Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85
MSC 65K05

AN OPTIMIZATION APPROACH TO CONSTRUCTING LYAPUNOV–KRASOVSKY FUNCTIONALS

D. Ya. Khusainov, A. V. Shatyrko, Tetiana Shakotko, Rahima Mustafaeva

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: d.y.Khusainov@gmail.com, shatyrko.a@gmail.com, trachuk_85@ukr.net, mrs1812@mail.ru

ОПТИМІЗАЦІЙНИЙ ПІДХІД ПОБУДОВИ ФУНКЦІОНАЛІВ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСЬКОГО

Д. Я. Хусаінов, А. В. Шатирко, Т. І. Шакотько, Р. Мустафаєва

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: d.y.Khusainov@gmail.com, shatyrko.a@gmail.com, trachuk_85@ukr.net, mrs1812@mail.ru

Abstract. A scalar linear differential equation of the neutral type is considered. When studying the stability and obtaining estimates of the convergence of the solutions of the equation, the functional of the Lyapunov–Krasovsky form is used in the quadratic form plus the integral term. The stability conditions of the zero solution are given. Finding the parameters of the functional is reduced to an optimization problem.
Keywords: equations of neutral type, Lyapunov–Krasovsky functional, asymptotic stability, non-smooth optimization, optimal functionals.

Анотація. Розглядається скалярне лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу. При дослідженні стійкості і отримання оцінок збіжності розв'язків рівняння використовується функціонал Ляпунова–Красовського виду квадратична форма плюс інтегральний доданок. Наведені умови стійкості нульового розв'язку. Знаходження параметрів функціоналу зводиться до оптимізаційної задачі.
Ключові слова: рівняння нейтрального типу, функціонал Ляпунова–Красовського, асимптотична стійкість, негладка оптимізація, оптимальні функціонали.

Вступ

Основні теореми другого методу Ляпунова, які використані при дослідженні стійкості нульового розв'язку функціонально-диференціальних рівняннь, формулюються у вигляді умов існування деякої додатньо визначеної функції (функціонала), повна похідна якої в силу рівняння руху являється від'ємно визначеною функцією (функціоналом). Тоді нульове положення рівноваги буде стійким (асимптотично стійким) [6]. Відкритим являється побудова самої функції (функціонала) Ляпунова. Для лінійних систем (у тому числі і систем з післядією) функція Ляпунова має вид деякого функціонала, залежного від симетричних додатньо визначених матриць [7,8]. І дослідження стійкості зводиться до пошуку додатньо визначених матриць, комбінація яких являється від'ємно визначеною матрицею. У цьому випадку для знаходження симетричних додатньо визначених матриць, за допомогою яких можна отримати твердження про стійкість, можливо використовувати класичні оптимізаційні методи [1–5, 9, 10].

1. Умови стійкості лінійних рівнянь нейтрального типу

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з постійним відхиленням аргументу нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - dx(t-\tau)\right] = ax(t) + bx(t-\tau), \;\; t \geq 0. \tag{1.1}$$

Тут $\tau > 0$, $x(t) \in R^1$, a, b, d — постійні величини. При дослідженні стійкості і отриманні оцінок збіжності розв'язків рівняння (1.1) будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського виду

$$V_0\left[x(t), t\right] = hx^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-s)} \left\{g_1 x^2(s) + g_2\left(\dot{x}(s)\right)^2\right\} ds. \tag{1.2}$$

Введемо наступні позначення

$$S\left(g_1, g_2, h\right) = \begin{bmatrix} -2ah - g_1 - a^2 g_2 & -hb - abg_2 & -hd - adg_2 \\ -hb - abg_2 & e^{-\beta\tau} g_1 - b^2 g_2 & -bdg_2 \\ -hd - adg_2 & -bdg_2 & e^{-\beta\tau} g_2 - d^2 - g_2 \end{bmatrix},$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ x'(t-\tau) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай існують сталі $h > 0$, $g_1 > 0$, $g_2 > 0$ і параметр β, при яких симетрична матриця $S\left(g_1, g_2, h\right)$ буде додатньо визначеною. Тоді нульовий розв'язок рівняння (1.1) буде асимптотично стійким.*

Доведення. При припущеннях, наведених в теоремі 1.1, функціонал Ляпунова–Красовського (1.2) являється додатньо визначеним. Знайдемо його повну похідну в силу рівняння (1.1)

$$\frac{d}{dt}V_0\left[x(t), t\right] = \frac{d}{dt}\left\{hx^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-s)}\left\{g_1 x^2(s) + g_2\left(x'(s)\right)^2\right\}\right\} =$$
$$= 2hx(t)x'(t) + \left\lfloor g_1 x^2(t) + g_2\left(x'(t)\right)^2\right\rfloor - e^{-\beta\tau}\left\lfloor g_1 x^2(t-\tau) + g_2\left(x'(t-\tau)\right)^2\right\rfloor.$$

Перепишемо рівняння (1.1) у вигляді

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-\tau) + dx'(t-\tau), \ \ t \geq 0, \tag{1.1.1}$$

Підставивши у вираз повної похідної замість $x'(t)$ його значення із рівняння (1.1.1), отримаємо

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}V_0\left[x(t),t\right] = 2hx(t)\left[ax(t)+bx(t-\tau)+dx'(t-\tau)\right]+\\ +\lfloor g_1x^2(t)+g_2\left(ax(t)+bx(t-\tau)+dx'(t-\tau)\right)^2\rfloor-\\ -e^{-\beta\tau}\lfloor g_1x^2(t-\tau)+g_2\left(x'(t-\tau)\right)^2\rfloor.\end{gathered}$$

Використовуючи векторно-матричне позначення (1.3), повну похідну функціонала Ляпунова–Красовського (1.2) можна записати у вигляді квадратичної форми

$$\frac{d}{dt}V_0\left[x(t),t\right] = -z^T(t,\tau)S\left(g_1,g_2,h\right)z(t,\tau).$$

І, якщо матриця $S\left(g_1,g_2,h\right)$ буде додатньо визначеною, то повна похідна функціонала Ляпунова–Красовського буде від'ємно визначеною і нульове положення рівноваги асиптотично стійким. □

2. Оптимальні функціонали Ляпунова–Красовського

У наведеному твердженні не всі параметри матриці $S\left(g_1,g_2,h\right)$ рівноправні. Якщо параметри a, b, d входять у рівняння і раніше фіксовані, то параметри h, g_1, g_2 є параметрами функціонала (1.2) і їх можна вибирати.

Розглянемо задачу отримання гарантованої умови стійкості в класі функціоналів (1.2), тобто знаходження величин $h > 0$, $g_1 > 0$, $g_2 > 0$, при яких матриця $S\left(g_1,g_2,h\right)$ "максимально" додатньо визначена. Відповідно функціонал Ляпунова–Красовського будемо називати оптимальним в класі функціоналів (1.2). Фактично будемо розглядати оптимізаційну задачу на множині $L = \left\{(g_1,g_2,h) : g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, h \geq 0\right\}$ у тривимірному просторі R^3. Оберемо в якості норми вектора величину $\left|(g_1,g_2,h)\right| = \sqrt{g_1^2+g_2^2+h^2}$.

Будемо позначати через $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ екстремальні власні числа відповідних симетричних, додатньо визначених матриць. Як відомо, симетрична матриця $S\left(g_1,g_2,h\right)$ додатньо визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}\left[S\left(g_1,g_2,h\right)\right] > 0$. І задачу знаходження гарантованої умови стійкості рівняння (1.1) в класі функціоналів (1.2) можна розглядати як оптимізаційну задачу

$$\varphi\left(g_1,g_2,h\right) \to \min_{(g_1,g_2,h)\in L} \tag{2.1}$$

при умовах

$$\begin{gathered}L = \left\{(g_1,g_2,h) : g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, h \geq 0\right\},\\ \varphi\left(g_1,g_2,h\right) = -\lambda_{\min}\left[S\left(g_1,g_2,h\right)\right].\end{gathered} \tag{2.2}$$

Не важко побачити, що L є опуклим конусом.

Отже, якщо оптимізаційна задача (2.1), (2.2) буде мати розв'язком трійку $\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)$ і для неї буде виконуватись

$$\varphi_0\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right) < 0,$$

то рівняння (1.1) буде асимптотично стійким. Якщо

$$\varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = 0,$$

то стійким за Ляпуновим, а якщо

$$\varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) > 0,$$

то задача дослідження стійкості в класі функціоналів вигляду (1.2) за рахунок вибору параметрів g_1, g_2, h не розв'язується.

Слід відмітити, що множина L представляє собою конус, а функція $\varphi\left(g_1, g_2, h\right)$ є однорідною першого степеня і її максимальне значення (якщо воно існує) дорівнює нескінченності. Тому для коректності задачі обмежимо конус сферою одиничного радіуса.

Позначимо через L_1 підмножину L, що складається із трійок $\left(g_1, g_2, h\right)$, які лежать всередині одиничної сфери, тобто задовольняють умови

$$\left(g_1, g_2, h\right) \in L_1,\ L_1 = \left\{\left(g_1, g_2, h\right) : g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, h \geq 0, g_1^2 + g_2^2 + h^2 \leq 1\right\}. \tag{2.3}$$

Має місце наступне твердження.

Лема 2.1. *Задача оптимізації (2.1), (2.3) має розв'язок.*

Доведення. Як було сказано вище, L є опуклим конусом з центром, який представляє собою трійку нульових матриць. І множина L_1 представляє частину одиничної кулі, яка лежить всередині замкнутого конуса, і являється компактною множиною. Функція $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$ як власне число матриці неперервна і, отже, за теоремою Вейєрштраса досягає мінімального значення. □

Розв'язання задач оптимізації значно спрощується, якщо функції і області їх визначення являються опуклими. У цьому випадку вдається сформулювати необхідні і достатні умови оптимальності. Причому, якщо функції неперервно диференційовані, то умови формулюються в термінах похідних, якщо неперервною, то в термінах узагальнених похідних.

Лема 2.2. *Функція $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$ на множині L_1 являється опуклою.*

Доведення. Оскільки матриця $S\left(g_1, g_2, h\right)$ за змінними $\left(g_1, g_2, h\right)$ являється лінійним оператором, а мінімальне власне число додатньо визначеною матрицею являється неперервною опуклою функцією, то для двох довільних трійок $\left(g_1^1, g_2^1, h^1\right)$, $\left(g_1^2, g_2^2, h^2\right)$ і $0 \leq \xi \leq 1$ буде виконуватись

$$\begin{gathered}
\varphi_0\left(\xi g_1^1 + (1-\xi) g_1^2, \xi g_2^1 + (1-\xi) g_2^2, \xi h^1 + (1-\xi) h^2\right) = \\
-\lambda_{\min}\left[S\left(\xi g_1^1 + (1-\xi) g_1^2, \xi g_2^1 + (1-\xi) g_2^2, \xi h^1 + (1-\xi) h^2\right)\right] = \\
= -\lambda_{\min}\left[\xi S\left(g_1^1, g_2^1, h^1\right) + (1-\xi) S\left(g_1^2, g_2^2, h^2\right)\right] \leq -\xi \lambda_{\min}\left[S\left(g_1^1, g_2^1, h^1\right)\right] - \\
-(1-\xi) \lambda_{\min}\left[S\left(g_1^2, g_2^2, h^2\right)\right] = \xi \varphi_0\left(g_1^2, g_2^2, h^2\right) + (1-\xi) \varphi_0\left(g_1^2, g_2^2, h^2\right),
\end{gathered}$$

що й потрібно було довести. □

Отже, задача (2.1), (2.3) являється задачею опуклої оптимізації. Екстремальні власні числа симетричних додатньо визначених матриць являються кусково неперервно диференційованими функціями. Тому умови існування розв'язку можна сформулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.1. Скалярним добутком двох векторів $\left(g_1^1, g_2^1, h^1\right)$ і $\left(g_1^2, g_2^2, h^2\right)$ назвемо величину

$$\left\langle \left(g_1^1, g_2^1, h^1\right), \left(g_1^2, g_2^2, h^2\right)\right\rangle = g_1^1 g_1^2 + g_2^1 g_2^2 + h_1 h_2. \tag{2.4}$$

Означення 2.2. Узагальненим градієнтом випуклої функції $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$ у внутрішній точці $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \in L_1$ назвемо трійку

$$\left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right),$$

для якої при будь-яких $\left(g_1, g_2, h\right) \in L_1$ буде виконуватися нерівність

$$\begin{gathered}\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) - \varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \geq \\ \geq \left\langle \left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right), \left(g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0\right)\right\rangle.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Екстремальні власні числа симетричних додатньо визначених матриць являються кусково неперервно диференційованими функціями [2]. Тому в точці $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)$ може існувати не один вектор, а ціла множина, що задовольняє умовам (2.5).

Означення 2.3. Градієнтною множиною $R_\varphi\{E, F, K\}$ функції $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$ у внутрішній точці $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \in L_1$ будемо називати множину векторів виду $\left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right)$, що задовольняють нерівності (2.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) = -\lambda_{\min}\left[S\left(g_1, g_2, h\right)\right].$$

Отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.1. *Узагальненим градієнтом функції*

$$\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) = -\lambda_{\min}\left[S\left(g_1, g_2, h\right)\right]$$

у внутрішній точці $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \in L_1$ *є вектор*

$$\left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right),$$

компоненти якого мають наступний вигляд

$$\begin{gathered}E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = -z_0^T S(1,0,0) z_0, \quad F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = -z_0^T S(0,1,0) z_0, \\ K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = -z_0^T S(0,0,1) z_0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Тут $z_0 = \left(z_1^0, z_2^0, z_3^0\right)$ *— одиничний вектор, на якому квадратична форма* $z^T S\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) z$ *досягає мінімального значення (власний вектор, який відповідає мінімальному власному числу),* $S(1,0,0)$, $S(0,1,0)$, $S(0,0,1)$ *— матриці вигляду* $S\left(g_1, g_2, h\right)$ *з відповідними значеннями*

$$\left(g_1 = 1, g_2 = 0, h = 0\right), \ \left(g_1 = 0, g_2 = 1, h = 0\right), \ \left(g_1 = 0, g_2 = 0, h = 1\right),$$

тобто

$$S(1,0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ S(0,1,0) = \begin{bmatrix} a^2 & -ab & -ad \\ -ab & -b^2 & -bd \\ -ad & -bd & e^{-\beta\tau} - d^2 \end{bmatrix},$$

$$S(0,0,1) = \begin{bmatrix} -2a & -b & -d \\ -b & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Доведення. Із властивостей власних чисел симетричних додатно визначених матриць випливає, що

$$\varphi_0(g_1,g_2,h)-\varphi_0\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)=-\lambda_{\min}\left[S(g_1,g_2,h)\right]+\lambda_{\min}\left[S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)\right]=$$
$$-\min_{|z|=1} z^T S(g_1,g_2,h)\,z+\min_{|z|=1} z^T S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)z.$$

Нехай квадратична форма $z^T S(g_1,g_2,h)\,z$ приймає мінімальне значення на векторі $z=z_1$, а квадратична форма $z^T S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)z$ — на векторі z_0. Тоді отримуємо

$$\varphi_0(g_1,g_2,h)-\varphi_0\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)=-z_1^T S(g_1,g_2,h)\,z_1+z_0^T S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)z_0=$$
$$=z_0^T\left[S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)-S(g_1,g_2,h)\right]z_0+z_0^T S(g_1,g_2,h)\,z_0-z_1^T S(g_1,g_2,h)\,z_1.$$

Оскільки квадратична форма $z^T S(g_1,g_2,h)$ приймає мінімальне значення на векторі z_1, то

$$z_0^T S(g_1,g_2,h)\,z_0-z_1 S(g_1,g_2,h)\,z_1\geq 0.$$

Звідси отримуємо

$$\varphi_0(g_1,g_2,h)-\varphi_0\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)\geq z_0^T\left[S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)-S(g_1,g_2,h)\right]z_0.$$

В силу лінійності оператора $S(g_1,g_2,h)$ отримуємо

$$S(g_1,g_2,h)=g_1S(1,0,0)+g_2S(0,1,0)+hS(0,0,1),$$
$$S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)=g_1^0S(1,0,0)+g_2^0S(0,1,0)+h^0S(0,0,1).$$

Тому має місце нерівність

$$\varphi_0(G_1,G_2,H)-\varphi_0\left(G_1^0,G_2^0,H^0\right)\geq$$
$$\geq\left(g_1^0-g_1\right)z_0^T S(1,0,0)+\left(g_2^0-g_2\right)z_0^T S(0,1,0)z_0+\left(h^0-h\right)z_0^T S(0,0,1)z_0.$$

Використовуючи позначення , отримуємо

$$\varphi_0(G_1,G_2,H)-\varphi_0\left(G_1^0,G_2^0,H^0\right)\geq$$
$$\geq\sum_{i,j=1}^n\left(g_{ij}^1-g_{ij}^{10}\right)e_{sk}^0+\sum_{i,j=1}^n\left(g_{ij}^2-g_{ij}^{20}\right)f_{ij}^0+\sum_{i,j=1}^n\left(h_{ij}-h_{ij}^0\right)k_{ij}^0.$$

Із означення скалярного добутку векторів випливає

$$\varphi_0(G_1,G_2,H)-\varphi_0\left(G_1^0,G_2^0,H^0\right)\geq$$
$$\geq\left\langle\left(E\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right),F\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right),K\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)\right),\left(g_1-g_1^0,g_2-g_2^0,h-h^0\right)\right\rangle,$$

що і потрібно було довести. □

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта і опуклості множини L_1 умови оптимальності задачі (1.4), (1.1) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.2. *Щоб функція $\varphi_0(g_1,g_2,h)$ досягла свого мінімального значення в точці $\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)\in L_1$, необхідно і достатньо, щоб для довільної точки $(g_1,g_2,h)\in L_1$ виконувались умови*

$$\begin{gathered}\left\langle\left(E\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right),F\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right),K\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)\right),\right.\\ \left.\left(g_1-g_1^0,g_2-g_2^0,h-h^0\right)\right\rangle\geq 0.\end{gathered}\tag{2.7}$$

Причому точка $\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)$ задовольняла граничній умові

$$\left(g_1^0\right)^2+\left(g_2^0\right)^2+\left(h^0\right)^2=1.$$

Доведення. Необхідність. Як випливає з тверджень наведених вище лем, функція $\varphi_0(g_1, g_2, h)$ являється опуклою, L_1 — опуклий конус додатнього октанта $g_1 > 0$, $g_2 > 0$, $h > 0$, який лежить всередині одиничної сфери. Нехай $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \in L_1$ — точка, в якій функція $\varphi_0(g_1, g_2, h)$ приймає мінімальне значення і

$$\min_{(g_1,g_2,h)\in L_1} \{\varphi_0(g_1, g_2, h)\} = \varphi_0^*.$$

Розглянемо множину M четвірок

$$M = \{(g_1, g_2, h, \gamma) : (g_1, g_2, h) \in L_1,\ - < \gamma < +\}.$$

Побудуємо в ньому дві підмножини

$$M_1 = \{(g_1, g_2, h, \gamma) : (g_1, g_2, h) \in L_1,\ \gamma \geq \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0^*\},$$
$$M_2 = \{(g_1, g_2, h, \gamma) : (g_1, g_2, h) \in L_1,\ \gamma < 0\}.$$

Із побудови випливає, що вони не мають спільних точок. Крім цього, в силу опуклості функції $\varphi_0(g_1, g_2, h)$ підмножини M_1 і M_2 є опуклими. Тому існує гіперплощина

$$\langle (e, f, k), (g_1, g_2, h)\rangle + \beta\gamma = 0$$

з нормалями (e, f, k) і β, яка розділяє множини M_1 і M_2. І для довільних точок

$$(g_1, g_2, h, \gamma) \in M_1 \text{ і } (g_1^*, g_2^*, h^*, \gamma^*) \in M_2$$

і екстремальної точки $\left(g_1^0, g_2^0, h^0, 0\right) \in M_1$ буде виконуватися співвідношення

$$\begin{gathered}\langle (e, f, k), (g_1, g_2, h)\rangle + \beta\gamma \geq \left\langle (e, f, k), \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right\rangle \geq \\ \geq \langle (e, f, k), (g_1^*, g_2^*, h^*)\rangle + \beta\gamma^*.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Визначимо знак скаляра β. Для цього розглянемо праву нерівність при $(g_1^*, g_2^*, h^*, \gamma^*) = \left(g_1^0, g_2^0, h^0, -1\right)$. Отримуємо

$$\left\langle (e, f, k), \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right\rangle \geq \left\langle (e, f, k), \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right\rangle - \beta.$$

Отже, $\beta \geq 0$. Покажемо, що $\beta > 0$. Нехай від супротивного $\beta = 0$ Тоді, покладаючи в лівій частині нерівності (2.8)

$$(g_1, g_2, h) = \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) + \varepsilon(e, f, k),\ \varepsilon < 0 \text{ і } \gamma > \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0^*,$$

отримаємо

$$\left\langle (e, f, k), \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) + \varepsilon(e, f, k)\right\rangle \geq \left\langle (e, f, k), \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right\rangle$$

або

$$\varepsilon\left|(e, f, k)\right|^2 \geq 0.$$

А оскільки $\varepsilon < 0$, то це можливо лише при $\left|(e, f, k)\right| = 0$. Отже, припущення невірне і $\beta > 0$. Розділимо нерівності (2.8) на $\beta > 0$

$$\begin{gathered}\left\langle \tfrac{1}{\beta}(e, f, k), (g_1, g_2, f)\right\rangle + \gamma \geq \left\langle \tfrac{1}{\beta}(e, f, k), \left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right\rangle \geq \\ \left\langle \tfrac{1}{\beta}(e, f, k), (g_1^*, g_2^*, h^*)\right\rangle + \gamma^*.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Звідси випливає, що при довільному γ, яке задовольняє умові

$$\gamma \geq \varphi_0(g_1, g_2, h) - \varphi_0^*,$$

ліва частина нерівності (2.9) повинна задовольняти співвідношенню

$$\gamma \geq \left\langle -\frac{1}{\beta}(e,f,k), \left(g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0\right) \right\rangle .$$

Покладаючи

$$\gamma = \varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) - \varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right),$$

отримаємо

$$\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) - \varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \geq \left\langle -\frac{1}{\beta}(e,f,k), \left(g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0\right) \right\rangle .$$

Отже, трійка $\left(-\frac{1}{\beta}e, -\frac{1}{\beta}f, -\frac{1}{\beta}k\right)$, як випливає із означення, є узагальненим градієнтом. Із теореми 1.1 отримуємо, що

$$\left(-\frac{1}{\beta}e, -\frac{1}{\beta}f, -\frac{1}{\beta}k\right) = \left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right).$$

Покладаючи у правій частині нерівності (2.9) $\gamma^* = 0$, отримаємо

$$\begin{gathered}\left\langle \left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right), \left(g_1^* - g_1^0, g_2^* - g_2^0, h^* - h^0\right) \right\rangle = \\ = \left\langle -\tfrac{1}{\beta}(e,f,k), \left(g_1^* - g_1^0, g_2^* - g_2^0, h^* - h^0\right) \right\rangle ,\end{gathered}$$

що і доводить необхідність теореми.

Достатність. Нехай виконуються умови теореми і в точці $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \in L_1$ існує узагальнений градієнт функції $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$, при якому виконується нерівність

$$\left\langle \left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right), \left(g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0\right) \right\rangle \geq 0.$$

Але тоді, як випливає із означення узагальненого градієнта, виконується

$$\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) - \varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) \geq 0,$$

тобто

$$\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right) \geq \varphi_0\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right),$$

і точка $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)$ є точкою мінімума для функції $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$.

Приналежність точки $\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)$ границі сфери випливає із однорідності функції $\varphi_0\left(g_1, g_2, h\right)$ за змінною $\left(g_1, g_2, h\right)$ і виду області L_1.

Теорему доведено. □

І можна сформулювати наступні умови стійкості рівняння (1.1).

Теорема 2.3. *Нехай g_1^0, g_2^0, h^0 — додатні числа такі, що для будь-яких інших g_1, g_2, h виконується*

$$\begin{gathered}\left\langle \left(E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right), K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right)\right), \left(g_1 - g_1^0, g_2 - g_2^0, h - h^0\right) \right\rangle \geq 0, \\ \left(g_1^0\right)^2 + \left(g_2^0\right)^2 + \left(h^0\right)^2 = 1.\end{gathered}$$

Тут

$$\begin{gathered}E\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = -z_0^T S(1,0,0) z_0, \; F\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = -z_0^T S(0,1,0) z_0, \\ K\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) = -z_0^T S(0,0,1) z_0,\end{gathered}$$

$z_0 = \left(z_1^0, z_2^0, z_3^0\right)$ *— одиничний вектор, на якому квадратична форма*

$$z^T S\left(g_1^0, g_2^0, h^0\right) z$$

досягає мінімального значення (власний вектор, який відповідає мінімальному власному числу),

$$S(1,0,0)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-\beta\tau} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ S(0,1,0)=\begin{bmatrix}a^2 & -ab & -ad\\ -ab & -b^2 & -bd\\ -ad & -bd & e^{-\beta\tau}-d^2\end{bmatrix},$$

$$S(0,0,1)=\begin{bmatrix}-2a & -b & -d\\ -b & 0 & 0\\ -d & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Щоб рівняння (1.1) було асиптотично стійким, достатньо, щоб матриця $S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)$ була додатньо визначеною. Причому, якщо $S\left(g_1^0,g_2^0,h^0\right)$ не є додатньо визначеною, то за допомогою функціонала Ляпунова–Красовського виду (1.2) отримати твердження про асиптотичну стійкість не можна, тобто функціонал

$$V_0\left[x(t),t\right]=h_0x^2(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}e^{-\beta(t-s)}\left\{g_1^0x^2(s)+g_2^0\left(\dot{x}(s)\right)^2\right\}ds$$

є оптимальним у даному класі функціоналів.

Література

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. 552 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч.4. Выпуклые задачи. Минск: Издательство «Университетское», 1987. 223 с.
4. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 352 с.
5. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. Москва: Наука, 1975. – 319 с.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
7. Хусаінов Д. Я., Шатирко А. В. Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. К.: ДП Інформац.-аналіт. агентство, 2012. 73 с.
8. Шатирко А. В., Хусаінов Д. Я. Оптимізаційні методи дослідження абсолютної стійкості систем регулювання. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.* 1(13). 2013. С.51-63.
9. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.
10. Kratz W. Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory. Berlin: Akademie Verlag GmbH, 1995. 293 p.

Надійшла: 22.09.2022 / Прийнята: 27.09.2022