

УДК 532.595

Райновський І. А.¹, м.н.с.

Усталені резонансні коливання рідини у вертикальному циліндричному баці при орбітальних збуреннях

¹ Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ, 01004, Україна,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com

I. A. Raynovskyy¹, Junior Researcher, PhD.

Steady-state resonant sloshing in upright cylindrical tank due to elliptical forcing

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
Tereshchenkivska 3, str., Kiev, 01004, Ukraine,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com

Нелінійні модальні рівняння Наріманова-Моїсєєва використовуються для дослідження резонансного коливання рідини (хлюпання) у вертикальному баці із круговим перерізом, що відбувається внаслідок орбітального (ротаційного) руху бака в горизонтальній площині з частотою збурення близькою до власної частоти коливання рідини. Побудовано асимптотичний усталений розв'язок і проаналізовано амплітудно-частотні характеристики. Отримані теоретичні результати підтверджуються існуючими експериментами. Підйоми хвиль на вертикальній стінці достатньо добре прогнозовано, за винятком частотного діапазону, де спостереження модельного тестування повідомляли про розрив хвилі та / або вихорові потоки.

Ключові слова: коливання рідини, демпфування, усталені резонансні хвилі, орбітальні збурення.

The nonlinear Narimanov-Moiseev multimodal equations are used to study the swirling-type resonant sloshing in a circular base container occurring due to an orbital (rotary) tank motion in the horizontal plane with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. These equations are equipped with linear damping terms associated with the logarithmic decrements of the natural sloshing modes. The surface tension is neglected. An asymptotic steady-state solution is constructed and the response amplitude curves are analyzed to prove their hard-spring type behavior for the finite liquid depth (the mean liquid depth-to-the-radius ratio $h > 1$). For the orbital forcing only swirling occurs. This behavior type is supported by the existing experimental data. Phase lags, which are piecewise functions along the continuous amplitude response curves in the undamped case, become of the non-constant character when the damping matters. The wave elevations at the vertical wall are satisfactory predicted except for a frequency range where the model test observations reported wave breaking and/or mean rotational flows.

Keywords: sloshing, damping, steady-state waves, orbital forcing.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Розглядається резонансне коливання рідини (хлюпання) у вертикальному циліндричному баці радіуса r_0 у фіксованій (циліндричній) системі координат. Задача розглядається в обезміреному випадку, припускаючи, що r_0 - характерний розмір баку, а $1/\sigma$ (σ - частота збурення) є характерним часом. Бак, без втрати загальності, описує поступальні орбітальні рухи малої амплітуди проти руху годинникової стрілки, рух якого описується двома обезміреними узагальненими координатами $\eta_1(t) = \eta_a \cos t$ та $\eta_2(t) = \eta_a \sin t$, де амплітуда збурення є малою, $\eta_a = O(\varepsilon) \ll 1$.

Згідно [2], припускається нев'язка, нестислива рідина з іротаційними потоками. На Рис.1 подано геометричні позначення та показано, як осі бака рухаються по його круговій траєкторії руху радіуса η_a . Вільна поверхня визначається однозначним представленням $z = \zeta(r, \theta, t)$ (у циліндричній координатній системі), а потік рідини визначений через потенціал швидкості $\Phi(r, \theta, z, t)$. Невідомі, ζ and Φ , визначені у фіксованій з баком системі координат $Oxyz$.

Функції ζ та Φ можна знайти або з відповідної задачі вільної поверхні, або з її варіаційної постановки Бейтмена-Люке (див. глава 7, [1]). Останнє варіаційне формулювання полегшує нелінійний мультимодальний метод,

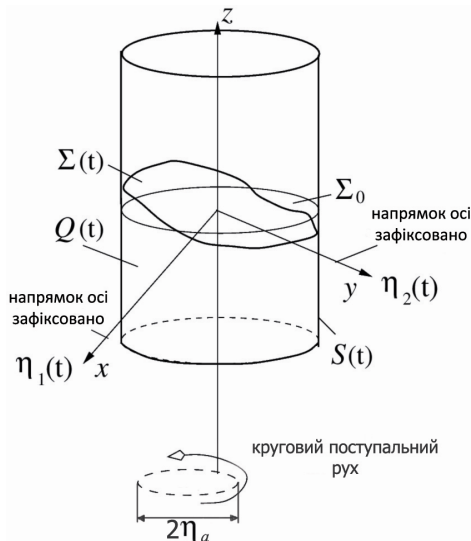


Рис. 1 Ескіз бака та прийнятої номенклатури.

що базується на представленні рядів Фур'є ζ та Φ через власні форми коливання рідини, що впливають із спектральної граничної задачі.

$$C^2 j_{Mi} = 0 \text{ в } Q_0; \quad j_{Mi}/n = 0 \text{ в } S_0; \\ j_{Mi}/z = k_{Mi} \text{ на } S_0; \quad T_{S_0} j_{Mi} dS = 0, \quad (1)$$

де k_{Mi} – власні значення, Σ_0 - незбурена вільна поверхня, Q_0 – область рідини та S_0 – змочена поверхня бака.

На основі нелінійної модальної системи з глави 7, книги [4], Фалтінсен, Луковський та Тимоха [2] вивели модальні рівняння Наріманова-Моїсеєва через розв'язки Фур'є, а саме представлення вільної поверхні $z = z(r, q, t)$ та потенціалу швидкості $F(r, q, z, t)$.

Виведення припускають, що частота збурення баку σ є близькою до власної частоти коливання $\sigma_1 = \sigma_{11}$ та немає вторинних резонансів (див. про вторинні резонанси у главах 8 та 9 книги [4]). Використовуємо асимптотику Наріманова-Моїсеєва

$$p_{11} : r_{11} = O(e^{1/3}); \quad p_{0j} : p_{2j} : r_{2j} = O(e^{2/3}); \quad (2) \\ r_{1(j+1)} : p_{1(j+1)} : r_{3j} : p_{3j} = O(e), \quad j \geq 1.$$

Нехтуючи величинами порядку $o(\varepsilon)$, модальні рівняння (відносно p_{Mi} та r_{mi}) приймають вигляд нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсеєва відносно узагальнених гідродинамічних координат [2]. Оскільки в'язке демпфування може мати вагомий вклад у коливанні рідини, ми вводимо демпфуючі члени,

де коефіцієнти демпфування ξ_{Mi} виражають кумулятивний ефект різних дисипативних факторів, нижня межа яких пов'язана із в'язким ламінарним поверхневим шаром на змочених стінках бака та ефектом об'ємного тертя [5]. Формули коефіцієнта демпфування є аналогічними формулам Хендерсон-Майлза, тільки перевиведені для даної задачі у відповідних позначеннях. Узагальнені координати із $M \geq 4$ описуються однорідними лінійними модальними рівняннями, що не мають неоднорідних членів та, внаслідок цього, не дають внеску в усталені рухи згідно теорії Наріманова-Моїсеєва. В даній задачі розглядаються умови періодичні.

Для знаходження асимптотичного періодичного розв'язку рівнянь Наріманова-Моїсеєва, ми задаємо узагальнені координати найнижчого порядку наступним чином:

$$p_{11}(t) = a \cos(st) + \bar{a} \sin(st) + o(e^{1/3}), \\ r_{11}(t) = \bar{b} \cos(st) + b \sin(st) + o(e^{1/3}), \quad (3)$$

де a, \bar{a}, b та \bar{b} є безмірними амплітудними параметрами порядку $O(\varepsilon^{1/3})$. Шляхом кількох підстановок та групуванням доданків перед першою гармонікою, при $\cos t$ та $\sin t$, отримуємо необхідну умову розв'язності у вигляді секулярної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно a, \bar{a}, b та \bar{b} . Для зручності переходимо до альтернативної секулярної системи відносно інтегральних амплітуд A, B та зсувів фаз y, j

$$\begin{cases} A[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - F) B^2] = \varepsilon \cos \psi; \\ B[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - F) A^2] = \varepsilon \sin \varphi; \\ A[DB^2 + \xi] = \varepsilon \sin \psi; \\ B[DA^2 - \xi] = \varepsilon \cos \varphi, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де } a = A \cos y, \quad \bar{a} = A \sin y, \\ \bar{b} = B \cos j, \quad b = B \sin j. \quad (5)$$

Криві амплітудно-частотних характеристик жорсткої нелінійності

$$A^2 \left[(\Lambda + (m_1 + m_3) A^2)^2 + \xi^2 \right] = \varepsilon^2; \quad A = B > 0, \quad (6)$$

проілюстровано на Рис. 2. Він показує гістерезис в діапазоні частот між W та S . Коефіцієнт частоти $(\sigma/\sigma_{11})_*$ точки S визначено

$$(\sigma/\sigma_{11})_* = (1 - (m_1 + m_s)(\varepsilon/\xi)^2)^{-1/2} \quad (7)$$

Це відношення зростає разом із ε/ξ таким чином, що, знаючи ξ та ε , можна оцінити S , де повинен відбуватися стрибок із вищої гілки на нижчу при збільшенні частоти збурення (σ/σ_{11}) .

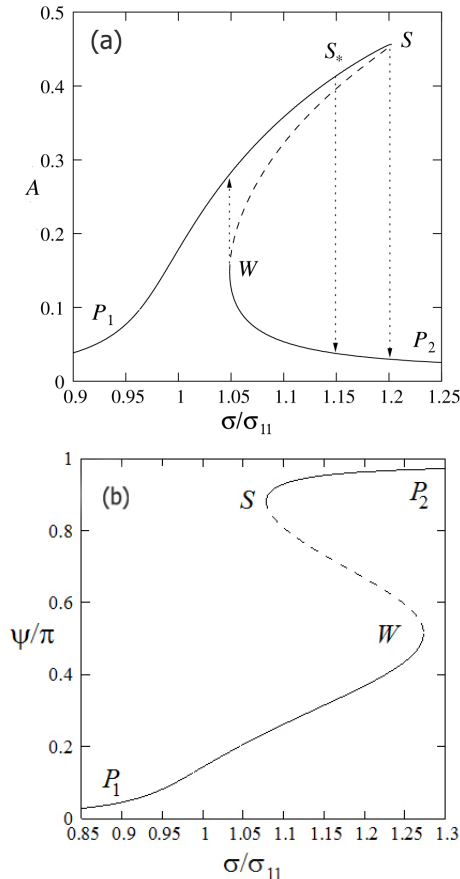


Рис.2. Теоретичні амплітудно-частотні характеристики при кругових збуреннях, пов'язані із експериментальним випадком у [7].

На рисунку (а) зображено домінуючу амплітуду хвилі, а (b) відповідає зсуву фази відносно частоти збурення. Суцільні лінії відповідають стійкому коливанию рідини, а штрих-пунктирні - нестійкому. Між W та S бачимо гістерезис, де співіснують два усталені розв'язки. Положення точки S визначається коефіцієнтами демпфування. Обчислення були проведені при $\eta_a = 0.02$, $h = 1.04$ та $\xi = 0.034$.

Усталені підйоми хвилі біля стінки вимірювались для двох абсолютно твердих циліндричних баків радіусів 72мм та 287мм ($h = 1.04$) поступовим збільшенням частоти збурення вздовж P_1S (Рис.2). Наша теорія вимагає, щоб амплітуда збурення η_a була малою

та (σ/σ_{11}) було в околі одиниці. Три серії експериментів були виконані у [6,7] при $h_a = 0.01, 0.02$ та 0.04 .

Проводимо оцінку знизу коефіцієнта демпфування як $\xi \geq 0.031$ та зверху як $\xi \leq 0.034$ (для амплітуд збурення 0.01 та 0.02. $(\sigma/\sigma_{11}) = 1.27$ та 1.45, відповідно). Це означає, що демпфування в модельних тестах [6,7], в основному, пов'язане із граничним шаром рідини та об'ємною в'язкістю.

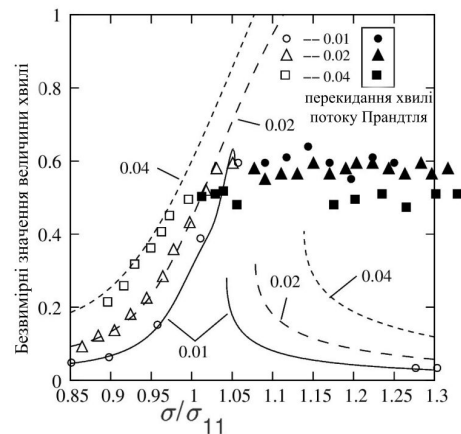


Рис.3 Теоретичні лінії та експериментальні символи обезміреної амплітуди хвилі біля вертикальної стінки, $\frac{1}{2}(\zeta_{\max} - \zeta_{\min})$.

На Рис.3 зображено гарне узгодження експериментів [6,7] із теорією (лінії) до тих пір, доки не спостерігаються фактори додаткової дисипації, таких як (і) перекидання хвилі чи (ii) феномен Прандтля.

Тим не менше, виявлено сильну невідповідність для заповнених символів, де згадані феномени фіксуються. Незважаючи на це, ефект перекидання хвилі часто може бути змодельованим збільшенням коефіцієнта демпфування.

Експерименти [6,7] було проведено, використовуючи покрокове збільшення частоти збурення забезпечуючи дані вздовж вищої гілки на Рис.2. Криві, позначені обезміреними амплітудами $\eta_a = 0.01, 0.02$ та 0.04 . В обчисленнях взято коефіцієнт демпфування $\xi = 0.034$. Заповнені символи відповідають експериментальним випадкам, коли фіксувались перекидання хвилі [6,7] та феномен Прандтля.

У підсумку, використовуючи модальну теорію коливання рідини Наріманова-Моїсеєва [2], яка описує резонансне хлюпання у вертикальному циліндричному баці при орбітальному збуренні, було вивчено усталені типи хвиль, коли частота збурення є близькою до найнижчої

власної частоти коливання рідини. Побудований аналітичний асимптотичний розв'язок нелінійних модальних рівнянь, коли ці рівняння включають лінійні члени демпфування, і він показує, що амплітудно-частотним характеристикам притаманна жорстка нелінійність, яка підтверджена експериментами. Крім того, рішення добре описує підйоми хвилі біля стінки, коли феноменами (i) та (ii) можна знехтувати згідно з [7,8].

Список використаних джерел

1. Тимоха О.М. Усталене резонансне коливання рідини у вертикальному циліндричному контейнері, що спричиняє круговий орбітальний рух / І.А. Райновський, О.М. Тимоха // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2018. – С. 1-9.
2. Фалтінсен О.М. Усталене резонансне коливання рідини у вертикальному циліндричному контейнері, що спричиняє круговий орбітальний рух / О.М. Фалтінсен, І.О. Луковський, О.М. Тимоха // *Resonant sloshing in an upright annular tank*. – 2016. – 804. – С. 608-645.
3. Райновський І.А. Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моїсеєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці / І.А. Райновський. – дисертація. – 2018. – Інститут математики НАНУ. – 161с.
4. Фалтінсен О.М. *Sloshing* / О.М. Фалтінсен, О.М. Тимоха. – Cambridge University Press. – 608 с.
5. Майлз Д. Примітки щодо демпфування внутрішнього та граничного шарів при хвилях на поверхні рідини в циліндричному баці / Д. Майлз, Д. Хердerson. // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – 364. – С. 319-323.
6. Рекларі М. Гідродинаміка орбітально збурених біореакторів / М. Рекларі // дисертація. – Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. – 2013. – 159 с.
7. Рекларі М. Динаміка поверхневих хвиль в орбітально збурених циліндричних контейнерах / М. Рекларі, М. Дрейер, М., Тіссот, Д., Обрешджов Ф.М., Вурм // *Physics of Fluids*. – 2014. – 26. – ID 052104.

Незважаючи на те, що перекидання хвилі може бути успішно змодельовано шляхом збільшення коефіцієнтів демпфування, цей підхід не є застосовним для кругового збурення. Для покращення аналітичної теорії коливання рідини слід включити в математичну модель феномен переміщення маси Прандтля.

References

1. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2018) *Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion*. *Mathematical Problems in Engineering*. **2018**, Paper ID 5487178, pp. 1-9.
2. FALTINSEN, O.M., LUKOVSKY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2016) *Resonant sloshing in an upright annular tank*. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **804**, pp. 608-645.
3. RAYNOVSKYY, I.A., (2018) *An asymptotic modal Narimanov-Moiseev theory of the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank*. PhD Thesis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.
4. FALTINSEN, O.M. AND TIMOKHA, A.N. (2009) *"Sloshing"*. Cambridge University Press.
5. MILES, J.W. and HENDERSON, D.M. (1998) A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **364**, pp. 319-323.
6. RECLARI, M. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis #5759, Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, p. 159.
7. RECLARI, M., DREYER, M., TISSOT, S., OBRESCHJOW, D. and WURM, F.M. (2014) Surface wave dynamics in orbital shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*. Vol. **26**, Article ID 052104.

Надійшла до редколегії 31.05.2019