

УДК 523.68; 520.34; 520.37; 520.373; 521.31; 521.95  
DOI: <https://doi.org/10.17721/BTSNUA.2023.68.45-50>

Павло КОЗАК, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.  
ORCID ID: 0000-0001-8357-8446  
e-mail: kpm@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## УТОЧНЕННЯ ШВИДКОСТІ МЕТЕОРА ЯК ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРЕТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ ЇЇ ФУНКЦІЇ ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ

**Вступ.** У процесі опрацювання результатів одночасних базисних відеоспостережень метеорів і подальшої каталогізації їхніх кінематичних параметрів важливе значення має точність отриманих результатів, тобто похибка кожного параметра. Найважливішою характеристикою метеора є його швидкість, оскільки саме вона впливає на точність визначення великої півосі й ексцентриситету геліоцентричної орбіти метеороїда – з одного боку, та на фізику розвитку метеора в атмосфері – з іншого.

**Методи.** Оскільки після розрахунку напрямку вектора швидкості модулі швидкості можна шукати "незалежно" (результати будуть частково корельовані) за кожним із пунктів, пропонується використати ці обидва значення для уточнення швидкості метеора, наприклад знаходження його середньозваженого значення. Раніше нами запропоновано шукати всі кінематичні параметри метеора як випадкові величини методом Монте-Карло, отримуючи розподіли щільності ймовірності для кожного параметра. Оскільки за обчислення таким способом швидкості метеора ми отримуємо два розподіли за кожним зі спостережних пунктів, то пропонується знайти їхній переріз як добуток двох вхідних розподілів із подальшим нормуванням його площі на одиницю.

**Результати.** Раніше реалізувалася схема перемноження гістограм, яка була не дуже зручною, оскільки давала великий розкид точок результуючого розподілу. В цій роботі запропоновано використати той факт, що обидва вхідні розподіли швидкості мають із високою ймовірністю нормальний тип (ймовірність 0,998 у межах трьох стандартних відхилень) і застосувати множення аналітичних функцій нормального розподілу, результатом якого буде також функція Гаусса.

**Висновки.** Виконано відповідні теоретичні викладки та проведено апробацію такого підходу на індивідуальному метеорі. Показано, що схема є математично та фізично обґрунтованою та дає ефективні результати.

**Ключові слова:** метеор, кінематичні параметри метеора, похибка визначення швидкості метеора, метод Монте-Карло, множення розподілів щільності ймовірності.

### Вступ

Інформації про метеори в оптичному діапазоні отримують нині за допомогою базисних (одночасних двохсторонніх) спостережень із використанням відеокамер, оснащених фотографічними об'єктивами з доволі широкими полями зору  $15^\circ \div 100^\circ$  (Atreya et al., 2011; Gural et al., 2022; Spurny, & Borovicka, 2014). Очевидно, що чим меншим є поле зору, тим більша фокусна відстань об'єктива, а відтак і менший кутовий розмір пікселя – це забезпечує вищу точність обчислення кінематичних параметрів метеора, однак зменшує кількість зареєстрованих метеорів. Точність розрахунку кінематичних параметрів метеора в атмосфері Землі, як-от: дальність до нього від пунктів спостереження, висота над рівнем моря, кут нахилу траєкторії, напрямки і модуль вектора швидкості тощо, є важливим фактором для каталогізації метеорів, оскільки безпосередньо впливає на розгляд проблеми фізики розвитку метеора в атмосфері, так і на динаміку метеороїда в Сонячній системі, включаючи аналіз його орбіти та належність до того чи іншого метеорного потоку. Відомо, що найчутливішим до похибок параметром в опрацюванні спостережень незалежно від методу оброблення, який використовується (Bettonvil, 2010; Boschat, Hasler, 2017; Gural, 2018; Gural, 2020; Koten, 2002; Vida et al., 2021; Visuri, Gritsevich, 2021), і водночас одним із найважливіших характеристик метеора є його швидкість, оскільки саме вона впливає на велику піввісь та ексцентриситет геліоцентричної орбіти метеороїда. В той час, як відстані до метеора від пунктів спостереження та його висоту вимірюють десятками, іноді сотнями метрів, швидкість може мати похибки суттєво більші кілометра за секунду. Щоб підняти точність вимірів швидкості, очевидно, слід намагатися використовувати довгофокусні об'єктиви, що забезпечують відносно малий кутовий розмір пікселя, однак це, як зазначено вище, пов'язано із суттєвим зменшенням поля зору і відповідно кількості зареєстрованих метеорів. Для цього типу спостережної апаратури можна підняти точність вимірів швидкості за рахунок того, що її можна розраховувати за обома спостережними пунктами (назвемо їх  $A$  і  $B$ ). І хоча значення величини модуля швидкості метеора, розраховані за кожним із пунктів не є, строго кажучи, незалежними, оскільки в їхніх розрахунках використовують значення одиничного вектора швидкості (напрямку швидкості), розрахованого попередньо за вимірами з обох спостережних пунктів – тобто виміри швидкості за пунктами  $A$  і  $B$  частково корельовано – все одно вони несуть додаткову інформацію про даний кінематичний параметр.

Для отримання уявлення про розкид похибок вимірів швидкості у реальних спостереженнях слабких метеорів (Козак та ін., 2011), розглянемо гістограми (рис. 1а–1в) різниці середніх значень швидкостей (за модулем), розрахованих за пунктами  $A$  і  $B$ , тобто  $\Delta v = |v_A - v_B|$ , а також незалежні оцінки похибок швидкостей (стандартні відхилення), розраховані через апроксимацію метеорної траєкторії прямою як функцією часу  $L(t) = at + b$  по кожному з пунктів. З указаної апроксимації видно, що  $dL/dt = a \equiv v$ , і відповідно через таку апроксимацію можна знайти для кожного з пунктів пари значень  $(\bar{v}, \sigma_v)$ .

Те, що похибка визначення швидкості може сягати більше двох кілометрів за секунду є відомим фактом. У цьому випадку ми маємо, хоч і невелику кількість, значень, що дорівнюють 2–4 км/с. Цей факт обумовлений специфікою роботи телевізійної трубки суперізокон, яку тоді використовували для метеорних спостережень у Києві. Вона є надзвичайно чутливою і застосовувалась для спостереження найслабших метеорів. Кутова довжина деяких становила менше одного градуса, а кількість кадрів із присутнім метеором дорівнювала 3–4 (іноді 2). Іншою причиною низької точності є високий рівень геометричних дисторсій цієї передавальної трубки, що пов'язано з електронним фокусуванням під час перенесення заряду.

© Козак Павло, 2023

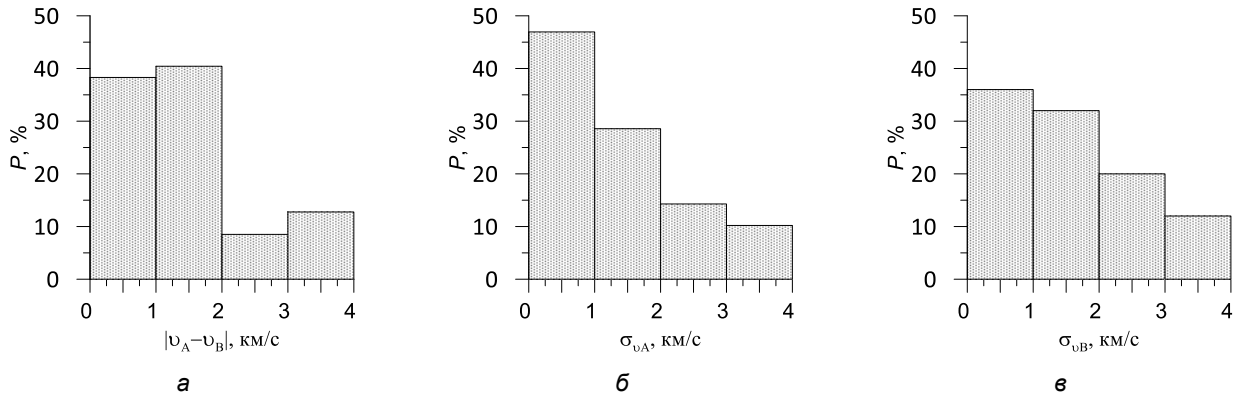


Рис. 1. Гістограми розподілу різниць середніх значень швидкостей (за модулем), розрахованих за спостережними пунктами А і В (а), та стандартних відхилень швидкостей  $\sigma_{vA}$  (б) та  $\sigma_{vB}$  (в) окремо за кожним із пунктів

Нині розрахунок усіх кінематичних параметрів метеора ми проводимо з використанням методу Монте-Карло. Причому в роботі (Козак, 2014) запропоновано замість використання значення швидкості, розрахованого по якомусь одному з пунктів (напр., з меншою дисперсією), або усередненого по пунктах, розраховувати швидкість множенням розподілів модуля швидкості, отриманих за обома пунктами, з подальшим нормуванням на одиницю площі отриманого розподілу. У дослідженні (Козак, 2014) продемонстровано такий переріз розподілів швидкості метеора, але в дискретному вигляді. Такий метод не є ефективним, оскільки дуже чутливий до розкиду точок розподілу по кожному з пунктів, а особливо в результуючому розподілі – адже процедура множення веде до збільшення розкиду. У цій роботі пропонується використати той факт, що розподіли всіх кінематичних параметрів метеора, включаючи розподіли швидкостей, з великою імовірністю мають нормальний вигляд – очевидно відповідно до центральної граничної теореми – і замінити чисельно побудовані розподіли на аналітичні. Для всіх розподілів уже через кілька тисяч кроків генерації вхідних випадкових чисел (екваторіальних координат голови метеора) значення ймовірності становить приблизно 0,676–0,688 у діапазоні  $\pm 1\sigma$ ; 0,951–0,958 у діапазоні  $\pm 2\sigma$ ; та 0,998 у діапазоні  $\pm 3\sigma$ , що дуже близьке до гауссових 0,683, 0,995 і 0,997. Ще однією метою роботи є продемонструвати, так само шляхом теоретичного моделювання, реалістичність того факту, що результуючий розподіл є вужчим (тобто має меншу дисперсію) за обидва вхідні розподіли, що викликало певні сумніви у деяких науковців.

**Методи**

Наведемо метод моделювання обчислення перерізів двох нормально розподілених функцій щільності ймовірності. Оскільки ми використовуємо класичні нормальні розподіли й операції з ними, то для спрощення викладок замість швидкості застосовуватимемо деяку універсальну змінну  $x$ , та замінимо А і В на індекси 1 і 2. Розглянемо два уявні розподіли в загальному вигляді із щільностями:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \tag{1}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x}_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \tag{2}$$

де  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  та  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – математичні сподівання та стандартні відхилення відповідно. Результуючий переріз розподілів знайдемо як

$$p_S(x) = C p_1(x) p_2(x), \tag{3}$$

де  $C$  – нормувальний множник (індекс  $S$  від англ. *section*). Початково вважатимемо що розподіли суміщені, тобто мають однакові математичні сподівання, і для визначеності нехай  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ . Тоді результуючий переріз буде в кінцевому випадку виглядати як

$$p_S(x) = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_S^2} \right), \tag{4}$$

де

$$\sigma_S = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \tag{5}$$

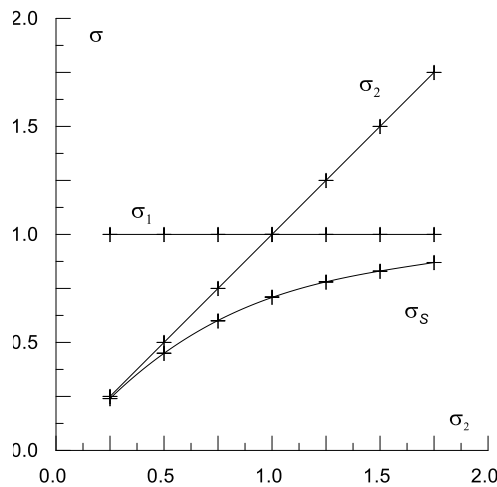
а нормувальний множник було знайдено з умови

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) p_2(x) dx = 1, \tag{6}$$

Він буде таким:  $C = \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

**Результати**

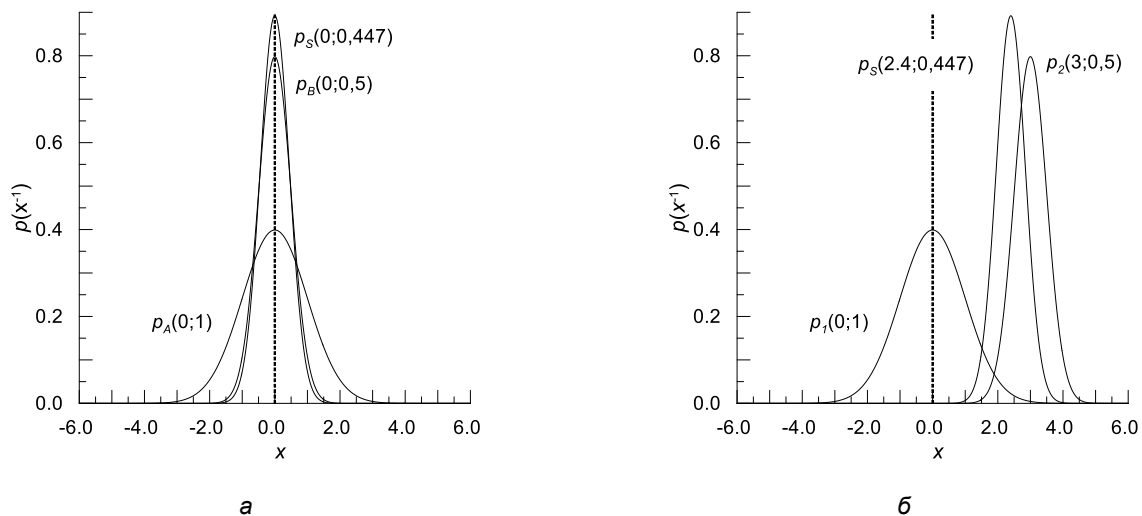
Для порівняння було вибрано один розподіл із стандартними параметрами для математичного сподівання та стандартного відхилення  $(0;1)$ , а параметри іншого варіювалися від  $(0; 0,25)$  до  $(0; 1,75)$ . Результати побудови зображено на рис. 2.



**Рис. 2. Стандартні відхилення вхідних нормальних розподілів щільності ймовірності та їхнього результуючого перерізу**

Аналіз графіка приводить до цікавих висновків. Як видно, стандартне відхилення результуючого розподілу є завжди меншим від кожного з вхідних. Спочатку воно міститься суттєво ближче до  $\sigma_2$ , тобто вузького розподілу, а після того, як  $\sigma_2$  перевищило  $\sigma_1$  – стає ближче до останнього, асимптотично наближаючись до нього. Певною, інтуїтивно суперечливою несподіванкою тут є те, що коли обидва вхідні розподіли однакові з одиничною дисперсією – значення результуючого стандартного відхилення становить приблизно 0,707. З погляду математичних викладок (1)–(6) усе очевидно, однак із фізичного боку видається, що результуюче стандартне відхилення мало б бути таким самим, як і вхідні. Насправді жодного протиріччя немає, оскільки для однакових  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 1$  результуюче є  $\sigma_S = \sigma / \sqrt{2} \approx 0,707$ , тобто маємо справу з класичним обчисленням дисперсії для функції середнього значення двох випадкових величин.

Цікавим, і не зовсім зрозумілим з першого погляду, є факт, що дисперсія результуючого розподілу зовсім не залежить від зміщення розподілів загалом, тобто у разі зміни їхніх математичних сподівань, що можна отримати, виконуючи числове нормування розподілу в будь-якому табличному процесорі. Для прикладу на рис. 3 зображено вхідні розподіли випадкової величини з певними дисперсіями, але в одному випадку з математичними сподіваннями, що збігаються (а), а в іншому – з різними (б).



**Рис. 3. Демонстрація незалежності дисперсії перерізу двох нормальних розподілів щільності ймовірності від положення їхніх математичних сподівань**

Спробуємо отримати значення для дисперсії та середнього для результуючого розподілу – перерізу – для найзагальнішого випадку. Для цього скористаємося формулами (1), (2), (3) та (6). Після нескладних, але достатньо громіздких, перетворень отримаємо

$$p_S(x) = \frac{C}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} = \frac{CK}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x}_S)^2}{2\sigma_S^2}\right\}, \quad (7)$$

де  $\sigma_S$  визначають так само за формулою (5), математичне сподівання  $x_S$  – за такою формулою:

$$\bar{x}_S = \frac{\bar{x}_1\sigma_2^2 + \bar{x}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (8)$$

а додатковий множник, який з'явився, має вигляд  $K = \exp\left\{-\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right\}$ . Нормування за формулою (6) дасть значення для  $C = \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} / K$ . Після підстановки коефіцієнта  $C$  в (7) отримаємо

$$p_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_S} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x}_S)^2}{2\sigma_S^2}\right\}, \quad (9)$$

де коефіцієнт  $K$  зникає після скорочення. Отже, після розрахунку перерізу двох нормальних розподілів отримаємо також нормальний розподіл із математичним сподіванням відповідно до (8) та дисперсією відповідно до (5). Власне формули (5) і (8) можна знайти в математичній літературі, однак ми здійснили власні, детальніші викладки для кращого розуміння оптимізації безпосередньо нашої задачі.

Продемонструємо на прикладі реального метеора (Козак та ін., 2011) наскільки ефективнішим є такий підхід, ніж використання швидкостей за якимось одним із пунктів, або їхнє усереднення. Для цього розглянемо спорадичний метеор, зареєстрований 21 вересня 2003 р.,  $UT = 23^h57^m51^s$ . Метеор був досить слабкий – порядку  $5^m - 6^m$ , кращої якості та з більшою кількістю кадрів у пункті А (рис. 4а).

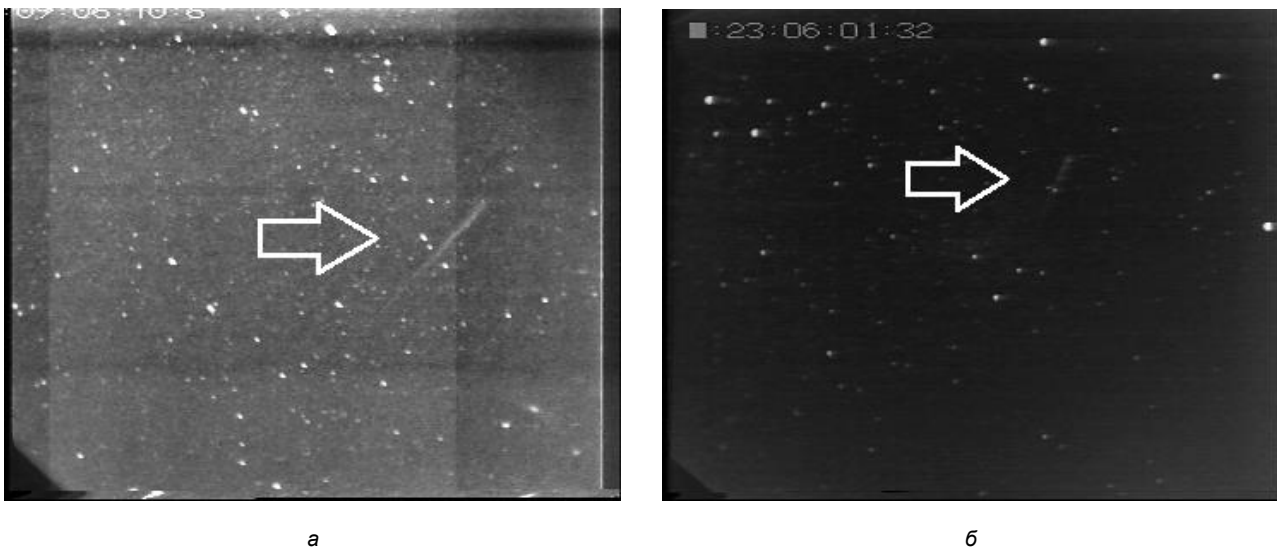


Рис. 4. Телевізійні кадри з метеором, зареєстрованим телевізійними системами типу суперізокон у 2003 р. під Києвом за пунктами: А – с. Лісники (а), та В – с. Пилиповичі (б). Базисні відстані між пунктами спостереження становили 54 км

Вказаний метеор у вибраному кадрі спостережного пункту В, рис. 4б, має певну особливість, а саме хвильову структуру сліду, що зустрічається досить рідко. Однак підтвердження по пункту А немає, тому це явище можна спробувати пояснити телевізійною розгорткою кадру – хоча загалом аналіз та обговорення цього цікавого моменту не має відношення до нашої задачі. Загалом метеор пролетів діапазон висот 108–104 км, довжина траєкторії була близько 11 км. Велика піввісь геліоцентричної орбіти дорівнювала практично одиниці ( $a \approx 1,006$  а. о.), ексцентриситет  $e \approx 0,402$ , нахил орбіти  $i \approx 134,3^\circ$ . Видиму швидкість метеора визначали за обома пунктами методом Монте-Карло. Також паралельно на кожному кроці генерації випадкових чисел обчислювали середнє зважене швидкості за обома пунктами, де вагові коефіцієнти були обернено пропорційні стандартним відхиленням швидкості, обчисленої за кожним із пунктів. Для цього середнього значення також будували свій розподіл. Результати таких обчислень, власне самі розподіли, їхні математичні сподівання та стандартні відхилення зображено на рис. 5а. На рис. 5б показано аналітичні гаусіани, побудовані за параметрами розподілів із пунктів А і В, а також їхній переріз, побудований за наведеною вище формулою (9).

Як видно з рис. 5, усереднене значення має деяке проміжне значення між швидкостями, визначеними за обома пунктами як математичного сподівання – 55,03 поміж 53,75 і 56,30, так і стандартного відхилення – 0,59 поміж 0,87 і

0,33. Цей результат є типовим для обчислень без застосування методу Монте-Карло, або з ним, коли на кожному кроці генерації відбувається деяке усереднення швидкостей метеора за обома пунктами спостереження. Схожі аналогічні значення були отримані й під час усереднення без вагових коефіцієнтів, або при усередненні з коефіцієнтами, визначеними за іншими критеріями: обернений кутовий розмір пікселя, кількість вимірних точок голови метеора, кут між напрямком на пункт спостереження та вектором швидкості метеора – увесь список наведено в (Козак, 2014). Запропонований підхід обчислення розподілу перерізу функцій щільності ймовірності виглядає набагато логічніше – результуючий розподіл за всіма параметрами міститься незрівнянно ближче до "кращого", вузкого розподілу. На вказаному прикладі наведено метеор із великою різницею у значеннях швидкостей, обчислених за різними пунктами – для наглядності. По суті, результуючий розподіл майже збігається (наближено) з вузьким розподілом, а більш широкий розподіл лише незначно коригує його положення. Крім просто логічного обґрунтування можна навести й математичне. В літературі зі статистики ми можемо знайти інформацію, яка також впливає з наших викладок про те, що добуток двох нормальних розподілів також матиме нормальний розподіл зі зменшеною результуючою дисперсією, тобто те, що ми вивели вище і що показано на рис. 5б. Однак нема жодних свідчень того, що деяка лінійна комбінація (як у нашому випадку – визначення середньозваженого) окремих значень двох нормальних розподілів буде також розподілена нормально. Більше того, зі статистики відомо, що добуток двох нормальних розподілів величин не буде розподілений нормально на відміну від добутку самих нормальних розподілів. З рис. 5а, наприклад, видно що розподіл усереднення має певну асиметрію – правий хвіст більш пологий ніж лівий.

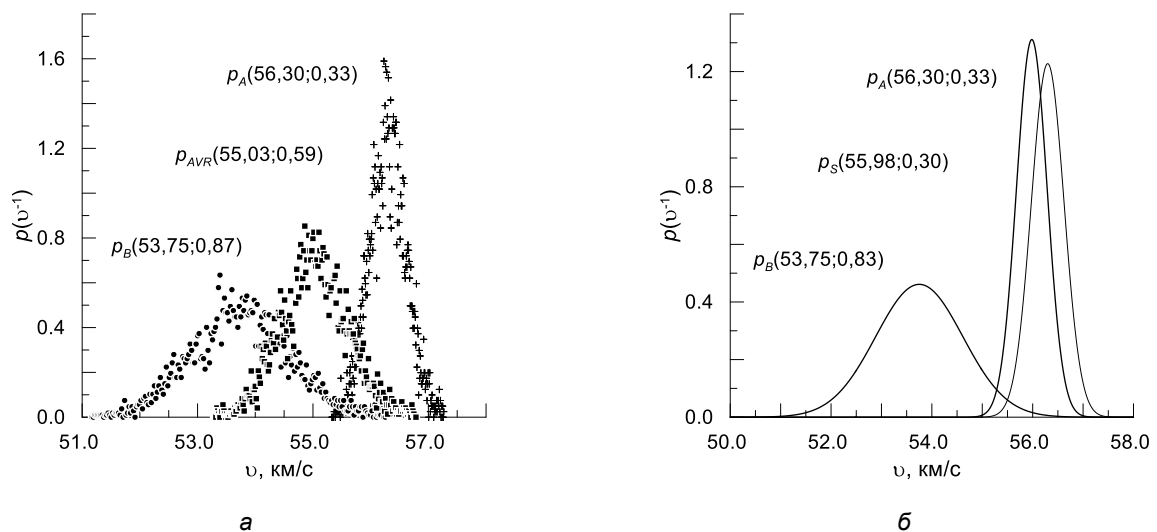


Рис. 5. Розраховані за методом Монте-Карло видимі швидкості випадкового спорадичного метеора 2003 р. за пунктами А і В та розподіл деякого значення швидкості середньозваженого за обома пунктами на кожному кроці генерації (а); теоретично побудовані за результатами А і В гаусіани та їхній переріз (б)

З погляду фізики значна розбіжність у положеннях двох розподілів не викликає великих сумнівів, оскільки один розподіл значно вузкий, тобто виміри були реалізовані значно краще. Таке може статися у разі спостережень з об'єктивними з різними фокусними відстанями і відповідно з різними кутовими розмірами пікселя. Інший варіант – коли сильно відрізняються позиційні кути між напрямком руху метеора і напрямками на пункти спостереження – у цьому випадку сильно відрізняється проєкція кутових вимірів на траєкторію метеора. Також причиною, як у нашому випадку, може бути гірша якість неба в одному з пунктів спостереження, що призводить до суттєвого зменшення кількості опорних зір. Однак, якщо подібну розбіжність матимемо для розподілів із приблизно однаковими дисперсіями, то треба задуматись, чи не закралася в розрахунки помилка, яка могла б призвести до виникнення систематичної похибки.

#### Дискусія і висновки

Запропонований у цій роботі підхід використання теоретичних перерізів розподілів щільностей ймовірності швидкостей, отриманих за обома пунктами спостереження методом Монте-Карло є достатньо ефективним, математично й фізично обґрунтованим, і приводить до кращих результатів ніж класичний підхід. Можливість використання такого підходу обумовлена, в основному, тим, що розподіли кінематичних параметрів мають нормальний тип, і їхній добуток також має гауссів розподіл. Можна спробувати спрогнозувати випадок, коли вхідні розподіли мали б інший, можливо навіть асиметричний вигляд – у цьому випадку замість множення гістограм однаково краще виглядає їхня попередня апроксимація (якщо можливо) деякими функціями з подальшим множенням і нормуванням уже аналітичних функцій – швидше за все за допомогою табличних процесорів із заданим як завгодно малим кроком.

**Подяки, джерела фінансування.** Роботу виконано за рахунок часткового фінансування в межах виконання держбюджетної теми № 22БФ023-02 та часткового фінансування наукового напрямку "Математичні науки та природничі науки" Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

#### Список використаних джерел

- Козак, П. М., Рожило, О. О., Тарануха, Ю. Г., & Кручиненко, В. Г. (2011). Кінематичні характеристики вересневих метеорів за базисними телевізійними спостереженнями 2003 року. *Космічна наука і технологія*, 17(4), 51–62. <https://doi.org/10.15407/knit2011.04.053>.
- Козак, П. М. (2014). Застосування методу Монте-Карло для уточнення швидкості метеора з телевізійних спостережень. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія "Астрономія"*, 1(51), 53–58. [http://www.astrobulletin.univ.kiev.ua/ua/51\\_kozak/](http://www.astrobulletin.univ.kiev.ua/ua/51_kozak/).

- Atreya, P., Vaubaillon, J., Colas, F., Bouley, S., Gaillard, B., Sauli, I., & Kwon, M.-K. (2011). French meteor network for high precision orbits of meteoroids. In W. J. Cooke, D. E. Moser, B. F. Hardin, D. Janches (Eds.), *Meteoroids: The Smallest Solar System Bodies, Breckenridge, Colorado, USA* (p. 344). May 24–28, 2010, NASA/CP-2011-216469. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011msss.conf...344A/abstract>.
- Bettonvil, E. J. A. (2010). Precision of a meteor's 3D velocity vector. In S. Kaniansky, P. Zimnikoval (Eds.), *International Meteor Conference, Šachtička, Slovakia* (pp. 30–43). 18–21 September, 2008, International Meteor Organization. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010pim8.conf...30B/abstract>.
- Boschat, M., & Hasler, A. (2017). A Precise Measurement of a Perseid Meteor. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 111(3), 111. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017JRASC.111..111B/abstract>.
- Gural, P. S. (2018). New developments in meteor processing algorithms. In M. Gyssens, J.-L. Rault (Eds.), *International Meteor Conference, Petnica, Serbia* (pp. 56–64). 21–24 September, 2017, International Meteor Organization. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018pimo.conf...56G/abstract>.
- Gural, P. S. (2020). Advances in the meteor image processing chain using fast algorithms, deep learning, and empirical fitting. *Planetary and Space Science*, 182, 104847. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2020>.
- Gural, P., Mills, T., Mazur, M., & Brown, P. (2022). Development of a very faint meteor detection system based on an EMCCD sensor and matched filter processing. *Experimental Astronomy*, 53, 1085–1126. <https://doi.org/10.1007/s10686-021-09828-3>.
- Koten, P. (2002). Software for processing of meteor video records. In Barbara Warmbein (Ed.), *Asteroids, Comets, Meteors – ACM 2002. International Conference* (pp. 197–200), 29 July – 2 August 2002, Berlin, Germany. ESA SP-500. Noordwijk, Netherlands, ESA Publications Division. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2002ESASP.500..197K/abstract>.
- Spurny, P., & Borovicka, J. (2014). Precise multi-instrument data on exceptional fireballs recorded over Central Europe in the period 2012–2014. In K. Muinonen (Eds.), *Asteroids, Comets, Meteors 2014* (p. 505), 30 June – 4 July, 2014, Helsinki, Finland. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014acm.conf...505S/abstract>.
- Vida, D., Brown, P. G., Campbell-Brown, M., Weryk, R. J., Stober, G., McCormack, J. P. (2021). High precision meteor observations with the Canadian automated meteor observatory: Data reduction pipeline and application to meteoroid mechanical strength measurements. *Icarus*, 354, 114097. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2020>.
- Visuri, J. J., & Gritsevich, M. I. (2021). Introducing the FireOwl data processing software of the Finnish fireball network. *84th Annual Meeting of the Meteoritical Society* (p. 6093), August 15–21, 2021, Chicago, Illinois. LPI Contribution No. 2609. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021LPICo2609.6093V/abstract>.

## References

- Atreya, P., Vaubaillon, J., Colas, F., Bouley, S., Gaillard, B., Sauli, I., & Kwon, M.-K. (2011). French meteor network for high precision orbits of meteoroids. In W. J. Cooke, D. E. Moser, B. F. Hardin, D. Janches (Eds.), *Meteoroids: The Smallest Solar System Bodies, Breckenridge, Colorado, USA* (p. 344). May 24–28, 2010, NASA/CP-2011-216469. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011msss.conf...344A/abstract>.
- Bettonvil, E. J. A. (2010). Precision of a meteor's 3D velocity vector. In S. Kaniansky, P. Zimnikoval (Eds.), *International Meteor Conference, Šachtička, Slovakia* (pp. 30–43). 18–21 September, 2008, International Meteor Organization. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010pim8.conf...30B/abstract>.
- Boschat, M., & Hasler, A. (2017). A Precise Measurement of a Perseid Meteor. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 111(3), 111. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017JRASC.111..111B/abstract>.
- Gural, P. S. (2018). New developments in meteor processing algorithms. In M. Gyssens, J.-L. Rault (Eds.), *International Meteor Conference, Petnica, Serbia* (pp. 56–64). 21–24 September, 2017, International Meteor Organization. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018pimo.conf...56G/abstract>.
- Gural, P. S. (2020). Advances in the meteor image processing chain using fast algorithms, deep learning, and empirical fitting. *Planetary and Space Science*, 182, 104847. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2020>.
- Gural, P., Mills, T., Mazur, M., & Brown, P. (2022). Development of a very faint meteor detection system based on an EMCCD sensor and matched filter processing. *Experimental Astronomy*, 5, 1085–1126. <https://doi.org/10.1007/s10686-021-09828-3>.
- Koten, P. (2002). Software for processing of meteor video records. In Barbara Warmbein (Ed.), *Asteroids, Comets, Meteors – ACM 2002. International Conference* (pp. 197–200), 29 July – 2 August 2002, Berlin, Germany. ESA SP-500. Noordwijk, Netherlands, ESA Publications Division. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2002ESASP.500..197K/abstract>.
- Kozak, P. M., Rozhilo, O. O., Taranukha, Yu. G., & Krucynenko V. G. (2011). Kinematical characteristics of September meteors from double-station TV-observations in 2003. *Space Science and Technology*, 17(4), 51–62 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.15407/knit2011.04.053>.
- Kozak, P. M. (2014). Monte-Carlo method application for precising meteor velocity from TV observations. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Astronomy*, 1(51), 53–58 [in Ukrainian]. [https://www.astrobulletin.univ.kiev.ua/ua/51\\_kozak/](https://www.astrobulletin.univ.kiev.ua/ua/51_kozak/).
- Spurny, P., & Borovicka, J. (2014). Precise multi-instrument data on exceptional fireballs recorded over Central Europe in the period 2012–2014. In K. Muinonen (Eds.), *Asteroids, Comets, Meteors 2014*. 30 June – 4 July, 2014, Helsinki, Finland (p. 505). <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014acm.conf...505S/abstract>.
- Vida, D., Brown, P. G., Campbell-Brown, M., Weryk, R. J., Stober, G., & McCormack, J. P. (2021). High precision meteor observations with the Canadian automated meteor observatory: Data reduction pipeline and application to meteoroid mechanical strength measurements. *Icarus*, 354, 114097. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2020>.
- Visuri, J. J., & Gritsevich, M. I. (2021). Introducing the FireOwl data processing software of the Finnish fireball network. *84th Annual Meeting of the Meteoritical Society*, August 15–21, 2021, Chicago, Illinois. LPI Contribution No. 2609 (p. 6093). <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021LPICo2609.6093V/abstract>.

Отримано редакцією журналу / Received: 07.09.23  
Прорецензовано / Revised: 15.09.23  
Схвалено до друку / Accepted: 19.12.23

Pavlo KOZAK, PhD (Phys. & Math.), Senior Researcher  
ORCID ID: 0000-0001-8357-8446  
e-mail: kpm@univ.kiev.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

## PRECISING METEOR VELOCITY AS A RANDOM VALUE BY THEORETICAL CALCULATION OF ITS PROBABILITY DENSITY FUNCTION

**Background.** When processing the results of simultaneous double-station video observations of meteors and subsequent cataloging of their kinematic parameters, the accuracy of the obtained results, that is, the error of each parameter, is important. The most important characteristic of a meteor is its velocity, because it affects the accuracy of determining the semi-major axis and the eccentricity of the heliocentric orbit of the meteoroid - on the one hand, and on the physics of the meteor motion in the atmosphere - on the other.

**Methods.** Since after calculating the velocity vector direction, the velocity vector sizes can be searched "independently" (the results will be partially correlated) for each of the points, it is suggested to use these two values to precize the velocity of the meteor, for example, finding its weighted average value. Earlier, we proposed to search all meteor kinematic parameters as random variables by Monte Carlo method, obtaining probability density distributions for each parameter. Since when calculating the meteor velocity in this way, we get two distributions for each of the observation points, it is suggested to find their section as a product of two input distributions with further normalization of its area by one.

**Results.** At first, a scheme for multiplying histograms was implemented, which was not very convenient because it gave a large scatter of the points of the resulting distribution. In this work, it is proposed to use the fact that both input velocity distributions are of normal type with high probability (probability 0.998 within three standard deviations) and to use the multiplication of analytical functions of the normal distribution, the result of which will also be a Gaussian function.

**Conclusions.** Appropriate theoretical calculations were made, and this approach was tested on an individual meteor. It is shown that the scheme is mathematically and physically justified and gives effective results.

**Keywords:** meteor, meteor kinematic parameters, meteor velocity calculation error, Monte Carlo method, probability density functions product.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The author declares no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.