (3.29) виконується. Покажемо, що дана оцінка справедлива для $n+1$.

Враховуючи (3.43), маємо

$$\left|u_j^{(n+1)}(t,x)-u^{(n+1)}(t,x)\right|$$

$$\leq S_j\left(1+t^{-\alpha}+C2aT\int_0^t\left(s^{-\alpha}+\exp\{\tilde{C}s\}\left(1+\frac{\tilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right)ds\right)$$

$$=S_j\left(1+t^{-\alpha}+\frac{\tilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\left(\exp\{\tilde{C}t\}-1\right)\left(1+\frac{\tilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),$$

що співпадає з потрібним виразом.

Отже, за методом математичної індукції ми довели виконання (3.29) $\forall n\geq 0$.

Тоді, $\forall\delta>0$ маємо

$$\left|u_j^{(n)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|$$

$$\leq S_j\left(\delta^{-\alpha}+\exp\{\overset{\prime\prime}{C}T\}\left(1+\frac{\overset{\prime\prime}{C}T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),\quad \forall(t,x)\in[\delta,T]\times\mathrm{R},$$

де S_j не залежить від n,t,x.

Перейдемо в нерівності (3.29) до границі спочатку при $n\to\infty$, а потім при $j\to\infty$. Враховуючи умову (3.17), одержимо, що

$$|u_j(t,x)-u(t,x)|\to 0,\quad j\to\infty\quad \text{м.н.},\quad \forall(t,x)\in[\delta,T]\times\mathrm{R}.$$

Теорема доведена.

3.5. Висновки

В даному розділі розглянуто дві задачі Коші, що відповідають хвильовим рівнянням зі стохастичними мірами. Для кожної із задач доведено існування та єдиність м’якого розв’язку, встановлено його неперервність за Гельдером та неперервну залежність від даних.

Зокрема, у випадку хвильового рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x)$ отримано показник гельдеровості за просторовою та часовою змінними $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \beta(u_0)], \gamma_1 < 1 - 1/(2\beta(\sigma))$, $\gamma_2 < 1/2$ відповідно. У випадку хвильового рівняння зі стохастичною мірою $\mu(t)$ отримано показники гельдеровості за просторовою та часовою змінними $\gamma_1 \in [0, \beta(u_0)], \gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ та $\gamma_2 \in [0, \beta(u_0)], \gamma_2 < 1/2$ відповідно.

Відмітимо, що для хвильового рівняння з процесом, що є білим шумом за часовою змінною та корельованим за двовимірною просторовою змінною, в [94] доведено гельдеровість розв’язку за сукупністю змінних з показником, що залежить від даних задачі, але не перевищує $1/2$. У випадку, коли стохастичний вплив заданий двопараметричним дробовим броунівським рухом з параметрами $H_1, H_2 \in (1/2, 1)$, доведено, що цей розв’язок є неперервним за Гельдером з показниками $\eta < H_1$ та $\hat{\eta} < H_2$ за часовою та просторовою змінними відповідно (див. [111]).

РОЗДІЛ 4
ЗАГАЛЬНЕ ПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ

4.1. Вступ

У даному розділі ми розглядаємо рівняння

$$\begin{cases} Lu(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))dt + \sigma(t,x)d\mu(x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

де $(t,x)\in[0,T]\times\mathrm{R}$, μ — стохастична міра, визначена на $\sigma-$алгебрі борельових множин з R, а оператор L має вигляд

$$Lu(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \tag{4.2}$$

де функції a, b, c визначено в циліндрі

$$\bar{S} = [0,T]\times\mathrm{R} = \{(t,x) : t\in[0,T],\ x\in\mathrm{R}\}.$$

За певних припущень щодо коефіцієнтів оператора L та функцій f,σ,u_0 ми досліджуємо м'який розв'язок рівняння (4.1), тобто, таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T]\times\mathrm{R}\times\Omega\to\mathrm{R}$, що $\forall(t,x)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t,x) = \int_{\mathrm{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds\int_{\mathrm{R}} p(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+\int_{\mathrm{R}} d\mu(y)\int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds. \tag{4.3}$$

Тут $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $Lu(t,x)=0$. Інтеграли від випадкових функцій по ds та dy беруться для кожного фіксованого ω.

Частковий випадок задачі (4.1), при

$$a(t,x) = a^2 \in (0,+\infty),\quad b(t,x) = c(t,x) = 0,$$

тобто, рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dt + f(t,x,u(t,x))dt + \sigma(t,x)d\mu(x), t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.4}$$

досліджено в [112]. В цій публікації доведено існування та єдиність м'якого розв'язку і встановлено неперервність за Гельдером його траєкторій за часовою та просторовою змінними. Наша мета полягає в поширенні цього результату на випадок загального параболічного рівняння та покращенні показників неперервності за Гельдером (див. [6]).

Також досліджується асимптотична поведінка м'якого розв'язку рівняння (4.4) (див. рівність (4.16)) при необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати (див. [7]).

4.2. Припущення

Надалі будемо розглядати наступні припущення.

A2.1. Функція $u_0(y) = u_0(y,\omega) : \mathsf{R} \times \Omega \to \mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $|u_0(y,\omega)| \le C(\omega)$.

A2.2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером за $y \in \mathsf{R}$, а саме,

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \le C(\omega)|y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0) \ge 1/2.$$

A2.3. $f(s,y,z) : [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $| f(s,y,z) | \le C$.

A2.4. $f(s,y,z)$ ліпшицева за $y \in \mathsf{R}$, $z \in \mathsf{R}$, тобто,

$$| f(s,y_1,z_1) - f(s,y_2,z_2)| \le C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

A2.5. Функція $\sigma(s,y) : [0,T] \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)| \le C$.

A2.6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером за $y \in \mathsf{R}$, тобто,

$$|\sigma(s,y_1) - \sigma(s,y_2)| \le C|y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}, \quad \beta(\sigma) > 1/2.$$

A2.7. $\sup_{s\in[0,T],z\in\mathrm{R}} | f(s,y,z)| \to 0, u_0(y) \to 0, \ |y| \to \infty.$

A2.8. Функція $|y|^{\tau}$ інтегровна на R за μ для деякого $\tau > 3/2$.

P. Фундаментальний розв'язок оператора L є однорідним за просторовими змінними:

$$p(t,x;s,y) = p(t,x-y;s,0).$$

L1. Функції $a(t,x), b(t,x), c(t,x)$ — неперервні та обмежені в $\overline{S}$ за сукупністю змінних t та x, і для деяких $\alpha_0 > 0, A > 0$ всюди в $\overline{S}$ виконуються нерівності

$$|a(t,x) - a(t^0,x^0)| \le A\left(\left|x-x^0\right|^{\alpha_0} + \left|t-t^0\right|^{\alpha_0}\right),$$

$$|b(t,x) - b(t,x^0)| \le A\left|x-x^0\right|^{\alpha_0},$$

$$|c(t,x) - c(t,x^0)| \le A\left|x-x^0\right|^{\alpha_0}.$$

L2. Оператор L — рівномірно параболічний в $\overline{S}$, тобто, існують такі додатні сталі λ_0, λ_1, що $\lambda_0 \le a(t,x) \le \lambda_1$ для всіх $(t,x) \in \overline{S}$.

Якщо виконуються припущення L1 та L2, то за теоремою 2.4, мають місце оцінки (2.13) — (2.15).

Тут і надалі за допомогою C та $C(\omega)$ позначаємо додатні константи, які можуть бути різними у різних формулах.

4.3. Гельдеровість стохастичного інтеграла за x

Лема 4.1. *Нехай* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* R *для деякого* $\tau > 1/2$ *та виконуються припущення* A2.5 – A2.6, P, L1, L2. *Тоді для будь-яких фіксованих* $t \in [0,T], K > 0$ *та* $\gamma_1 < 1/2$ *випадковий процес*

$$\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds, \quad |x| \le K,$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником γ_1.

Доведення. Покладемо для довільних фіксованих $t, x_1 \le x_2$

$$q(z,y) = \int_0^t p(t,x_1;s,y)\sigma(s,y)ds - \int_0^t p(t,x_2;s,y)\sigma(s,y)ds,$$

$$z = (t, x_1, x_2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тоді для модифікації (2.4) стохастичного інтеграла

$$\eta(z) = \int_{[j,\ j+1]} q(z,y)d\mu(y)$$

справедлива оцінка (2.5).

Оцінимо норму функції $q(z,\cdot)$ у просторі Бєсова на $[j,\ j+1]$. Для цього розглянемо величину

$$q(z, y+h) - q(z,y)$$

$$= \int_0^t \left(p(t,x_1;s,y) - p(t,x_2;s,y)\right)\left(\sigma(s,y+h) - \sigma(s,y)\right)ds$$

$$+ \int_0^t (p(t,x_1;s,y+h) - p(t,x_1;s,y)$$

$$- p(t,x_2;s,y+h) + p(t,x_2;s,y))\sigma(s,y+h)ds = I_1 + I_2.$$

Нам будуть потрібні наступні оцінки. Для довільного $b > 0$

$$\int_0^t \frac{1}{r} e^{-\frac{b}{r}} dr = \left|\frac{b}{r} = z\right| = \int_{b/t}^{\infty} \frac{1}{z} e^{-z} dz \le \mathbf{1}_{\{t>b\}} \int_{b/t}^{1} \frac{1}{z} dz + \int_1^{\infty} e^{-z} dz$$

$$= \mathbf{1}_{\{t>b\}} \ln\frac{t}{b} + e^{-1} \le \mathbf{1}_{\{t>b\}} \ln\frac{T}{b} + 1 \le \left|\ln\frac{T}{b}\right| + 1.$$

Також за (2.14)

$$|p(t,x_1;s,y) - p(t,x_2;s,y)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial x} dx\right| \le \frac{C}{t-s} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}} dx.$$

Використовуючи дані оцінки та А2.6 для доданку I_1 маємо

$$|I_1| \le Ch^{\beta(\sigma)} \int_0^t \left| p(t,x_1;s,y) - p(t,x_2;s,y) \right| ds$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} \int_0^t \left(\frac{C}{t-s} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}} dx \right) ds$$

$$= | t-s=r | = Ch^{\beta(\sigma)} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^t \frac{1}{r} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{r}} dr$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} \int_{x_1}^{x_2} \left(\left| \ln \frac{T}{\lambda |x-y|^2} \right| + 1 \right) dx$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} \left(C_1 |x_1 - x_2| + C_2 \int_{x_1}^{x_2} |\ln |x-y|| dx \right)$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} \left(C_1 |x_1 - x_2| + 2C_2 \int_0^{|x_1 - x_2|/2} |\ln z| dz \right)$$

$$= Ch^{\beta(\sigma)} \left(C_1 |x_1 - x_2| + 2C_2 (z - z\ln z) \Big|_0^{|x_1 - x_2|/2} \right)$$

$$= Ch^{\beta(\sigma)} \left((C_1 + C_2) |x_1 - x_2| - C_2 |x_1 - x_2| \ln |x_1 - x_2| \right)$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} |x_1 - x_2|^{\gamma}, \tag{4.5}$$

де $0 < \gamma < 1$ довільне, стала C залежить від γ, λ, K, T, і ми використали той факт, що для $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R} : |x| \le K\}$ та $\forall \gamma < 1$:

$$|x_1 - x_2|^{1-\gamma} \ln |x_1 - x_2| \le C,$$

оскільки

$$|x_1 - x_2|^{1-\gamma} \ln |x_1 - x_2| \to 0, \quad |x_1 - x_2| \to 0.$$

Аналогічну оцінку отримуємо і для доданку I_2, представивши його у вигляді суми двох доданків і використавши припущення А2.5:

$$|I_2| \le \left| \int_0^t \left(p(t,x_1;s,y+h) - p(t,x_2;s,y+h) \right) \sigma(s,y+h) ds \right|$$

$$+\left|\int_0^t \left(p(t,x_1;s,y)-p(t,x_2;s,y)\right)\sigma(s,y+h)ds\right| \le C\,|x_1-x_2|^{\gamma}\,. \qquad (4.6)$$

Дослідимо тепер модуль неперервності

$$(w_{2,[j,\,j+1]}(q,r))^2 \le 2\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_1^2\,dy + 2\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2\,dy.$$

Маємо за співвідношенням (4.5):

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_1^2\,dy \le C\,|x_1-x_2|^{2\gamma}\sup_{0\le h\le r} h^{2\beta(\sigma)}(1-h) \le Cr^{2\beta(\sigma)}\,|x_1-x_2|^{2\gamma}\,.$$

Враховуючи (4.6), отримуємо

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2\,dy \le C\,|x_1-x_2|^{2\gamma}\,. \qquad (4.7)$$

Треба ще отримати оцінку I_2 за допомогою степеня r. Використовуючи припущення А2.5, Р та метод доведення (4.5), приходимо до співвідношення

$$\left|\int_0^t \left(p(t,x_1;s,y+h)-p(t,x_1;s,y)\right)\sigma(s,y+h)ds\right| \le$$

$$\le C\int_0^t \left|\left(p(t,x_1-h;s,y)-p(t,x_1;s,y)\right)\right|ds$$

$$\le C\int_0^t \frac{1}{t-s}\int_{x_1-h}^{x_1} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}\,dx\,ds \le Ch^{\gamma}.$$

Аналогічно міркуємо і у випадку з другим доданком. Отже,

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2\,dy \le Cr^{2\gamma}. \qquad (4.8)$$

Перемножимо нерівності (4.7), піднесену до степеня θ, та (4.8), взяту в степені $1-\theta$, для деякого $0<\theta<1$. Маємо

$$\sup_{0\le h\le r}\int_j^{j+1-h} I_2^2\,dy \le Cr^{2\gamma(1-\theta)}\,|x_1-x_2|^{2\gamma\theta}\,.$$

Таким чином,

$$(w_{2,[j,\,j+1]}(q,r))^2 \le Cr^{2\beta(\sigma)}\,|x_1-x_2|^{2\gamma} + Cr^{2\gamma(1-\theta)}\,|x_1-x_2|^{2\gamma\theta}$$

$$\le C\,|x_1-x_2|^{2\gamma\theta}\left(r^{2\beta(\sigma)}+r^{2\gamma(1-\theta)}\right).$$

Щоб інтеграл з (2.2) був скінченним, необхідно, щоб

$$2\gamma(1-\theta) > 2\alpha \Leftrightarrow \gamma\theta < \gamma - \alpha.$$

Якщо обрати $\gamma \to 1-$ та $\alpha \to 1/2+$, то отримаємо показник гельдеровості $\gamma\theta \to 1/2-$.

Отже, для довільного $0 < \gamma_1 < 1/2$ існує $\alpha > 1/2$ таке, що

$$\|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([j,j+1])} \le C\,|x_1 - x_2|^{\gamma_1}.$$

Крім того, аналогічні міркування, як і при оцінюванні (4.5), приводять до нерівностей

$$|q(z,j)| \le C\,|x_1 - x_2|^{\gamma}, \qquad \|q(z,\cdot)\|_{L_2([j,\,j+1])} \le C\,|x_1 - x_2|^{\gamma}.$$

Тепер дослідимо стохастичний інтеграл на множині $y \in \mathsf{R}$. Використовуючи попередні оцінки, співвідношення (2.5) та нерівність Коші, матимемо для відповідної модифікації

$$\left|\vartheta(x_1) - \vartheta(x_2)\right| = \left|\int_{\mathsf{R}} q(z,y)\,d\mu(y)\right| \le \sum_{j\in \mathsf{Z}} \left|\int_j^{j+1} q(z,y)\,d\mu(y)\right|$$

$$\le \sum_{j\in \mathsf{Z}} \left|q(z,j)\,\mu\big((j,\ j+1]\big)\right|$$

$$+ C\sum_{j\in \mathsf{Z}} \|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}((j,\ j+1])} \left\{\sum_{n\ge 1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\big(\Delta_{kn}^{(j)}\big)\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\le C\,|x_2 - x_1|^{\gamma_1}$$

$$\times\left[\sum_{j\in \mathsf{Z}} \left|\mu\big((j,\ j+1]\big)\right| + \sum_{j\in \mathsf{Z}} \left\{\sum_{n\ge 1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\big(\Delta_{kn}^{(j)}\big)\right|^2\right\}^{1/2}\right]$$

$$\le C\,|x_2 - x_1|^{\gamma_1} \left[\left(\sum_{j\in \mathsf{Z}} (|j|+1)^{\rho}\, \mu\big((j,\ j+1]\big)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j\in \mathsf{Z}} (|j|+1)^{-\rho}\right)^{1/2}\right.$$

$$+\left(\sum_{j\in Z}\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{\rho}2^{n(1-2\alpha)}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-\rho}\right)^{1/2}\Bigg].$$

Тут для довільного $\rho>1$ виконується $\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-\rho}<+\infty$, а суми зі стохастичними мірами мають вигляд $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_X f_l\,d\mu\right)^2$, де

$$\{f_l(y), l\ge1\}=\{(|j|+1)^{\rho/2}\mathbf{1}_{[j,\, j+1]}(y), j\in Z\},$$

$$\{f_l(y), l\ge1\}=\left\{(|j|+1)^{\rho/2}2^{n(1-2\alpha)/2}\mathbf{1}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\ j\in Z, n\ge1, 1\le k\le 2^n\right\}$$

у першій та другій частинах останньої суми відповідно.

Оскільки $\sum_{l=1}^{\infty}|f_l(y)|\le C(|y|^{\tau}+1)$ для $\tau=\rho/2$, та за умовою даної леми $|y|^{\tau}$ інтегровна за μ на R, то за [112, лема 3.1] одержимо скінченність відповідних сум, що й завершує доведення леми 4.1. □

4.4. Гельдеровість стохастичного інтеграла за t

Лема 4.2. *Нехай* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* R *для деякого* $\tau>1/2$ *та виконуються припущення* A2.5 – A2.7, P, L1, L2. *Тоді для будь-яких фіксованих* $x\in R$ *та* $\gamma_2<1/4$ *випадковий процес*

$$\hat{\vartheta}(t)=\int_R d\mu(y)\int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds,\quad t\in[0,T],$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником γ_2.

Доведення. Нехай $x\in R, 0\le t_1<t_2\le T$ – довільні фіксовані. Покладемо

$$\hat{q}(z,y)=\int_0^{t_2}p(t_2,x;s,y)\sigma(s,y)ds-\int_0^{t_1}p(t_1,x;s,y)\sigma(s,y)ds,$$

$$z=(t_1,t_2,x).$$

Тоді для модифікації (2.4) стохастичного інтеграла

$$\hat{\eta}(z) = \int_{[j,\, j+1]} \hat{q}(z, y) d\mu(y)$$

виконується співвідношення (2.5).

Оцінимо норму простору Бєсова функції $\hat{q}(z,\cdot)$. Маємо

$$\hat{q}(z, y+h) - \hat{q}(z, y) = \int_0^{t_1} \left(p(t_2, x; s, y+h) - p(t_1, x; s, y+h) \right) \sigma(s, y+h) ds$$

$$- \int_0^{t_1} \left(p(t_2, x; s, y) - p(t_1, x; s, y) \right) \sigma(s, y) ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} p(t_2, x; s, y+h) \sigma(s, y+h) ds - \int_{t_1}^{t_2} p(t_2, x; s, y) \sigma(s, y) ds$$

$$= \int_0^{t_1} \left(p(t_2, x; s, y+h) - p(t_1, x; s, y+h) \right) \left(\sigma(s, y+h) - \sigma(s, y) \right) ds$$

$$+ \int_0^{t_1} \left(p(t_2, x; s, y+h) - p(t_2, x; s, y) \right) \sigma(s, y) ds$$

$$- \int_0^{t_1} \left(p(t_1, x; s, y+h) - p(t_1, x; s, y) \right) \sigma(s, y) ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} p(t_2, x; s, y+h)(\sigma(s, y+h) - \sigma(s, y)) ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (p(t_2, x; s, y+h) - p(t_2, x; s, y)) \sigma(s, y) ds$$

$$= J_{11} + J_{12} - J_{13} + J_{21} + J_{22} = J_1 + J_2.$$

За припущенням A2.6, використовуючи (2.13), отримуємо

$$| J_{21} | \le C h^{\beta(\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda |x-y-h|^2}{t_2 - s}} ds$$

$$\le C h^{\beta(\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-1/2} ds = C h^{\beta(\sigma)} (t_2 - t_1)^{1/2}. \qquad (4.9)$$

Далі, з одного боку, за A2.5 та (2.13),

$$| J_{22} | \le \left| \int_{t_1}^{t_2} p(t_2, x; s, y+h) \sigma(s, y) ds \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} p(t_2, x; s, y) \sigma(s, y) ds \right|$$

$$\le C \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda |x-y-h|^2}{t_2 - s}} ds + C \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{t_2 - s}} ds \le C (t_2 - t_1)^{1/2}. \quad (4.10)$$

З іншого боку, застосовуючи аналогічні міркування, що й при отриманні (4.49), маємо

$$|J_{22}| \le C\int_{t_1}^{t_2}\int_{x-h}^{x}\left|\frac{\partial p(t_2,v;s,y)}{\partial v}\right| dvds \le C\int_{t_1}^{t_2}\int_{x-h}^{x}(t_2-s)^{-1}e^{-\frac{\lambda|v-y|^2}{t_2-s}}dvds \le Ch^{\gamma_0}, \quad (4.11)$$

де $0<\gamma_0<1$ — довільне та константа C залежить від γ_0.

Отже, перемноживши результати (4.10) та (4.11) у степенях θ_0 та $1-\theta_0, \theta_0 \in (0,1)$ відповідно, ми одержимо з урахуванням (4.9)

$$|J_2| \le Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{1/2} + Ch^{(1-\theta_0)\gamma_0}(t_2-t_1)^{\theta_0/2} \le C(t_2-t_1)^{\theta_0/2}(h^{\beta(\sigma)}+h^{(1-\theta_0)\gamma_0})$$

При $\gamma_0 \to 1-$, а $1-\theta_0 \to 1/2+$ матимемо $(1-\theta_0)\gamma_0 > 1/2$ та $\theta_0 \to 1/2-$.

Використовуючи А2.6 та (2.15), можемо записати

$$|J_{11}| \le Ch^{\beta(\sigma)}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p(\tau,x;s,y+h)}{\partial \tau}\right| d\tau ds$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\lambda|x-y-h|^2}{\tau-s}}d\tau ds$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}d\tau ds \le Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{1/2}. \quad (4.12)$$

Аналогічно, за А2.5 маємо

$$|J_{12}-J_{13}| = \left|\int_0^{t_1}\left(p(t_2,x;s,y+h)-p(t_1,x;s,y+h)\right)g(s,y)ds\right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1}\left(p(t_2,x;s,y)-p(t_1,x;s,y)\right)g(s,y)ds\right|$$

$$\le C\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p(\tau,x;s,y+h)}{\partial \tau}\right| d\tau ds + C\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p(\tau,x;s,y)}{\partial \tau}\right| d\tau ds \le C(t_2-t_1)^{1/2}. \quad (4.13)$$

З іншого боку, такі ж міркування, як і при отриманні (4.11), приводять до оцінки

$$|J_{12}-J_{13}| \le |J_{12}| + |J_{13}| \le Ch^{\gamma_0}. \quad (4.14)$$

Отже, перемноживши результати (4.13) та (4.14) у степенях θ_0 та $1-\theta_0$ відповідно, ми одержимо з урахуванням (4.12)

$$|J_1| \le Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{1/2} + Ch^{(1-\theta_0)\gamma_0}(t_2-t_1)^{\theta_0/2}$$
$$\le C(t_2-t_1)^{\theta_0/2}\left(h^{\beta(\sigma)} + h^{(1-\theta_0)\gamma_0}\right).$$

Таким чином, маємо

$$|\hat{q}(z,y+h)-\hat{q}(z,y)| \le C(t_2-t_1)^{\theta_0/2}\left(h^{\beta(\sigma)} + h^{(1-\theta_0)\gamma_0}\right),$$

і тоді
$$\left(\int_0^1 \left(w_{2,[j,\,j+1]}(g,r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}$$
$$\le C(t_2-t_1)^{\theta_0/2}\left(\int_0^1 r^{2\beta(\sigma)-2\alpha-1}dr - \int_0^1 r^{2(1-\theta_0)\gamma_0-2\alpha-1}dr\right) \le C(t_2-t_1)^{\theta_0/2},$$

для відповідного $1/2<\alpha<(1-\theta_0)\gamma_0$.

Крім того, для $y\in\mathbb{R}$ за (4.10) та (4.13)

$$|\hat{q}(z,y)| = \left|\int_0^{t_1}(p(t_2,x;s,y)-p(t_1,x;s,y))\sigma(s,\,y)ds\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_2} p(t_2,x;s,y)\sigma(s,\,y)ds\right| \le C(t_2-t_1)^{1/2}.$$

А тому

$$\|\hat{q}(z,\cdot)\|_{L_2([j,\,j+1])} \le C(t_2-t_1)^{1/2}, \qquad |\hat{q}(z,j)| \le C(t_2-t_1)^{1/2}, \quad \forall j\in\mathbb{Z}.$$

Завершення даного доведення повторює завершення доведення леми 4.1. з використанням умови про інтегровність функції $|y|^{\tau}$ для деякого $\tau>1/2$.

4.5. Основний результат

Теорема 4.1. *Нехай виконуються припущення* A2.1 – A2.6, L1, L2. *Тоді*

1. Рівняння (4.3) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *– інший розв'язок (4.3), то для всіх* t *та* x*:* $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

Якщо додатково виконується припущення P *та функція* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$*, то*

2. Для будь-яких фіксованих $t\in[0,T], K>0, \gamma_1<1/2,$ *випадкова функція* $u(t,x),\ x\in[-K,K],$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

3. Для будь-яких фіксованих $\delta > 0,\, K > 0, \gamma_1 < 1/2, \gamma_2 < 1/4,$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$ *таку, що для деякого* $C_{\tilde{u}}(\omega) > 0$ *виконується*

$$|\tilde{u}(t_1,x_1) - \tilde{u}(t_2,x_2)| \le C_{\tilde{u}}(\omega)(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}),$$
$$t \in [\delta, T],\ x \in [-K, K].$$

Доведення. Доведення тверджень пунктів 1 та 2 даної теореми аналогічне до доведення пунктів (i) та (ii) теореми зі статті [112] і ми його опускаємо. Зауважимо лише, що використовується процес ітерації, де $u^{(0)}(t,x) = 0$ та

$$u^{(n+1)}(t,x) = \int_{\mathrm{R}} p(t,x;0,y) u_0(y) dy + \int_0^t ds \int_{\mathrm{R}} p(t,x;s,y) f(s,y,u^{(n)}(s,y)) dy$$
$$+ \int_{\mathrm{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y) ds, \quad n \ge 0,$$

а розв'язок будується у вигляді

$$u(t,x) = \mathrm{P}\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(t,x), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathrm{R}.$$

Також відмітимо, що отриманий за допомогою зазначеного вище ітераційного процесу розв'язок має неперервну модифікацію. Ця властивість була обґрунтована при доведенні пункту (i) в [112, теорема]. Такі ж міркування справедливі і у нашому випадку.

Крім того, в ході доведення застосовується лема 4.1 даної роботи та використовується оцінка

$$\int_{\mathrm{R}} |\, p(t,x;s,y)\,| dy \le M \int_{\mathrm{R}} (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda |x-y|^2}{t-s}} dy = C, \tag{4.15}$$

яка випливає з (2.13) та рівності $\int_{\mathrm{R}} e^{-z^2/b^2} dz = Cb$.

3. Нехай спочатку $|x| \le K$ — фіксоване. Доведемо гельдеровість м'якого розв'язку $u(t,x)$ за змінною t на множині $[\delta, T]$.

Зафіксуємо довільні $\delta \le t_1 < t_2 \le T$. Тоді для відповідної модифікації $u(\cdot, x)$ за лемою 4.2 маємо

$$|u(t_1,x)-u(t_2,x)|\le \int_{\mathrm{R}} |p(t_1,x;0,y)-p(t_2,x;0,y)||u_0(y)|dy$$

$$+\left|\int_0^{t_1} ds\int_{\mathrm{R}} p(t_1,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy\right.$$

$$\left.-\int_0^{t_2} ds\int_{\mathrm{R}} p(t_2,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy\right|$$

$$+C(\omega)|t_1-t_2|^{\gamma_2}=B_1+B_2+C(\omega)|t_1-t_2|^{\gamma_2}.$$

За припущенням А2.1, оцінкою (2.15) і тим, що $t_1\ge\delta$, одержуємо

$$B_1\le C_{u_0}(\omega)\int_{\mathrm{R}}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p(\tau,x;0,y)}{\partial\tau}\right|d\tau dy\le C_{u_0}(\omega)M\int_{\mathrm{R}}\int_{t_1}^{t_2}\tau^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau}}d\tau dy$$

$$=C(\omega)\int_{t_1}^{t_2}\tau^{-1}d\tau\int_{\mathrm{R}}\tau^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau}}dy\le C(\omega)\delta^{-1}|t_1-t_2|\le C(\omega)|t_1-t_2|.$$

Для доданку B_2 можемо записати, враховуючи А2.3 та (4.15):

$$B_2\le\int_0^{t_1}ds\int_{\mathrm{R}}|p(t_1,x;s,y)-p(t_2,x;s,y)||f(s,y,u(s,y))|dy$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}ds\int_{\mathrm{R}}|p(t_2,x;s,y)||f(s,y,u(s,y))|dy$$

$$\le C\int_0^{t_1}ds\int_{\mathrm{R}}|p(t_1,x;s,y)-p(t_2,x;s,y)|dy$$

$$+C|t_1-t_2|=B_{21}+C|t_1-t_2|.$$

Далі, оскільки $|x|\le K$, то з (2.15) маємо наступне

$$B_{21}\le C\int_0^{t_1}ds\int_{\mathrm{R}}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial p(\tau,x;s,y)}{\partial\tau}\right|d\tau dy\le C\int_0^{t_1}ds\int_{\mathrm{R}}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau-s}}d\tau dy$$

$$=C\int_0^{t_1}ds\int_{\{|y|\le K+1\}}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau-s}}d\tau dy$$

$$+C\int_0^{t_1}ds\int_{\{|y|\ge K+1\}}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau-s}}d\tau dy=B_{211}+B_{212}.$$

Тоді

$$B_{211} = C\int_0^{t_1} ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau - s)^{-3/2}\, d\tau\int_{\{|y|\le K+1\}} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau-s}}\, dy$$

$$\le C(2K+2)\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}(\tau - s)^{-3/2}\, d\tau ds$$

$$= C\int_0^{t_1}\left((t_1 - s)^{-1/2} - (t_2 - s)^{-1/2}\right) ds = C\left(t_1^{1/2} - t_2^{1/2} + |t_1 - t_2|^{1/2}\right) \le C\,|t_1 - t_2|^{1/2} .$$

Використовуючи оцінки $ze^{-z^2} \le Ce^{-z^2/2}$ та $|x - y| \ge 1$ при $|x| \le K, |y| \ge K+1$, отримаємо

$$B_{212} \le C\int_0^{t_1} ds\int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|y|\ge K+1\}}(\tau - s)^{-3/2} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau-s}}\, dy d\tau$$

$$\le C\int_0^{t_1} ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau - s)^{-1/2}\int_{\{|y|\ge K+1\}}(\tau - s)^{-1}\lambda^{1/2}\,|x - y|\, e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{\tau-s}}\, dy d\tau$$

$$\le C\int_0^{t_1} ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau - s)^{-1/2}\int_{\{|y|\ge K+1\}}(\tau - s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{2(\tau-s)}}\, dy d\tau \le C\int_0^{t_1} ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau - s)^{-1/2}\, d\tau$$

$$\le C\,|t_1 - t_2|\int_0^{t_1}(t_1 - s)^{-1/2}\, ds \le C\,|t_1 - t_2| .$$

Таким чином, ми одержали, що

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \le C(\omega)\,|t_1 - t_2|^{\gamma_2} .$$

Отже, за припущень пункту 3 ми отримали модифікацію $\tilde{u}^{(x)}$, неперервну за Гельдером за змінною x при фіксованому t, та модифікацію $\tilde{u}^{(t)}$, що задовольняє умову Гельдера за t при кожному фіксованому x. Виключимо всі $\omega \in \Omega$, для яких $\tilde{u}^{(x)}(t,x) \ne \tilde{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}$. Для всіх інших ω покладемо $\tilde{u} = \tilde{u}^{(x)} = \tilde{u}^{(t)}$ для раціональних (t,x) та довизначимо $\tilde{u}$ на всю множину $[\delta, T] \times \mathbb{R}$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\tilde{u}(t,x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та x. $\square$

4.6. Асимптотична поведінка м'якого розв'язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x), x \in \mathbb{R}$

Розглядаємо м'який розв'язок рівняння теплопровідності (4.48), тобто, таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, що

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t-s, x-y) f(s, y, u(s,y)) dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t-s, x-y) \sigma(s,y) ds, \tag{4.16}$$

де для кожних t, x рівність має справджуватись м. н., а

$$p(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

— фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються припущення* A2.1 – A2.8. *Тоді для розв'язку рівняння (4.16) існує модифікація* $u(t,x)$ *така, що при кожному* $t \in [0,T]$ *і кожному* $\omega \in \Omega$ *виконується*

$$|u(t,x)| \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо довільні $t, x \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Позначимо

$$h(t,x,y) = \int_0^t p(t-s, x-y) \sigma(s,y) ds, \quad y \in \mathbb{R},$$

і оцінимо останній доданок (4.16):

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(t,x,y) d\mu(y) \right| \le \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{(j,j+1]} h(t,x,y) d\mu(y) \right|.$$

Візьмемо довільне $\frac{1}{2} < \alpha < \min\{\beta(\sigma), \frac{3}{4}\}$. Тоді за лемою 2.2 стохастичний інтеграл $\int_{(j,j+1]} h(t,x,y) d\mu(y)$ має модифікацію, для якої справедлива оцінка 2.7. Розглянемо суми по $j \in \mathbb{Z}$ обох доданків правої частини (2.7), застосованої для

$q(z,y)=h(t,x,y), Z=[0,T]\times\mathrm{R}$. Для першого доданку маємо, що

$$\sum_{j\in Z}\left|h(t,x,j)\mu((j,j+1])\right|\le$$

$$\le\left(\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{-2\tau}\left|h(t,x,j)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{2\tau}\left|\mu((j,j+1])\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=A_1A_2.$$

Візьмемо $\tau>3/2$, для якого справджується А2.8. Тоді з леми 2.3, застосованої до $g_j(y)=(1+|j|)^{\tau}{}_{(j,j+1]}(y)$, маємо, що $A_2<\infty$ м.н. (далі вважаємо, що $u(t,x)=0$ на множині $A_2=\infty$). З використанням А2.5 маємо, що

$$\left|h(t,x,j)\right|\le C\int_0^t\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}e^{\frac{-(x-j)^2}{4a^2(t-s)}}ds\le$$

$$\le C\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}ds=C\sqrt{t}. \tag{4.17}$$

Оскільки $\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{-2\tau}<\infty$, маємо, що $A_1<\infty$. При цьому з оцінки (4.17) випливає, що при кожному фіксованому j виконується $h(t,x,j)\to 0, |x|\to\infty$.

З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що

$$A_1\to 0,\quad |x|\to\infty.$$

В останньому доданку (2.7) використаємо рівність (2.2). З (4.17) легко отримуємо, що

$$\left\|h(t,x,\cdot)\right\|_{L_2([j,j+1])}\le C\sqrt{t},$$

$$\left\|h(t,x,\cdot)\right\|_{L_2([j,j+1])}\to 0,\quad |x|\to\infty. \tag{4.18}$$

Далі маємо, що

$$\sum_{j\in Z}\|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])}\left\{\sum_{n\geq 1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leq k\leq 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{[j]}\right)\right|^2\right\}$$

$$\leq\left(\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{2\tau}\|h(t,x,\cdot)\|^2_{L_2([j,j+1])}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{-2\tau}\left\{\sum_{n\geq 1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leq k\leq 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{[j]}\right)\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}=B_1B_2. \qquad (4.19)$$

З (4.18) випливає, що ряд B_1 збігається і $B_1\to 0, |x|\to\infty$. Тоді з леми 2.3, застосованої до

$$\{g_j(y), j\in Z\}=\left\{2^{n(\frac{1}{2}-\alpha)}(1+|j|)^{\tau}\Delta_{kn}^{[j]}(y), j\in Z, n\geq 1\right\}$$

маємо, що $B_2<\infty$ м.н. (вважаємо $u(t,x)=0$ на множині $B_2=\infty$).

З використанням похідної легко отримати нерівність

$$\int_0^t\frac{1}{r^{3/2}}e^{-B/r}dr\leq\frac{t^{1/2}}{B}e^{-B/t}, B>0.$$

Для оцінювання модуля неперервності $w_2(h,r)$ на відрізку $[j,j+1]$ при $v>0$ розглянемо

$$|h(t,x,y+v)-h(t,x,y)|$$

$$\leq\int_0^t p(t-s,x-y-v)|\sigma(s,y+v)-\sigma(s,y)|ds$$

$$+\int_0^t|p(t-s,x-y-v)-p(t-s,x-y)||\sigma(s,y)|ds=I_1+I_2.$$

З умови А2.6 і нерівності $p(t,y)\leq C/\sqrt{t}$ отримаємо, що $I_1\leq Cv^{\beta(\sigma)}$. Також маємо, що

$$I_2 \le C\int_0^t ds \int_y^{y+v} \left|\frac{\partial p(t-s,x-z)}{\partial z}\right| dz = C\int_y^{y+v} dz \int_0^t \frac{|x-z|}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-s)}} ds$$

$$\le C\sqrt{t}\int_y^{y+v} |x-z|^{-1} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} dz \le Cv \sup_{z\in[j,j+1]} \left\{ |x-z|^{-1} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} \right\}.$$

Позначимо останній супремум за допомогою величини $M_j(x)$, він не перевищує 1 при $x \notin [j-1, j+2]$. При фіксованих t та j буде виконуватись $M_j(x) \to 0, |x| \to \infty$.

Також, використовуючи припущення А2.5, формулу Лагранжа та позначення

$$\theta = \min\{|x-y-v|, |x-y|\},$$

для $y, y+v \in [j, j+1]$ маємо наступні оцінки:

$$I_2 \le C\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left| e^{-\frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)}} - e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} \right| ds$$

$$\le C\int_0^t \frac{e^{-\frac{\theta^2}{4a^2(t-s)}}}{\sqrt{t-s}} \left| \frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)} - \frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)} \right| ds$$

$$\le Cv\left(|x|+|j|+1\right)\int_0^t \frac{e^{-\frac{\theta^2}{4a^2(t-s)}}}{(t-s)^{3/2}} ds$$

$$= Cv\left(|x|+|j|+1\right)\theta^{-1} \int_{\theta/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$\le Cv\left(|x|+|j|+1\right)\theta^{-1}.$$

Оскільки $\theta \ge |y-x|/2$ для $|y-x| > 2\sqrt{v}$, то з отриманих оцінок далі маємо, що

$$\int\limits_{[j,j+1-v]\cap\{|y-x|>2\sqrt{v}\}} I_2^2 dy \le C(|x|+|j|+1)^{-2} v^2 \int\limits_{\{|y-x|>2\sqrt{v}\}} \frac{1}{(x-y)^2} dy$$

$$= C(|x|+|j|+1)^{-2} v^{3/2}. \qquad (4.20)$$

Також відмітимо наступні елементарні нерівності для $\delta, \delta_1, \delta_2 \ge 0$:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}}\left(1-e^{-\delta/r}\right)dr = \int_0^\delta + \int_\delta^t \le \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{r}} dr + 4\sqrt{\delta}\int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\delta}{r} dr$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} \left| e^{-\delta_1/r} - e^{-\delta_2/r} \right| dr \le 4\sqrt{|\delta_1 - \delta_2|}.$$

Звідси маємо, що

$$I_2 \le C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left| e^{-\frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)}} - e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} \right| ds \le$$

$$\le C(|x|+|j|+1)^{-1/2} v^{1/2}.$$

Тому для інтеграла по іншій множині одержимо:

$$\int\limits_{[j,j+1-v]\cap\{|y-x|\le 2\sqrt{v}\}} I_2^2 dy \le C(|x|+|j|+1) v^{3/2}. \qquad (4.21)$$

Врахувавши нерівність $(I_1 + I_2)^2 \le 2I_1^2 + 2I_2^2$, оцінки (4.20), (4.21), маємо, що

$$W_j(x) = \left(\int_0^1 (w_2(h,r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \le C(|x|+|j|+1).$$

А тому,

$$W_j(x) \le C(|j|+1), x \in [j-1, j+2]. \qquad (4.22)$$

З відмічених вище властивостей $M_j(x)$ випливає, що (4.22) справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $W_j(x) \to 0, |x| \to \infty$.

Далі ми можемо повторити міркування, проведені з виразами в (4.19), замінивши величину $\|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])}$ на $W_j(x)$. З (4.22) випливає, що при $\tau > 3/2$ буде

$$\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{-2\tau}W_j^2(x) \le C\sum_{j\in Z}(1+|j|)^{-2\tau}(1+|j|)^2 < +\infty,$$

і знову отримаємо потрібну збіжність. Також із наведених оцінок випливає, що $h(t,x,\cdot) \in B_{22}^{\alpha}([j, j+1])$. Візьмемо модифікацію стохастичного інтеграла, для якої справджується твердження леми 2.2. Тоді $\int_{R} h(t,x,y)d\mu(y) \to 0$ в сенсі, вказаному у твердженні теореми.

Розглянемо інші доданки в (4.16). Маємо, що

$$\left|\int_0^t ds\int_R p(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^t ds\int_{|y|\le y_0}\Lambda\, dy\right| + \left|\int_0^t ds\int_{|y|>y_0}\Lambda\, dy\right| = I_3 + I_4.$$

Користуючись умовою А2.7, для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо y_0 таке, що $|f(s,y,z)| < \varepsilon$ для $|y| > y_0$. Оскільки $\int_R p(t,y)dy = 1$, то матимемо, що $I_4 \le \varepsilon t$ одразу для всіх x. При кожному фіксованому y_0 прямування I_3 до нуля при $|x| \to \infty$ випливає з теореми Лебега, в якій у якості мажоранти можна взяти

$$\frac{C}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}e^{-\frac{(|y|-y_0)^2}{4a^2(t-s)}}, \quad |x| \ge y_0.$$

Цілком аналогічні міркування з використанням умови А2.7 показують, що

$$\int_R p(t,x-y)u_0(y)dy \to 0, \quad |x| \to \infty,$$

звідки остаточно випливає твердження нашої теореми. □

Відмітимо, що за схожих умов в [31] доведено, що розв'язок рівняння (4.16), де $f = 0$, прямує до нуля при необмеженому збільшенні часової змінної.

4.7. Висновки

Досліджено задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу на множині $[0,T]\times\mathbb{R}$, породженого загальною стохастичною мірою $\mu(x), x\in\mathbb{R}$. Доведено існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку.

Порівнюючи одержані результати з результатами роботи [112], відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1 < 1/2$ та $\gamma_2 < 1/4$ за просторовою та часовою змінними відповідно. Для випадку рівняння теплопровідності в [112] одержано показники $\gamma_1 < 1/6$ та $\gamma_2 < 1/18$. Таким чином, нам вдалося зробити узагальнення та покращити показники неперервності за Гельдером.

Розглянуте в роботі стохастичне рівняння теплопровідності описує зміну температури в середовищі при наявності певних випадкових і невипадкових надходжень теплової енергії. Показано, що при виконанні вказаних умов і необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати температура прямує до нуля.

РОЗДІЛ 5
РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

5.1. Вступ

В даному розділі розглядається стохастичне рівняння теплопровідності виду

$$\begin{cases} du(t,\vec{x}) = a^2\Delta_{\vec{x}}u(t,\vec{x})dt + f(t,\vec{x},u(t,\vec{x}))dt + \sigma(t,\vec{x})d\mu(t), \\ u(0,\vec{x}) = u_0(\vec{x}), \end{cases} \tag{5.1}$$

де $(t,\vec{x}) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $\Delta_{\vec{x}}$ — оператор Лапласа та μ — стохастична міра, визначена на борельовій σ-алгебрі підмножин $[0,T]$.

Як і в попередніх розділах, символічний запис (5.1) будемо розуміти у м'якому сенсі, тобто

$$\begin{aligned} u(t,\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} p(t,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y} \\ &+ \int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y} \\ &+ \int_{[0,t]} d\mu(s)\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Тут

$$p(t,\vec{x}) = \frac{1}{\left(4a^2\pi t\right)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4a^2t}}$$

— фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності, а $u(t,\vec{x}) = u(t,\vec{x},\omega):[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція. Інтеграли від випадкових функцій по $d\vec{y}$ та ds беруться для кожного фіксованого $\omega\in\Omega$.

В роботі [113] для $d=1$ доведено існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (5.1), визначеного рівністю (5.2), та встановлено його неперервність за Гельдером за сукупністю змінних (t,x). В підрозділі 5.3 результати цієї роботи узагальнюються на випадок $d \geq 1$.

В підрозділі 5.4 доводиться, що за певних додаткових умов розв'язок рівняння (5.2), для $d \geq 1$, прямує до нуля при нескінченному збільшенні абсолютної величини просторової координати.

Результати, викладені в даному розділі, опубліковано в роботах [4, 8].

5.2. Припущення

Будемо розглядати наступні припущення.

А3.1. $u_0(\vec{y}) = u_0(\vec{y}, \omega) : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_0(\vec{y}, \omega)| \leq C(\omega)$.

А3.2. $u_0(\vec{y})$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(\vec{y}_1) - u_0(\vec{y}_2)| \leq C(\omega)|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^{\beta(u_0)}, \qquad 0 < \beta(u_0) \leq 1.$$

А3.3. $f(s, \vec{y}, v) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s, \vec{y}, v)| \leq C$.

А3.4. $f(s, \vec{y}, v)$ ліпшицева за $\vec{y} \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}$:

$$|f(s, \vec{y}_1, v_1) - f(s, \vec{y}_2, v_2)| \leq C\left(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2| + |v_1 - v_2|\right).$$

А3.5. $\sigma(s, \vec{y}) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s, \vec{y})| \leq C$.

А3.6. $\sigma(s, \vec{y})$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s_1, \vec{y}_1) - \sigma(s_2, \vec{y}_2)| \leq C(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) < 1.$$

А3.7. μ неперервна за Гельдером:

$$|\mu((s_1, s_2])| \leq C(\omega)|s_1 - s_2|^{\beta(\mu)}, \quad s_1, s_2 \in [0, T], \quad \beta(\mu) > 0.$$

А3.8. $$|u_0(\vec{y})| \to 0, \qquad \sup_{s \in [0, T], v \in \mathbb{R}} |f(s, \vec{y}, v)| \to 0, \qquad \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, \vec{y})| \to 0,$$

$|\vec{y}| \to \infty$.

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

5.3. Регулярність м’якого розв’язку рівняння теплопровідності

5.3.1. Гельдеровість стохастичного інтеграла за $\vec{x}$.

Лема 5.1. *Нехай виконуються припущення* A3.5 *та* A3.6. *Тоді для будь-яких фіксованих* $t \in [0, T]$, $K > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_1 < \beta(\sigma)$ *випадкова функція*

$$\vartheta(\vec{x}) = \int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}, \quad |\vec{x}| \le K$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_1$.

Доведення. Для довільного фіксованого $t \in (0, T]$ позначимо

$$q(z,s) = \int_{\mathbb{R}^d} (p(t-s, \vec{x}_1 - \vec{y}) - p(t-s, \vec{x}_2 - \vec{y}))\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}, \quad z = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, t),$$

де $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : |\vec{x}| \le K\}$ — будь-які фіксовані та $s \le t$.

Тоді для модифікації (2.4) випадкової функції

$$\eta(z) = \vartheta(\vec{x}_1) - \vartheta(\vec{x}_2) = \int_{[0,t]} q(z,s)d\mu(s)$$

використаємо оцінку (2.5), причому модифікацію будуємо на множині $Z \times [0, t] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : |\vec{x}| \le K\} \times [0, t] \times [0, t]$. У такому випадку оцінка (2.5) має вигляд

$$\left|\vartheta(\vec{x}_1) - \vartheta(\vec{x}_2)\right| \le |q(z,0)\mu((0,t])|$$

$$+ C\|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} \times \left\{ \sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2 \right\}^{1/2},$$

де стала C залежить від t.

Розглянемо $\|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}}([0,t])$. Спочатку оцінимо модуль неперервності $w_{2,[0,t]}(q,r)$. Для цього покладемо

$$A_1(s,h)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (p(t-s-h,\vec{y}) - p(t-s,\vec{y}))(\sigma(s+h,\vec{x}_1-\vec{y}) - \sigma(s+h,\vec{x}_2-\vec{y}))d\vec{y},$$

$$A_2(s,h) = \int_{\mathbb{R}^d} (p(t-s,\vec{x}_1-\vec{y}) - p(t-s,\vec{x}_2-\vec{y}))(\sigma(s+h,\vec{y}) - \sigma(s,\vec{y}))d\vec{y}.$$

Оскільки

$$A_1(s,h) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h,\vec{y})\sigma(s+h,\vec{x}_1-\vec{y})d\vec{y}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h,\vec{y})\sigma(s+h,\vec{x}_2-\vec{y})d\vec{y}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{y})\sigma(s+h,\vec{x}_1-\vec{y})d\vec{y}+\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{y})\sigma(s+h,\vec{x}_2-\vec{y})d\vec{y}$$

$$\overset{(\vec{x}_i-\vec{y})\to\vec{y}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h,\vec{x}_1-\vec{y})\sigma(s+h,\vec{y})d\vec{y}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h,\vec{x}_2-\vec{y})\sigma(s+h,\vec{y})d\vec{y}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}_1-\vec{y})\sigma(s+h,\vec{y})d\vec{y}+\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}_2-\vec{y})\sigma(s+h,\vec{y})d\vec{y},$$

то з останнього виразу для $A_1(s,h)$ і виразу для $A_2(s,h)$ маємо

$$A_1(s,h)+A_2(s,h)=q(z,s+h)-q(z,s),$$

отже,

$$\int_0^{t-h}\left|q(z,s+h)-q(z,s)\right|^2 ds \le 2\left(\int_0^{t-h} A_1^2(s,h)ds+\int_0^{t-h} A_2^2(s,h)ds\right).$$

Далі використаємо оцінку (2.15):

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}p(t,\vec{x})\right| \le Ct^{-\frac{d}{2}-1}e^{-\frac{b|\vec{x}|^2}{t}}, \tag{5.3}$$

де сталі $C,b>0$ залежать лише від коефіцієнта a з (5.1).

Враховуючи припущення A3.6, можемо записати

$$|A_1(s,h)| \overset{A6}{\le} C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(p(t-s-h,\vec{y})-p(t-s,\vec{y})\right)d\vec{y}\right|$$

$$\overset{(5.3)}{\le} C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{\mathbb{R}^d} d\vec{y}\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-\frac{d}{2}-1}e^{-\frac{b|\vec{y}|^2}{\tau}}d\tau$$

$$=C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-\frac{d}{2}-1}d\tau\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{b|\vec{y}|^2}{\tau}}d\vec{y}$$

$$= C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)} \int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-1}d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{b|\vec{y}|^2}{\tau}}d\vec{y} = C\,|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}\ \ln\frac{t-s}{t-s-h}.$$

Отже,

$$\int_0^{t-h}A_1^2(s,h)ds \le C\,|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{t-h}\ln^2\frac{t-s}{t-s-h}ds \overset{t-s-h=\tau}{=}$$

$$= C\,|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{t-h}\ln^2\left(1+\frac{h}{\tau}\right)d\tau \overset{\tau=hu}{\le} Ch\,|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{+\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{u}\right)du$$

$$= Ch\,|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\ .$$

Далі розглядаємо $A_2(s,h)$. Скористаємось рівністю

$$g(\vec{x}_1)-g(\vec{x}_2) = \int_0^1 g'_{\vec{x}_1-\vec{x}_2}(\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2)d\theta$$

$$= \int_0^1(grad\,g(\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2),\vec{x}_1-\vec{x}_2)d\theta.$$

Маємо (з урахуванням нерівності $|grad\,g|\le|\partial g/\partial x^1|+\ldots+|\partial g/\partial x^d|$)

$$p(t-s,\vec{x}_1-\vec{y})-p(t-s,\vec{x}_2-\vec{y})$$

$$= \int_0^1(grad_{\vec{x}}\,p(t-s,\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y}),\vec{x}_1-\vec{x}_2)\ d\theta$$

$$\le |\vec{x}_1-\vec{x}_2|\int_0^1|grad_{\vec{x}}\,p(t-s,\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y})|d\theta$$

$$\le C\frac{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}{(t-s)^{\frac{d+1}{2}}}\int_0^1 e^{-\frac{b|\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y}|^2}{t-s}}d\theta, \tag{5.4}$$

де використали оцінку (2.14):

$$\left|\frac{\partial p(t,\vec{x})}{\partial x^i}\right| \le Ct^{-\frac{d+1}{2}}e^{-\frac{b|\vec{x}|^2}{t}},\quad b>0,\quad i=\overline{1,d}.$$

Тоді $$|A_2(s,h)|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^d}(p(t-s,\vec{x}_1-\vec{y})-p(t-s,\vec{x}_2-\vec{y}))(\sigma(s+h,\vec{y})-\sigma(s,\vec{y}))d\vec{y}\right|$$

$$\overset{A6,(5.4)}{\le} Ch^{\beta(\sigma)} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \int_{R^d} d\vec{y} \int_0^1 (t-s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{b|\theta\vec{x}_1 + (1-\theta)\vec{x}_2 - \vec{y}|^2}{t-s}} d\theta$$

$$\le C \frac{h^{\beta(\sigma)} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{(t-s)^{1/2}} \int_0^1 d\theta \int_{R^d} e^{-\frac{(\theta\vec{x}_1 + (1-\theta)\vec{x}_2 - \vec{y})^2}{t-s}} \frac{d\vec{y}}{(t-s)^{\frac{d}{2}}}$$

$$= C \frac{h^{\beta(\sigma)} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{(t-s)^{1/2}}.$$

Також

$$\int_0^{t-h} A_2^2(s,h)ds \le Ch^{2\beta(\sigma)} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \int_0^{t-h} \frac{ds}{t-s}$$

$$\le Ch^{2\beta(\sigma)} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \left(C + |\ln h|\right) \le Ch |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 .$$

В останній нерівності ми використали те, що $\beta(\sigma) > 1/2$ та при $0 < h \le T$

$$h^{\beta} |\ln h| \le C, \quad \forall\ 0 < \beta < 1.$$

Отже,

$$w_{2,[0,t]}(q(z,\cdot),r) \le 2 \sup_{0 \le h \le r} \left(\int_0^{t-h} A_1^2(s,h)ds + \int_0^{t-h} A_2^2(s,h)ds \right)^{1/2}$$

$$\le Cr^{1/2} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{\beta(\sigma)} . \qquad (5.5)$$

В тексті роботи [113] було отримано оцінку (9) для $d = 1$:

$$|q(z,s+h) - q(z,s)| \le Ch^{\beta(\sigma)} (t-s)^{-\beta(\sigma)/2}. \qquad (5.6)$$

Для випадку $d \ge 1$ вона теж справедлива, і одержується аналогічним чином.

Тому маємо

$$w_{2,[0,t]}(q(z,\cdot),r) \le \sup_{0 \le h \le r} Ch^{\beta(\sigma)} \left(\int_0^{t-h} (t-s)^{-\beta(\sigma)} ds \right)^{1/2} \le Cr^{\beta(\sigma)}.$$

Перемноживши цю нерівність в степені $1-\lambda$ та (5.5) в степені λ для деякого $\lambda \in (0,1)$, отримуємо

$$(w_{2,[0,t]}(q(z,\cdot),r))^2 \le Cr^{\lambda(1-2\beta(\sigma))+2\beta(\sigma)} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{2\lambda\beta(\sigma)} .$$

При $0<\lambda<1,\ 1-2\beta(\sigma)<0$ буде

$$\lambda(1-2\beta(\sigma))+2\beta(\sigma)>1-2\beta(\sigma)+2\beta(\sigma)=1,$$

тому інтеграл в (2.2) буде скінченним для кожного $0<\lambda<1$ при деякому $\alpha>1/2$ та матиме місце нерівність

$$\left(\int_0^t \left(w_{2,[0,t]}(g(z,\cdot),r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}\le C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\lambda\beta(\sigma)}$$

Крім того, використовуючи заміни

$$\vec{v}=\frac{\vec{x}_i-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s}},\quad i=1,2$$

та припущення A3.6, одержимо $\forall s\in[0,t)$

$$|q(z,s)|$$

$$=C\left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\sigma(s,\vec{x}_1-2a\vec{v}\sqrt{t-s})d\vec{v}-\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\sigma(s,\vec{x}_2-2a\vec{v}\sqrt{t-s})d\vec{v}\right|$$

$$\le C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}d\vec{v}=C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\,.$$

Отже,

$$|q(z,0)|\le C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)};$$

$$\|q(z,\cdot)\|_{L_2([0,t])}=\left(\int_0^t|q(z,s)|^2ds\right)^{1/2}\le C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\,.$$

Таким чином, ми отримали, що

$$|\vartheta(\vec{x}_1)-\vartheta(\vec{x}_2)|$$

$$\le C\,|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\lambda\beta(\sigma)}\left(|\mu((0,t])|+\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right),$$

для будь-якого $\lambda\in(0,1)$. Скінченність суми зі стохастичною мірою випливає з [112, Лема 3.1], що й завершує наше доведення. □

5.3.2. Гельдеровість стохастичного інтеграла за t.

Лема 5.2. *Нехай виконуються припущення* А3.5 – А3.7. *Тоді для будь-яких фіксованих* $\vec{x} \in \mathbb{R}^d, \delta > 0$, $\tilde{\gamma}_2 \le \beta(\mu)$, $\tilde{\gamma}_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$ *випадкова функція*

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}, \quad t \in [\delta, T],$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_2$.

Доведення. Нехай $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ фіксоване. Розглянемо модифікацію (2.4) випадкової функції

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}$$

$$= \int_{[0,t]} \hat{q}(z,s)d\mu(s), \quad z = (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^d \times [\delta, T].$$

Тоді для довільних фіксованих $\delta \le t_1 < t_2 \le T$ та $z_i = (\vec{x}, t_i), i = 1,2$ маємо

$$\hat{\vartheta}(t_2) - \hat{\vartheta}(t_1) = \int_{[0,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)d\mu(s) - \int_{[0,t_1]} \hat{q}_0(z_1,s)d\mu(s)$$

$$+\sum_{n\ge1}\left(\int_{[0,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)d\mu(s) - \int_{[0,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)d\mu(s)\right)$$

$$-\sum_{n\ge1}\left(\int_{[0,t_1]} \hat{q}_n(z_1,s)d\mu(s) - \int_{[0,t_1]} \hat{q}_{n-1}(z_1,s)d\mu(s)\right)$$

$$= \int_{[0,t_1]} (\hat{q}_0(z_2,s) - \hat{q}_0(z_1,s))d\mu(s)$$

$$+\sum_{n\ge1}\left(\int_{[0,t_1]} (\hat{q}_n(z_2,s) - \hat{q}_n(z_1,s))d\mu(s)\right.$$

$$\left. - \int_{[0,t_1]} (\hat{q}_{n-1}(z_2,s) - \hat{q}_{n-1}(z_1,s))d\mu(s)\right)$$

$$+ \int_{[t_1,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)d\mu(s)$$

$$+\sum_{n\ge1}\left(\int_{[t_1,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)d\mu(s) - \int_{[t_1,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)d\mu(s)\right)$$

$$= I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22} = I_1 + I_2.$$

До I_2 застосовуємо метод отримання оцінки F_1 з [113] і одержимо такий самий результат, а саме

$$|I_2| \le C(\omega)(t_2 - t_1)^{\tilde{\gamma}_2}.$$

Для $s \in (0, t_1]$ та $\tilde{z} = (\vec{x}, t_1, t_2)$ покладемо

$$Q(\tilde{z}, s) = \hat{q}(z_2, s) - \hat{q}(z_1, s)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(p(t_2 - s, \vec{x} - \vec{y}) - p(t_1 - s, \vec{x} - \vec{y})\right) \zeta(s, \vec{y}) d\vec{y}.$$

Аналогічно до оцінки (2.5) можемо записати

$$|I_1| \le |Q(\tilde{z}, 0)\mu((0, t_1])| + C\overline{C}_T \left\| Q(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1) \right\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}$$

$$\times \left\{ \sum_{n \ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn} \cap (0, t_1]\right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le |Q(\tilde{z}, 0)\mu((0, t_1])|$$

$$+ C(\omega) \left\| Q(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1) \right\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}, \tag{5.7}$$

де остання нерівність отримується наступним чином.

Позначимо через k_{n1} такий номер, що $t_1 \in ((k_{n1} - 1)2^{-n}T, k_{n1}2^{-n}T]$. Використовуючи припущення A3.7, можемо записати

$$\sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn} \cap (0, t_1]\right) \right|^2 = \sum_{1 \le k \le k_{n1} - 1} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right) \right|^2 + \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{k_{n1}} \cap (0, t_1]\right) \right|^2$$

$$\le \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right) \right|^2 + C(\omega) \left| t_1 - (k_{n1} - 1)2^{-n}T \right|^{2\beta(\mu)}$$

$$\le \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right) \right|^2 + C(\omega)(2^{-n}T)^{2\beta(\mu)}$$

$$\le \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right) \right|^2 + C(\omega).$$

Тоді маємо

$$\sum_{n \ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn} \cap (0, t_1]\right) \right|^2 \le \sum_{n \ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right) \right|^2$$

$$+C(\omega)\sum_{n\geq 1}2^{-n\varepsilon}\leq\sum_{n\geq 1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\leq k\leq 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\right)\right|^2+C(\omega)\leq C(\omega),$$

де в останній нерівності ми використали те, що сума зі стохастичною мірою скінченна за [112, Лема 3.1].

Розглянемо тепер оцінки доданків з нерівності (5.7).

Оцінимо спочатку величину $Q(\tilde{z},s)$. Використовуючи обмеженість σ та нерівність $|\partial_t p(t,\vec{x})|\leq Ct^{-1}p(t,\vec{x}/2)$, маємо

$$|Q(\tilde{z},s)|\leq C\int_{\mathbb{R}^d}\int_{t_1}^{t_2}(u-s)^{-1}p(u-s,(\vec{x}-\vec{y})/2)\,du\,d\vec{y}\leq C(t_2-t_1)(t_1-s)^{-1}. \quad (5.8)$$

Зробивши заміни змінних

$$\vec{v}=\frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t_2-s}},\quad \vec{v}=\frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t_1-s}},$$

отримаємо, з огляду на припущення A3.5:

$$|Q(\tilde{z},s)|$$

$$=C\left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\sigma(s,\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t_2-s})d\vec{v}-\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\sigma(s,\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t_1-s})d\vec{v}\right|$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\,|\vec{v}(\sqrt{t_2-s}-\sqrt{t_1-s})|^{\beta(\sigma)}d\vec{v}\leq C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}(t_2-s)^{-\beta(\sigma)/2}$$

$$\leq C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1-s)^{-\beta(\sigma)/2}. \quad (5.9)$$

Тоді, враховуючи, що $s\leq t_1$, маємо

$$|Q(\tilde{z},s)|\leq C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2},\quad \|Q(\tilde{z},\cdot)\|_{L_2([0,t_1])}\leq C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2}. \quad (5.10)$$

Крім того, з (5.9) та A3.7 випливає

$$|Q(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])|\leq C(\omega)(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}t_1^{\beta(\mu)-\beta(\sigma)/2}\leq C(\omega)(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}. \quad (5.11)$$

Розглянемо тепер вираз $\int_0^{t_1}w_{2,[0,t_1]}^2(Q(\tilde{z},\cdot),r)r^{-2\alpha-1}dr$.

З оцінок (5.8) та (5.9) маємо

$$|Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)|\leq|Q(\tilde{z},s+h)|+|Q(\tilde{z},s)|$$

$$\le C(t_2 - t_1)(t_1 - s - h)^{-1}, \qquad (5.12)$$

та

$$|Q(\widetilde{z}, s+h) - Q(\widetilde{z}, s)| \le C(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1 - s - h)^{-\beta(\sigma)/2} \qquad (5.13)$$

відповідно. Далі, запишемо

$$|Q(\widetilde{z}, s+h) - Q(\widetilde{z}, s)| \le J_1(s,h) + J_2(t_2, s, h) + J_2(t_1, s, h),$$

де

$$J_1(s,h) = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (p(t_2 - s, \vec{x} - \vec{y}) - p(t_1 - s, \vec{x} - \vec{y}))(\sigma(s+h, y) - \sigma(s, y))d\vec{y} \right|,$$

$$J_2(t,s,h) = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (p(t - s - h, \vec{x} - \vec{y}) - p(t - s, \vec{x} - \vec{y}))\sigma(s+h, y)d\vec{y} \right|.$$

Аналогічно до (5.8),

$$J_1(s,h) \le C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t_1}^{t_2} (u-s)^{-1} p(u - s, (\vec{x} - \vec{y})/2) du h^{\beta(\sigma)} d\vec{y}$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (u-s)^{-1} du \le Ch^{\beta(\sigma)}(t_2 - t_1)(t_1 - s - h)^{-1}.$$

Так само,

$$J_2(t,s,h) \le Ch(t - s - h)^{-1},$$

для $t \in \{t_1, t_2\}$, тому

$$|Q(\widetilde{z}, s+h) - Q(\widetilde{z}, s)| \le C(h^{\beta(\sigma)}(t_2 - t_1) + h)(t_1 - s - h)^{-1}. \qquad (5.14)$$

З іншого боку, використовуючи підстановки

$$\vec{v} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{2a\sqrt{t - s - h}}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{2a\sqrt{t - s}},$$

одержимо нерівність, аналогічну до (5.6), таким чином

$$|Q(\widetilde{z}, s+h) - Q(\widetilde{z}, s)| \le Ch^{\beta(\sigma)}(t - s)^{-\beta(\sigma)/2}$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}(t_1 - s - h)^{-\beta(\sigma)/2}. \qquad (5.15)$$

Запишемо тепер

$$\int_0^{t_1} w^2_{2,[0,t_1]}(Q(\widetilde{z}, \cdot), r) r^{-2\alpha - 1} dr$$

$$= \left(\int_{t_2-t_1}^{t_1} + \int_0^{t_2-t_1} \right) \sup_{0\le h\le r} \left(\int_0^{t_1-h} | Q(\tilde{z}, s+h) - Q(\tilde{z}, s) |^2 \, ds \right) r^{-2\alpha-1} dr$$

$$=: L_1 + L_2.$$

Для оцінки L_1 для деякого $\lambda \in (1/2,1)$ перемножимо (5.12) в степені $2-2\lambda$ та (5.13) в степені 2λ і позначимо $\rho = 2\lambda(\beta(\sigma)-1)+2$, $\nu = \lambda(2-\beta(\sigma))-2$. Тоді, за умови $\nu > -1$ маємо

$$L_1 \le C(t_2-t_1)^{\rho} \int_{t_2-t_1}^{t_1} \sup_{0\le h\le r} \left(\int_0^{t_1-h} (t_1-s-h)^{\nu} ds \right) r^{-2\alpha-1} dr$$

$$\le C(t_2-t_1)^{\rho} \int_{t_2-t_1}^{t_1} t_1^{\nu+1} r^{-2\alpha-1} dr \le C(t_2-t_1)^{\rho-2\alpha}.$$

Так само, для оцінки L_2 перемножимо (5.14) в степені $2-2\lambda$ та (5.15) в степені 2λ і одержимо

$$L_2 \le \int_0^{t_2-t_1} \sup_{0\le h\le r} \left(h^{2\beta(\sigma)} (t_2-t_1)^{2-2\lambda} \int_0^{t_1-h} (t_1-s-h)^{\nu} ds \right) r^{-2\alpha-1} dr$$

$$+ C \int_0^{t_2-t_1} \sup_{0\le h\le r} \left(h^{\rho} \int_0^{t_1-h} (t_1-s-h)^{\nu} ds \right) r^{-2\alpha-1} dr$$

$$\le C(t_2-t_1)^{2-2\lambda} \int_0^{t_2-t_1} r^{2\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr + C \int_0^{t_2-t_1} r^{\rho-2\alpha-1} dr \le C(t_2-t_1)^{\rho-2\alpha}.$$

Отже,

$$\int_0^{t_1} w^2_{2,[0,t_1]}(Q(\tilde{z},\cdot), r) r^{-2\alpha-1} dr \le C(t_2-t_1)^{\rho-2\alpha}. \tag{5.16}$$

Вибираючи λ і α достатньо близько до $1/(2-\beta(\sigma))$ і $1/2$ відповідно, можна зробити показник як завгодно близьким до $2(\beta(\sigma)-1)/(2-\beta(\sigma))+1 = \beta(\sigma)/(2-\beta(\sigma)) > 2\tilde{\gamma}_2$.

Тепер розглянемо перший інтеграл з нерівності (2.6):

$$\left(\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1 \wedge (T-r)} | Q(\tilde{z}, t_1) - Q(\tilde{z}, s) |^2 ds dr \right)^{1/2}$$

$$\le\left(\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1}\int_{t_1-r}^{t_1}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{1/2}.$$

З одного боку, за (5.10)

$$|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|\le|Q(\tilde z,t_1)|+|Q(\tilde z,s)|\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2},$$

з іншого, за першою нерівністю співвідношення (5.15) для $t_1-r\le s\le t_1$

$$|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|=|Q(\tilde z,s+(t_1-s))-Q(\tilde z,s)|\le C(t_1-s)^{\beta(\sigma)/2}\le Cr^{\beta(\sigma)/2}.$$

Тоді для довільного $\lambda_0\in(0,1)$ маємо

$$|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|\le C(t_2-t_1)^{(1-\lambda_0)\beta(\sigma)/2}r^{\lambda_0\beta(\sigma)/2},$$

а, отже,

$$\left(\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1}\int_{t_1-r}^{t_1}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{1/2}$$

$$\le C(t_2-t_1)^{(1-\lambda_0)\beta(\sigma)/2}\left(\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1}r^{1+\lambda_0\beta(\sigma)}\,dr\right)^{1/2}\le C(t_2-t_1)^{(1-\lambda_0)\beta(\sigma)/2},$$

при будь-якому $\lambda_0>0$ і відповідному $\alpha>1/2$.

Крім того,

$$t_1^{-\alpha}\left(\int_0^{t_1}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\right)^{1/2}\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2}t_1^{1/2-\alpha}$$

$$\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2}\delta^{1/2-\alpha}\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2},$$

де C залежить від δ,α.

Таким чином, враховуючи (2.6), (5.10) та (5.16) одержимо

$$\left\|Q(\tilde z,\cdot\wedge t_1)\right\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}\le C(t_2-t_1)^{\tilde\gamma_2},$$

що разом з (5.7) та (5.11) дає нам шукану оцінку

$$|I_1|\le C(\omega)(t_2-t_1)^{\tilde\gamma_2}.$$

Остаточно, ми одержали, що для кожного фіксованого $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$ та довільного фіксованого $\tilde{\gamma}_2 > 0$ такого, що $\tilde{\gamma}_2 \le \beta(\mu)$ та $\tilde{\gamma}_2 < \beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$ випадкова функція $\hat{\vartheta}(t)$ має модифікацію, для якої виконується

$$\left|\hat{\vartheta}(t_2)-\hat{\vartheta}(t_1)\right| \le C(\omega)\,|t_2-t_1|^{\tilde{\gamma}_2}, \quad t_1,t_2 \in [\delta,T]$$

Зауважимо, що тут $C(\omega)$ не залежить від t_1 і t_2, а залежить від $\tilde{\gamma}_2,\alpha,T,\delta$ та ω. □

5.3.3. Основний результат.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються припущення* А3.1 – А3.6. *Тоді*

(i) *Рівняння (5.2) має розв'язок* $u(t,\vec{x})$. *Якщо* $v(t,\vec{x})$ *— інший розв'язок (5.2), то для всіх* $t\in[0,T],\vec{x}\in\mathbb{R}^d$ $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

(ii) *Для будь-яких фіксованих* $t\in[0,T]$, $K>0$, $\gamma_1<\beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1\le\beta(u_0)$ *стохастична функція* $u(t,\vec{x}),|\vec{x}|\le K$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

(iii) *Якщо також справедливе припущення А3.7, то для будь-яких фіксованих* $\delta>0,K>0$ *та* γ_1,γ_2 *таких, що* $\gamma_1<\beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1\le\beta(u_0)$, $\gamma_2\le\beta(\mu)\wedge\beta(u_0)$ *та* $\gamma_2<\beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$, *випадкова функція* $u(t,\vec{x})$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,\vec{x})$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,\vec{x}_1)-\bar{u}(t_2,\vec{x}_2)|\le C(\omega)\left(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_i\in[\delta,T],\quad |\vec{x}_i|\le K,\ i=1,2.$$

Доведення. Обґрунтування справедливості пунктів (i) та (ii) нашої теореми повністю повторює доведення відповідних пунктів теореми зі статті [112] з використанням Леми 5.1 (замість [112, Лема 5.1]) та ітераційного процесу, для якого $u^{(0)}(t,\vec{x})=0$ та $\forall n\ge 0$

$$u^{(n+1)}(t,\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^d}p(t,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y}+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}p(t-s,\vec{x}-\vec{y})f(s,\vec{y},u^{(n)}(s,\vec{y}))d\vec{y}$$

$$+\int_{[0,t]} d\mu(s)\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}.$$

Розглянемо тепер (iii). Нехай $\vec{x}\in\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d : |\vec{x}|\le K\}$, $\delta<t_1<t_2<T$ — фіксовані. Тоді, застосовуючи Лему 5.2, матимемо для відповідної модифікації випадкової функції $u(\cdot,\vec{x})$: $\quad |u(t_1,\vec{x})-u(t_2,\vec{x})|$

$$\le\left|\int_{\mathbb{R}^d} p(t_1,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y}-\int_{\mathbb{R}^d} p(t_2,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y}\right|$$

$$+\left|\int_0^{t_1} ds\int_{\mathbb{R}^d} p(t_1-s,\vec{x}-\vec{y})\,f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y}-\right.$$

$$\left.\int_0^{t_1} ds\int_{\mathbb{R}^d} p(t_2-s,\vec{x}-\vec{y})\,f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y}\right|$$

$$+\left|\int_{t_1}^{t_2} ds\int_{\mathbb{R}^d} p(t_2-s,\vec{x}-\vec{y})\,f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y}\right|+C(\omega)\,|t_1-t_2|^{\tilde{\gamma}_2}$$

$$=D_1+D_2+D_3+C(\omega)\,|t_1-t_2|^{\tilde{\gamma}_2}\ .$$

Зробивши заміни змінних $\vec{v}=(\vec{x}-\vec{y})/(2a\sqrt{t_i}), i=1,2$, з A3.2 одержимо

$$D_1=C\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{v}|^2}\left(u_0(\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t_1})-u_0(\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t_2})\right)d\vec{v}\right|$$

$$\le C\,|\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}|^{\beta(u_0)}\le C\,|t_1-t_2|^{\beta(u_0)}\ .$$

Оцінимо тепер доданок D_2. Використовуючи обмеженість f та нерівність $|\partial_t p(t,\vec{x})|\le Ct^{-1}p(t,\vec{x}/2)$, маємо

$$D_2\le C\int_0^{t_1} ds\int_{\mathbb{R}^d} d\vec{y}\int_{t_1}^{t_2}(u-s)^{-1}\,p(u-s,(\vec{x}-\vec{y})/2)du$$

$$=C\int_0^{t_1} ds\int_{t_1}^{t_2}(u-s)^{-1}du=C\int_0^{t_1}\ln\left(1+\frac{t_2-t_1}{t_1-s}\right)ds$$

$$=\left|\frac{t_2-t_1}{t_1-s}=\tau\right|=C\,|t_1-t_2|\int_{\frac{t_2-t_1}{t_1}}^{\infty}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^2}d\tau$$

$$\le C\,|\,t_1-t_2\,|\left(-\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}\Bigg|_{\frac{t_2-t_1}{t_1}}^{\infty}-\ln\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Bigg|_{\frac{t_2-t_1}{t_1}}^{\infty}\right)$$

$$\le C\,|\,t_1-t_2\,|\left(C+|\ln(t_2-t_1)|\right)\le C\,|\,t_1-t_2\,|+C\,|\,t_1-t_2\,\|\ln(t_2-t_1)\,|$$

$$\le C\,|\,t_1-t_2\,|+C\,|\,t_1-t_2\,|^{\gamma_2}\le C\,|\,t_1-t_2\,|^{\gamma_2},$$

оскільки для довільного $\theta\in(0,1)$ існує така стала $C=C(\theta)$, що

$$|\,t\,|\ln|\,t\,|\le C\,|\,t\,|^{\theta},\quad |\,t\,|\le T.$$

З припущення A3.3 одержимо $D_3\le C\,|\,t_1-t_2\,|$, а отже,

$$\left|u(t_1,\vec{x})-u(t_2,\vec{x})\right|\le C(\omega)\,|\,t_1-t_2\,|^{\gamma_2}\,.$$

Таким чином, за припущень пункту (iii), ми отримали модифікацію $\bar{u}^{(\vec{x})}$, неперервну за Гельдером за змінною $\vec{x}$ при фіксованому t, та модифікацію $\bar{u}^{(t)}$, що задовольняє умову Гельдера за t при кожному фіксованому $\vec{x}$. Виключимо всі $\omega\in\Omega$, для яких $\bar{u}^{(\vec{x})}(t,\vec{x})\ne\bar{u}^{(t)}(t,\vec{x})$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,\vec{x})\in[\delta,T]\times\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d:|\,\vec{x}\,|\le K\}$. Для всіх інших ω покладемо $\bar{u}=\bar{u}^{(\vec{x})}=\bar{u}^{(t)}$ для раціональних $(t,\vec{x})$ та довизначимо на всю множину $[\delta,T]\times\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d:|\,\vec{x}\,|\le K\}$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\bar{u}(t,x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними $t,\vec{x}$.

5.4. Асимптотична поведінка м'якого розв'язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(t), t\in[0,T]$

Теорема 5.2. *Нехай виконуються припущення* A3.1 – A3.6 *та* A3.8. *Тоді для розв'язку рівняння (5.2) існує така модифікація* $u(t,\vec{x})$, *що для будь-яких фіксованих* $t\in[0,T],\omega\in\Omega$ *виконується*

$$|\,u(t,\vec{x})\,|\to 0,\quad |\,\vec{x}\,|\to\infty.$$

Доведення. За теоремою 5.10, якщо виконуються припущення А3.1 – А3.6, то рівняння (5.2) має єдиний розв’язок $u(t,\vec{x})$ для всіх $t\in[0,T],\vec{x}\in\mathbb{R}^d$. Для цього розв’язку маємо

$$|u(t,\vec{x})|\le\left|\int_{\mathbb{R}^d}p(t,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y}\right|$$
$$+\left|\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}p(t-s,\vec{x}-\vec{y})f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y}\right|$$
$$+\left|\int_{[0,t]}d\mu(s)\int_{\mathbb{R}^d}p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}\right|$$
$$=I_1(t,\vec{x})+I_2(t,\vec{x})+I_3(t,\vec{x}).$$

Розглянемо спочатку стохастичний інтеграл

$$I_3(t,\vec{x})=\int_{[0,t]}q(t,\vec{x},s)d\mu(s).$$

Нехай $t\in[0,T],\vec{x}\in\mathbb{R}^d$ — фіксовані. Тоді випадкова функція $\eta(z)=I_3(t,\vec{x}),z=(t,\vec{x})$, має модифікацію (2.4), для якої виконується співвідношення (2.5). Причому, модифікацію будуємо на множині

$$Z\times[0,t]=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d:|\vec{x}|\le K\}\times[0,t]\times[0,t],$$

і оцінка (2.5) в цьому випадку має вигляд

$$\left|I_3(t,\vec{x})\right|\le|q(t,\vec{x},0)\mu((0,t])|$$
$$+C\|q(t,\vec{x},\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])}\times\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{1/2},$$

де стала C залежить від t. Розглянемо окремо складові даної нерівності. Для довільного $s\in[0,t]$ оцінимо $|q(t,\vec{x},s)|$.

Ми маємо, що $\forall\varepsilon_0>0\quad\exists\delta_0>0\quad\forall|\vec{y}|>\delta_0$:

$$|u_0(\vec{y})|<\varepsilon_0;\quad\sup_{s\in[0,T],v\in\mathbb{R}}|f(s,\vec{y},v)|<\varepsilon_0;\quad\sup_{s\in[0,T]}|\sigma(s,\vec{y})|<\varepsilon_0;$$

$$\int_{\{|\vec{y}|>\delta_0\}}e^{-|\vec{y}|^2}dy<\varepsilon_0,\tag{5.17}$$

де використали припущення А3.8 і те, що $\int_{\mathbb{R}} e^{-|\vec{y}|^2} dy = \pi^{d/2} < +\infty$.

Тоді $\forall\, s \le t$, $\forall\, |\vec{x}| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T}$:

$$|q(t,\vec{x},s)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\left(4a^2\pi(t-s)\right)^{d/2}} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4a^2(t-s)}} \sigma(s,\vec{y})d\vec{y} \right|$$

$$= \left| \vec{v} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s}} \right|$$

$$= \pi^{-d/2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{v}|^2} \sigma(s,\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t-s})d\vec{v} \right| = \pi^{-d/2} \left| \int_{\{|\vec{v}|\le\delta_0\}} + \int_{\{|\vec{v}|>\delta_0\}} \right|$$

$$\overset{(5.17),\text{А8}}{<} \pi^{-d/2}\varepsilon_0 \int_{\{|\vec{v}|\le\delta_0\}} e^{-|\vec{v}|^2} d\vec{v} + \pi^{-d/2}\varepsilon_0 C \le C\varepsilon_0. \tag{5.18}$$

Таким чином, ми отримуємо

$$|q(t,\vec{x},0)| < C\varepsilon_0, \quad \|q(t,\vec{x},\cdot)\|_{L_2([0,t])} = \left(\int_0^t |q(t,\vec{x},s)|^2 ds \right)^{1/2} < C\varepsilon_0.$$

Далі оцінимо модуль неперервності. Використовуючи заміну змінних

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s-h}}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s}},$$

та А3.6, маємо для $0 \le h \le t-s$

$$|q(t,\vec{x},s+h) - q(t,\vec{x},s)|$$

$$= \pi^{-d/2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{v}|^2} (\sigma(s+h,\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t-s-h}) - \sigma(s,\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t-s}))d\vec{v} \right|$$

$$\le C \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{v}|^2} \left(|h|^{\beta(\sigma)} + \left| \frac{-2a\vec{v}h}{\sqrt{t-s-h}+\sqrt{t-s}} \right|^{\beta(\sigma)} \right) d\vec{v} \right|$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}(1+(t-s)^{-\frac{\beta(\sigma)}{2}}) \le Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)^{-\frac{\beta(\sigma)}{2}}.$$

Отже,

$$w_{2,[0,t]}(q(t,\vec{x},\cdot),r)$$

$$= \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{t-h} |q(t,\vec{x},s+h)-q(t,\vec{x},s)|^2\,ds\right)^{1/2} \le Cr^{\beta(\sigma)}. \qquad (5.19)$$

З іншого боку, за (5.18) для $s+h\le t$ виконується

$$|q(t,\vec{x},s+h)-q(t,\vec{x},s)| \le |q(t,\vec{x},s+h)|+|q(t,\vec{x},s)| < C\varepsilon_0,$$

і тому

$$w_{2,[0,t]}(q(t,\vec{x},\cdot),r) < C\varepsilon_0\sqrt{t} \le C\varepsilon_0. \qquad (5.20)$$

Перемножимо тепер нерівності (5.19) та (5.20), піднесені до степенів θ та $1-\theta$ відповідно, для довільного $\theta\in(0,1)$. Маємо,

$$w_{2,[0,t]}(q(t,\vec{x},\cdot),r) < Cr^{\theta\beta(\sigma)}\varepsilon_0^{1-\theta}.$$

Тоді,

$$\|q(t,\vec{x},\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} < C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0^{1-\theta}\left(\int_0^t r^{2\theta\beta(\sigma)-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2} \le C(\varepsilon_0\vee\varepsilon_0^{1-\theta}),$$

для відповідного $\alpha<\theta\beta(\sigma)$. Тобто, ми одержали

$$\left|\int_{[0,t]} d\mu(s)\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})\,d\vec{y}\right|$$

$$< C(\varepsilon_0\vee\varepsilon_0^{1-\theta})\left(|\mu((0,t])| + \left\{\sum_{n\ge1}2^{-n(2\alpha-1)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu(\Delta_{kn}^{(t)})\right|^2\right\}^{1/2}\right)$$

$$\le C(\omega)(\varepsilon_0\vee\varepsilon_0^{1-\theta}),$$

де в останній нерівності ми використали [112, лема 3.1].

Крім того, аналогічними міркуваннями, як і при отриманні (5.18), приходимо до оцінок

$$I_1(t,\vec{x}) = \pi^{-d/2}\left|\int_{\{|\vec{v}|\le\delta_0\}} e^{-|\vec{v}|^2}u_0(\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t-s})\,d\vec{v}\right.$$

$$\left.+\int_{\{|\vec{v}|>\delta_0\}} e^{-|\vec{v}|^2}u_0(\vec{x}-2a\vec{v}\sqrt{t-s})\,d\vec{v}\right|$$

$$\overset{A1,(5.17)}{<} \varepsilon_0+\pi^{-d/2}C(\omega)\varepsilon_0 \le C(\omega)\varepsilon_0, \quad \forall|\vec{x}|>\delta_0+2|a|\delta_0\sqrt{T},$$

та

$$I_2(t,\vec{x}) < C\varepsilon_0, \quad \forall\,|\vec{x}| > \delta_0 + 2\,|a|\,\delta_0\sqrt{T}.$$

$\forall\varepsilon > 0$ покладемо в (5.17) $\varepsilon_0 = \varepsilon C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon \geq 1$ та $\varepsilon_0 = \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon < 1$.

Таким чином, для довільних фіксованих $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ маємо, що

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = (1 + 2\,|a|\,\sqrt{T})\delta_0 \quad \forall|\vec{x}| > \delta\colon \quad |u(t,\vec{x})| < \varepsilon,$$

що й завершує доведення даної теореми. □

5.5. Висновки

Досліджено стохастичне рівняння теплопровідності, породжене загальною стохастичною мірою $\mu(t)$ на множині $[0,T] \times \mathbb{R}^d, d \geq 1$. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його неперервність за Гельдером.

Відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1 < \beta(\sigma)$, $\gamma_1 \leq \beta(u_0)$ та $\gamma_2 \leq \beta(\mu) \wedge \beta(u_0)$, $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$ за змінними $\vec{x}$ і t відповідно. При цьому, в роботі [113] для $d = 1$ було одержано $\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$, $\gamma_2 \leq \beta(\mu)$ і $\gamma_2 < \beta(\sigma) - 1/2$. Таким чином, нам вдалося узагальнити результати [113] та, оскільки $x/(4 - 2x) > x - 1/2$ для $x \in (1/2, 1)$, покращити показники неперервності за Гельдером.

Розглянуте стохастичне рівняння теплопровідності описує зміну температури деякого середовища, в якому присутні певні випадкові та невипадкові надходження теплової енергії.

Доведено, що за вказаних умов щодо джерел теплової енергії температура середовища прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

ВИСНОВКИ

Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних почали привертати увагу дослідників в 60-х роках минулого століття. Цей інтерес був зумовлений, з одного боку, необхідністю описувати випадковий вплив у таких природничих науках, як фізика, хімія, біологія, а з іншого — внутрішнім розвитком теорії випадкових процесів та стохастичного аналізу.

Зазвичай розлядалися диференціальні рівняння з випадковими мірами, що задовольняють певні припущення — такі, як існування моментів, неперервність, мартингальність, невід'ємність тощо. Так, в процесі розвитку теорії стохастичних рівнянь було широко досліджено диференціальні рівняння в частинних похідних з вінерівським процесом, з мартингальними та пуссонівськими мірами, з дробовим броунівським рухом та процесом Леві. Докладно вивчалися питання про існування та єдиність розв'язків цих рівнянь та їх регулярність, асимптотична поведінка.

В даній дисертаційній роботі вивчаються диференціальні рівняння в частинних похідних зі стохастичними мірами, на які накладається лише умова сигма-адитивності. Вони певним чином узагальнюють згадані вище рівняння та є мало дослідженими.

Розділ 3 дисертації присвячений доведенню існування, єдиності та неперервності за Гельдером м'яких розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t)$, $t\in[0,T]$ та $\mu(x)$, $x\in\mathsf{R}$, а також встановленню неперервної залежності вказаних розв'язків від даних. Зокрема, у випадку хвильового рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x)$ отримано показники гельдеровості за просторовою та часовою змінними відповідно $\gamma_1,\gamma_2\in[0,\beta(u_0)],\gamma_1<1-1/(2\beta(\sigma))$, $\gamma_2<1/2$. Для розв'язку хвильового рівняння зі стохастичною мірою $\mu(t)$ отримано показники гельдеровості за просторовою та часовою змінними $\gamma_1 \in [0, \beta(u_0)], \gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ та $\gamma_2 \in [0, \beta(u_0)], \gamma_2 < 1/2$ відповідно.

В розділі 4 досліджено задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу на множині $[0,T] \times \mathrm{R}$, породженого загальною стохастичною мірою $\mu(x), x \in \mathrm{R}$. Доведено існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку.

Порівнюючи одержані результати з результатами роботи [112] (для рівняння теплопровідності), відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1 < 1/2$ та $\gamma_2 < 1/4$ за просторовою та часовою змінними відповідно. Для випадку рівняння теплопровідності в [112] одержано показники $\gamma_1 < 1/6$ та $\gamma_2 < 1/18$. Таким чином, нам вдалося зробити узагальнення та покращити показники неперервності за Гельдером.

Розглянуте в даному розділі стохастичне рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x), x \in \mathrm{R}$ описує зміну температури в середовищі при наявності певних випадкових і невипадкових надходжень теплової енергії. Показано, що при виконанні вказаних умов і необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати температура прямує до нуля.

В розділі 5 досліджено задачу Коші для стохастичного рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(t)$ на множині $[0, T] \times \mathrm{R}^d, d \geq 1$. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його неперервність за Гельдером.

Відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1 < \beta(\sigma)$, $\gamma_1 \leq \beta(u_0)$ та $\gamma_2 \leq \beta(\mu) \wedge \beta(u_0)$, $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$ за змінними $\vec{x}$ і t відповідно. При цьому, в роботі [113] для $d = 1$ було одержано $\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$, $\gamma_2 \leq \beta(\mu)$ і $\gamma_2 < \beta(\sigma) - 1/2$. Таким чином, нам вдалося узагальнити результати вказаної роботи та, оскільки $x/(4 - 2x) > x - 1/2$ для $x \in (1/2, 1)$, покращити показники неперервності за Гельдером.

Розглянуте рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(t),\ t \in [0,\ T]$ описує зміну температури деякого середовища, в якому присутні певні випадкові та невипадкові надходження теплової енергії. Доведено, що за вказаних умов щодо джерел теплової енергії температура середовища прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Баклан В. В. Уравнения в вариационных производных и марковские процессы в гильбертовом пространстве: дис. ... кандидата физ.-мат. наук. / Баклан Владислав Володимирович. — К., 1964. — 110 с.

[2] Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

[3] Боднарчук І. М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою / І. Боднарчук // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 2010. — № 24. — С. 28–33.

[4] Боднарчук І. Асимптотична поведінка м'якого розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності / І. Боднарчук // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 2016. — № 36. — С. 40–42.

[5] Боднарчук І. М. Хвильове рівняння зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2016. — № 94. — С. 1–15.

[6] Боднарчук І. М. Регулярність м'якого розв'язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, 1. — С. 3–16.

[7] Боднарчук І. М. Асимптотична поведінка розв'язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук, В. М. Радченко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. — 2012. — Т. 2, № 1. — С. 7–11.

[8] Боднарчук І. М. Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із

загальною стохастичною мірою / І. М. Боднарчук, Г. М. Шевченко // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2015. — №. 93. — С. 7–21, (english translation in Theory of Probability and Mathematical Statistics — 2016. — No. 93. — P. 1–17).

[9] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян — М.: Наука, 1985. — 368 с.

[10] Гихман И. И. Об одной схеме образования случайных процессов / И. И. Гихман // Докл. АН СССР. — 1947. — Vol. 58, № 6. — P. 961–964.

[11] Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К.: Наукова думка, 1968. — 354 с.

[12] Гихман И. И. Теория случайных процессов. Т. I / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1971. — 664 с.

[13] Далецкий Ю. Л. Дифференциальные уравнения с функциональными производными и стохастические уравнения для обобщенных случайных процессов / Ю. Л. Далецкий // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 166. — С. 1035–1038.

[14] Далецкий Ю. Л. Стохастические интегралы относительно нормально распределенной функции множества / Ю. Л. Далецкий, С. Н. Парамонова // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 208, № 3. — С. 512–515.

[15] Далецкий Ю. Л. Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов / Ю. Л. Далецкий, С. Н. Парамонова // Теория вероятн. и ее примен. — 1974. — Т. XIX, № 4. — С. 844–848.

[16] Дороговцев А. А. Стохастический анализ и случайные отображения в

гильбертовом пространстве / А. А. Дороговцев — К.: Наукова думка, 1992. — 120 с.

[17] Дороговцев А. А. Стохастические уравнения с упреждением / А. А. Дороговцев — К.: Институт математики НАН Украины, 1996. — 152 с.

[18] Прохоров Ю. В. О случайных мерах на компакте / Ю. В. Прохоров // Докл. АН СССР — 1961. — Т. 138, № 1. — С. 53–55.

[19] Радченко В. Н. Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы / В. Н. Радченко // Теория вероятн. и ее примен. — 1991. — Т. 36, 3. — С. 594–596.

[20] Радченко В. Н. Равномерная интегрируемость для интегралов по L_0-значным мерам / В. Н. Радченко // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, 9. — С. 1264–1267.

[21] Радченко В. Н. О сходимости интегралов по L_0-значным мерам / В. Н. Радченко // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53, 5. — С. 102–106.

[22] Радченко В. Н. Об определении интеграла от случайной функции / В. Н. Радченко // Теория вероятн. и ее примен. — 1996. — Т. 41, 3. — С. 677–682.

[23] Радченко В. М. Про наближення інтегралів по випадковій мірі з допомогою дійсної міри / В. М. Радченко // Теор. ймовірност. та матем. статист. — 1996. — 55. — С. 165–166.

[24] Радченко В. Н. Равномерная интегрируемость и теорема Лебега для интегралов по L_0-значным мерам / В. Н. Радченко // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, 6. — С. 857–860.

[25] Радченко В. Н. Сходимость интегралов от неограниченных действительных функций по случайным мерам / В. Н. Радченко // Теория вероятн. и ее примен. — 1997. — Т. 42, 2. — С. 358–364.

[26] Радченко В. Н. Интегралы по общим случайным мерам / В. Н. Радченко // Труды Института математики НАН Украины. Т. 27. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. — 196 с.

[27] Радченко В. М. Теорема Віталі–Каратеодорі для інтегралів за загальними випадковими мірами / В. М. Радченко // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 2005. — № 13-14. — С. 6–8.

[28] Радченко В. М. Залежні від параметра інтеграли за загальними випадковими мірами / В. М. Радченко // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2006. — № 75. — С. 140–143.

[29] Радченко В. М. Повнота простору дійсних функцій, інтегровних за випадковою мірою / В. М. Радченко // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 2006. — № 15-16. — С. 62–65.

[30] Радченко В. М. Кабельне рівняння із загальною стохастичною мірою / В. М. Радченко // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2011. — № 84. — С. 123–130.

[31] Радченко В. М. Асимптотична поведінка розв’язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою при $t\to\infty$ / В. М. Радченко // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. — 2012. — Т. 23, № 1. — С. 119–124.

[32] Радченко В. Н. Эволюционные уравнения с общими стохастическими

мерами в гильбертовом пространстве / В. Н. Радченко // Теория вероятн. и ее примен. — 2014. — Т. 59, 2. — С. 375–386.

[33] Радченко В. М. Інтегральні рівняння із загальною стохастичною мірою / В. М. Радченко // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2014. — № 91. — С. 154–163.

[34] Радченко В. М. Перетворення Фур'є загальних стохастичних мір / В. М. Радченко, Н. М. Стефанська // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2016. — № 94. — С. 143–149.

[35] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы / Б. А. Севастьянов — М.: Наука, 1971. — 436 с.

[36] Скороход А. В. Декілька зауважень про випадкові міри / А. В. Скороход // Вісник Київ. ун-ту. Сер. астрон., матем. та механ. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 105–114.

[37] Скороход А. В. Случайные меры и их применение в теории случайных процессов и статистике / А. В. Скороход // Тр. Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статист. 1958 г. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. — С. 79–82.

[38] Скороход А. В. Об одном обобщении стохастического интеграла / А. В. Скороход // Теория вероятн. и ее примен. — 1975. — Т. 20, № 2. — С. 224–237.

[39] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. / В. И. Татарский — М.: Наука, 1967. — 548 с.

[40] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства,

дифференциальные операторы: Пер. с англ. / Х. Трибель — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[41] Чантладзе Т. Л. О стохастическом дифференциальном уравнении в гильбертовом пространстве / Т. Л. Чантладзе // Сообщ. АН Груз. ССР — 1964. — Т. 33. — С. 529–534.

[42] Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения: Пер. с англ. / Р. Эллиотт — М.: Мир, 1986. — 351 с.

[43] Albeverio S. Parabolic SPDEs driven by Poisson white noise / S. Albeverio, J.-L. Wu, T.-S. Zhang // Stochastic Process. Appl. — 1998. — Vol. 74. — P. 21–36.

[44] Applebaum D. Lévy processes and stochastic calculus. 2nd edition / D. Applebaum — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 460 p.

[45] Balan R. M. Stochastic heat equation with multiplicative fractional-colored noise / R. M. Balan, C. A. Tudor // Journal of Theoretical Probability. — 2010. — Vol. 23, 3 — P. 834–870.

[46] Barbu V. Stochastic wave equations with dissipative damping / V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro // Stochastic Process. Appl. — 2007. — Vol. 117, 8 — P. 1001–1013.

[47] Bochner S. Stochastic processes / S. Bochner // Ann. Math. — 1947. — Vol. 48, 4 — P. 1014–1061.

[48] Boudaoui A. Existence of mild solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional Brownian motion and impulses / A. Boudaoui, T.

Caraballo, A. Ouahab // Stochastic Anal. Appl. — 2015. — Vol. 33, 2 — P. 244–258.

[49] Buldygin V. V. On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations / V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach, O. A. Tymoshenko // Theory of Stochastic Processes. — 2008. — Vol. 14 (30), 1 — P. 11–29.

[50] Buldygin V. V. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients / V. V. Buldygin, O. A. Tymoshenko // Theory of Stochastic Processes. — 2010. — Vol. 16 (32), 2 — P. 12–22.

[51] Chow P.-L. Stochastic partial differential equations in turbulence-related problems / P.-L. Chow. // Probabilistic Analysis and Related Topics — 1978. — Vol. I. — P. 1–43.

[52] Chow P.-L. Stochastic partial differential equations / P.-L. Chow. 2nd edition // Advances in applied mathematics. — Boca Raton: CRC Press, 2014. — 334 p.

[53] Cramer H. On the theorie of random processes / H. Cramer // Ann. Math. — 1940. — Vol. 41 — P. 215–230.

[54] Courrége P. Intégrale stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable / P. Courrége // Séminaire de Théorie du Potentiel dirigé par M. Berlot, G. Choquet, et J. Dény. — 1962/1963. — 7é année. — P. 1–20.

[55] Dalang R. C. Extending martingale measure stochastic integral with

applications to spatially homogeneous s.p.d.e's / R. C. Dalang // Electron. J. Probab. — 1999. — Vol. 4. — P. 1–29.

[56] A minicourse on stochastic partial differential equations / R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, C. Mueller [at. al.] // Lecture Notes in Math. Vol. 1962. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — xi+216 p.

[57] Dalang R. C. The stochastic wave equation / R. C. Dalang // A minicourse on stochastic partial differential equations. Lecture Notes in Math. Vol. 1962. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — P. 39–71.

[58] Dalang R. C. Some non-linear spde's that are second order in time / R. C. Dalang, C. Mueller // Electron. J. Probab. — 2003. — Vol. 8. — P. 1–21.

[59] Dalang R. C. Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension 3 / R. C. Dalang, M. Sanz-Solé // Memoirs of the American mathematical Society. — 2009. — Vol. 199, 931. — vi+70 p.

[60] Dalang R. C. Regularity of the sample paths of a class of second-order spde's / R. C. Dalang, M. Sanz-Solé // J. Func. Anal. — 2005. — Vol. 227. — P. 304–337.

[61] Dalang R. C. Stochastic integrals for spde's: A comparison / R. C. Dalang, L. Quer-Sardanyons // Expositiones Mathematicae. — 2011. — Vol. 29. — P. 67–109.

[62] Da Prato G. Stochastic Equations in Infinite Demensions / G. Da Prato, J. Zabczyk // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 45. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. — 454 p.

[63] Dawson D. A. Stochastic evolution equations / D. A. Dawson // Math.

Biosci. — 1972. — Vol. 15, 3-4. — P. 287–316.

[64] Decreusefond L. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion / L. Decreusefond, A. S. Üstünel // Potent. Anal. — 1999. — Vol. 10 — P. 177–214.

[65] Dettweiler J. Space-time regularity of solutions of the parabolic stochastic Cauchy problem / J. Dettweiler, L. Weis, J. van Neerven // Stochastic Anal. Appl. — 2006. — Vol. 24 — P. 843–869.

[66] Doleans-Dade C. Quelques applications de la formule de changement de variable pour les semimartingales / C. Doleans-Dade // Z. Wahrsch. verw. Geb. — 1970. — Vol. 16. — P. 181–194.

[67] Doob J. L. Stochastic Processes / J. L. Doob. — New York: Wiley, 1953. — vii+654 p.

[68] Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration / L. Drewnowski // III, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. — 1972. — Vol. 20. — P. 439–445.

[69] Drewnowski L. Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable functions / L. Drewnowski // Proc. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 91, 4. — P. 581–588.

[70] Fleming W. H. Distributed parameter stochastic systems in population biology / W. H. Fleming // Lecture Notes in Economy and Mathematical Systems. — 1975. — Vol. 107. — P. 179–191.

[71] Gawarecki L. Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions:

with Applications to Stochastic Partial Differential Equations / L. Gawarecki, V. Mandrekar // Probability and Its Applications. — Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2010. — 291 p.

[72] Gyöngy I. Existence and uniqueness results for semi-linear stochastic partial differential equations / I. Gyöngy // Stochastic Processes and their Applications. — 1998. — Vol. 73. — P. 271–299.

[73] Hausenblas E. Existence, uniqueness and regularity of parabolic SPDEs driven by Poisson random measure / E. Hausenblas // Electronic Journal of probability. — 2005. — Vol. 10. — P. 1496–1546.

[74] Hitsuda M. Formula for Brownian partial derivatives / M. Hitsuda // The second Japan – USSR symp. on probability theory, Tbilisi, 1972 — New York, Berlin: Springer, 1972. — P. 111–114.

[75] Ilyin A. M. Linear second-order partial differential equations of the parabolic type / A. M. Ilyin, A. S. Kalashnikov, O. A. Oleynik // J. Math. Sci. — 2002. — Vol.108, 4. — P. 435–542.

[76] Itô K. Differential equations determining Markov processes / K. Itô // J. Pan-Japan Math. Coll. — 1942. — Vol. 1077. — P. 1352–1400. (In Japanese). English transl. Itô K. Selected Papers / K. Itô // Edit. D. W. Strook and S. R. S. Varadhan. — New York: Springer-Verlag, 1987.

[77] Itô K. Stochastic integral / K. Itô // Proc. Imper. Acad. Tokyo. — 1944. — Vol. 20. — P. 519–524.

[78] Itô K. Multiple Wiener integral / K. Itô // J. Math. Soc. Japan. — 1951. —

Vol. 3. — P. 157–169.

[79] Kallenberg O. Random measures / O. Kallenberg — Berlin & London: Academie Verlag & Acad. Press, 1986. — 187 p.

[80] Kalton N. J. L_0-valued vector measures are bounded / N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol.85, 4. — P. 575–582.

[81] Kamont A. A discrete characterization of Besov spaces / A. Kamont // Approx. Theory Appl. — 1997. — Vol. 13, 2. — P. 63–77.

[82] Keller J. B. Stochastic equations and wave propagation in random media / J. B. Keller // Proc. Symp. Appl. Math. — 1964. — Vol. 16. — P. 145–170.

[83] Khoshnevisan D. A Primer on Stochastic Partial Differential Equations / D. Khoshnevisan // A minicourse on stochastic partial differential equations. Lecture Notes in Math. Vol. 1962. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — P. 1–38.

[84] Khoshnevisan D. Analysis of Stochastic Partial Differential Equations / D. Khoshnevisan // CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 119. — Providence: AMS, 2014. — viii+116 p.

[85] Kunita H. On square integrable martingales / H. Kunita, S. Watanabe // Nagoya Math. J.— 1967. — Vol. 30. — P. 209–245.

[86] Kwapień S. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. / S. Kwapień, W. A. Woyczyński — Boston: Birkhäuser, 1992. — 360 p.

[87] Marinelli C. Well-posedness and asymptotic behavior for stochastic reaction-diffusion equations with multiplicative Poisson noise. / C. Marinelli, M.

Röckner // Electron. J. Probab. — 2010. — Vol. 15, 49. — P. 1528–1555.

[88] Maurey B. Un théorème d’extrapolation et conséquences / B. Maurey, G. Pisier // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1973. — Tome A277, 1. — P. 39–42.

[89] Memin J. Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion / J. Memin, Yu. S. Mishura, E. Valkeila // Statist. Prob. Lett. — 2001. — Vol. 51. — P. 197–206.

[90] Metiveir M. Stochastic Integration / M. Metiveir, J. Pellaumail // Probability and Mathematical Statistics. — N.-Y.: Academic Press, 1980. — 208 p.

[91] Meyer P.-A. A decomposition theorem for supermartingales / P.-A. Meyer // Illinois J. Math. — 1962. — Vol. 6. — P. 193–205.

[92] Meyer P.-A. Intégrales stochastiques. I, II, III, IV / P.-A. Meyer // Séminaire de Probabilités X. Lect. Not. Math. — 1966/1967. — Vol. 39. — P. 72–162.

[93] Meyer P.-A. Un cours sur les intégrales stochastiques / P.-A. Meyer // Séminaire de Probabilités X. Lect. Not. Math. — 1976. — Vol. 511. — P. 245–400.

[94] Millet A. On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density / A. Millet, P.-L. Morien // Stochastic Processes and their Applications. — 2000. — Vol. 86. — P. 141–162.

[95] Mishura Yu. S. Quasi-linear stochastic differential equations with a fractional Brownian component / Yu. S. Mishura // Theor Probability and Math. Statist. — 2004. — № 68. — C. 103–115.

[96] Mishura Yu. S. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and

Related Processes / Yu. S. Mishura // Lecture Notes in Math., Vol. 1929. — Berlin: Springer, 2008. — 393 p.

[97] van Neerven J. M. A. M. Stochastic evolution equations in UMD Banach spaces / J. M. A. M. van Neerven, M. C. Veraar, L. Weis // J. Funct. Anal. — 2008. — Vol. 255. — P. 940–993.

[98] Novikov E. A. Functionals and the random-force method in turbulence theory / E. A. Novikov // Soviet Physics JEPT. — 1965. — Vol. 20, 5 — P. 1290–1294.

[99] Nualart D. Anticipating stochastic differential equations / D. Nualart // Bull. Sc. math., 2^e série. — 1993. — Vol. 117 — P. 49–62.

[100] Nualart D. Stochastic calculus with anticipating integrands / D. Nualart, E. Pardoux // Probab. Theory Related Fields — 1988. — Vol. 78 — P. 535–581.

[101] Øksendal B. Multiparameter fractional Brownian motion and quasi-linear stochastic partial differential equations / B. Øksendal, T. Zhang // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 2001. — Vol. 71, 3-4 — P. 141–163.

[102] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy // Applied Mathematical Sciences, Vol. 44 — New York: Springer-Verlag, 1983. — 287 p.

[103] Peszat S. Stochastic partial differential equations with Lévy noise: an evolution equation approach / S. Peszat, J. Zabczyk — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 419 p.

[104] Paley R. E. A. C. Notes on random functions / R. E. A. C. Paley, N.

Wiener, A. Zygmund // Math. Zeit. — 1933. — Vol. 37. — P. 647–668.

[105] Prekopa A. On stochastic set functions. I / A. Prekopa // Acta Math. Acad. Scient. Hung. — 1956. — Vol. 7, 2. — P. 215–263.

[106] Prekopa A. On stochastic set functions. II / A. Prekopa // Acta Math. Acad. Scient. Hung. — 1957. — Vol. 8, 3-4. — P. 337–374.

[107] Prekopa A. On stochastic set functions. III / A. Prekopa // Acta Math. Acad. Scient. Hung. — 1957. — Vol. 8, 3-4. — P. 375–400.

[108] Prévôt C. I. Existence, uniqueness and regularity w.r.t. the initial condition of mild solutions of SPDEs driven by Poisson noise / C. I. Prévôt // Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top. — 2010. — Vol. 13, 1. — P. 133–163.

[109] Printems J. On the discretization in time of parabolic stochastic partial differential equations / J. Printems // Math. Model. Numer. Anal – 2001. – Vol. 35, 6. – P. 1055 – 1078.

[110] Protter P. E. Stochastic integration and differential equations. 2nd edition / P. E. Protter — Berlin: Springer, 2004. — 415 p.

[111] Quer-Sardanyons L. The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet / L. Quer-Sardanyons, S. Tindel // Stochastic Process. Appl. — 2007. — Vol. 117, 10 — P. 1448–1472.

[112] Radchenko V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Studia Math. — 2009. — Vol. 194, 3. — P. 231–251.

[113] Radchenko V. Heat equation with general stochastic measure colored in time / V. Radchenko // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2014. —

Vol. 1. — P. 129–138.

[114] Radchenko V. Stratonovich-type integral with respect to a general stochastic measure / V. Radchenko // Stochastics. — 2016. — Vol. 88, 7. — P. 1060–1072.

[115] Radchenko V. Heat equation with a general stochastic measure on nested fractals / V. Radchenko, M. Zähle // Statistics and Probability Letters. — 2012. — Vol. 82. — P. 699–704.

[116] Samorodnitsky G. Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance/ G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu — Boca Raton: Chapmen & Hall, 1994. — 656 p.

[117] Sanz-Solé M. Absolute continuity for SPDEs with irregular fundamental solution / M. Sanz-Solé, A. Süss // Electron. Commun. Probab. — 2015. — Vol. 20, 14. — P. 1–11.

[118] Serrano R. A note on space-time Hölder regularity of mild solutions to stochastic Cauchy problems in L^p-spaces / R. Serrano // Brazilian Journal of Probability and Statistics. — 2015. — Vol. 29, 4. — P. 767–777.

[119] Talagrand M. Les measures vectorielles á valeurs dans L_0 sont bornées / M. Talagrand // Ann. sci. Ecole norm. super. — 1981. — Vol. 14, 4 — P. 445–452.

[120] Taniguchi T. The existence and asymptotic behaviour of energy solutions to stochastic 2D functional Navier-Stokes equations driven by Lévy processes / T. Taniguchi // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 385, 2 — P. 634–654.

[121] Triebel H. Theory of function spaces / H. Triebel // Monographs in

Mathematics. Vol. 78. — Basel: Birkhäuser, 1983. — 284 p.

[122] Turpin P. Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux / P. Turpin // Dissertationes Mathematicae. Vol. 131. — Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1976. — 221 p.

[123] Walsh J. B. An introduction to stochastic partial differential equations / J. B. Walsh // École d'Été de Probabilités de Saint Flour, XIV — 1984. Lecture Notes in Math. — 1986. — Vol. 1180 — P. 265–439.

[124] Wiener N. Differential space / N. Wiener // J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn. — 1923. — Vol. 2 — P. 131–174.

[125] Bodnarchuk I. Mild solution of wave equation with general stochastic measure / I. Bodnarchuk // Stochastic analysis and random dynamics, International conference: Abstracts, June 14–20, 2009, Lviv. / K: Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, 2009. — P. 24.

[126] Bodnarchuk I. M. Heat equation on multidimentional space with a general stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Stochastic Processes in Abstract Spaces, International conference: Program and Abstracts, October 14–16, 2015, Kyiv. / K: Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, 2015. — P. 11.

[127] Боднарчук І. М. Асимптотична поведінка м'якого розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності / І. М. Боднарчук // Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2016 " , 6–8 квітня 2016 р. — К.: "Київський університет " , 2016. — К.: НТУУ "КПІ ", 2016. — С. 10–11.

[128] Боднарчук І. М. Хвильове рівняння зі стохастичною мірою / І. М.

Боднарчук // Матеріали сімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р. — Т. 3, С. 50.

[129] Bodnarchuk I. M. Mild solution of parabolic equation with stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics, International workshop in honour of Prof. V. V. Buldygin: Abstracts, October 10–12, 2016, Kyiv. / K: National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, 2016. — P. 10.