

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

**Гнатюк Олена Маратівна**

УДК 512.5

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ГРАДУЙОВАНІ КАТЕГОРІЇ ТА  
КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ.**

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник  
Овсієнко Сергій Адамович,  
доктор фізико-математичних наук

Київ – 2016

# ЗМІСТ

<b>ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ</b>	<b>4</b>
<b>ВСТУП</b>	<b>6</b>
<b>1 Загальні відомості</b>	<b>29</b>
1.1. Категорії та функтори . . . . .	29
1.2. Диференціальні градуйовані категорії . . . . .	31
1.3. Графи та Діаграми (схеми, графи) Динкіна . . . . .	32
1.4. Орієнтований градуйований граф та його категорія шляхів .	35
1.5. Орієнтований градуйований граф диференціальної градуйованої категорії . . . . .	38
1.6. Квадратична форма . . . . .	39
1.7. Дійсні корені та група Вейля . . . . .	46
1.8. Модулі, комодулі та бокси . . . . .	50
<b>2 Індуковані комодулі над коалгеброю</b>	<b>53</b>
2.1. Індуковні комодулі . . . . .	54
2.2. Індукований функтор між категоріями модулів . . . . .	54
2.3. Бокс індукований функтором . . . . .	55
2.4. Основне твердження . . . . .	58

<b>3</b>	<b>Диференціальні градуїзовані категорії з додатно визначеною квадратичною формою</b>	<b>60</b>
3.1.	Трансформації для AD-випадку . . . . .	61
3.2.	Структурна теорема для AD-випадку . . . . .	67
3.3.	Висновки для AD-випадку . . . . .	69
3.4.	Редукція та допоміжна Лема для загального випадку . . . . .	69
3.5.	Основний результат для загального випадку . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Диференціальні градуїзовані категорії асоційовані з критичною напіввизначеною квадратичною формою</b>	<b>82</b>
4.1.	Допустимі трансформації . . . . .	83
4.2.	Основний результат . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Кореневі бази для несиметричних цілих білінійних форм</b>	<b>96</b>
5.1.	Структура ДГК . . . . .	97
5.2.	Редукція та форми колчанного типу, редукція дгк . . . . .	100
5.3.	Форми колчанного типу . . . . .	103
	<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>106</b>
	<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>108</b>

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{Z}^n$  – цілочисельна решітка рангу  $n$

$\mathbb{k}$  – деяке поле (у більшості випадків алгебраїчно замкнене поле)

$\otimes$  – тензорний добуток над полем  $\mathbb{k}$

$A$  – категорія

$V$  – коалгебра над категорією  $A$

$M$  – модуль, комодуль над категорією  $A$

$\mathbb{k}\text{-mod}$  – категорія скінченновимірних векторних просторів над  $\mathbb{k}$

$V\text{-comod}$  категорія комодулів над  $A$ -коалгеброю  $V$

$\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  – бокс

$\mathcal{A}\text{-mod}$  – категорія зображень бокса

$X_V = V \otimes_A X$  – індукований  $V$ -комодуль

$V\text{-icomod}$  – категорія індукованих  $V$ -комодулів

$\mathcal{U}$  – диференціальна градуїрована категорія або дгк

$\mathfrak{d}$  – диференціал на дгк  $\mathcal{U}$

$\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \text{deg})$  – орієнтований градуїований граф

$\text{deg } x = |x|$  – градуїування ребра на графі, морфізма дгк

$\Gamma_S, S \subset \Gamma_0$  – повний підграф графа  $\Gamma$  на множині вершин  $S$

$\mathbb{k}\Gamma, \mathcal{P}$  –  $\mathbb{k}$ -лінійна категорія шляхів графа  $\Gamma$

$\text{add } \mathcal{P}$  – адитивне замкнення категорії шляхів  $\mathcal{P}$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Gamma) = (\Gamma_0, \mathcal{B}_1)$  – неорієнтований біграф, асоційований з коректно визначеним градуїтованим графом  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$

$\mathcal{B}|_S$  – повний підбіграф графа  $\Gamma$  на множині вершин  $S$

$\vec{x}$  – хвіст біграфа (тобто підбіграф спеціального типу, означення 1.31)

$\chi = \chi(\Gamma)$  – ціла унітарна квадратична форма графа  $\Gamma$

$T_{ij}^+, T_{ij}^-$  – інфляція, дефляція для квадратичної форми  $\chi$

$T$  – трансформація дгк, графа

$A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ) – діаграми (схеми) Динкіна

$\tilde{A}_n$  ( $n > 1$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\tilde{E}_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ) – афінні (Евклідові) діаграми (схеми)

$\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$  – задача, що складається з дгк  $\mathcal{U}$  разом з її орієнтованим градуїтованим графом  $\Gamma$  та неорієнтованим біграфом  $\mathcal{B}$

$\Upsilon$  – клас задач  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$

$\mathcal{R}_{ij}$  – редукція дгк  $\mathcal{U}$  або графа  $\Gamma$  по ребру  $(ij)$

$\mathcal{R}$  – послідовність редукцій

$\Gamma_0^+$  – підмножина вершин  $i \in \Gamma_0$ , таких що  $\Gamma_1(i, j) = \emptyset, \forall j \in \Gamma_0, j \neq i$

$\Gamma_0^-$  – підмножина вершин  $i \in \Gamma_0$ , таких що  $\Gamma_1(j, i) = \emptyset, \forall j \in \Gamma_0, j \neq i$

$\mathcal{D}_j^{(k)}$  – зміна степеня твірних для дгк  $\mathcal{U}$

$W$  – група Вейля графа  $\Gamma$

$e_i$  – простий корінь квадратичної форми  $\chi$

$\Pi_\chi$  – множина простих коренів квадратичної форми  $\chi$

## ВСТУП

Дисертаційна робота в основному присвячена розв'язку класифікаційних задач для диференціальних градуйованих категорій, для цього побудовано та застосовано алгоритми редукції. Такі алгоритми широко використовуються у теорії зображень. Важливою характеристикою досліджуваних задач є індукована квадратична форма, корені якої, за деяких умов, відповідають нерозкладним зображенням. Теорія квадратичних форм, що застосовується в теорії зображень, добре відома з робіт А.В. Ройтера ([10]), С.А. Овсієнка ([3]), Ю.А. Дрозда ([2]), М.Барота, Дж.А. де ла Пенї ([4]). У дисертаційній роботі надаються одночасні алгоритми трансформацій (редукцій) диференціальної градуйованої категорії зі спеціальними властивостями та відповідної квадратичної форми до канонічного вигляду. Побудовані алгоритми використовуються для доведення класифікаційних теорем.

Важливим прикладом серед великої кількості математичних об'єктів скінченного типу, що класифікуються діаграмами Динкіна, є системи коренів для додатно визначених квадратичних форм. Відомо, що такі задачі допустимими перетвореннями зводяться до діаграм Динкіна. Ми розглядаємо системи коренів для несиметричних білінійних форм, вони класифікуються орієнтованими градуйованими графами. Ми використовуємо не класичне, а модифіковане поняття кореневої бази. Ми доводимо, що за деяких умов скінченності та коректності, коренева база редукується деякими трансформаціями, що зберігають орієнтацію відповідного графа,

до класичної бази, що відповідає діаграмам Динкіна.

Для доведення класифікаційних теорем використовуються графи, що відповідають диференціальним градуїованим категоріям. Зокрема, використовуються схеми Динкіна та розширені схеми Динкіна, що є надзвичайно важливими об'єктами у сучасній алгебрі. Вони вперше виникли у роботах Е.Б. Динкіна ([40]).

Поняття бокса, що було введено в статті М. Клейнера та А.В. Ройтера [7], є об'єднуючим для дослідження в теорії зображень. Ю.А. Дроздом в [8] було розроблено техніку редукції бокса. Вона виявилася важливою в доведенні Ю. А. Дрозда узагальненої гіпотези Брауера-Трелла. З іншого боку, М.Клейнером в [9] було доведено, що категорія зображень бокса еквівалентна категорії індукованих комодулів над деякою коалгеброю. У дисертаційній роботі будується інтерпретація редукції бокса з [8] використовуючи техніку коалгебр з [9].

**Актуальність теми.** Алгоритми редукції лінійних категорій та інших структур, що полягають у зведенні цих категорій та їх зображень до найпростіших, широко використовуються у теорії зображень. Такий підхід дозволяє вивчати зображення індуктивно, зводячи відповідні категорії крок за кроком до категорій, що є простішими з точки зору зображень([2]). У дисертаційній роботі будуються такі алгоритми для диференціальних градуїованих категорій. Також доведено ряд класифікаційних теорем для диференціальних градуїованих категорій спеціального вигляду. Крім того алгоритми редукції застосовуються до такого важливого для сучасної алгебри поняття як коренева база.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями ка-

федри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема 11БФ038-03 “Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень, до задач прикладної алгебри та захисту інформації”, термін 01.01.2011 – 31.12.2016 (номер державної реєстрації 0111U005264), науковий керівник: проф. Кириченко Володимир Васильович

**Мета і задачі дослідження.** *Метою* дослідження є класифікація диференціальних градуїованих категорій з напіввизначеною квадратичною формою Тітса за допомогою схем Динкіна та розширених схем Динкіна, до яких вони зводяться за допомогою деяких допустимих трансформацій, та побудова алгоритмів таких трансформацій.

*Об’єктом дослідження* є задачі, що складаються з диференціальної градуїованої категорії (дгк) разом з асоційованою квадратичною формою, її градуїованим орієнтованим графом та біграфом.

*Предмет дослідження* — класифікація диференціальних градуїованих категорій з напіввизначеною квадратичною формою Тітса за допомогою схем Динкіна та розширених схем Динкіна, до яких вони зводяться, а також відповідні трансформації.

*Методи дослідження.* Основними методами, що використовуються при дослідженнях, є методи редукції та приведення, а також стандартні методи теорії квадратичних форм.

**Наукова новизна одержаних результатів.** У дисертації автором отримано нові теоретичні результати, основними з яких є наступні:

- Побудовано повний і точний функтор на категорії індукованих комодулів, використовуючи мову комодулів.
- Розв’язано класифікаційну задачу для диференціальних градуїо-

ваних категорій з додатною квадратичною формою. Доведено, що такі задачі можуть бути трансформовані у диференціальні градуйовані категорії з графом, що є колчаном типу Динкіна. Побудовано алгоритми таких трансформацій.

- Одержано класифікацію диференціальних градуйованих категорій з критичною напів визначеною квадратичною формою. Доведено, що така задача, що задовольняє деяким умовам коректності, може бути трансформована до диференціальної градуйованої категорії з графом, що є колчаном афінного (розширеного) типу.

- Доведено, що якщо на категорії шляхів зв'язного градуйованого графа деякої несиметричної білінійної форми з додатно визначеною квадратичною формою можна визначити структуру диференціальної градуйованої категорії, яка задовольняє очевидним умовам коректності, то стандартна база цієї форми є редукованою з деякого градуйованого колчана типу Динкіна.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в ній результати, а також методи, за допомогою яких вони отримані, можуть бути використані у теорії зображень, а також при читанні спеціальних курсів.

**Особистий внесок здобувача.** Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать моєму науковому керівнику Овсієнку С.А. Результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з Головащук Н.С. роботах останній належать, як правило, постановки задач, загальні підходи та ідеї щодо методів розв'язання, а практична реалізація та ряд конструктивних ідей належать здобувачеві. Зі спільних робіт на захист виносяться лише результати, отримані здобу-

вачем особисто.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи оприлюднено:

- на 8th International Algebraic Conference in Ukraine, Lugansk Taras Shevchenko National University Ukraine, July 5-12, 2011
- на третій міжуніверситетській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ – 2013

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в 7 наукових роботах. Із них 5 статей – у фахових виданнях ([11], [12], [13], [14], [15]) та 2 – у матеріалах та тезах доповідей на конференціях ([16], [17]).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розділених на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 111 сторінок, із них список використаних джерел займає 5 сторінок (40 найменувань).

**Подяки.** Автор висловлює щире подяку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук Овсієнку С.А. та старшому науковому співробітнику кандидату фізико-математичних наук Головащук Н.С. за постійну увагу, підтримку, цікаві ідеї та корисні поради а також за надану мені можливість попрацювати у такій цікавій та красивій галузі математики.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність наукової проблеми, розкрито її суть і сучасний стан, сформульовано мету дисертаційного дослідження, аргументовано її новизну, наукове та практичне значення, наведено дані про апробацію отриманих результатів і публікації, які відображають основний зміст роботи, визначено особистий внесок дисертанта у публікаціях, викладено основні результати дослідження.

**Перший розділ** носить базовий характер, в ньому наведено основні означення та властивості об'єктів, що використовуються у дослідженні. А саме, описано основні результати у галузі диференціальних градуїованих категорій, боксів, коалгебр та комодулів, що використовуються здобувачем. Також наведено поняття та результати з теорії графів та квадратичних форм, оскільки ці твердження широко застосовуються для доведення основних результатів дисертаційної роботи. Дано короткий огляд результатів з різних напрямків математики, в яких виникають схеми Динкіна.

У підрозділах 1.1 та 1.2 наведено основні поняття теорії категорій та диференцально градуїованих категорій.

Для деякого алгебраїчно замкненого поля  $\mathbb{k}$  вводиться поняття  $\mathbb{k}$ -лінійної категорії. Категорія  $A$  називається  $\mathbb{k}$ -лінійною категорією або  $\mathbb{k}$ -категорією, якщо для довільних  $x, y \in \text{Ob}(A)$   $A(x, y)$  є  $\mathbb{k}$ -модулем (векторним простором) та множення є  $\mathbb{k}$ -лінійним.  $\mathbb{k}$ -лінійна категорія  $\mathcal{U}$  називається *градуїованою*, якщо  $\mathcal{U}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_q(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  є сумою скінченно вимірних векторних просторів  $\mathcal{U}_q(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \text{deg}^{-1}(q)$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \text{Ob } \mathcal{U}$ .

**Означення 1.4.** *Градуїована  $\mathbb{k}$ -категорія  $\mathcal{U}$  називається диференціальною градуїованою або дгк, якщо задано диференціал  $d : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ,*

$d : \mathcal{U}_q(i, j) \rightarrow \mathcal{U}_{q+1}(i, j)$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $i, j \in \text{Ob } \mathcal{U}$ ,  $i$  виконуються наступні властивості:

1.  $d(\mathbf{1}_i) = 0$ ,  $i \in \text{Ob } \mathcal{U}$ ;

2. правило Лейбніца:

$$\begin{aligned} d(x_1 \dots x_i \dots x_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{|x_1|} x_1 \dots (-1)^{|x_{i-1}|} x_{i-1} d(x_i) x_{i+1} \dots x_k = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{|x_1| + \dots + |x_{i-1}|} x_1 \dots x_{i-1} d(x_i) x_{i+1} \dots x_k; \end{aligned}$$

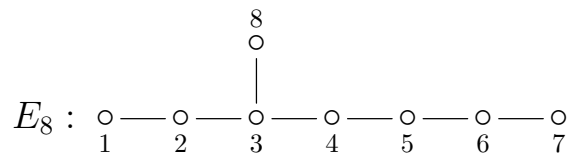
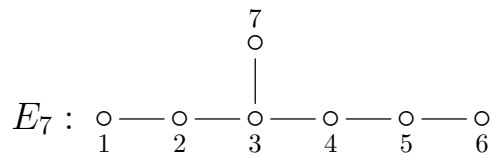
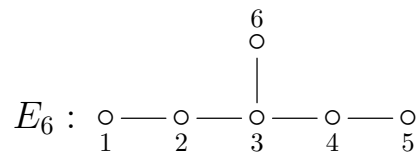
3.  $d^2 = 0$ .

У підрозділі 1.3 коротко описано графи, що використовуються у дисертаційному дослідженні, а саме орієнтовані графи, що позначаються  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ , де  $\Gamma_0$  – множина вершин графа,  $\Gamma_1$  – множина орієнтованих ребер,  $\mathbf{s} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$  – відображення, що ставить у відповідність кожному ребру його початкову вершину,  $\mathbf{t} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$  – відображення, що ставить у відповідність кожному ребру його кінцеву вершину та неорієнтовані графи, що позначаються  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Gamma) = (\Gamma_0, \mathcal{B}_1)$ , де  $\mathcal{B}_1$  – множина неорієнтованих ребер. Також наведено короткий опис галузей сучасної математики, де виникають графи Динкіна та розширені графи Динкіна та наведено їх перелік. Також наведено деякі важливі твердження.

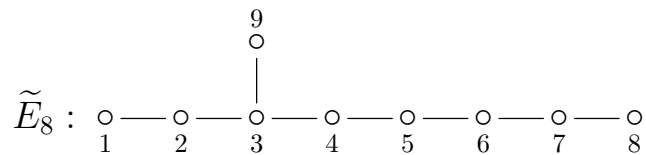
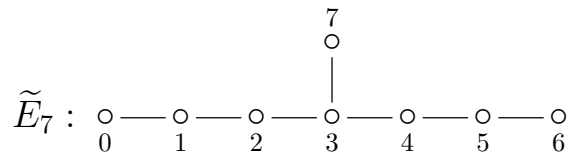
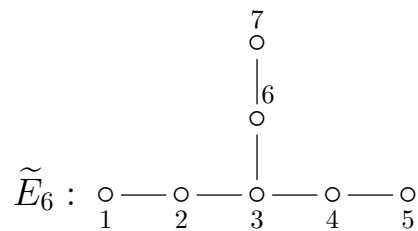
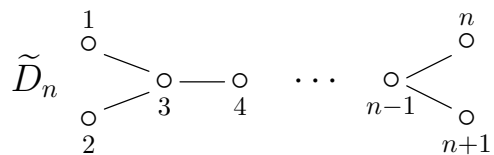
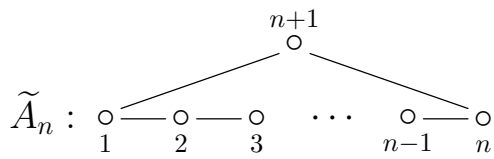
Перелік графів Динкіна:

$$A_n : \begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & n \end{array}$$

$$D_n : \begin{array}{ccccccc} & & & & & & n & & \\ & & & & & & \circ & & \\ & & & & & & / & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & \\ & & & & & & \backslash & & \\ & & & & & & \circ & & \\ & & & & & & n+1 & & \end{array}$$



Перелік афінних (розширених, Евклідових) графів Динкіна:



Підрозділ 1.4 присвячено вивченню орієнтованих градуїованих графів та категорії шляхів орієнтованого градуїованого графа. Надалі лісом називатимемо об'єднання однозв'язних графів, ліс називатимемо лісом типу Динкіна, якщо усі його компоненти зв'язності є графами типу Динкіна.

Граф  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  називається *градуїованим* (або  $\mathbb{Z}$ -градуїованим), якщо задано відображення  $\deg : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ , таке що

$$\Gamma_1 = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Z}} \Gamma_1^q, \Gamma_1^q = \bigsqcup_{i, j \in \Gamma_0} \Gamma_1^q(i, j) = \deg^{-1}(q).$$

Введено важливе поняття категорії шляхів  $\mathbb{k}\Gamma$  градуїованого графа  $\Gamma$ . Це категорія, що є скінченно породженою над  $\mathbb{k}$  усіма шляхами на  $\Gamma$ . Категорія  $\mathbb{k}\Gamma$  є  $\mathbb{k}$ -лінійною категорією. Категорія  $\mathbb{k}\Gamma$  успадковує градуїовання від  $\Gamma$ , таке що  $\deg x_1 x_2 \dots x_k = \sum_{i=1}^k \deg x_i$ .

У підрозділі 1.5 описується зв'язок таких понять, як диференціальна градуїована категорія та градуїований граф. Описано, як маючи дгк  $\mathcal{U}$  з  $|\text{Ob } \mathcal{U}| < \infty$ , визначити відповідний орієнтований градуїований граф  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{U})$ . Це граф  $(\Gamma_0, \Gamma_1)$ , такий що  $\Gamma_0 = \text{Ob } \mathcal{U}$ , та  $\Gamma_1(i, j)$  є базою  $(\mathcal{U}/\mathcal{U}^{\otimes 2})(i, j)$ ,  $i, j \in \Gamma_0$  з індукованим градуїованням. Диференціал  $\mathbf{d}$  визначається відображенням  $\mathbf{d} : \Gamma_1^q \rightarrow \mathbb{k}\Gamma_{q+1}(i, j)$ ,  $i, j \in \Gamma_0$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , що розширяється на усю категорію  $\mathbb{k}\Gamma$  згідно з означенням 1.4.

Також сформульовано умови коректності графа, а саме, граф  $\Gamma$  називається *коректно визначеним*, якщо він є орієтованим графом без циклів та паралельних ребер. У цьому випадку  $\mathbb{k}\Gamma$  є скінченно породженою.

Розділ також містить ряд означень, що описують типи ребер, графів та підграфів, що будуть використовуватися надалі. Також наведено поняття біграфа та введено форми Ойлера та Тітса.

Підрозділ 1.6 присвячено квадратичним формам. Наведено означення

цілочисельної унітарної форми. Для квадратичних форм наведено означення додатності, від'ємності та напіввизначеності, а також визначено еквівалентність двох квадратичних форм. Визначено поняття біграфа квадратичної форми.

Також у цьому підрозділі дано означення трансформацій, які використовуються для доведення основних результатів роботи. Нехай  $\mathcal{B}$  – біграф, який відповідає квадратичній формі  $\chi$ . Для вершини  $i \in \mathcal{B}_0$ , через  $T_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  позначається  $\mathbb{Z}$ -лінійна трансформація:

$$T_i(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{if } t \neq i; \\ -\mathbf{e}^i, & \text{if } t = i. \end{cases} \quad (1)$$

Така трансформація  $T_i$  називається *змінною знаку* для  $\chi$  у точці  $i$ . Для  $\{i, j\} \in \mathcal{B}_1$ , позначаємо через  $T_{ij}^\varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$   $\mathbb{Z}$ -лінійну трансформацію ([4], [13]):

$$T_{ij}^\varepsilon(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{if } t \neq i; \\ \mathbf{e}^i + (-1)^{|\{i,j\}|} \mathbf{e}^j, & \text{if } t = i. \end{cases} \quad (2)$$

з  $\varepsilon = (-1)^{|\{i,j\}|} \in \{+, -\}$ . Якщо степінь ребра  $|\{i, j\}|$  парна, то ми називаємо  $T_{ij}^+$  *інфляцією* для  $\chi$ , якщо  $|\{i, j\}|$  непарна, ми називаємо  $T_{ij}^-$  *дефляцією* для  $\chi$ .

У підрозділі 1.7 визначено *групу Вейля*  $W$  графа  $\Gamma$  як підгрупу  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|})$  породжену простими відбиттями  $\sigma_i$  відповідно до елементів стандартної бази  $E$ . Дано означення дійсного кореня та кореневої бази. Побудовано орієнтований біграф, асоційований з кореневою базою, а також сформульовано визначення коректності відповідних графів.

Підрозділ 1.8 присвячено поняттям модуля, комодуля та бокса. Дано означення модуля та комодуля, а також бокса:

**Означення 1.36.** Бокс  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  складається з  $\mathbb{k}$ -категорії  $A$ ,

та  $A$ -коалгебри  $V$  з множенням  $\mu : V \rightarrow V \otimes_A V$  та координцею  $\varepsilon : V \rightarrow A$ .

Для бокса  $\mathcal{A}$ , визначається категорія  $\mathcal{A}\text{-mod}$  зображень. Об'єктами категорії є модулі з  $\mathcal{A}\text{-mod}$ , морфізми визначаються формулою:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V \otimes_A M, N), \quad \text{де } M, N \in \mathcal{A}\text{-mod},$$

композиція морфізмів визначається природним чином за допомогою суперпозиції.

В **Другому розділі** будується функтор на категорії індукованих комодулів і доводиться, що він є повним і строгим (точним). Будується інтерпретація редукції бокса з [1] використовуючи техніку коалгебр з [9].

У підрозділі 2.1 для коалгебри  $V$  над категорією  $A$ , та модуля  $X \in \mathcal{A}\text{-mod}$  визначається індукований  $V$ -комодуль  $X_V = V \otimes_A X$  разом з множенням  $\mu_{X_V} = \mu \otimes 1_X : X_V \rightarrow V \otimes_A X_V$ . Також наведено твердження про еквівалентність категорії зображень бокса та категорії індукованих комодулів.

У підрозділі 2.2 будується індукований функтор для категорії комодулів.

Підрозділ 2.3 присвячено побудові бокса, індукованого  $\mathbb{k}$ -лінійним функтором  $\varphi : A \rightarrow B$ , де  $A$  та  $B$  –  $\mathbb{k}$ -категорії. Описано алгоритм побудови такого бокса, тим самим доведено наступну теорему:

**Теорема 2.1.** *Нехай  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$ . Функтор  $\varphi : A \rightarrow B$  індукує бокс*

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^\varphi = (B, V^\varphi, \mu_\varphi, \varepsilon_\varphi).$$

Підрозділ 2.4 присвячено доведенню основного твердження другого розділу.

**Теорема 2.2.** *Нехай  $A, B$  категорії,  $\varphi : A \rightarrow B$  функтор,  $\varphi^* : B\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$  та  $\varphi_* : A\text{-mod} \rightarrow B\text{-mod}$  індуковані функтори на категорії модулів. Тоді існує індукований функтор на категорії індукованих комодулів*

$$\varphi_{\text{icomod}}^* : V^\varphi\text{-icomod} \rightarrow V\text{-icomod},$$

*що переводить  $V^\varphi \otimes_B M$  у  $V \otimes_A \varphi^*(M)$ . Цей функтор  $\varphi_{\text{icomod}}^*$  повний і точний.*

**Третій розділ** присвячено розв'язанню класифікаційної задачі для диференціальних градуйованих категорій з додатною квадратичною формою.

Дослідження проводиться у два етапи. Спочатку вивчаються  $AD$ -редуковані диференціальні градуйовані категорії, тобто такі, що їх граф  $\mathcal{B}(\Gamma)$  є диз'юнктним об'єднанням діаграм Динкіна типу  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ). Задачам такого типу присвячено підрозділи 3.1-3.3.

Далі вивчається загальний випадок, що включає випадок діаграми Динкіна типу  $E$ . Це дослідження описано у підрозділах 3.4-3.5.

На основі цих двох випадків отримується загальний результат про класифікацію диференціальних градуйованих категорій з додатно визначеною квадратичною формою.

**Означення 1.11.** *Замкнутий контур  $\Gamma_S$ ,  $S = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \Gamma_0$  називається чистим, якщо  $\Gamma_1(i_s, i_t) \cup \Gamma_1(i_t, i_s) = \emptyset$ ,  $|s - t| > 1 \pmod{k}$  та  $|\Gamma_1(i_j, i_{j+1}) \cup \Gamma_1(i_{j+1}, i_j)| = 1$ .*

**Означення 1.14.** *Обхід  $\Gamma_S$  називається активним (або контуром диференціального типу), якщо  $\kappa x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{k-1} i_k}$  є доданком диференціала ребра  $x_{i_1 i_k}$ ,  $\kappa \in \mathbb{k}$ .*

**Означення 1.15.** Ребро  $a \in \Gamma_1(i, j)$  називається глибоким, якщо на  $\Gamma$  немає інших шляхів з  $i$  до  $j$ . Вершини  $i, j$  називаються 1-зв'язними вершинами, якщо існує глибоке ребро  $a \in \Gamma_1(i, j) \cup \Gamma_1(j, i)$ .

**Означення 1.16.** Ребро  $a \in \Gamma_1(i, j)$  називається мінімальним, якщо  $d(a) = 0$ .

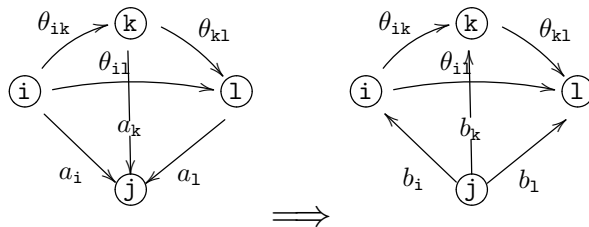
Кажемо, що  $\Gamma$  є *редукованим* (наприклад *A-редукованим*), якщо його біграф  $\mathcal{B}(\Gamma)$  може бути редукованим до диз'юнктного об'єднання діаграм Динкіна (діаграм Динкіна типу  $A$ ). Ми розглядаємо задачі, що складаються з диференціальної градуйованої категорії (дгк)  $\mathcal{U}$  разом з її орієнтованим градуйованим графом  $\Gamma$  та неорієнтованим біграфом  $\mathcal{B}$ . Ми розглядаємо тільки ті дгк, для яких кожен чистий контур є активним, та граф яких є коректно визначеним. Такі задачі позначаються через  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$ . Клас таких задач позначається через  $\Upsilon$ .

Зв'язна задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$  називається задачею Динкіна, а відповідний граф  $\Gamma$  називається орієнтованим графом Динкіна, якщо  $\mathcal{B}(\Gamma)$  є однією з діаграм Динкіна  $(A_n, D_n, E_6, E_7, E_8)$ . Якщо  $\mathcal{B}(\Gamma) = A_n$  тоді казати-мемо, що  $\Gamma \in A_n$ -графом, та аналогічно для усіх типів  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ .

У підрозділі 3.1 наводяться основні трансформації, що зображаються на орієнтованому графі диференціальної градуйованої категорії. Ці трансформації використовуються для доведення основних результатів цього та наступного розділів.

Першою з цих трансформацій є розвертання стрілок у точці  $j \in \Gamma_0$  та

одержання відповідних формул для диференціалів ребер.



Крім опису даної трансформації також наводиться обґрунтування коректності використання такої трансформації для диференціальної градуїованої категорії.

**Лема 3.1.** *Визначимо дгк  $\mathcal{U}'$ , що відрізняється від дгк  $\mathcal{U}$  наступним чином: замість стрілок  $a_1, \dots, a_p$  вона містить стрілки  $b_1, \dots, b_p$ , а диференціал заданий формулами:*

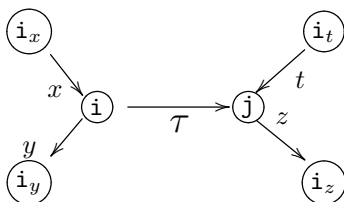
$$[\Theta_j \Psi_j] = [\Theta_j] [\Psi_j] = [\mathbf{d}(b_i)] = (\mathbf{d}(b_1) \dots \mathbf{d}(b_p))^t,$$

де  $\Psi_j : j \rightarrow i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_p$ ,  $[\Psi_j]^t = (b_k)_{k=1}^p$ ,  $\Theta_j : i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_p \rightarrow i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_p$ ,  $[\Theta_j] = (\theta_{ij})$ ,  $\theta_{ij} \in \mathbb{k}\Gamma(i_i, i_j)$ .

Тоді  $\mathcal{U}'$  коректно визначена та довільний чистий контур є контуром диференціального типу так само як для  $\mathcal{U}$ .

Далі у тому ж підрозділі розглядається найважливіша трансформація, редукція. Опустивши технічні деталі, редукцію диференціальної градуїованої категорії за глибоким ребром можна зобразити на її орієнтованому графі наступним чином.

Припускаємо, що  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  глибоке мінімальне регулярне ребро степеня  $\deg \tau = |\tau|$ . Маємо:



Позначимо  $\widehat{\mathcal{U}}$  дг категорію та  $\Gamma$  - відповідний граф, доповнений множиною петель

$$\Omega = \{\omega_i \in \Gamma_1^1(i, i) \mid i \in \Gamma_0\}$$

з диференціалом  $\partial : \widehat{U} \rightarrow \widehat{U}$ , таким що  $\partial(\omega_i) = \omega_i^2$  та  $\partial(a) = a\omega_i + (-1)^{|a|+1}\omega_j a + \mathbf{d}(a)$ ,  $a \in \Gamma_1(i, j)$ ,  $a \notin \Omega$ . Тоді умова  $\partial^2 = 0$  та правило Лейбніца виконуються. ДГК  $\widehat{U}$  називається *поповненою* для  $\mathcal{U}$ .

Визначимо редукцію  $\mathcal{R}_{ij}(\mathcal{U})$ . Ми додаємо нове ребро  $\tau^* : j \rightarrow i_2$ , таке що  $\tau\tau^* = 1_j$ .

Спершу у  $\widehat{U}$  отримуємо

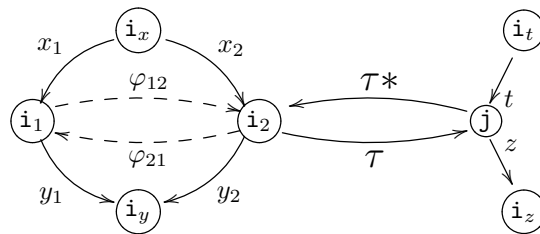
$$\omega_i \iff \begin{pmatrix} \omega_{i_1} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \omega_{i_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)\omega_i(1-\tau^*\tau) & (1-\tau^*\tau)\omega_i\tau^*\tau \\ \tau^*\tau\omega_i(1-\tau^*\tau) & \tau^*\tau\omega_i\tau^*\tau \end{pmatrix} \text{ та } \tau \iff \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

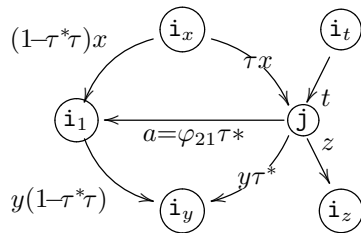
А для довільних  $x : i_x \rightarrow i$  та  $y : i \rightarrow i_y$ , є наступні ребра на  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$ :

$$x : i_x \rightarrow i \iff \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix},$$

$$y : i \rightarrow i_y \iff \begin{pmatrix} y(1-\tau^*\tau) & y\tau^*\tau \end{pmatrix}.$$



Після факторизації в точці  $i_2$  по  $\tau^*\tau - 1_{i_2}$  отримуємо диференціальну градуїзовану категорію  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  та граф  $\mathcal{R}_{ij}\Gamma$ .



Основний результат для  $AD$  випадку сформульовано та доведено у підрозділі 3.2.

**Теорема 3.1.** *Нехай  $\mathcal{U}$  дгк з коректно визначеним  $AD$ -редукованим градуїтованим графом  $\Gamma$ , та додатно визначеною квадратичною формою  $\chi_\Gamma$ . Припустимо, що довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Тоді існує композиція редукцій  $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , така що  $\Gamma_{\mathcal{U}}$  є 0-лісом типу Динкіна.*

Підрозділ 3.3 присвячено висновкам для випадку  $AD$ -редукованих задач, а також служить переходом до загального випадку.

У підрозділі 3.4 коротко описується алгоритм редукції, а також доводяться дві допоміжні Лема, що будуть використовуватися для доведення загального результату. Кажемо, що граф без циклів (дерево)  $\Gamma$  є *добре орієнтованим*, якщо він не має нетривіальних шляхів довжини  $> 1$ . Вершина дерева, інцидентна більш ніж двом ребрам, називається *вершиною розгалуження*. Якщо прикріплююча вершина  $x$  не є вершиною розгалуження, та  $\Gamma|_S$  зв'язна компонента  $\Gamma|_{\Gamma_0 \setminus \{x\}}$ , що не містить точок розгалуження, тоді повний підбіграф  $\Gamma|_{S \cup \{x\}}$  називається *хвостом  $x$*  та позначається  $\vec{x}$ . Позначимо через  $\Gamma_0^+$  (відповідно,  $\Gamma_0^-$ ) підмножину вершин  $i \in \Gamma_0$ , таких що  $\Gamma_1(i, j) = \emptyset$  (відповідно,  $\Gamma_1(j, i) = \emptyset$ ) для довільної  $j \in \Gamma_0$ .

**Лема 3.3.** *Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ . Нехай  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  – мінімальне гли-*

боке регулярне ребро, та нехай  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  – повна редуція, тобто редуція та повна регуляризація. Тоді  $(\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}, \mathcal{R}_{ij}\Gamma, \mathcal{R}_{ij}\mathcal{B}) \in \Upsilon$ .

**Лема 3.4.** *Нехай підграф  $\Gamma|_{\{1,2,\dots,k\}}$  графа  $\Gamma$  є хвостом з прикріплюючою вершиною  $k \in \Gamma_0$ . Тоді існує композиція редуцій  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{i_1,j_1} \cdots \mathcal{R}_{i_k,j_k}$  з  $i_r \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $j_r \in \{1, \dots, k-2\}$  така що:*

1.  $\mathcal{B}(\Gamma)$  та  $\mathcal{B}(\mathcal{R}\Gamma)$  збігаються;
2.  $\mathcal{R}\Gamma|_{\{1,\dots,k\}}$  є добре орієнтованим хвостом;
3. орієнтація ребра  $(k-1, k)$  не змінюється.

**Наслідок 3.1.** *Якщо граф  $\Gamma$  є графом типу Динкіна, тоді існує композиція редуцій  $\mathcal{R}$ , така що  $\mathcal{R}\Gamma$  є добре орієнтованим градуйованим графом відповідного типу. Крім того,  $\mathcal{B}(\mathcal{R}\Gamma) = \mathcal{B}(\Gamma)$ .*

Підрозділ 3.5 містить формулювання та доведення основного результату усього третього розділу. Під час доведення цього результату використовуються ще три допоміжні леми. Позначимо через  $\Upsilon_\odot$  підклас задач  $(\mathfrak{A}, j)$  з  $\mathfrak{A} \in \Upsilon$ , що має вершину розриву  $j \in \Gamma_0^\pm$  з умовою, що усі зв'язні компоненти  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є  $A$ -типу.

**Лема 3.5.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ ,  $\chi > 0$ . Припустимо, що  $j \in \Gamma_0^+$  та підграф  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є добре орієнтованим типу Динкіна. Тоді існує редуція  $\mathcal{R}$ , така що отримана задача  $\mathcal{R}\mathfrak{A} \in \Upsilon$  має вершину розриву з  $\Gamma_0^\pm$ .*

**Лема 3.6.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ ,  $j \in \Gamma_0^+$  є вершиною розриву. Тоді існує еквівалентна задача  $\mathfrak{A}' \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \mathfrak{A}$  та вершина розриву  $j'$ , такі що  $(\mathfrak{A}', j') \in \Upsilon_\odot$ .*

**Лема 3.7.** *Нехай  $j \in \Gamma_0^+$  – вершина розриву та  $(\mathfrak{A}, j) \in \Upsilon_\odot$ . Тоді існує еквівалентна задача  $\mathfrak{A}' \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \mathfrak{A}$ , така, що  $\mathfrak{A}'$  є деревом типу Динкіна.*

Отже основним результатом третього розділу є наступна теорема, доведення якої випливає з наведених трьох Лем 3.5, 3.6, 3.7.

**Теорема 3.2.** *Нехай  $\mathcal{U}$  диференціальна градуйована категорія з коректно визначеним градуйованим графом  $\Gamma$ , і квадратична форма  $\chi$  є додатно визначеною. Ми вважаємо, що довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Тоді існує композиція редукцій  $\mathcal{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , така що  $\Gamma_{\mathcal{U}'}$  є диз'юнктним об'єднанням графів типу Динкіна.*

**Четвертий розділ** присвячено розв'язанню класифікаційної задачі для диференціальних градуйованих категорій, асоційованих з напіввизначеною квадратичною формою. Доводиться, що така задача, що задовольняє деякі умови коректності, може бути трансформована до диференціальної градуйованої категорії з орієнтованим градуйованим графом, що є колчаном афінного (розширеного) типу.

Для розв'язання цієї задачі використовується техніка, аналогічна тій, що була використана у третьому розділі, тому у підрозділі 4.1 лише коротко описано допустимі трансформації, а також наводиться розширення алгоритму редукцій, що був побудований у підрозділах 3.1 та 3.4. Також у підрозділі 4.1 наводиться опис трансформації, що не згадувалася та не використовувалася у попередніх розділах, а саме, зміна степеня.

Для довільного  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{A} \in \Upsilon$  та довільної  $j \in \Gamma_0$  визначаємо наступну трансформацію  $\mathcal{D}_j^{(k)} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ . Припускаємо, що категорія  $\mathcal{U}'$  має ті самі об'єкти та морфізми, що і  $\mathcal{U}$ . Для довільної  $i \in \Gamma_0$ , покладемо

$$\deg_{\mathcal{U}'} a = \begin{cases} \deg_{\mathcal{U}} a + k & \text{if } t(a) = j, \\ \deg_{\mathcal{U}} a - k & \text{if } s(a) = j, \end{cases} \quad a \in \Gamma_1.$$

Тоді диференціал  $d$  на  $\mathcal{U}$  коректно визначений на  $\mathcal{U}'$  також. Для довіль-

ного  $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$  визначаємо вектор  $\mathbf{r}' \in \mathbb{Z}^n$ , такий що  $r'_k = r_k$ , якщо  $k \neq j$ , та  $r'_j$  визначено за формулами:  $r'_j = (-1)^k r_j$ . Тоді  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon$ . Трансформація  $\mathcal{D}_j^{(k)}$  називається *зміною степеня* для дгк  $\mathcal{U}$  в точці  $j$ .

Підрозділ 4.1 містить формулювання та доведення основного результату четвертого розділу. Підклас, що розглядається у цьому розділі, складається з задач, що мають критичну квадратичну форму  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$ .

**Означення 1.27.** *Напіввизначена квадратична форма  $\chi$  з біграфом  $\mathcal{B}$  називається критичною, якщо кожна повна її підформа є додатною. Ядром форми  $\chi$  називається множина  $\ker \chi = \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \chi(x, y) = 0 \text{ для довільних } y \in \mathbb{Q}^n\}$ .*

Підклас, що розглядається у цьому розділі, складається з задач, що мають критичну квадратичну форму  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$ , отже  $\chi$  є напіввизначеною квадратичною формою з точним однопараметричним ядром. Цей клас позначається через  $\Upsilon_0$ . Підклас  $\Upsilon$ , що складається з задач з додатною квадратичною  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$  буде позначатися  $\Upsilon_+$ . Кожна задача з  $\Upsilon_0$  має єдиний точний уявний корінь  $\mathbf{r} \in \ker \chi$ , такий що  $r_j = 1$  для деякої  $j \in \Gamma_0$ . Тому, задача з  $\Upsilon_0$  є четвіркою  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r})$ , де  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ .

Зв'язна задача  $\mathfrak{A} \in \Upsilon_0$  називається *афінною задачею*, і відповідний граф  $\Gamma$  називається афінним (розширеним) орієнтованим градуїованим графом, якщо  $\mathcal{B}(\Gamma)$  є однією з афінних діаграм  $(\tilde{A}_n, \tilde{D}_n (n \geq 4), \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8)$ . У цьому випадку  $\mathbf{r}$  є добре відомим мінімальним додатнім уявним коренем, що має щонайменше один елемент рівний 1. Підклас афінних задач позначається через  $\Upsilon_{aff} \subset \Upsilon_0$ .

Для цього класу задач доводиться наступна теорема.

**Теорема 4.1.** *Нехай  $\mathcal{U}$  – диференціальна градуїована категорія з коре-*

ктно визначеним градуїованим графом  $\Gamma$  і критичною напів визначеною квадратичною формою  $\chi_{\mathcal{B}}$ . Припустимо, що довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Тоді існує композиція трансформацій  $\mathcal{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , така що  $\mathcal{U}'$  є афінною задачею.

Для доведення використовується твердження з третього розділу, що для зручності може бути переформульовано наступним чином.

**Твердження 4.1.** *Для довільної  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon_+$  існує композиція дозволених трансформацій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}' = (\mathcal{U}', \Gamma', \mathcal{B}')$ , таких що  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon_+$  є деревом, отже  $\mathcal{B}'$  є діаграмою Динкіна.*

Також для зручності під час доведення переформується Теорему 4.1 аналогічним до Твердження 4.1 чином:

**Теорема 4.2.** *Для довільної  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ , існує композиція допустимих трансформацій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}' = (\mathcal{U}', \Gamma', \mathcal{B}', \mathbf{r}')$ , таких що  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon_{\text{aff}}$ , отже  $\mathcal{B}'$  є афінною діаграмою.*

Для доведення основного результату розділу також використовуються ряд доведених у тому ж підрозділі 4.2 технічних Лем. Позначимо через  $\Gamma_0^+$  (відповідно,  $\Gamma_0^-$ ) підмножину вершин  $i \in \Gamma_0$ , таких що  $\Gamma_1(i, j) = \emptyset$  (відповідно,  $\Gamma_1(j, i) = \emptyset$ ) для довільної  $j \in \Gamma_0$ .

**Лема 4.3.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon_+$ , та нехай  $\Gamma$  добре орієнтоване дерево Динкіна. Тоді існує композиція трансформацій типу зміни степеня  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ , така що граф  $\Gamma'$  є добре орієтованим 0-деревом типу Динкіна.*

**Лема 4.4.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ ,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^+$  (або  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^-$ ) та  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  добре орієтоване 0-дерево, тоді виконуються наступні властивості:*

1. Якщо  $i_1, i_2 \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$  є сусідніми і обидві інцидентні до  $\mathbf{n}$ , тоді підзадача  $\Gamma|_{\{i_1, i_2, \mathbf{n}\}}$  є активним трикутником.
2. Якщо  $i_1, i_2 \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$  обидві інцидентні до  $\mathbf{n}$ , тоді усі проміжні вершини також інцидентні до  $\mathbf{n}$ .
3. Два трикутники інцидентні або спільному мінімальному або максимальному ребру.
4. Довільне ребро з  $\Gamma_1$  є або мінімальним глибоким або максимальним.

**Лема 4.5.** Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ ,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^\pm$  та  $\check{\Gamma}$  – добре орієнтоване 0-дерево. Використовуючи, якщо необхідно, зміну степеня у точці  $\mathbf{n}$  та, якщо необхідно, розвертання ребер у точці  $\mathbf{n}$ , отримуємо еквівалентну задачу  $\mathfrak{A}'$ , таку що  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^\pm$ ,

- усі максимальні ребра на  $\Gamma'$  мають степінь 0,
- усі мінімальні ребра на  $\Gamma'$  інцидентні до  $\mathbf{n}$ , мають степінь 1,
- $\mathbf{r}'$  співпадає з  $\mathbf{r}$ .

**Лема 4.6.** Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ ,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^+$  та  $\check{\Gamma}$  – добре орієнтоване 0-дерево,  $\mathbf{r} \in \ker \chi$  – додатний точний вектор з  $\mathbf{r}_{\mathbf{n}} = 1$ . Тоді існує послідовність редукцій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ , така що  $\mathfrak{A}'$  задовольняє умовам Лема,

$$\text{та } \sum_{i \in \Gamma_0} \mathbf{r}'_i > \sum_{i \in \Gamma_0} \mathbf{r}_i.$$

**П'ятий розділ** містить ще один цікавий приклад використання алгоритмів, наведених у третьому та четвертому розділах дисертаційної роботи. У п'ятому розділі розглядається задача класифікації кореневих баз для несиметричної білінійної форми з додатно визначеною квадратичною

формою. Коренева база, яка приведена зі стандартної кореневої бази колчана типу Динкіна, визначає структуру диференціальної градуїованої категорії та відповідну несиметричну білінійну форму. Доводиться, що якщо на категорії шляхів зв'язного градуїованого графа деякої несиметричної білінійної форми можна визначити структуру диференціальної градуїованої категорії, яка задовольняє природним умовам коректності, то стандартна база цієї форми є редукованою з деякого градуїованого колчана типу Динкіна. Доведення основної теореми використовує теорему 3.2 з третього розділу для білінійних та квадратичних форм відносно їх коренів та кореневих баз.

У підрозділ 5.1 описується структура диференціальної градуїованої категорії, що буде використовуватися у цьому розділі. Підрозділ 5.2 містить короткий опис алгоритму редукції у контексті кореневих баз.

У підрозділі 5.3 наведено основний результат розділу, а також два його цікаві наслідки.

**Теорема 5.1.** *Нехай  $\mathcal{U}$  – коректно визначена диференціальна градуїована категорія,  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  – її зв'язний градуїований граф, що має додатно визначену квадратичну форму  $\chi = \chi_\Gamma$ , та  $E$  – стандартна база  $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ . Тоді дгк задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, E)$  є задачею типу Динкіна.*

**Наслідок 5.1.** *За припущень Теорема 5.1, існує зсув градуїювання  $\mathcal{T} : (\mathcal{U}, \Gamma, E) \rightarrow (\mathcal{U}', \Gamma', E)$ , такий що дгк задача  $(\mathcal{U}', \Gamma', E)$  є класичного типу Динкіна (або колчанного 0-типу).*

Для довільного  $a \in \Gamma_1(i, j)$ , позначаємо через  $\bar{a}$  орієнтоване ребро з  $i$  до  $j$  зі степенем  $\deg \bar{a} = |a|$ , та покладемо  $\bar{\Gamma}_1 = \{\bar{a} \mid a \in \Gamma_1\}$ . Позначимо через  $\bar{\Gamma} = (\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1)$  орієнтований біграф отриманий з  $\Gamma$  взяттям степенів

по модулю 2. Тут  $\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_1^0 \cup \bar{\Gamma}_1^1$ .

**Наслідок 5.2.** *Нехай  $\langle , \rangle$  – несиметрична ціла білінійна форма з асоційованим зв'язним біграфом  $V = (V_0, V_1)$ , і квадратична форма  $\chi_V$  є додатно визначеною. Тоді існує градуїований колчан Динкіна  $Q$  та редукована дійсна коренева база  $R$ , така, що  $\langle , \rangle = \langle , \rangle_R$  тоді і тільки тоді, коли є коректно визначена дгк задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, E)$  з  $E$  – стандартною базою  $\mathbb{Z}^{|B_0|}$ , такі що біграфи  $\bar{\Gamma}$  та  $V$  співпадають.*

У **висновках** коротко наведено основні підсумки роботи та сформульовано отримані результати.

## РОЗДІЛ 1

### Загальні відомості

В цьому розділі наведено основні означення та властивості об'єктів, що використовуються у дослідженні. А саме, наведено основні результати у галузі диференціальних градуїзованих категорій, боксів, коалгебр та модулів, що використовуються здобувачем. Також наведено поняття та результати з теорії графів та квадратичних форм, оскільки вони широко застосовуються для доведення основних результатів дисертаційної роботи. Розглянуто результати в різних напрямках математики, в яких виникають схеми Динкіна.

#### 1.1. Категорії та функтори

**Означення 1.1.** Категорія  $A$  складається з

1. множини  $\text{Ob}(A)$  об'єктів (вершин);
2. множини  $\text{Mor}(A)$  морфізмів (стрілок);
3. відображення  $\text{id} : \text{Ob}(A) \rightarrow \text{Mor}(A)$ , що ставить у відповідність кожному об'єкту  $x$  одиничний морфізм  $1_x$ ;
4. двох операцій  $\mathbf{s}, \mathbf{t} : \text{Mor}(A) \rightarrow \text{Ob}(A)$ , що визначають два об'єкта – початок (область визначення) та кінець (область зна-

чень) морфізма; для кожних  $x, y \in \text{Ob}(A)$  також визначається  $A(x, y) = \{\alpha \in \text{Mor}(A) \mid \mathbf{s}(\alpha) = x, \mathbf{t}(\alpha) = y\}$ ;

5. оператора композиції  $\circ : \text{Mor}(A)^2 \rightarrow \text{Mor}(A)$ , де  $\text{Mor}(A)^2 = \{(\alpha, \beta) \mid (s(\alpha) = t(\beta))\} \subset \text{Mor}(A) \times \text{Mor}(A)$ , для довільних  $\alpha \in A(y, x)$  та  $\beta \in A(z, y)$  отримуємо  $\alpha\beta \in A(z, x)$ ;

Мають місце наступні аксіоми:

1.  $\mathbf{s}(\alpha\beta) = \mathbf{s}(\beta), \mathbf{t}(\alpha\beta) = \mathbf{t}(\alpha)$  для довільних  $\alpha, \beta \in \text{Mor}(A)$ ;
2.  $\mathbf{s}(1_x) = \mathbf{t}(1_x) = x$  для довільного  $x \in \text{Ob}(A)$ ;
3. для довільного  $\alpha \in A(x, y)$  виконується  $1_y\alpha = \alpha 1_x = \alpha$ ;
4. для послідовності морфізмів  $t \xrightarrow{\gamma} z \xrightarrow{\beta} y \xrightarrow{\alpha} x$  виконується  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .

**Означення 1.2.** Нехай  $A_1$  та  $A_2$  категорії. Коваріантним функтором  $F : A_1 \rightarrow A_2$  називається пара відображень  $F_{\text{Ob}} : \text{Ob}(A_1) \rightarrow \text{Ob}(A_2)$ ,  $F_{\text{Mor}} : \text{Mor}(A_1) \rightarrow \text{Mor}(A_2)$ , для яких:

1. якщо  $\alpha : x \rightarrow y$  у  $A_1$ , то  $F_{\text{Mor}}(\alpha) : F_{\text{Ob}}(x) \rightarrow F_{\text{Ob}}(y)$  у  $A_2$ ;
2.  $F_{\text{Mor}}(1_x) = 1_{F_{\text{Ob}}(x)}$ ;
3.  $F_{\text{Mor}}(\alpha \circ \beta) = F_{\text{Mor}}(\alpha) \circ F_{\text{Mor}}(\beta)$ .

Функтор називається повним, якщо для довільних двох об'єктів  $x, y \in \text{Ob}(A_1)$  та для довільного морфізма  $\alpha_2 : F(x) \rightarrow F(y)$  у категорії  $A_2$  існує морфізм  $\alpha_1 : x \rightarrow y$  у категорії  $A_1$ , для якого  $\alpha_2 = F(\alpha_1)$ .

Функтор називається строгим, якщо для довільних двох об'єктів  $x, y \in \text{Ob}(A_1)$  та для довільних двох морфізмів  $\alpha, \beta : x \rightarrow y$  категорії  $A_1$ , з рівності  $F(\alpha) = F(\beta)$  випливає рівність  $\alpha = \beta$ .

Зафіксуємо деяке алгебраїчно замкнене поле  $\mathbb{k}$  характеристики 0.

**Означення 1.3.** Категорія  $A$  називається  $\mathbb{k}$ -лінійною категорією або  $\mathbb{k}$ -категорією, якщо для довільних  $x, y \in \text{Ob}(A)$   $A(x, y)$  є  $\mathbb{k}$ -модулем (векторним простором) та множення є  $\mathbb{k}$ -лінійним:

$$\alpha(\beta + \beta') = \alpha\beta + \alpha\beta', \alpha, \beta, \beta' \in \text{Mor}(A);$$

$$(\alpha + \alpha')\beta = \alpha\beta + \alpha'\beta, \alpha, \alpha', \beta \in \text{Mor}(A);$$

$$\alpha(c\beta) = (c\alpha)\beta = c(\alpha\beta), \alpha, \beta \in \text{Mor}(A), c \in \mathbb{k}.$$

## 1.2. Диференціальні градуїзовані категорії

**Означення 1.4.**  $\mathbb{k}$ -лінійна категорія  $\mathcal{U}$  називається градуїованою, якщо

$$\mathcal{U}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_q(\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

є сумою скінченно вимірних векторних просторів  $\mathcal{U}_q(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \text{deg}^{-1}(q)$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \text{Ob } \mathcal{U}$ .

**Означення 1.5.** Градуїована  $\mathbb{k}$ -категорія  $\mathcal{U}$  називається диференціальною градуїованою або дгк, якщо задано диференціал  $\mathbf{d} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $\mathbf{d} : \mathcal{U}_q(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \rightarrow \mathcal{U}_{q+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \text{Ob } \mathcal{U}$ , і виконуються наступні властивості:

1.  $\mathbf{d}(1_{\mathbf{i}}) = 0$ ,  $\mathbf{i} \in \text{Ob } \mathcal{U}$ ;

2. правило Лейбніца:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x_1 \dots x_i \dots x_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{|x_1|} x_1 \dots (-1)^{|x_{i-1}|} x_{i-1} \mathbf{d}(x_i) x_{i+1} \dots x_k = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{|x_1| + \dots + |x_{i-1}|} x_1 \dots x_{i-1} \mathbf{d}(x_i) x_{i+1} \dots x_k; \end{aligned}$$

3.  $\mathbf{d}^2 = 0$ .

### 1.3. Графи та Діаграми (схеми, графи) Динкіна

У дисертаційній роботі зустрічатимуться два види графів, а саме орієнтовані граfi, що позначаються  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  та неорієнтовані граfi, що позначаються  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Gamma) = (\Gamma_0, \mathcal{B}_1)$ , вони також можуть називатися схемами або діаграмами. Орієнтовані граfi зазвичай будуть градуйованими. Неорієнтовані граfi зазвичай будуть біграфами, тобто 0, 1–градуйованими. Чіткі означення та зв'язок між орієнтованими градуйованими графами та неорієнтованими біграфами, а також їх зв'язок з диференціальними градуйованими категоріями описано у відповідних підрозділах цього розділу. Поточний підрозділ присвячено короткому описанню графів Динкіна, що відіграють важливу роль у дисертаційній роботі.

Графи Динкіна та розширені граfi Динкіна (див. перелік нижче), це граfi, що на диво часто виникають у різних математичних дисциплінах, наприклад у теорії груп, що породжені відбиттями, теорії особливостей, теорії зображень колчанів, теорії простих алгебр Лі та інших. Графи Динкіна (Кокстера або Динкіна-Кокстера) широко використовуються для класифікації різних математичних об'єктів, при цьому в деяких випадках використовуються неорієнтовані, орієнтовані або частково орієнтовані граfi без або з кратними ребрами. Орієнтовані граfi Динкіна

відповідають системам коренів та напівпростим алгебрам Лі над алгебраїчно замкненим полем. Неорієнтовані графи Динкіна використовуються для дослідження дій груп Вейля.

Перелік графів Динкіна:

$$A_n : \begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & n \end{array}$$

$$D_n : \begin{array}{ccccccc} & & & & & & n \\ & & & & & & \circ \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & \\ & & & & & & & & \circ \\ & & & & & & & & n+1 \end{array}$$

$$E_6 : \begin{array}{ccccccc} & & & 6 & & & \\ & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \end{array}$$

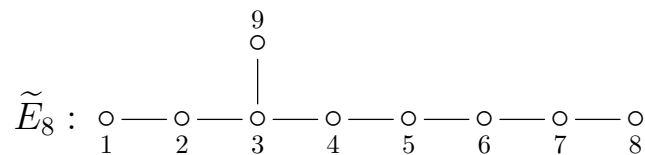
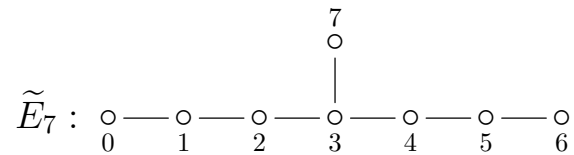
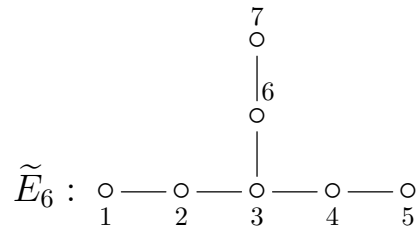
$$E_7 : \begin{array}{ccccccc} & & & 7 & & & \\ & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 \end{array}$$

$$E_8 : \begin{array}{ccccccc} & & & 8 & & & \\ & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \end{array}$$

Перелік афінних графів (розширених графів Динкіна або евклідових графів):

$$\tilde{A}_n : \begin{array}{ccccccc} & & & n+1 & & & \\ & & & \circ & & & \\ & & & / \quad \backslash & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & n \end{array}$$

$$\tilde{D}_n : \begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & n \\ & \circ & & & & & \circ \\ & / \quad \backslash & & & & & / \quad \backslash \\ \circ & & \circ & \text{---} & \circ & \cdots & \circ & & \circ \\ & \circ & & 3 & & 4 & & n-1 & & \circ \\ & 2 & & & & & & & & n+1 \end{array}$$



Наведемо деякі важливі загально відомі факти з теорії квадратичних форм (див., наприклад, [4], [18]). Поняття, що вживаються описано у розділі 1.6. Крім того, квадратична форма називається унітарною, якщо коефіцієнти при квадратах рівні 1, і називається класичною, якщо решта коефіцієнтів від'ємні.

**Теорема 1.1.** *Нехай  $\chi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  – унітарна класична квадратична форма, визначена зв'язним графом  $\mathcal{B}$ . Рівно одне з наступних тверджень виконується:*

1. *Симетрична форма  $\chi$  є додатно визначеною, тоді  $\mathcal{B}$  є графом (діаграмою) Динкіна,*
2. *Симетрична форма  $\chi$  є додатно напів визначеною, тоді  $\mathcal{B}$  є розширеним графом Динкіна,*
3. *Існує  $x \in \mathbb{Z}^n, x \geq 0$ , такий що  $\chi(x) < 0$ . Тоді  $\mathcal{B}$  називається графом невизначеного типу.*

З результатів [4] виділимо таке твердження.

**Теорема 1.2.** *Нехай  $\chi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  – зв’язна унітарна квадратична форма,  $\mathcal{B}$  – відповідний біграф.*

1. *Якщо  $\chi$  – додатно визначена, тоді існує  $\mathbb{Z}$ -оборотна трансформація  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, \chi \mapsto \chi', \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$ , така що  $\mathcal{B}'$  є графом Динкіна. Тип Динкіна визначений однозначно.*
2. *Якщо  $\chi$  – критична напів визначена, тоді існує  $\mathbb{Z}$ -оборотна трансформація  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, \chi \mapsto \chi', \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$ , така що  $\mathcal{B}'$  є розширеним графом Динкіна. Тип графа визначений однозначно.*

#### 1.4. Орієнтований градуйований граф та його категорія шляхів

Нехай  $\mathbb{k}$  – алгебраїчно замкнене поле. Ми розглядаємо  $\mathbb{k}\Gamma$   $\mathbb{k}$ -лінійну категорію шляхів градуйованого графа  $\Gamma$ , що є скінченно породженою над  $\mathbb{k}$  усіма шляхами на  $\Gamma$ . Ми позначаємо  $\text{coeff}_{x_1 \dots x_k} x = \kappa, \kappa \in \mathbb{k}$ , де  $x = \kappa x_1 \dots x_k + \dots$  – розклад по базі. Категорія  $\mathbb{k}\Gamma$  успадковує градуювання від  $\Gamma$ , таке що  $\deg x_1 x_2 \dots x_k = \sum_{i=1}^k \deg x_i$ .

Нехай  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  – орієнтований граф з множиною вершин  $\Gamma_0$  та множиною ребер (стрілок)  $\Gamma_1$  з двома відображеннями  $\mathbf{s} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$  та  $\mathbf{t} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ , що повертають початкову та кінцеву (завершуючу) вершину ребра відповідно.

**Означення 1.6.** *Дві вершини  $i, j \in \Gamma_0$  називаються інцидентними на  $\Gamma$ , якщо  $\Gamma_1(i, j) \cup \Gamma_1(j, i) \neq \emptyset$ .*

**Означення 1.7.** *Граф  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  називається градуйованим (або*

$\mathbb{Z}$ -градуїованим), якщо задано відображення  $\deg : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ , таке що

$$\Gamma_1 = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Z}} \Gamma_1^q, \Gamma_1^q = \bigsqcup_{i, j \in \Gamma_0} \Gamma_1^q(i, j) = \deg^{-1}(q).$$

Граф  $\Gamma$  називається *біградуїованим* або *біграфом*, якщо  $\deg : \Gamma_1 \rightarrow \{0, 1\}$ . Ми позначаємо через  $|x| = \deg x$  та  $\hat{x} = (-1)^{|x|}x$ . Граф  $\Gamma$  називається *класичним, 0-колчаном* або *колчаном*, якщо  $\Gamma_1^q(i, j) = \emptyset$ , коли  $q \neq 0$ , тобто  $\deg(a) = 0$  для довільного  $a \in \Gamma_1$ .

Для довільного  $a \in \Gamma_1(i, j)$ , позначаємо через  $\bar{a}$  орієнтоване ребро з  $i$  до  $j$  зі степенем  $\deg \bar{a} = |a| \bmod 2$ , та покладемо  $\bar{\Gamma}_1 = \{\bar{a} \mid a \in \Gamma_1\}$ . Позначимо через  $\bar{\Gamma} = (\Gamma_0, \bar{\Gamma}_1)$  орієнтований біграф, степені ребер якого отримано взяттям степенів ребер  $\Gamma$  по модулю 2. Тут  $\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_1^0 \cup \bar{\Gamma}_1^1$ .

Більше того, для довільного  $a \in \Gamma_1(i, j)$ , ми позначаємо через  $\tilde{a}$  неорієнтоване ребро між вершинами  $i$  та  $j$ , та покладемо  $\tilde{\Gamma}_1 = \{\tilde{a} \mid a \in \Gamma_1\}$ . Ми позначаємо через  $\tilde{\Gamma} = (\Gamma_0, \tilde{\Gamma}_1)$  неорієнтований біграф отриманий з  $\bar{\Gamma}$  стиранням орієнтації стрілок. Так визначений граф  $\tilde{\Gamma}$  буде називатися *схемою*  $\Gamma$ .

Ми асоціюємо з орієтованим градуїованим графом  $\Gamma$  несиметричну білінійну форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \times \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \rightarrow \mathbb{Z}$  разом з квадратичною формою  $\chi$ . Ми позначаємо через  $E = \{\mathbf{e}_i\}_{i \in \Gamma_0}$  стандартну базу (систему породжуючих) решітки  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ . Елементи  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  будуть записуватися або як  $\mathbf{x} = (x_i)$  або як  $\mathbf{x} = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i \mathbf{e}_i$ . Визначимо білінійну форму  $\langle -, - \rangle = \langle -, - \rangle_\Gamma : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \times \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ , що називається *формою Ойлера* графа  $\Gamma$ : для  $\mathbf{x} = (x_i)$ ,  $\mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ ,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i y_i - \sum_{a \in \Gamma_1(i, j)} (-1)^{|a|} x_i y_j,$$

За означенням, білінійні форми  $\langle -, - \rangle_\Gamma$  та  $\langle -, - \rangle_{\bar{\Gamma}}$  є ідентичними. Симетризація форми Ойлера  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  не залежить від орієнтації

на  $\Gamma$ , тому вона визначається  $\tilde{\Gamma}$  і називається *симетричною формою Ойлера* графа  $\Gamma$ . Цілочислова унітарна квадратична форма  $\chi : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ , така що

$$\chi(x) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{a \in \Gamma_1(i,j)} (-1)^{|a|} x_i x_j$$

асоційована з формою Ойлера  $(-, -)$  називається *формою Тітса* на  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ , вона залежить лише від графа  $\tilde{\Gamma}$ .

Нагадаємо, що квадратична форма  $\chi$  називається *додатно визначеною*, якщо  $\chi(x) > 0$ , для усіх  $x \neq 0$ . Класичний зв'язний неорієнтований граф з додатною формою Тітса є однією з діаграм Динкіна. Зв'язний орієнтований градуїований граф  $\Gamma$  називається (градуїованим) *колчаном Динкіна*, якщо його схема  $\tilde{\Gamma}$  є діаграмою Динкіна, та *класичним колчаном Динкіна* (або 0-колчаном), якщо  $\Gamma$  є класичним графом, і ми присвоюємо кожній стрілці степінь 0.

У категорії шляхів  $\mathbb{k}\Gamma$ , ми позначаємо через  $\text{coeff}_{x_1 \dots x_k} x = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{k}$ , коли  $x = \kappa x_1 \dots x_k + \dots$  є розкладом за базою. У категорії  $\mathbb{k}\Gamma$ , маємо  $\deg x_1 x_2 \dots x_k = \sum_{i=1}^k \deg x_i$ .

Надалі ми розглядатимемо клас графів з деякими обмеженнями. Скінченний орієнтований градуїований граф  $\Gamma$  називається *коректно визначеним графом*, якщо його категорія шляхів  $\mathbb{k}\Gamma$  не має циклів та кратних ребер, та, більше того, довільний чистий контур є градуїованим обходом. У цьому випадку  $\mathbb{k}\Gamma$  є скінченно породженою. Тоді маємо  $\Gamma_1(i, i) = \emptyset$ ,  $|\Gamma_1(i, j)| \leq 1$ , та  $|\Gamma_1(i, j)| \cdot |\Gamma_1(j, i)| = 0$  для довільних  $1 \leq i, j \leq |\Gamma_0|$ . Форма Тітса  $\chi_\Gamma$  у такому випадку є цілою або унітарною, що означає, що коефіцієнти при  $x_i^2$  рівні 1.

Нехай  $\Gamma$  – коректно визначений граф. Для елементів стандартної ба-

зи  $E$  виконується  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \chi(\mathbf{e}_i) = 1$ , та  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = \emptyset$ . Більше того,  $|\bar{\Gamma}_1^0(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = \max\{-\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle, 0\}$ , та  $|\bar{\Gamma}_1^1(\mathbf{i}, \mathbf{j})| = \max\{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle, 0\}$ .

## 1.5. Орієнтований градуїований граф диференціальної градуїованої категорії

Маючи дгк  $\mathcal{U}$  з  $|\text{Ob } \mathcal{U}| < \infty$ , визначимо відповідний орієнтований градуїований граф  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{U})$ , такий що  $\Gamma_0 = \text{Ob } \mathcal{U}$ , та  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  є базою  $(\mathcal{U}/\mathcal{U}^{\otimes 2})(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Gamma_0$  з індукованим градуїуванням. Диференціал  $\mathbf{d}$  включає відображення

$$\mathbf{d} : \Gamma_1^q \rightarrow \mathbb{k}\Gamma_{q+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Gamma_0, \quad q \in \mathbb{Z},$$

що розширяється на усю  $\mathbb{k}\Gamma$  за правилом Лейбніца.

**Означення 1.8.** Довільне ребро  $a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  називається регулярним, якщо диференціал  $a$  не має доданку типу  $\kappa x$ , де  $x \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  та  $\kappa \in \mathbb{k}$ , тобто шляхи довжини  $= 1$  не є доданками диференціала  $a$ .

**Означення 1.9.** Дгк  $\mathcal{U}$  називається регулярною, якщо усі ребра  $\Gamma_1$  регулярні.

Опишемо процедуру регуляризації дгк  $\mathcal{U}$ . Розглянемо нерегулярне ребро  $b$ , тобто  $a, b \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ,  $a$  є мінімальним та  $a$  належить до  $\mathbf{d}(b)$ , тобто  $\mathbf{d}(b) = a + \mathbf{d}'(b)$ . Тоді в рівностях для диференціалів покладемо:  $b = 0$ ,  $\mathbf{d}(b) = 0$ ,  $a = -\mathbf{d}'(b)$  та отримаємо нову дгк  $\mathcal{U}'$  з графом  $\Gamma'$  без ребер  $a, b$ . Будемо казати, що  $\mathcal{U}'$  отримується з  $\mathcal{U}$  за допомогою регуляризації  $a, b$ . Квадратична форма  $\chi_\Gamma$  не змінюється після операції регуляризації.

**Означення 1.10.** Повний підграф  $\Gamma_S$ ,  $S \subset \Gamma_0$ ,  $|S| > 1$  називається замкнутим контуром, якщо існує впорядкування  $S = \{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k\}$ ,  $k > 1$ ,

таке що  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1}) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_{j+1}, \mathbf{i}_j)| > 0$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , та  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_k) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_1)| > 0$ .

**Означення 1.11.** Замкнутий контур  $\Gamma_S$ ,  $S = \{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k\} \subset \Gamma_0$  називається чистим, якщо  $\Gamma_1(\mathbf{i}_s, \mathbf{i}_t) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_t, \mathbf{i}_s) = \emptyset$ ,  $|s - t| > 1 \pmod{k}$  та  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1}) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_{j+1}, \mathbf{i}_j)| = 1$ .

**Означення 1.12.** Замкнутий контур  $\Gamma_S$  називається орієнтованим циклом, якщо  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1})| > 0$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , та  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_1)| > 0$ .

**Означення 1.13.** Замкнутий контур  $\Gamma_S$  називається обходом, якщо  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1})| > 0$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , та  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_k)| > 0$ .

Позначимо через  $x_{\mathbf{i}_j}$  ребро, що починається у  $\mathbf{i}$  та закінчується у  $\mathbf{j}$ .

**Означення 1.14.** Обхід  $\Gamma_S$  називається активним (або контуром диференціального типу), якщо  $kx_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2} \dots x_{\mathbf{i}_{k-1}\mathbf{i}_k}$  є доданком диференціала ребра  $x_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_k}$ .

**Означення 1.15.** Ребро  $a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  називається глибоким, якщо на  $\Gamma$  немає інших шляхів з  $\mathbf{i}$  до  $\mathbf{j}$ . Вершини  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  називаються 1-зв'язними вершинами, якщо існує глибоке ребро  $a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \cup \Gamma_1(\mathbf{j}, \mathbf{i})$ .

**Означення 1.16.** Ребро  $a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  називається мінімальним, якщо  $d(a) = 0$ .

## 1.6. Квадратична форма

Нехай  $V$  - векторний простір над полем  $\mathbb{k}$ .

**Означення 1.17.** Білінійною формою називається функція  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , що є лінійною по кожному аргументу:

$$B(x + z, y) = B(x, y)B(z, y);$$

$$B(x, y + z) = B(x, y)B(x, z);$$

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y);$$

$$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y), \text{ де } x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{k}.$$

**Означення 1.18.** Білінійна форма  $B$  називається симетричною, якщо  $B(x, y) = B(y, x)$  для довільних  $x, y \in V$ .

Білінійна форма часто позначається дужкою  $(\ , \ )$ .

**Означення 1.19.** Квадратичною формою, що відповідає білінійній формі  $B$  називається відображення  $\chi : V \rightarrow \mathbb{k}$ , таке що  $\chi(x) = B(x, x)$ ,  $x \in V$ .

Для довільної квадратичної форми  $\chi$  існує єдина симетрична білінійна форма  $B$ , така що  $\chi(x) = B(x, x)$ ,  $x \in V$ . Ця білінійна форма називається полярною до  $\chi$  та може бути отримана за формулою  $B(x, y) = \frac{1}{2}(\chi(x + y) - \chi(x) - \chi(y))$ .

Визначимо симетричну білінійну форму та квадратичну форму на цілочисельній решітці  $\mathbb{Z}^n$ :

**Означення 1.20.** Цілочисловою білінійною формою називається функція  $B : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , що є лінійною по кожному аргументу:

- $B(x + z, y) = B(x, y)B(z, y);$
- $B(x, y + z) = B(x, y)B(x, z)$ , де  $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$ .

**Означення 1.21.** Цілочисловою квадратичною формою, що відповідає білінійній формі  $B$ , називається відображення  $\chi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , таке що  $\chi(x) = B(x, x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}^n$ . Цілочислова квадратична форма називається

цілою, якщо відношення коефіцієнтів при  $x_i x_j$  до коефіцієнтів при  $x_i$  є цілим для усіх  $i$ . Цілочислова квадратична форма називається унітарною, якщо усі коефіцієнти при  $x_i^2$  дорівнюють 1.

Для довільної цілочислової квадратичної форми  $\chi$  існує єдина симетрична білінійна форма  $B$ , така що  $\chi(x) = B(x, x)$ ,  $x \in V$ . Ця білінійна форма називається полярною до  $\chi$  та може бути отримана за формулою

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(\chi(x + y) - \chi(x) - \chi(y)).$$

Визначимо квадратичну форму та неорієнтований біграф, що пов'язані з графом  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ .

Ми асоціюємо з коректно визначеним градуїтованим графом  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  неорієнтований біграф  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Gamma) = (\Gamma_0, \mathcal{B}_1)$  наступним чином. Позачаємо через  $\mathcal{B}_1$  множину пар  $\{i, j\}$  вершин з  $\Gamma_0$ , що є зв'язними у  $\Gamma$ . Градування на  $\mathcal{B}_1$  відповідає градуванню на  $\Gamma$ :  $\deg(\{i, j\}) = |\{i, j\}| = \deg a \pmod{2}$ ,  $a \in \Gamma_1(i, j) \cup \Gamma_1(j, i)$ , тоді  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^0 \sqcup \mathcal{B}_1^1$ . Позначимо через  $\chi = \chi(\Gamma)$  цілочислову унітарну квадратичну форму  $\chi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ :

$$\chi(x) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{B}_1} (-1)^{|\{i, j\}|} x_i x_j.$$

Для орієнтованого графа  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  та вершин  $i, j \in \Gamma_0$  позначаємо через  $(i, j)$  - ребро графа  $\Gamma$  з невідомою або довільною орієнтацією. На рисунках орієнтовані графи надалі зображаються за наступними правилами. Ребра з парним (непарним) степенем зазвичай зображаються суцільними (переривчастими). Ребра зображаються орієнтованими, якщо орієнтація має значення та неорієнтованими, якщо орієнтація значення не має.

**Означення 1.22.** Кажемо, що  $\chi$  є додатною (від'ємною) формою, якщо  $\chi(r) > 0$  ( $\chi(r) < 0$ ) для усіх  $r \neq 0$ . Кажемо, що  $\chi$  є напіввизначеною

формою, якщо  $\chi(r) \geq 0$  ( $\chi(r) \leq 0$ ) для усіх  $r \neq 0$ . Невизначеною називається квадратична форма  $\chi$ , що набуває і додатних і від'ємних значень.

Іноді напіввизначену форму ще називають напівдодатною, також додатні та від'ємні квадратичні форми часто називають додатно визначеними та від'ємно визначеними відповідно.

**Означення 1.23.** Цілий вектор  $r$  з цілочисельної решітки  $\mathbb{Z}^n$  називається коренем (дійсним коренем), якщо  $\chi(r) = 1$ , і він називається уявним коренем, якщо  $\chi(r) = 0$ .

Вектори  $e^i \in \mathbb{Z}^n$ , такі що  $e_j^i = 0, j \neq i, e_i^i = 1$  утворюють базу  $\mathbb{Z}^n$ , що називаються канонічною базою. Вектори з канонічної бази  $e^i$  є коренями додатної цілочислової унітарної квадратичної форми та напіввизначеної цілочислової унітарної квадратичної форми, вони називаються простими коренями.

Надалі  $n = |\Gamma_0|$ . Корінь, розкладений по канонічній базі  $r = \sum_{i \in \Gamma_0} r_i e^i$ , позначатимемо через  $r = (r_i)_{i \in \Gamma_0}$

**Означення 1.24.** Корінь  $r = (r_i)_{i \in \Gamma_0}$  називається додатним коренем (відповідно, від'ємним коренем), якщо додатково  $r_i \in \mathbb{Z}_+$  (відповідно,  $r_i \in \mathbb{Z}_-$ ) для довільного  $i \in \Gamma_0$  (ми припускаємо, що  $0 \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-$ ).

**Означення 1.25.** Корінь  $r$  називається точним, якщо  $r_i \neq 0$  для усіх  $i \in \Gamma_0$ .

**Означення 1.26.** Ядром симетричної білінійної форми називається множина векторів

$$\ker \chi = \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \chi(x, y) = 0 \text{ для усіх } y \in \mathbb{Q}^n\}$$

Для напіввизначеної квадратичної форми, кожен уявний корінь належить до ядра.

**Означення 1.27.** *Напіввизначена квадратична форма  $\chi$  з біграфом  $\mathcal{B}$  називається критичною, якщо кожна повна її підформа є додатною.*  
 $\ker \chi = \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \chi(x, y) = 0 \text{ для довільних } y \in \mathbb{Q}^n\}$ .

Критичні форми мають точне одновимірне ядро.

Нехай  $\mathcal{B}$  – біграф, який відповідає квадратичній формі  $\chi$ .

**Означення 1.28.** *Для вершини  $i \in \mathcal{B}_0$ , ми позначаємо через  $T_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$   $\mathbb{Z}$ -лінійну трансформацію:*

$$T_i(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{при } t \neq i; \\ -\mathbf{e}^i, & \text{при } t = i. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ми називаємо  $T_i$  зміною знаку для  $\chi$  у точці  $i$ .

**Означення 1.29.** *Для  $\{i, j\} \in \mathcal{B}_1$ , позначаємо через  $T_{ij}^\varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$   $\mathbb{Z}$ -лінійну трансформацію ([4], [13]):*

$$T_{ij}^\varepsilon(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{при } t \neq i; \\ \mathbf{e}^i + (-1)^{|\{i,j\}|} \mathbf{e}^j, & \text{при } t = i. \end{cases} \quad (1.2)$$

з  $\varepsilon = (-1)^{|\{i,j\}|} \in \{+, -\}$ . Якщо степінь  $|\{i, j\}|$  парний, то ми називаємо  $T_{ij}^+$  інфляцією для  $\chi$ , якщо  $|\{i, j\}|$  непарна, ми називаємо  $T_{ij}^-$  дефляцією для  $\chi$ .

Описані вище трансформації вперше виникли у роботах [4] та [5]. Вони застосовуються для перетворення деяких об'єктів у еквівалентні. Ми застосуємо такі трансформації для диференціальних градуїєваних категорій.

Ми позначаємо відповідні трансформації квадратичної форми та цілочисельної решітки  $\mathbb{Z}^n$  однією літерою  $T$ , що може бути однією з трансформацій описаних вище або їх композицією. Форму одержану з  $\chi$  за допомогою деякої трансформації  $T$  позначатимемо через  $\chi T$ . Однаково позначається  $T : \chi \rightarrow \chi' = \chi T$  для квадратичної форми та  $T : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} T$  для вектора  $r = \sum_{j \in \Gamma_0} r_j \mathbf{e}^j$ , такі що  $\sum_{j \in \Gamma_0} r_j \mathbf{e}^j = \sum_{j \in \Gamma_0} r'_j \mathbf{e}^{j'}$  або  $\chi(\mathbf{r}) = \chi'(\mathbf{r}')$ .

**Означення 1.30.** Дві цілі форми  $\chi, \chi' : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  називаються еквівалентними (або  $\mathbb{Z}$ -еквівалентними), якщо вони описують однакові відображення з точністю до зміни базису, тобто, якщо існує лінійна  $\mathbb{Z}$ -оборотна трансформація  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , що є композицією допустимих трансформацій, таких що  $\chi' = \chi T$ .

Форми  $\chi$  та визначена за новим базисом форма  $\chi T_{ij}^\epsilon$  є  $\mathbb{Z}$ -еквівалентними. Якщо  $\chi$  є унітарною формою, тоді  $\chi' = \chi T_{ij}^\epsilon$  є унітарною формою. Та  $\chi$  є додатною тоді і лише тоді, коли  $\chi'$  є додатною.

Має місце наступна проста лема.

**Лема 1.1.** Нехай  $T : \chi \rightarrow \chi T$  – еквівалентність квадратичних форм. Якщо  $\chi$  є цілочисловою унітарною формою, то  $\chi T$  теж є унітарною формою, та  $\chi T$  є додатною (невід'ємною, критичною) тоді і лише тоді, коли  $\chi$  є додатною (невід'ємною, критичною). Крім того,  $T : \ker \chi \rightarrow \ker \chi'$ .

Для біграфа  $\mathcal{B}$  ми будемо використовувати поняття ланцюга, простого і замкнутого ланцюга, дерева та лісу у загальному розумінні. Кажемо, що дерево (ліс)  $\mathcal{B}$  є 0-деревом (0-лісом), якщо довільне ребро має степінь 0. Вершина дерева, інцидентна більш ніж двом ребрам, називається вер-

шиною розгалудження. Нехай  $S \in \Gamma_0$  – деяка підмножина вершин, через  $\mathcal{B}|_S$  позначатимемо підбіграф біграфа  $\mathcal{B}$ , множиною вершин якого є  $S$ , а множиною ребер є усі ребра  $\mathcal{B}$ , початкова та кінцева вершини яких містяться у  $S$ . Зв'язний підбіграф біграфа  $\mathcal{B}$ , що не зв'язаний з рештою точок, називається *зв'язною компонентою* біграфа  $\mathcal{B}$ .

**Означення 1.31.** Якщо вершина  $x$  не є вершиною розгалудження та  $\mathcal{B}|_S$  зв'язна компонента  $\mathcal{B}|_{\Gamma_0 \setminus \{x\}}$ , що не містить точок розгалудження, тоді повний підбіграф  $\mathcal{B}|_{S \cup \{x\}}$  називається *хвостом*  $x$  та позначається  $\vec{x}$ .

Переформулюємо відомі результати (див. [4]) у зручному для подальшого використання вигляді.

**Твердження 1.1.** Нехай  $\chi$  – цілочислова додатна (відповідно, напівдодатна з одновимірним ядром) унітарна форма,  $\mathcal{B}$  – її біграф. Тоді існує послідовність змін знаку типу (1.1) та дефляцій типу (1.2) з композицією  $T$ , такою що біграф  $\mathcal{B}T$  форми  $\chi T$  є 0-лісом типу Динкіна (відповідно, афінного типу).

Для додатної форми,  $\mathcal{B}T$  є диз'юнктним об'єднанням деяких з наступних діаграм Динкіна:  $A_n$  ( $n > 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ), або  $E_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ).

У випадку афінної форми,  $\mathcal{B}T$  є диз'юнктним об'єднанням деяких з наступних афінних діаграм:  $\tilde{A}_n$  ( $n > 1$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ), або  $\tilde{E}_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ).

Якщо  $\mathcal{B}$  зв'язний, тоді  $\mathcal{B}T$  деревом. Тип Динкіна (афінний тип) визначається однозначно по  $\chi$ .

Наступні дві леми є загальновідомими наслідками цього твердження.

**Лема 1.2.** Нехай  $(\chi, \mathcal{B})$  – критична квадратична форма. Тоді ядро є одновимірним:  $\ker \chi = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{r}$ , де  $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{e}^i \in \mathbb{Z}^n$  є точним уявним

коренем, крім того, існує  $j \in \Gamma_0$ , така що  $r_j = 1$  та  $\mathbf{r} = \sum_{i \neq j} r_i \mathbf{e}^i \in \mathbb{Z}^{n-1}$  є точним коренем на додатно визначеній повній підформі  $\mathcal{B}|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$ .

**Лема 1.3.** *Нехай  $(\chi, \mathcal{B})$  – критична квадратична форма та  $\mathbf{r}$  – її точний корінь, що має щонайменше один елемент  $= 1$ . Тоді існує послідовність  $T$  змін знаку та дефляцій, така що  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}T$  є точним додатним коренем, існує  $j \in \Gamma_0$ , така що  $r'_j = 1$ , та  $r'_i \leq 6$  для довільної  $i \in \Gamma_0$ .*

Кожен біграф, що є деревом, може бути перетворений до біграфа 0-дерева за допомогою послідовності дефляцій та інфляцій. Для діаграми Динкіна з додатною формою кількість усіх коренів є скінченною та кількість додатних коренів дорівнює кількості від'ємних коренів, крім того кожен корінь є або додатним або від'ємним. Наступне твердження було доведено у [4].

**Твердження 1.2.** *Якщо  $\chi$  є додатною,  $a \in \mathcal{B}_1(i, j)$  та  $T_{ij}^+$  дефляція, тоді кількість додатних коренів форми  $\chi T_{ij}^+$  строго більша ніж кількість додатних коренів форми  $\chi$ . Форма типу Динкіна має максимальну можливу кількість додатних коренів.*

Кажемо, що  $\Gamma$  є *редукованим* (*A-редукованим*), якщо його біграф  $\mathcal{B}(\Gamma)$  може бути редукованим до диз'юнктного об'єднання діаграм Динкіна (діаграм Динкіна типу  $A$ ).

## 1.7. Дійсні корені та група Вейля

Ми розглядаємо коректно визначений скінченний орієнтований градуований граф  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \text{deg})$  разом з відповідним біграфом  $\bar{\Gamma}$ , його схемою  $\tilde{\Gamma}$ , квадратичною формою  $\chi$  та відповідною білінійною формою  $\langle, \rangle$ .

Для довільного  $x \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ , такого що  $(x, x) = 1$ , позначимо через  $\sigma_x$  відбиття  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  на гіперплощину, ортогональну до  $x$ , тоді  $\sigma_x(y) = y - 2(x, y)x$ ,  $y \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ . Для простоти припускаємо, що  $\Gamma_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n = |\Gamma_0|$ , тоді  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0} \simeq \mathbb{Z}^n$ . Ми надамо широко відомий опис базових властивостей відбиттів.

**Лема 1.4.** *Для довільних  $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$ ,  $(x, x) = 1$  виконується*

1.  $\sigma_x^2 = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$ , тобто  $\sigma_x : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  є інволюцією;
2.  $\sigma_{-x}(y) = \sigma_x(y)$ ;
3.  $\sigma_x(-y) = -\sigma_x(y)$ ;
4.  $\sigma_x(x) = -x$ ;
5.  $(\sigma_x(y), \sigma_x(z)) = (y, z)$ ;
6.  $\sigma_{\sigma_x(y)}(z) = \sigma_x \sigma_y \sigma_x^{-1}(z)$ .

Відбиття відносно  $i$ -того елемента стандартної бази  $E$  визначається через  $\sigma_i(y) = y - (y, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ . У цьому випадку ми називаємо  $\sigma_i$  простим відбиттям на  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ , ми називаємо  $\mathbf{e}_i$  простим коренем, та позначаємо через  $\Pi_\chi$  множину усіх простих коренів.

Визначимо групу Вейля  $W$  графа  $\Gamma$  як підгрупу  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{\Gamma_0})$ , породжену простими відбиттями  $\sigma_i$  застосованими у відповідному порядку до елементів стандартної бази  $E$ . Оскільки симетрична білінійна форма  $(-, -)$  не залежить від орієнтації  $\Gamma$ , то група  $W$  не залежить від орієнтації  $\Gamma$ , тому визначається  $\tilde{\Gamma}$  (або, еквівалентно, квадратичною формою  $\chi$ ). Елемент  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  називається дійсним коренем за умови, що він належить до  $W$ -орбіти деякого  $\mathbf{e}_i$ . Множина  $\Phi_\chi = \bigcup_{w \in W} w(\Pi_\chi) \subset \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  називається множиною дійсних коренів  $\chi$  (очевидно, кожен  $x \in \Phi_\chi$  задовольняє  $\chi(x) = \langle x, x \rangle = 1$ ).

Корінь  $x \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  називається *точним*, якщо  $x_i \neq 0$  для усіх  $i \in \Gamma_0$ . Добре відомо, що усі дійсні корені класичних колчанів Динкіна є додатними або від'ємними.

Довільна множина породжуючих  $R = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  решітки  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0} \simeq \mathbb{Z}^n$  називається *кореневою базою* відносно графа  $\Gamma$  (та білінійної форми  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ ), якщо  $\alpha_i \in \Phi_\chi$  для довільного  $i \in \overline{1, n}$ . Ми позначаємо через  $\Gamma_R = \Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1)$  орієнтований біграф, побудований наступним чином: (i)  $\Gamma'_0 = R$ ; (ii) для довільних  $i, j \in \overline{1, n}$ ,  $i \neq j \in |\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle|$  ребра з  $\Gamma'_1(\alpha_i, \alpha_j)$  або степея 0, якщо  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < 0$ , та степея 1 у іншому випадку; (iii)  $|\Gamma'_1(\alpha_i, \alpha_i)| = \emptyset$ . Помітимо, що для додатно визначеної форми  $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle| \leq 1$  та  $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 1$ . Ми називаємо  $\Gamma_R$  орієтованим *біграфом*, *асоційованим з кореневою базою*  $R$  та несиметричною білінійною формою  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Коренева база  $R$  є *коректно визначеною*, якщо її граф  $\Gamma_R$  є таким. у цьому випадку  $\Gamma'_1(\alpha_i, \alpha_i) = \emptyset$ ,  $|\Gamma'_1(\alpha_i, \alpha_j)| \leq 1$ , та  $|\Gamma'_1(\alpha_i, \alpha_j)| \cdot |\Gamma'_1(\alpha_j, \alpha_i)| = 0$  для довільних  $i, j \in \overline{1, n}$ . Ми говоримо, що коректно визначений граф  $\Gamma' = \Gamma_R$  є правильно градуйованим, якщо  $\deg(a) \equiv \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \pmod{2}$  для довільного  $a \in \Gamma'_1(\alpha_i, \alpha_j)$ ,  $i, j \in \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ .

Нехай  $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  – стандартна коренева база решітки  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0} \simeq \mathbb{Z}^n$ . Для  $i \in \Gamma_0$ , позначимо через  $T_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  наступну  $\mathbb{Z}$ -лінійну трансформацію:

$$T_i(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{при } t \neq i; \\ -\mathbf{e}^i, & \text{при } t = i. \end{cases}$$

Ми називаємо  $T_i$  а *змінною знаку* для  $\chi$  у точці  $i$ . Для  $i, j \in \Gamma_0$ , позначаємо через  $T_{ij}^\varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$   $\mathbb{Z}$ -лінійну трансформацію ([4], [11]):

$$T_{ij}^\varepsilon(\mathbf{e}^t) = \begin{cases} \mathbf{e}^t, & \text{при } t \neq i; \\ \mathbf{e}^i + (-1)^{|\{i, j\}|} \mathbf{e}^j, & \text{при } t = i. \end{cases}$$

з  $\varepsilon = (-1)^{|\{i,j\}|} \in \{+, -\}$ . Якщо степінь  $|\{i, j\}|$  парний, то ми називаємо  $T_{ij}^+$  інфляцією для  $\chi$ , якщо  $|\{i, j\}|$  є непарним, називаємо  $T_{ij}^-$  дефляцією для  $\chi$ .

Ми позначаємо відповідну трансформацію квадратичної форми та цілу гратку  $\mathbb{Z}^n$  однією літерою. Отже є  $T : \chi \rightarrow \chi' = \chi T$  для квадратичної форми та  $T : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} T$  для вектора  $r = \sum_{j \in \Gamma_0} r_j \mathbf{e}_j$ , таке що  $\sum_{j \in \Gamma_0} r_j \mathbf{e}_j = \sum_{j \in \Gamma_0} r'_j \mathbf{e}'_j$  або  $\chi(\mathbf{r}) = \chi'(\mathbf{r}')$ .

Дві цілі форми  $\chi, \chi' : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  називаються *еквівалентними* (або  $\mathbb{Z}$ -еквівалентними), якщо вони описують ті самі відображення з точністю до вищезгаданих змін базису, тобто, якщо існує лінійна  $\mathbb{Z}$ -оборотна трансформація  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , що є композицією допустимих трансформацій, таких що  $\chi' = \chi T$ . Має місце наступна проста Лема.

**Лема 1.5.** *Нехай  $T : \chi \rightarrow \chi T$  – еквівалентність квадратичних форм. Якщо  $\chi$  цілочислова унітарна форма, тоді  $\chi T$  – теж цілочислова унітарна форма, та  $\chi T$  є додатною (не негативною, критичною) тоді і лише тоді, коли  $\chi$  є додатною (не негативною, критичною).*

Для градуйованого графа  $\Gamma$  ми використовуватимемо поняття *ланцюга*, *простого*, *замкнутого ланцюга*, *дерева* та *лісу* у загальному розумінні. Кажемо, що дерево  $\Gamma$  є 0-деревом (0-лісом), якщо довільне ребро має степінь 0.

Наступний результат показано у [3].

**Теорема 1.3.** ([4]) *Нехай  $\chi$  – зв'язна цілочислова додатня унітарна форма,  $\bar{\Gamma}$  її орієнтований граф. Тоді існує послідовність змін знаку та дефляцій з композицією  $T$ , такою що біграф  $\bar{\Gamma} T$  форми  $\chi T$  є 0-лісом типу Динкіна. Для довільної додатної форми,  $\bar{\Gamma} T$  є неперетинним об'єд-*

нанням наступних діаграм Динкіна:  $A_n$  ( $n > 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ) або  $E_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ). Тип Динкіна визначається єдиним чином за  $\chi$ .

## 1.8. Модулі, комодулі та бокси

Зафіксуємо деяке поле  $\mathbb{k}$ . Позначимо  $\mathbb{k}\text{-mod}$  категорію скінченновимірних векторних просторів над  $\mathbb{k}$  та  $\otimes$  тензорний добуток над  $\mathbb{k}$ . Нехай  $A$  – це мала  $\mathbb{k}$ -лінійна категорія з множенням  $m_A : A \otimes A \rightarrow A$ .

**Означення 1.32.** Модулем (лівим модулем) над  $A$  є (коваріантний) функтор  $M : A \rightarrow \mathbb{k}\text{-mod}$ .

Це означає, що

1. для довільного  $I \in \text{Ob } A$  задано  $M(I) \in \mathbb{k}\text{-mod}$ ,
2. для довільного  $I, J \in \text{Ob } A$  задано  $\mathbb{k}$ -лінійне відображення

$$\begin{aligned} A(I, J) \otimes M(I) &\rightarrow M(J), \\ (\alpha \otimes m) &\mapsto \alpha(m) = \alpha m. \end{aligned}$$

3. для усіх  $I, J, K \in \text{Ob } A$  та для усіх  $\alpha \in A(I, J), \beta \in A(K, I), m \in M(K)$  має місце наступна рівність  $\alpha(\beta m) = (\alpha\beta)m$ .

Визначимо  $m_M : A \otimes M \rightarrow M$  – відповідне  $\mathbb{k}$ -лінійне відображення.

**Означення 1.33.** Для модулів  $M, N$  над  $A$ , відображення  $f : M \rightarrow N$  називається морфізмом модулів, якщо діаграма

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes f} & A \otimes N \\ m_M \downarrow & & \downarrow m_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

комутативна.

Позначатимемо через  $A\text{-mod}$  категорію скінченновимірних модулів над  $A$ .

**Означення 1.34.**  $V$  називається коалгеброю над категорією  $A$  або  $A$ -коалгеброю якщо  $V \in A\text{-бімодулем}$  зі структурою коалгебри, тобто задано коасоціативне комноження  $\mu : V \rightarrow V \otimes_A V$  та коодиниця  $\varepsilon : V \rightarrow A$  відносно  $\mu$ , де  $\mu, \varepsilon$  –  $A$ -бімодульні морфізми та виконується наступні рівності:

- $(\mu \otimes_A 1_V)\mu = (1_V \otimes_A \mu)\mu;$
- $(\varepsilon \otimes_A 1_V)\mu = \iota_l$  and  $(1_V \otimes_A \varepsilon)\mu = \iota_r,$

де  $\iota_l : V \rightarrow A \otimes_A V$  та  $\iota_r : V \rightarrow V \otimes_A A$  канонічні ізоморфізми.

**Означення 1.35.** Модуль  $M$  над категорією  $A$  називається комодулем над  $A$ -коалгеброю  $V$ , якщо задано комноження  $\mu_M : M \rightarrow V \otimes_A M$ , таке що наступна діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu_M} & V \otimes_A M \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \mu_M \\ V \otimes_A M & \xrightarrow{\mu \otimes 1_M} & V \otimes_A V \otimes_A M \end{array}$$

**Означення 1.36.** Для комодулів  $M, N$  над  $V$ ,  $\mathbb{k}$ -лінійне відображення  $f : M \rightarrow N$  називається морфізмом комодулів, якщо наступна діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow \mu_N \\ V \otimes_A M & \xrightarrow{1_V \otimes f} & V \otimes_A N \end{array}$$

Позначатимемо через  $V\text{-comod}$  категорію комодулів над  $A$ -коалгеброю  $V$ .

**Означення 1.37.** Бокс  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  складається з  $\mathbb{K}$ -категорії  $A$ , та  $A$ -коалгебри  $V$  з множенням  $\mu : V \rightarrow V \otimes_A V$  та координцею  $\varepsilon : V \rightarrow A$ .

Для бокса  $\mathcal{A}$ , визначаємо категорію  $\mathcal{A}\text{-mod}$  зображень. Об'єктами категорії є модулі з  $A\text{-mod}$ , морфізми визначаються формулою:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = \text{Hom}_A(V \otimes_A M, N),$$

композиція морфізмів  $\psi : V \otimes_A N \rightarrow L$  та  $\varphi : V \otimes_A M \rightarrow N$  визначається суперпозицією:

$$V \otimes_A M \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}_M} V \otimes_A V \otimes_A M \xrightarrow{\text{id}_V \otimes \varphi} V \otimes_A N \xrightarrow{\psi} L.$$

Морфізмом  $F$  двох боксів  $\mathcal{A} = (A, V)$  та  $\mathcal{B} = (B, W)$  є пара  $(F_0, F_1)$ , де  $F_0 : A \rightarrow B$  – функтор і  $F_1 : V_A \rightarrow W_A$  –  $A$ -гомоморфізм, такі що

$$F_0 \circ \varepsilon_{\mathcal{A}} = \varepsilon_{\mathcal{B}} \circ F_1,$$

$$\tilde{\nu} \circ F_1 \otimes F_2 \circ \mu_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{B}} \circ F_1.$$

Це означає, що діаграми

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{A}}} & A \\ F_1 \downarrow & & \downarrow F_0 \\ {}_A W_A & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{B}}} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_A V & \xrightarrow{F_1 \otimes F_1} & {}_A W_A \otimes_A {}_A W_A \\ \mu_{\mathcal{A}} \uparrow & & \downarrow \tilde{\nu} \\ V & \xrightarrow{F_1} {}_A W_A \xrightarrow{\mu_{\mathcal{B}}} & W \otimes_B W \end{array}$$

комутують, де  $\tilde{\nu} : {}_A W_A \otimes_A {}_A W_A \rightarrow W \otimes_B W$  це відображення породжене природною проекцією  $\nu : B_A \otimes_A B \rightarrow B$ .

## РОЗДІЛ 2

### Індуковані комодулі над коалгеброю

В цьому розділі будується функтор на категорії індукованих комодулів і доводиться, що він є повним і строгим.

Поняття бокса, що було введено в [7] та [8], є важливим інструментом для теорії зображень. В [9] було доведено, що категорія зображень бокса еквівалентна категорії індукованих комодулів над деякою коалгеброю.

В даному розділі будується інтерпретація редукції бокса з [8], використовуючи техніку коалгебр з [9].

Усі необхідні означення та твердження для даного розділу описано в підрозділах "1.1 Категорії та функтори" та "1.8 Модулі, комодулі та бокси" першого розділу. Зафіксуємо деяке поле  $\mathbb{k}$ . Позначимо  $\mathbb{k}\text{-mod}$  категорію скінченновимірних векторних просторів над  $\mathbb{k}$  та  $\otimes$  тензорний добуток над  $\mathbb{k}$ . Нехай  $A$  – це мала  $\mathbb{k}$ -лінійна категорія з множенням  $m_A : A \otimes A \rightarrow A$ . Позначатимемо через  $A\text{-mod}$  категорію лівих скінченновимірних модулів над  $A$ . Надалі усі категорії вважаємо  $\mathbb{k}$ -лінійними.

Також розглянемо бокс  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$ . Для бокса  $\mathcal{A}$ , визначаємо категорію  $\mathcal{A}\text{-mod}$  зображень (див. Означення 1.37 бокса та категорії зображень після нього).

## 2.1. Індуковні комодулі

Нехай  $V$  – коалгебра над  $A$  з множенням  $\mu : V \rightarrow V \otimes_A V$  та координцею  $\varepsilon : V \rightarrow A$ , та  $X \in A\text{-mod}$ .

**Означення 2.1.**  $V$ -комодуль  $X_V = V \otimes_A X$  разом з індукованим множенням  $\mu_{X_V} = \mu \otimes 1_X : X_V \rightarrow V \otimes_A X_V$  називається індукованим  $V$ -комодулем.

Позначимо через  $V\text{-icomod}$  категорію індукованих  $V$ -комодулів. Для  $X, Y \in A\text{-mod}$ , морфізм  $V \otimes_A X \rightarrow V \otimes_A Y$ , є  $1_V \otimes f$ , де  $f : X \rightarrow Y$  є морфізмом  $A$ -модулів.

Наступне твердження було доведено у [9]:

**Твердження 2.1.** *Нехай  $V$  – коалгебра над категорією  $A$ ,  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  – бокс,  $X, Y$  – ліві  $A$ -модулі, та  $X_V, Y_V$  – відповідні індуковані комодулі. Тоді існує канонічний ізоморфізм*

$$\text{Hom}_{V\text{-icomod}}(X_V, Y_V) \simeq \text{Hom}_A(V \otimes_A X, Y).$$

*Категорія зображень бокса та категорія індукованих комодулів є еквівалентними:*

$$V\text{-icomod} \simeq A\text{-mod}.$$

## 2.2. Індукований функтор між категоріями модулів

Нехай  $A$  та  $B$  –  $\mathbb{k}$ -категорії,  $\varphi : A \rightarrow B$  –  $\mathbb{k}$ -лінійний функтор. Функтор  $\varphi$  наділяє категорію  $B$  структурою лівого (правого)  $A$ -модуля. Функтор  $\varphi$  індукує два функтора

$$A\text{-mod} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_*} \\ \xleftarrow{\varphi^*} \end{array} B\text{-mod}$$

Функтор  $\varphi^*$  діє на  $N \in B\text{-mod}$  за правилом:

$$(*) \quad \varphi^*(N) = (A \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow \mathbb{k}\text{-mod}) \in A\text{-mod}.$$

Таким чином  $\varphi^*(N) = \text{Hom}_B({}_B B_A, N) \in A\text{-mod}$ . Довільний морфізм  $f \in \text{Hom}_B(N_1, N_2)$  канонічно породжує морфізм  $\varphi^*(f) : \text{Hom}_B(B, N_1) \rightarrow \text{Hom}_B(B, N_2)$ , тому  $\varphi^*$  є коваріантним функтором.

Для  $M \in A\text{-mod}$ , покладемо  $\varphi_*(M) = B_A \otimes_A M \in B\text{-mod}$ , та для заданого морфізма  $f \in \text{Hom}_A(M_1, M_2)$ , покладемо  $\varphi_*(f) = 1_B \otimes f : B \otimes_A M_1 \rightarrow B \otimes_A M_2$ .

Функтори  $\varphi_*$  та  $\varphi^*$  пов'язані наступним чином: для довільного  $M \in A\text{-mod}$  та  $N \in B\text{-mod}$ , виконується ([8]):

$$\text{Hom}_B(\varphi_*(M), N) \simeq \text{Hom}_A(M, \varphi^*(N)). \quad (2.1)$$

### 2.3. Бокс індукований функтором

Нехай  $A$  та  $B$  –  $\mathbb{k}$ -категорії,  $\varphi : A \rightarrow B$  –  $\mathbb{k}$ -лінійний функтор та  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  – бокс.

Ми будемо  $B$ -коалгебру

$$V^\varphi = {}_B B_A \otimes_A V \otimes_A A B_B$$

з множенням  $\mu_\varphi : V^\varphi \rightarrow V^\varphi \otimes_B V^\varphi$  заданим наступним чином:

$$\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) = \Sigma 1 \otimes v_{(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2)} \otimes 1$$

де  $\mu(v) = \Sigma v_{(1)} \otimes v_{(2)}$ ; та з координатою  $\varepsilon_\varphi : V^\varphi \rightarrow B$ , такою що

$$\varepsilon_\varphi : V^\varphi \xrightarrow{1_B \otimes \varepsilon \otimes 1_B} B \otimes_A A \otimes_A B \xrightarrow{\simeq} B \otimes_A B \xrightarrow{m_B} B,$$

тут  $m_B : B \otimes_A B \rightarrow B$  індуковане множення у категорії  $B$ .

**Теорема 2.1.** *Нехай  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  – деякий бокс,  $B$  – категорія. Функтор  $\varphi : A \rightarrow B$  індукує бокс*

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^\varphi = (B, V^\varphi, \mu_\varphi, \varepsilon_\varphi).$$

*Доведення*

Спочатку обчислимо  $V^\varphi \otimes_B V^\varphi =$

$$= (B \otimes_A V \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A V \otimes_A B) = B \otimes_A V \otimes_A B \otimes_A V \otimes_A B.$$

Достатньо визначити комноження  $\mu_\varphi$  та координицю  $\varepsilon_\varphi$  на елементах такого типу:  $1 \otimes v \otimes 1$ , оскільки  $\mu_\varphi(b_1 \otimes v \otimes b_2) = b_1 \mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) b_2$  та  $\varepsilon_\varphi(b_1 \otimes v \otimes b_2) = b_1 \varepsilon_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) b_2$ . Нехай  $\mu(v) = \Sigma v_{(1)} \otimes v_{(2)}$ , тоді визначаємо:

$$\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) = \Sigma 1 \otimes v_{(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2)} \otimes 1 =$$

$$\Sigma(1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1).$$

Для доведення коасоціативності комноження  $\mu_\varphi$  випишемо умову коасоціативності комноження  $\mu$ :

$$(\mu \otimes 1)\mu(v) = (1 \otimes \mu)\mu(v),$$

це означає, що

$$\begin{aligned} \sum v_{(1)(1)} \otimes v_{(1)(2)} \otimes v_{(2)} &= \\ \sum v_{(1)} \otimes v_{(2)(1)} \otimes v_{(2)(2)} &= \\ \sum v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes v_{(3)}. & \end{aligned}$$

Тепер перевіримо коасоціативність  $\mu_\varphi$ , а саме, покажемо, що  $(\mu_\varphi \otimes 1)\mu_\varphi = (1 \otimes \mu_\varphi)\mu_\varphi$ . Для цього розглянемо дію виразів з обох частин рівності на елементі  $1 \otimes v \otimes 1$ .

$$\begin{aligned}
& (\mu_\varphi \otimes 1)\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) = \\
& \sum (\mu_\varphi \otimes 1)((1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1)) = \\
& \sum \sum 1 \otimes v_{(1),(1)} \otimes 1 \otimes v_{(1),(2)} \otimes 1 \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1).
\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
& (1 \otimes \mu_\varphi)\mu_\varphi(1 \otimes v \otimes 1) = \\
& \sum (1 \otimes \mu_\varphi)((1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1)) = \\
& \sum \sum (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes 1 \otimes v_{(2),(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2),(2)} \otimes 1.
\end{aligned}$$

Рівність

$$\begin{aligned}
& \sum \sum 1 \otimes v_{(1),(1)} \otimes 1 \otimes v_{(1),(2)} \otimes 1 \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1) = \\
& \sum \sum (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes 1 \otimes v_{(2),(1)} \otimes 1 \otimes v_{(2),(2)} \otimes 1
\end{aligned}$$

отримується з коасоціативності комноження  $\mu$  тензорно помноженого на 1.

Тепер доведемо аксіому координиці  $\varepsilon_\varphi$ :

$$(\varepsilon_\varphi \otimes_A 1_{V\varphi})\mu = 1_{V\varphi}.$$

Достатньо обчислити  $(\varepsilon_\varphi \otimes_A 1_{V\varphi})\mu$  на елементах  $(1 \otimes v \otimes 1)$ :

$$\begin{aligned}
& (1 \otimes v \otimes 1) \xrightarrow{\mu_\varphi} \\
& \sum (1 \otimes v_{(1)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1) \xrightarrow{\varepsilon_\varphi \otimes_A 1_{V\varphi}} \\
& \varepsilon(v_{(1)}) \cdot (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1).
\end{aligned}$$

Використовуючи  $\varepsilon(v_{(1)}) \in A$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \varepsilon(v_{(1)}) \cdot (1 \otimes v_{(2)} \otimes 1) &= \\ \sum 1 \otimes \varepsilon(v_{(1)})v_{(2)} \otimes 1 &= \\ 1 \otimes \left( \sum \varepsilon(v_{(1)})v_{(2)} \right) \otimes 1 &= 1 \otimes v \otimes 1. \end{aligned}$$

Друга рівність аксіоми координиці  $(1_{V^\varphi} \otimes_A \varepsilon_\varphi)\mu = 1_{V^\varphi}$  доводиться аналогічно.

Це доводить, що  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\varphi = (B, V^\varphi, \mu_\varphi, \varepsilon_\varphi)$  є боксом. Теорему 2.1 доведено.

Новий бокс  $\mathcal{A}^\varphi$  називається індукованим з бокса  $\mathcal{A}$  функтором  $\varphi$ .

## 2.4. Основне твердження

**Теорема 2.2.** *Нехай  $A, B$  категорії,  $\varphi : A \rightarrow B$   $\mathbb{k}$ -лінійний функтор,  $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$  – бокс,  $\varphi^* : B\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$  та  $\varphi_* : A\text{-mod} \rightarrow B\text{-mod}$  індуковані функтори на категоріях модулів. Тоді існує індукований функтор на категорії індукованих комодулів*

$$(**) \quad \varphi_{\text{icomod}}^* : V^\varphi\text{-icomod} \rightarrow V\text{-icomod},$$

*що переводить  $V^\varphi \otimes_B M$  у  $V \otimes_A \varphi^*(M)$ . Цей функтор  $\varphi_{\text{icomod}}^*$  повний і строгим.*

### Доведення

Доводимо, що  $\varphi_{\text{icomod}}^*$  є бієкцією та може бути розширено до морфізму.

Побудуємо функтор  $\varphi_{\text{icomod}}^*$ . Функтор  $\varphi_{\text{icomod}}^*$  уже визначено на об'єктах таким чином, що він переводить  $V^\varphi \otimes_B M$  у  $V \otimes_A \varphi^*(M)$ . Нехай  $F$  – морфізм

у категорії  $V^\varphi\text{-icomod}$ :

$$V^\varphi \otimes_B M \xrightarrow{F} V^\varphi \otimes_B M'.$$

Тоді його можна продовжити до морфізма

$$V^\varphi \otimes_B M \xrightarrow{f} M'$$

за правилом

$$V^\varphi \otimes_B M \xrightarrow{F} V^\varphi \otimes_B M' \xrightarrow{\varepsilon_B \otimes 1_{M'}} M'.$$

Використовуючи рівності  $\varphi^*(M) = B \otimes_B M$ ,

$$V^\varphi \otimes_B M = B \otimes_A V \otimes_A B \otimes_B M = \varphi_*(V \otimes_A \varphi^*(M))$$

та формули (2.1), отримуємо:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_B(V^\varphi \otimes_B M, M') &\cong \\ \text{Hom}_B(\varphi_*(V \otimes_A \varphi^*(M)), M') &\cong \\ \text{Hom}_A(V \otimes_A \varphi^*(M), \varphi^*(M')). \end{aligned}$$

Тепер застосуємо Твердження 2.1:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(V \otimes_A \varphi^*(M), \varphi^*(M')) &\cong \\ \text{Hom}_{V\text{-icomod}}(V \otimes_A \varphi^*(M), V \otimes_A \varphi^*(M')). \end{aligned}$$

Отриманий  $i$  є шуканим морфізмом категорії  $V\text{-icomod}$ .

## Висновки

У даному розділі використано мову комодулів для побудови повного і точного функтора на категорії індукованих комодулів.

## РОЗДІЛ 3

### Диференціальні градуїзовані категорії з додатно визначеною квадратичною формою

Алгоритм редукції лінійних категорій та інших структур широко використовується в теорії зображень. Цей підхід дозволяє вивчати зображення індуктивно, редукуючи відповідні категорії покроково (див. [1], [2]). З іншого боку важливою характеристикою зображуваної структури є індукована квадратична форма, корені якої за деяких умов відповідають нерозкладним зображенням. Теорія квадратичних форм добре відома (див. [3], [4]). Ми даємо одночасний алгоритм трансформації диференціальної градуїрованої категорії ([6]) зі спеціальними властивостями та асоційованої квадратичної форми до канонічного вигляду. Пропонований алгоритм поєднує та розширює алгоритм аналогічний до алгоритму редукції описаного у [1], [2] та алгоритм приведення квадратичних форм з [4].

Усі необхідні означення та твердження для даного розділу описано в підрозділах 1.2 - 1.6 першого розділу, що присвячені диференціальним градуїваним категоріям, їх графам та квадратичній формі. У підрозділі 1.3 того ж розділу наведено коротку історичну довідку про графи Динкіна.

Ми розглядаємо дгк  $\mathcal{U}$  з графом  $\Gamma_{\mathcal{U}}$  та диференціалом  $d : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  (див. означення 1.5). Позначимо  $\widehat{U}$  дг категорію та  $\Gamma$  - відповідний граф,

доповнені множиною петель

$$\Omega = \{\omega_i \in \Gamma_1^1(\mathbf{i}, \mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in \Gamma_0\}$$

та з диференціалом  $\partial : \widehat{U} \rightarrow \widehat{U}$ , що визначається наступним чином:

$$\partial(\omega_i) = \omega_i^2$$

та

$$\partial(a) = a\omega_i + (-1)^{|a|+1}\omega_j a + \mathbf{d}(a), a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}), a \notin \Omega.$$

Тоді умова  $\partial^2 = 0$  та правило Лейбніца виконуються. Дгк  $\widehat{U}$  називається *поповненою* для  $\mathcal{U}$ .

Казатимемо, що граф  $\Gamma$  є *AD-редукованим*, якщо його біграф  $\mathcal{B}(\Gamma)$  зводиться до диз'юнктного об'єднання діаграм Динкіна типу  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ).

### 3.1. Трансформації для AD-випадку

**Розвертання ребер у точці.** Припускаємо, що граф  $\Gamma$  не має орієнтованих циклів. Позначимо  $\Gamma_0^+$  (відповідно,  $\Gamma_0^-$ ) підмножину вершин  $\mathbf{i} \in \Gamma_0$ , таку що  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \emptyset$  (відповідно,  $\Gamma_1(\mathbf{j}, \mathbf{i}) = \emptyset$ ) для довільних  $\mathbf{j} \in \Gamma_0$ . У цьому підрозділі ми розглядаємо  $\text{add } \mathbb{k}\Gamma$  – адитивне замикання категорії  $\mathbb{k}\Gamma$ . Нехай  $\mathbf{j} \in \Gamma_0^+$ ,  $\mathbf{i}_k \in \Gamma_0$  та  $a_k \in \Gamma_1(\mathbf{i}_k, \mathbf{j})$ ,  $k \in \{1, \dots, p\}$  усі ребра, що закінчуються у точці  $\mathbf{j}$ . Позначимо

$$\Phi_j : \mathbf{i}_1 \oplus \mathbf{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_p \rightarrow \mathbf{j}, [\Phi_j] = (-\hat{a}_k)_{k=1}^p,$$

де  $\hat{a}_k = (-1)^{|a_k|} a_k$ . Існує відображення

$$\Theta_j : \mathbf{i}_1 \oplus \mathbf{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_p \rightarrow \mathbf{i}_1 \oplus \mathbf{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_p, [\Theta_j] = (\theta_{i_\alpha i_\beta}),$$

$$\theta_{i_\alpha i_\beta} \in \mathbb{k}\Gamma(i_\alpha, i_\beta), \alpha, \beta \in 1 \dots p,$$

таке, що диференціали визначені наступним чином:

$$[\Phi_j \Theta_j] = [\Phi_j] [\Theta_j] = [\mathbf{d}(a_i)] = (\mathbf{d}(a_1) \dots \mathbf{d}(a_p)).$$

Зауважимо, що  $\theta_{i_\alpha i_\alpha} = 0$ . Тепер ми розвернемо  $a_1, \dots, a_p$ , отримуємо ребра  $b_k : j \rightarrow i_k$  та покладемо  $|b_k| = -|a_k|$ . Отриманий граф не має орієнтованих циклів.

**Лема 3.1.** *Визначимо дгк  $\mathcal{U}'$ , що відрізняється від дгк  $\mathcal{U}$  наступним чином: замість стрілок  $a_1, \dots, a_p$  вона містить стрілки  $b_1, \dots, b_p$  та диференціал заданий формулами:*

$$[\Theta_j \Psi_j] = [\Theta_j] [\Psi_j] = [\mathbf{d}(b_i)] = (\mathbf{d}(b_1) \dots \mathbf{d}(b_p))^t,$$

де  $\Psi_j : j \rightarrow i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_p$ ,  $[\Psi_j]^t = (b_k)_{k=1}^p$ .

Тоді  $\mathcal{U}'$  коректно визначена та довільний чистий контур є контуром диференціального типу так само як для  $\mathcal{U}$ .

*Доведення.* За припущенням маємо диференціал на  $\mathcal{U}$  :

$$\mathbf{d}(a_i) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} a_k \theta_{ik}, \mathbf{d}^2(a_i) = 0, i = 1, \dots, p,$$

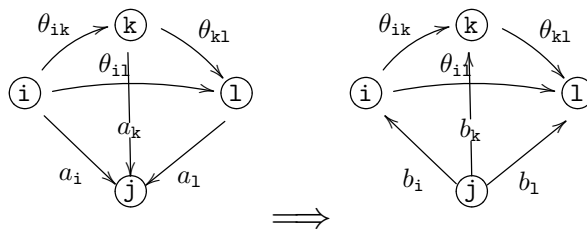
де  $\theta_{ik} \in \mathbb{k}\Gamma(i, k)$  - шляхи. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^2(a_i) &= d\left(\sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} a_k \theta_{ik}\right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} \mathbf{d}(a_k \theta_{ik}) = \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} \mathbf{d}(a_k) \theta_{ik} + \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} (-1)^{|a_k|} a_k \mathbf{d}(\theta_{ik}) = \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} d(a_k) \theta_{ik} - \sum_{k=1}^p a_k d(\theta_{ik}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} \sum_{l=1}^p (-1)^{|a_l|+1} a_l \theta_{kl} \theta_{ik} - \sum_{k=1}^p a_k d(\theta_{ik}) = \\ & \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p (-1)^{|a_k|+|a_l|} a_l \theta_{kl} \theta_{ik} - \sum_{k=1}^p a_k d(\theta_{ik}) = \end{aligned}$$

У першому доданку міняємо місцями суми, а у другому – змінюємо індекс суми з  $k$  на  $l$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} & = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+|a_l|} a_l \theta_{kl} \theta_{ik} - \sum_{l=1}^p a_k d(\theta_{il}) = \\ & \sum_{l=1}^p \left( \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+|a_l|} a_l \theta_{kl} \theta_{ik} - a_k d(\theta_{il}) \right) = 0. \end{aligned}$$



Остання сума може бути нульовою лише тоді, коли кожен доданок рівний нулю, тому отримуємо умову:

$$\mathbf{d}(\theta_{il}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+|a_l|} \theta_{kl} \theta_{ik}, \quad i, l = 1, \dots, p. \quad (3.1)$$

Крім того, наступні рівності виконуються:  $|a_i| + 1 = |\theta_{ik}| + |a_k|$ .

Після розвертання стрілок ми отримуємо ребра  $b_l \in \Gamma'_1(j, i_l)$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Отриманий граф позначимо  $\Gamma'$ . Маємо  $\Psi_j : j \rightarrow i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_p$ ,  $[\Psi_j]^t = (b_l)_{l=1}^p$ . Диференціали визначені таким чином:

$$[\Theta_j \Psi_j] = [\Theta_j] [\Psi_j] = [\mathbf{d}(b_l)] = (\mathbf{d}(b_1) \dots \mathbf{d}(b_p))^t.$$

Розглянемо диференціал  $\mathbf{d} : \Gamma'_1(j, i_l) \rightarrow \mathcal{U}'_{q+1}(j, i_l)$ , такий що  $\mathbf{d}(b_l) = \sum_i \theta_{il} b_i$ . Покажемо, що диференціал визначено коректно. По-перше, тут

$|b_l| = -|a_l| = |\theta_{il}| - |a_i| - 1 = |\theta_{il}| + |b_i| - 1$ , оскільки за означенням диференціала  $|a_l| + |\theta_{il}| = |a_i| + 1$ . По-друге, доведемо, що  $\mathbf{d}^2(b_l) = 0$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

Маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^2(b_l) &= \sum_i \mathbf{d}(\theta_{il})b_i + \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \mathbf{d}(b_k) \\ &= \sum_i \mathbf{d}(\theta_{il})b_i + \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \sum_i \theta_{ik} b_i, \end{aligned}$$

тоді  $\mathbf{d}^2(b_l) = \sum_i \mathbf{d}(\theta_{il})b_i + \sum_i \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \theta_{ik} b_i$ . Використаємо рівність 3.1.

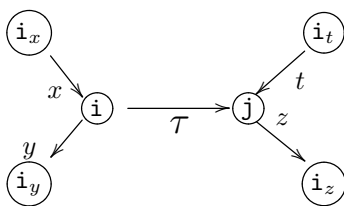
$\mathbf{d}^2(b_l) = \sum_i \sum_k ((-1)^{|a_k|+|a_l|} + (-1)^{|\theta_{kl}|}) \theta_{kl} \theta_{ik} b_i$ , оскільки  $|\theta_{kl}| = |a_k| + |a_l| + 1$ ,

то  $\mathbf{d}^2(b_l) = 0$ . Умову 3.1 можна також переписати наступним чином:

$$\mathbf{d}(\theta_{il}) = \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|+1} \theta_{kl} \theta_{ik}, \quad i, l = 1, \dots, p.$$

Випадок  $j \in \Gamma_0^-$  розглядається так само.

**Алгоритм редукції** Розглядаємо дгк  $\mathcal{U}$  з графом  $\Gamma$  без орієнтованих циклів. Нехай  $\widehat{U}$  та  $\widehat{\Gamma}$  - їх поповнення. Припускаємо, що  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  глибоке мінімальне регулярне ребро степеня  $\deg \tau = |\tau|$ . Маємо:



Визначимо редукцію  $\mathcal{R}_{ij}(\mathcal{U})$ . Ми вважаємо, що існує  $\tau^* : j \rightarrow i$ , таке що  $\tau\tau^* = \mathbf{1}_j$ , та  $\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_{i_1} + \mathbf{1}_{i_2} = (\mathbf{1} - \tau^*\tau) + \tau^*\tau$  розклад у суму взаємно комутуючих ідемпотентів, зокрема,  $|\tau^*| = -|\tau|$ , тому що  $0 = |1| = |\tau| + |\tau^*|$ .

Тоді у  $\widehat{U}$  отримуємо

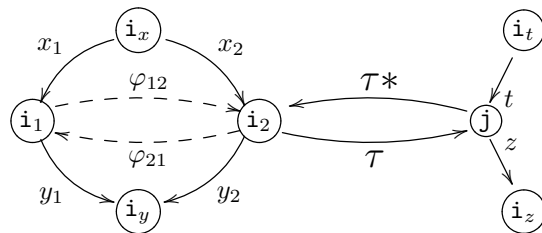
$$\begin{aligned} \omega_i &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \omega_{i_1} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \omega_{i_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{1} - \tau^*\tau)\omega_i(\mathbf{1} - \tau^*\tau) & (\mathbf{1} - \tau^*\tau)\omega_i\tau^*\tau \\ \tau^*\tau\omega_i(\mathbf{1} - \tau^*\tau) & \tau^*\tau\omega_i\tau^*\tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

та  $\tau \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix}$ .

Більше того, для довільних  $x : \mathbf{i}_x \rightarrow \mathbf{i}$  та  $y : \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}_y$ , є наступні ребра на  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$ :

$$x : \mathbf{i}_x \rightarrow \mathbf{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix},$$

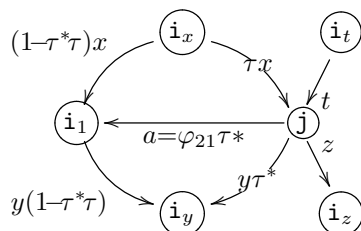
$$y : \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}_y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y(1-\tau^*\tau) & y\tau^*\tau \end{pmatrix}.$$



Використовуючи рівність  $\partial(\tau) = \tau\omega_{\mathbf{i}} + \omega_{\mathbf{j}}\tau$  на  $\mathcal{U}$ , маємо

$$\begin{aligned} \partial(\tau) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{i}_1} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \omega_{\mathbf{i}_2} \end{pmatrix} + \omega_{\mathbf{j}} \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau\varphi_{12} & \tau\omega_{\mathbf{i}_2} + \omega_{\mathbf{j}}\tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $\varphi_{12} = 0$ , та на  $\widehat{U}$ :  $\partial(\tau) = \tau\omega_{\mathbf{i}_2} + \omega_{\mathbf{j}}\tau$ ,  $\partial(\tau^*) = \omega_{\mathbf{i}_2}\tau^* + \tau^*\omega_{\mathbf{j}}$ ,  $\partial(\varphi_{21}) = \varphi_{21}\omega_{\mathbf{i}_2} + \omega_{\mathbf{i}_1}\varphi_{21}$ . За побудовою  $\mathbf{1}_{\mathbf{j}} = \tau\tau^*$  та  $\mathbf{1}_{\mathbf{i}_2} = \tau^*\tau$ , оскільки вершини  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i}_2$  є ізоморфними. Позначимо  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  та  $\mathcal{R}_{ij}\Gamma$  дгк та граф, що отримуються з наведеної вище конструкції факторизацією в точці  $\mathbf{i}_2$ . Позначимо  $a = \varphi_{21}\tau^* : \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{i}_1$ , тоді  $|a| = |\tau^*| + 1 = 1 - |\tau|$ , та  $\partial(a) = \partial(\varphi_{21}\tau^*) = \partial(\varphi_{21})\tau^* - \varphi_{21}\partial(\tau^*) = (\varphi_{21}\omega_{\mathbf{i}_2} + \omega_{\mathbf{i}_1}\varphi_{21})\tau^* - \varphi_{21}(\omega_{\mathbf{i}_2}\tau^* + \tau^*\omega_{\mathbf{j}}) = \omega_{\mathbf{i}_1}a - a\omega_{\mathbf{j}}$ .



Для довільних  $x : i_x \rightarrow i$  отримуємо ребра  $(1 - \tau^* \tau)x : i_x \rightarrow i_1$ ,  $|(1 - \tau^* \tau)x| = |x|$  and  $\tau x : i_x \rightarrow j$ ,  $|\tau x| = |x| + |\tau|$ , крім того,  $d'((1 - \tau^* \tau)x) = a\tau x + (d(x))'$ . Для довільних  $y : i \rightarrow i_y$  існують:  $y(1 - \tau^* \tau) : i_1 \rightarrow i_y$ ,  $|y(1 - \tau^* \tau)| = |y|$  and  $y\tau^* : i_1 \rightarrow j$ ,  $|y\tau^*| = |y| - |\tau|$ , крім того,  $d'(y\tau^*) = y(1 - \tau^* \tau)a + (d(y))'$ .

Диференціал на  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  отримується заміною  $\mathbf{1}_i = (1 - \tau^* \tau) + \tau^* \tau$ . Тоді довільний шлях, що проходить через вершину  $i$  є комбінацією двох шляхів:

$$y_1 \dots y_q y x x_p \dots x_1 \longleftrightarrow y_1 \dots y_q \begin{pmatrix} y(1 - \tau^* \tau) & y\tau^* \tau \\ \tau^* \tau x & \end{pmatrix} x_p \dots x_1.$$

Зауважимо, що  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  є непоповненою дгк і не має орієнтованих циклів (так само як  $\mathcal{U}$ ), але вона не обов'язково регулярна. Позначимо тим самим чином  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  повну регуляризацию  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$ . Називатимемо трансформацію  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  повною редукацією. Наступна лема випливає з умови  $d^2 = 0$  та з того факту, що сума степенів додатної форми по чистому контуру не може бути парною.

**Лема 3.2.** *Нехай  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  мінімальне глибоке регулярне ребро, та нехай  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  повна редукація. Тоді  $\Gamma'$  не має орієнтованих циклів та кожен чистий контур є контуром диференціального типу. Квадратична форма  $\chi'$  отримується з  $\chi$  за допомогою дефляції/інфляції з  $i$  до  $j$ . Зокрема, якщо  $\deg(\tau)$  непарне, то отримуємо дефляцію. В цьому випадку кількість додатних коренів зростає.*

### 3.2. Структурна теорема для AD-випадку

**Теорема 3.1.** *Нехай  $\mathcal{U}$  дгк з коректно визначеним AD-редукованим градуйованим графом  $\Gamma$  без орієнтованих циклів, та додатно визначеною квадратичною формою  $\chi_\Gamma$ . Припустимо, що довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Тоді існує композиція редукцій  $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , така що  $\Gamma_{\mathcal{U}'}$  є 0-лісом типу Динкіна, причому містить лише AD-дерева.*

Насправді ми доводимо, що  $\Gamma_{\mathcal{U}'}$  є лісом типу Динкіна (не обов'язково 0-лісом), використовуючи індукцію по  $|\Gamma_0|$ . Припускаємо, що твердження теореми 3.1 виконано для довільної дгк з кількістю об'єктів меншою за  $|\Gamma_0|$ , та доводимо його для  $\mathcal{U}$ ,  $\Gamma$ .

Нехай  $j \in \Gamma_0^+$ . За індуктивним припущенням, можна трансформувати  $\mathcal{U}|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  як під дгк  $\mathcal{U}$  до дгк з AD-редукованим графом. За лемою 3.3, отримуємо диференціальну категорію  $\mathcal{U}'$  та її регулярний градуйований граф  $\Gamma'$ , такий що  $\Gamma'|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}} = \Gamma|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$ . І  $\Gamma'|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є диз'юнктним об'єднанням діаграм Динкіна типу  $A_k$ ,  $D_k$ , і довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Зауважимо, що сума степенів чистого контуру не може бути парною, оскільки  $\chi$  додатна. Не втрачаючи загальності можна припустити, що  $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ . Розглядаємо контури на  $\Gamma$  такого типу:

$$(3.2)$$

де  $l = x_1 \dots x_p \in \mathbb{k}\Gamma_1(i_2, i_1)$ . Такі контури позначаються таким чином:  $(a_2; a_1, l)$ . За припущенням, довільний чистий контур типу (3.2) є диференціальним, причому  $\mathbf{d}(a_2) = \kappa a_1 l$ ,  $\kappa \in \mathbb{k}$ , і  $|a_1| + |l| = |a_2| + 1$ . Покажемо, що довільний контур типу (3.2) є чистим. Мінімальний контрприклад

має одне діагональне ребро  $b : i' \rightarrow j$  та два чисті контури  $(a_1; b, y_1)$  і  $(b; a_0, y_2)$ , що є диференціальними. Тоді, оскільки  $\mathcal{U}|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є деревом, то умова  $\mathbf{d}^2 = 0$  не виконується, що суперечить припущенню. З цього випливає, що для довільного контуру типу (3.2),  $a_1$  є мінімальним та  $a_2$  є максимальним ребрами, та цей контур є диференціальним.

Припустимо, що  $\mathbf{d}$  ненульове відображення, тоді існує принаймні один контур типу (3.2). Кожне ребро  $a : i \rightarrow j$  є або глибоким або мінімальним, кожен контур містить лише одне немінімальне ребро. Якщо  $a : i_1 \rightarrow i_2$  з  $i_1, i_2 \in \Gamma_0 \setminus \{j\}$  є глибоким, тоді можна виконати редукцію  $\mathcal{R}_{i_1 i_2}$  в напрямку вершини розгалуження. Для довільної редукції цього типу існує композиція таких редукцій, що приводить до дерева на множині  $\Gamma_0 \setminus \{j\}'$ . Цю трансформацію назвемо редукцією хвоста  $\vec{x}_i$ .

Нехай  $\Gamma|_S$ ,  $S \subset \Gamma_0$  компонента зв'язності  $\Gamma|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$ . Розглянемо повну підзадачу на множині  $\Gamma|_{S \cup \{j\}}$ . Нехай  $a_1 : i_1 \rightarrow j$  (регулярне) мінімальне ребро, що закінчується у  $j$ , що належить деякому контуру (3.2). Тоді  $a_1$  глибоке. Виконуємо повну редукцію  $\mathcal{R}_{i_1 j} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ . Підкатегорії  $\mathcal{U}|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  та  $\mathcal{U}'|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  співпадають та  $\chi' = \chi T_{i_1 j}^\varepsilon$ ,  $\varepsilon = (-1)^{|a_1|}$ . В іншому випадку, якщо  $a_1$  не є глибоким, тоді довільне  $x_i$  є глибоким і можна редукувати хвіст.  $\vec{x}_i$  у напрямку вершини розгалуження. Комбінуючи такі трансформації  $\mathcal{U}$ , отримуємо дерево на множині  $S \cup \{j\}$ , причому інші задачі не змінюються.

Єдиність випливає з відповідного результату для квадратичних форм (див. [3] and [4]), що завершує доведення теореми.

### 3.3. Висновки для AD-випадку

Отже вище у цьому розділі доведено, що кожна диференціальна градуїована категорія з додатною квадратичною формою типу Динкіна  $A_n$ ,  $D_n$  може бути перетворена до диференціальної градуїованої категорії з градуїованим графом, що є додатнім деревом. Побудовано алгоритм покрокової трансформації.

Далі доводиться більш загальний результат, а саме, для диференціальних градуїованих категорій з довільною додатною квадратичною формою типу Динкіна.

### 3.4. Редукція та допоміжна Лема для загального випадку

Далі розглядається класифікаційна задача диференціальних градуїованих категорій з додатною квадратичною формою. Ми доводимо, що такі задачі можуть бути трансформовані у диференціальні градуїовані категорії з градуїованим графом, що є диз'юнктним об'єднанням колчанів типу Динкіна. Побудовано алгоритми таких трансформацій.

Кажемо, що  $\Gamma$  є *редукованим* (наприклад *A-редукованим*), якщо його біграф  $\mathcal{B}(\Gamma)$  може бути редукованим до диз'юнктного об'єднання діаграм Динкіна (діаграм Динкіна типу  $A$ ). Ми розглядаємо задачі, що складаються з диференціальної градуїованої категорії(дгк)  $\mathcal{U}$  разом з її орієнтованим градуїованим графом  $\Gamma$  та неорієнтованим біграфом  $\mathcal{B}$ . Ми розглядаємо тільки ті дгк, для яких кожен чистий контур є активним (або контуром диференціального типу), та граф яких є коректно визначеним. Такі задачі позначаються через  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$ . Клас таких задач позначається

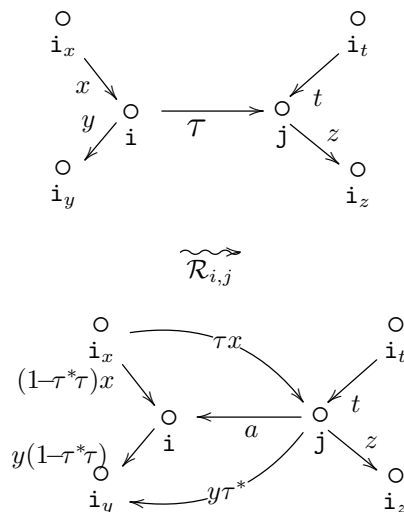
через  $\Upsilon$ .

Зв'язна задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$  називається задачею Динкіна, а відповідний граф називається  $\Gamma$  називається орієнтованим графом Динкіна, якщо  $\mathcal{B}(\Gamma) \in$  однією з діаграм Динкіна  $(A_n, D_n, E_6, E_7, E_8)$ . Якщо  $\mathcal{B}(\Gamma) = A_n$  тоді казатимемо, що  $\Gamma \in A_n$ -графом, та аналогічно для усіх типів  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ .

Ми розглядаємо задачу  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ . Алгоритм редукції задачі  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$  показано в [11]. Ми опишемо такі дії з графом  $\Gamma$ , це демонструє такий алгоритм на всій задачі  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$ .

Тут на діаграмі нижче ми зображаємо усі ребра суцільними, але вони можуть бути різних степенів, більше того, ми не зображуємо напрямок ребра, якщо він не має значення.

Припустимо, що  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  є глибоким мінімальним регулярним ребром з степенем  $\deg \tau = |\tau|$ . Загальний випадок має такий вигляд:



Визначимо редукцію на  $\mathcal{R}_{ij}(\Gamma)$ . Ми припускаємо, що існує  $\tau^* : j \rightarrow i$ , таке що  $\tau\tau^* = 1_j$ , та  $1_i = 1_{i_1} + 1_{i_2} = (1 - \tau^*\tau) + \tau^*\tau \in$  розкладом на суму взаємно комутуючих іденпотентів. Для довільного  $x : i_x \rightarrow i$  ми отримуємо ребра  $(1 - \tau^*\tau)x : i_x \rightarrow i$ ,  $|(1 - \tau^*\tau)x| = |x|$  та  $\tau x : i_x \rightarrow j$ ,  $|\tau x| = |x| + |\tau|$ , крім того,  $d'((1 - \tau^*\tau)x) = a\tau x + (d(x))'$ . Для довільного

$y : i \rightarrow i_y$  існує:  $y(1-\tau^*\tau) : i \rightarrow i_y$ ,  $|y(1-\tau^*\tau)| = |y|$  and  $y\tau^* : i \rightarrow j$ ,  $|y\tau^*| = |y| - |\tau|$ , та,  $\mathbf{d}'(y\tau^*) = y(1-\tau^*\tau)a + (\mathbf{d}(y))'$ .

Диференціал на  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  отримується підстановкою  $\mathbf{1}_i = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$ . Тоді довільний шлях, що проходить через вершину  $i$ , є комбінацією двох шляхів:

$$y_1 \dots y_q y x x_p \dots x_1 \iff y_1 \dots y_q (y(1-\tau^*\tau) \quad y\tau^*\tau) \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix} x_p \dots x_1.$$

**Лема 3.3.** *Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ . Нехай  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  – мінімальне глибоке регулярне ребро, та нехай  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  – повна редукція. Тоді  $(\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}, \mathcal{R}_{ij}\Gamma, \mathcal{R}_{ij}\mathcal{B}) \in \Upsilon$ .*

Ми позначаємо редуковану задачу  $(\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}, \mathcal{R}_{ij}\Gamma, \mathcal{R}_{ij}\mathcal{B})$  просто через  $\mathcal{R}_{ij}\Gamma$ . Композиція редукцій  $\mathcal{R}_{i_1, j_1}, \dots, \mathcal{R}_{i_k, j_k}$  може бути позначена через  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{i_1, j_1} \cdots \mathcal{R}_{i_k, j_k}$  та через  $\mathcal{R}\Gamma$  – результат послідовних редукцій графа  $\Gamma$ . Помітимо, що, якщо вершини  $i$  та  $j$  не є інцидентними, то редукція є тривіальною та  $\mathcal{R}_{i, j}\Gamma = \Gamma$ .

Задачі  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$  та  $\mathfrak{A}' = (\mathcal{U}', \Gamma', \mathcal{B}')$  називаються  $\mathcal{R}$ -еквівалентними, якщо існує послідовність трансформацій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ , ми позначаємо  $\mathfrak{A} \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \mathfrak{A}'$ .

Кажемо, що граф без замкнених циклів (дерево)  $\Gamma$  є *добре орієнтованим*, якщо він не має нетривіальних шляхів довжини  $> 1$ .

**Лема 3.4.** *Нехай підграф  $\Gamma|_{\{1, 2, \dots, k\}}$  графа  $\Gamma$  є хвостом (див. Означення 1.31) з прикріплюючою вершиною  $k \in \Gamma_0$ . Тоді існує композиція редукцій  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{i_1, j_1} \cdots \mathcal{R}_{i_r, j_r}$  з  $i_r \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $j_r \in \{1, \dots, k-2\}$  така що:*

1.  $\mathcal{B}(\Gamma)$  та  $\mathcal{B}(\mathcal{R}\Gamma)$  збігаються;

2.  $\mathcal{R}\Gamma|_{\{1, \dots, k\}}$  є добре орієнтованим хвостом;

3. орієнтація ребра  $(k-1, k)$  не змінюється.

*Доведення.* Ми діємо за індукцією по довжині хвоста  $k$ . Для випадку  $k = 2$  немає чого доводити. На рисунку нижче ребро є неорієнтованим, якщо його орієнтація неважлива. Отже ми можемо застосувати припущення Лемми до хвоста  $\mathcal{R}\Gamma|_{\{1, \dots, k-1\}}$  з прикріплюючою вершиною  $k-1 \in \Gamma_0$  та редукувати його до потрібного типу. Помітимо, що за побудовою, ребра підграфа  $\Gamma|_{\Gamma_0 \setminus \{1, \dots, k-1\}}$  не змінюються. Якщо отриманий граф  $\mathcal{R}\Gamma$  є добре орієнтованим, то доведення закінчено. Інакше робимо трансформацію  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{k-2, k-1} \mathcal{R}_{k-2, k-3}$  та отримуємо:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ \\ k & & k-1 & & k-2 & & k-3 & & & & 1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$   
 $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ \\ k & & k-1 & & k-2 & & k-3 & & & & 1 \end{array}$$

Після цього ми можемо застосувати твердження Лемми до хвоста  $\mathcal{R}\Gamma|_{\{1, \dots, k-2\}}$ . □

**Наслідок 3.1.** *Якщо граф  $\Gamma$  є графом типу Динкіна, тоді існує композиція редуцій  $\mathcal{R}$ , така що  $\mathcal{R}\Gamma$  є добре орієнтованим градуваним графом відповідного типу. Крім того,  $\mathcal{B}(\mathcal{R}\Gamma) = \mathcal{B}(\Gamma)$ .*

*Доведення.* Випадок  $A_n$  уже доведено у Лемі 3.4. Для інших графів Динкіна ми використовуємо алгоритм з Лемми 3.4 для найдовшого хвоста графа Динкіна. Після цього ми можемо використати той самий алгоритм для інших хвостів, в залежності від орієнтації ребра найдовшого хвоста, що інциденте до вершини розгалуження. □

Позначимо через  $\Gamma_0^+$  (відповідно,  $\Gamma_0^-$ ) підмножину вершин  $i \in \Gamma_0$ , таких що  $\Gamma_1(i, j) = \emptyset$  (відповідно,  $\Gamma_1(j, i) = \emptyset$ ) для довільної  $j \in \Gamma_0$ .

**Наслідок 3.2.** *Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$  задача з класу  $\Upsilon$ , ті  $j \in \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ . Нехай  $\mathcal{B}_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  – ліс Динкіна. Тоді існує композиція редуцій  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  на підмножині  $\Gamma_0 \setminus \{j\}$ , така що підграф  $\Gamma'_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  добре орієнтований.*

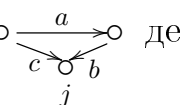
### 3.5. Основний результат для загального випадку

**Теорема 3.2.** *Нехай  $\mathcal{U}$  диференціальна градуїрована категорія з коректно визначеним градуїованим графом  $\Gamma$ , і квадратична форма  $\chi$  є додатно визначеною. Ми вважаємо, що довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Тоді існує композиція редуцій  $\mathcal{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , така що  $\Gamma_{\mathcal{U}'}$  є диз'юнктним об'єднанням графів типу Динкіна.*

Доведемо теорему.

Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ , квадратична форма  $\chi$  є додатною, та  $\Gamma$  – зв'язний граф. Нехай  $j \in \Gamma_0^\pm = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ . Тоді довільне ребро  $a \in \Gamma_1$  є глибоким на підграфі  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  тоді і тільки тоді, коли воно є глибоким на усьому графі  $\Gamma$ . Тому редуція на  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  коректно визначена на  $\Gamma$ . За припущенням індукції по кількості точок, можемо припустити, що підграф  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  можна редукувати до лісу типу Динкіна.

Отже, використовуючи Наслідок 3.2, можемо припустити, що усі зв'язні компоненти  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є добре орієнтованими деревами Динкіна. Для подальшого доведення припускаємо, що  $j \in \Gamma_0^+$ , випадок  $j \in \Gamma_0^-$  може розглядатися так само. Тоді кожен контур на  $\Gamma$  є активним трикутником інцидентним до  $j$  типу



$$d(c) = ba, \deg(c) = \deg(a) + \deg(b) - 1.$$

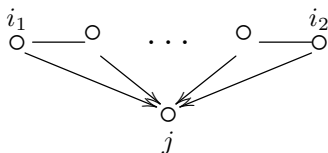
Два трикутники інцидентні або спільному мінімальному або спільному максимальному ребру.

Вершина  $j \in \Gamma_0$  називається *вершиною розриву*, якщо  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  має  $> 1$  зв'язних компонент. Для вершини розриву  $j \in \Gamma_0$ , нехай  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}} = S_1 \cup \dots \cup S_q$  – об'єднання носіїв (supports) для зв'язних компонент, де  $q$  позначає кількість компонент та  $|S_1| \geq \dots \geq |S_q|$ . Для додатної форми  $\chi$  справедливі наступні твердження:

1.  $q$  не більше 3;
2. якщо  $q = 3$ , тоді  $|S_3| = 1$ ,  $|S_2| \leq 2$ , та підграф  $\Gamma_{S_1} \in A$ -типу;
3. якщо  $q = 2$ , тоді щонайменше один з підграфів  $\Gamma_{S_1}, \Gamma_{S_2} \in A$ -типу.

Ми вважаємо головною компонентою  $S_1$  або ту, що не є  $A$ -типу або найбільшу (якщо усі компоненти  $A$ -типу).

Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ ,  $j \in \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$  та  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  – добре орієнтоване дерево. Проміжною вершиною для вершин  $i_1$  та  $i_2$  називається така вершина, що існує шлях між точками  $i_1$  та  $i_2$ , що проходить через цю точку. Якщо  $i_1, i_2 \in \Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  обидві інцидентні до  $j$  тоді усі проміжні вершини також є інцидентними до  $j$ . Якщо  $j \in \Gamma_0^+$ , то отримуємо діаграму типу

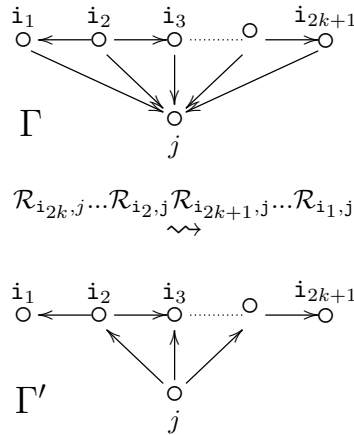


Точка  $i \in \Gamma_0$  називається *листочком*, якщо  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j, i\}}$  має таку ж кількість зв'язних компонент, як граф  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  або, еквівалентно, якщо  $i$  інцидентна тільки до одного ребра. Вважаємо, що деяка вершина інцидентна до  $j$ . Тоді існує листкова вершина  $i \in \Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$ , що не є інцидентною до  $j$ .

**Лема 3.5.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ ,  $\chi > 0$ . Припустимо, що  $j \in \Gamma_0^+$  та підграф  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є добре орієнтованим типу Динкіна. Тоді існує редукція  $\mathcal{R}$ , така що отримана задача  $\mathcal{R}\mathfrak{A} \in \Upsilon$  має вершину розриву з  $\Gamma_0^\pm$ .*

*Доведення.* Припустимо, що існує листова вершина  $i_1 \in \Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$ , яка не є інцидентною до  $j$ . Оскільки  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  зв'язний граф, то  $i_1$  інцидентна до деякої  $i_2 \in \Gamma_0 \setminus \{j\}$ . За побудовою,  $i_2$  є вершиною розриву, і вона може бути трансформована до  $+$  або  $-$  вершини підходящою трансформацією.

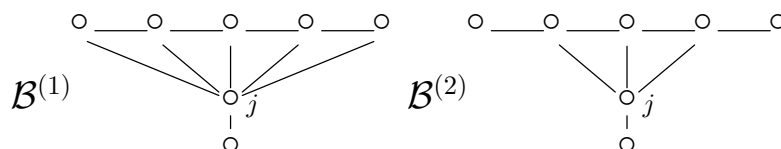
Лишається розглянути випадок, коли всі  $i \in \Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  інцидентні до  $j$ . Граф  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є графом  $A$ -типу, оскільки інакше він мав би критичний підграф, що відповідає  $\mathcal{B}^{(1)}$  (див. список графів нижче). Тому,  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є деревом  $A$ -типу. Якщо  $i_1 \in \Gamma_0^\pm$  та  $i_1, i_2$  є інцидентними, то ребро між  $i_2, j$  є глибоким, та ми можемо виконати трансформацію  $\mathcal{R}_{i_2, j}$ , щоб отримати вершину розриву  $i_2$ . Інакше, якщо  $i_1 \notin \Gamma_0^\pm$  та  $|\Gamma_0| > 5$ , ми отримаємо наступний граф:

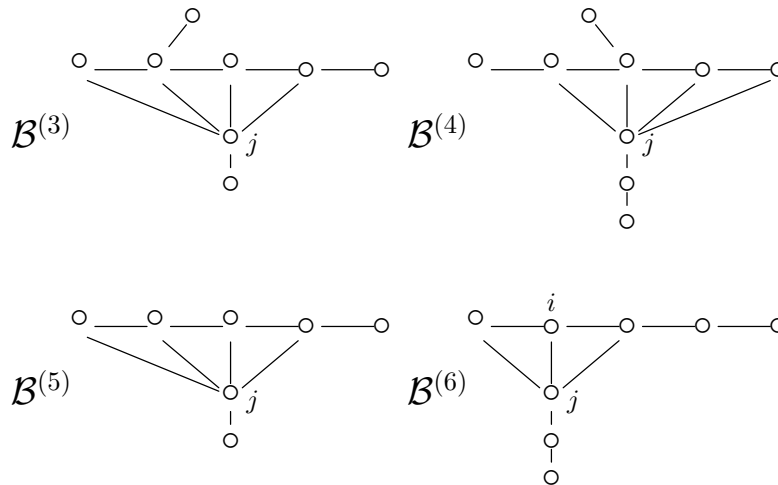


Тоді граф  $\Gamma'' = \mathcal{R}_{j,i_2} \Gamma'$  має вершину розриву  $i_2$ , що належить до  $(\Gamma'')_0^-$ .

Це завершує доведення леми. □

Ми виключаємо задачі з наступними підбіграфами, що мають недода-тні форми і не зводяться до дерева:





Надамо доведення Теорема 3.2. Припустимо, що  $j \in \Gamma_0^+$ , випадок  $j \in \Gamma_0^-$  можна розглядати так само. Підграф  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  можна редукувати до лісу Динкіна за індукцією по кількості точок, оскільки у цьому випадку, трансформації на зв'язній компоненті  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є коректно визначеними на усьому  $\Gamma$ .

Отже, використовуючи Наслідок 3.2, ми можемо вважати, що усі компоненти є добре орієнтованими деревами Динкіна.

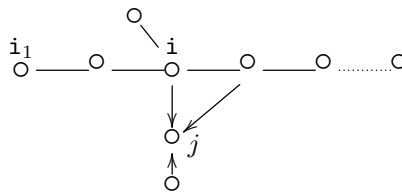
Далі, Лема 3.5 стверджує, що кожна задача, що розглядається, містить вершину розриву з  $\Gamma_0^+$ .

Позначимо через  $\Upsilon_{\odot}$  підклас задач  $(\mathfrak{A}, j)$  з  $\mathfrak{A} \in \Upsilon$ , що має вершину розриву  $j \in \Gamma_0^{\pm}$  з умовою, що усі зв'язні компоненти  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  є  $A$ -типу. Точка розриву  $j \in \Gamma_0^{\pm}$  називається *спеціальною вершиною розриву*, якщо  $|\Gamma_0 \setminus S_1| \geq 3$ , отже, або  $q = 3$  або потужність другої зв'язної компоненти  $\geq 2$ . Будемо казати, що спеціальна вершина  $j$  є спеціальною  $^+$  (відповідно, спеціальною $^-$ ) вершиною, якщо  $j \in \Gamma_0^+$  (відповідно,  $j \in \Gamma_0^-$ ).

**Лема 3.6.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ ,  $j \in \Gamma_0^+$  – вершина розриву. Тоді існує еквівалентна задача  $\mathfrak{A}' \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \mathfrak{A}$  та вершина розриву  $j'$ , такі що  $(\mathfrak{A}', j') \in \Upsilon_{\odot}$ .*

*Доведення.* Якщо  $(\mathfrak{A}, j) \notin \Upsilon_{\odot}$ , то за припущенням індукції, головна зв'язна компонента  $\Gamma_{S_1}$  є деревом з вершиною розриву. У цьому випадку є лише дві зв'язні компоненти, оскільки  $\chi$  – додатня.

Спочатку розглянемо випадок, коли  $\Gamma$  містить один трикутник. Якщо вершина розриву не є інцидентною до цього трикутника, тоді її можна вибрати в якості вершини розриву (можливо після деяких трансформацій), і отримана задача належить до  $\Upsilon_{\odot}$ . Інакше, ми маємо підграф типу (можливо, без вершини  $i_1$ ):



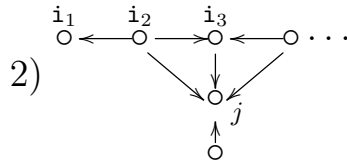
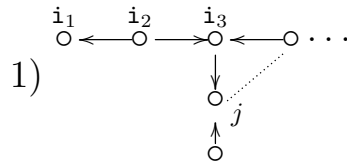
Якщо  $i \in \Gamma_0^-$ , тоді  $(\mathfrak{A}, i) \in \Upsilon_{\odot}$ . Інакше  $i$  є  $+$  вершиною на  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  і  $i$  є спеціальною  $+$  вершиною розриву для  $\mathcal{R}_{j,i}$ , крім того  $(\mathcal{R}_{j,i}, i) \in \Upsilon_{\odot}$ . Тоді за виключенням критичної задачі з біграфом  $\mathcal{B}^{(2)}$ , робимо висновок, що задача має два або три чистих трикутника.

Тепер пожемо, що існує еквівалентна задача  $\mathfrak{A}' \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \mathfrak{A}$ , що або належить до  $\Upsilon_{\odot}$  або має спеціальну вершину розриву з  $\Gamma_0^{\pm}$ . Тому ми припускаємо  $|\Gamma_0 \setminus S_1| = 2$ .

Нехай  $i_1, i_2, i_3 \in S_1$ ,  $\Gamma_{i_1, i_2, i_3}$  – зв'язний граф та  $i_1$  листкова вершина. Якщо  $i_l$  не є інцидентною до  $j$ ,  $l = 1, 2, 3$ , тоді існує спеціальна вершина розриву  $k \in \{i_1, i_2, i_3\} \cap \Gamma_0^{\pm}$ .

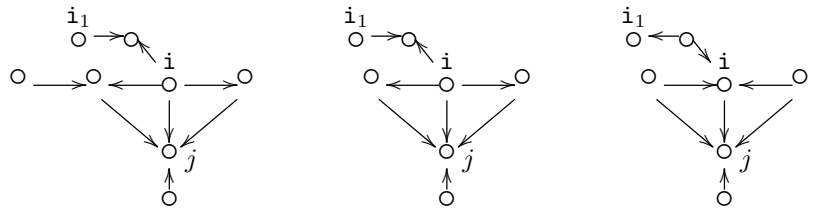
Ми також розглядаємо випадки: 1)  $i_1, i_2$  обидві не є точками розриву і не інцидентні до  $j$ , та  $i_3$  інцидентна  $j$ ; та 2)  $i_1 \in S_1$  є листовою вершиною,  $i_2 \in S_1 \cap \Gamma_0^-$  інцидентні до  $i_1$  та  $i_2$  не є точками розриву. У першому випадку, якщо  $i_3 \in \Gamma_0^-$  тоді вона є спеціальною  $-$  вершиною розриву.

Маємо одну з наступних задач:



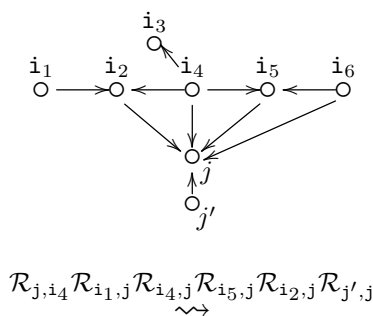
Для обох випадків, задача  $\mathcal{R}_{j,i_3} \mathfrak{A} \in \Upsilon$  має спеціальну  $^+$  вершину  $i_3$ .

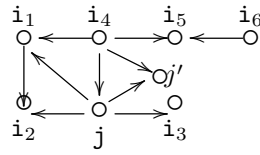
Розглянемо випадок, коли  $\Gamma$  має два трикутника. Розглядаючи критичний біграф  $\mathcal{B}^{(2)}$  та умови, описані вище, отримуємо один з наступних випадків (можливо, без вершини  $i_1$ ):



В усіх випадках, граф можна безпосередньо редукувати до дерева.

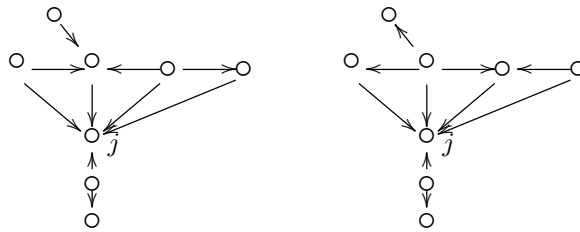
Якщо  $\Gamma$  має три трикутника, тоді розглядаючи критичний біграф  $\mathcal{B}^{(2)}$  та попередні припущення, отримуємо наступний випадок (можливо, без вершини  $i_1$ ):





Тоді  $i_4$  є спеціальною<sup>-</sup> вершиною. Тому, лишається розглянути випадок, коли  $\mathfrak{A}$  має спеціальну вершину та три трикутники.

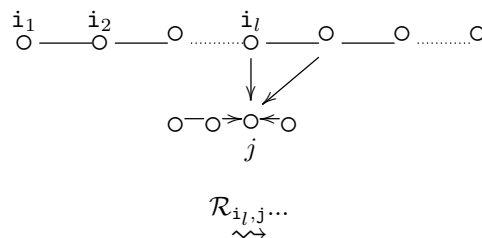
Ми виключаємо біграфи вигляду  $\mathcal{B}^{(4)}$ , що мають неперитивну квадратичну форму. Тоді лишається розглянути наступні випадки:

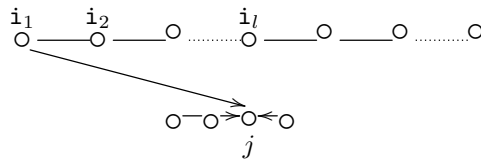


Легко зрозуміти, що обидва випадки редукуються прямо до дерева Динкіна. □

**Лема 3.7.** *Нехай  $j \in \Gamma_0^+$  – вершина розриву та  $(\mathfrak{A}, j) \in \Upsilon_\odot$ . Тоді існує еквівалентна задача  $\mathfrak{A}' \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \mathfrak{A}$ , така, що  $\mathfrak{A}'$  є деревом Динкіна.*

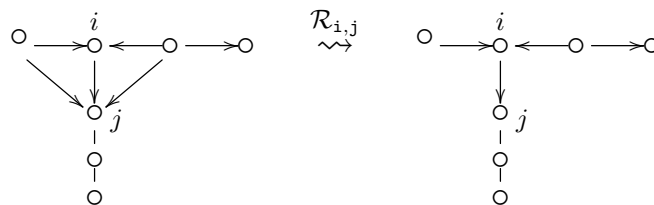
*Доведення.* Якщо є три зв’язні компоненти, тоді  $|S_3| = 1$ ,  $|S_2| = 1$  або  $|S_2| = 2$ . Якщо є більше одного трикутного контура на  $S_1 \cup j$ , тоді задача не має додатної квадратичної форми. Може бути лише один трикутник, що може бути відсунутий до листової вершини зв’язної компоненти, використовуючи редукцію одного з глибоких ребер, і нарешті, ми отримуємо дерево Динкіна:





Помітимо, що завдяки додатності  $\chi$  якщо  $|S_2| = 2$ , то  $|S_1| \leq 4$  та ми отримуємо  $E$ -редуковану задачу, якщо  $|S_2| = 1$  то  $|S_1|$  може бути довільним та ми отримуємо редуковану задачу типу  $D$ .

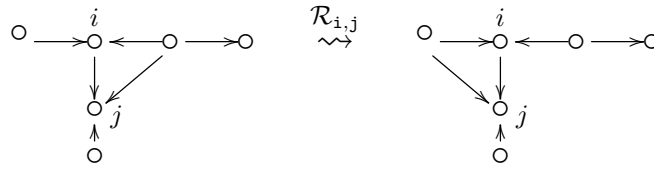
Розглянемо випадок двох зв'язних компонент. Він має два підвипадки:  $|S_2| = 1$  та  $|S_1| \geq 2$ . Розглянемо підвипадок  $|S_1| \geq 2$ . Якщо є тільки один трикутник, тоді задача може бути редукована до дерева  $A$ -типу, використовуючи ті самі редукції, що і у випадку вище (з трьома компонентами). Задача з двома трикутниками є критичною типу  $\mathcal{B}^{(2)}$  or  $\mathcal{B}^{(6)}$  або є еквівалентною задачі  $E_7$ , якщо  $|S_1| = 4$ :



Випадок з протилежною орієнтацією є більш складним, але він теж редукується до  $E_7$ .

Розглянемо підвипадок  $|S_2| = 1$ . Ми спробуємо отримати еквівалентну задачу з  $|S_1| \geq 2$ . Якщо компонента  $S_1$  має хвіст довжини 2 та більше, це очевидно. Ми розглядаємо задачу з трикутником, що містить кінцеву вершину  $S_1$ . Вона може містити один або два трикутники. Ці випадки редукуються прямо до задач Динкіна. Задача з трьома трикутниками є критичною типу  $\mathcal{B}^{(5)}$ . Останній випадок є задачею, для якої  $S_1$  має два хвости, кожен з яких містить одну вершину. Вона може мати лише один

трикутник, тоді після редукції



ми отримаємо задачу з  $|S_1| \geq 2$ . Задача з двома трикутниками є критичною  $\mathcal{B}^{(6)}$ . □

Доведення теореми 3.2 просто випливає з Лем 3.5, 3.6, 3.7.

Помітимо, що використовуючи трансформації підняття степеня для дгк  $\mathcal{U}$  ми можемо отримати кінцевий граф типу Динкіна, ребра якого мають лише непарні степені. Іншими словами, отриманий біграф є 0-лісом типу Динкіна.

## РОЗДІЛ 4

### Диференціальні градуїзовані категорії асоційовані з критичною напіввизначеною квадратичною формою

У цьому розділі розглядається класифікаційна задача диференціальних градуїзованих категорій з критичною напіввизначеною квадратичною формою. Ми доводимо, що така задача, що задовольняє деякі умови коректності може бути трансформована до диференціальної градуїзованої категорії з орієнтованим градуїзованим графом, що є колчаном афінного (розширеного) типу.

Алгоритм редукції лінійних категорій та інших структур широко використовується у теорії зображень. Цей підхід дозволяє вивчати зображення індуктивно, редукуючи відповідні категорії крок за кроком до категорій, що є простішими з точки зору зображень. ([2]). З іншого боку, важливою характеристикою даної структури є індукована квадратична форма, корені якої, за деяких умов, відповідають нерозкладним зображенням. Теорія квадратичних форм, що застосовується до теорії зображень, добре відома ([10], [3], [4]). У дисертаційній роботі ми надаємо одночасний алгоритм редукції трансформацій градуїзованої категорії з спеціальними властивостями та відповідної квадратичної форми до канонічної форми.

Усі необхідні означення та твердження для даного розділу описано в підрозділах 1.2 - 1.6 першого розділу, що присвячені диференціальним

градуйованим категоріям, їх графам та квадратичній формі. У підрозділі 1.3 того ж розділу наведено коротку історичну довідку про графи Динкіна.

#### 4.1. Допустимі трансформації

Нагадаємо, що ми розглядаємо клас задач  $\Upsilon$ , для яких кожен чистий контур є активним, та граф яких є коректно визначеним. Такі задачі позначаються через  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$ . Підклас  $\Upsilon$ , що складається з задач з додатною квадратичною  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$  буде позначатися  $\Upsilon_+$ . У цьому розділі розглядається підклас  $\Upsilon_0$ , що складається з задач, що мають критичну квадратичну форму  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$ , отже  $\chi$  є напіввизначеною квадратичною формою з точним однопараметричним ядром. Кожна задача з  $\Upsilon_0$  має єдиний точний уявний корінь  $\mathbf{r} \in \ker \chi$ , такий що  $r_j = 1$  для деякої  $j \in \Gamma_0$ . Тому, задача з  $\Upsilon_0$  є четвіркою  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r})$ , де  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ .

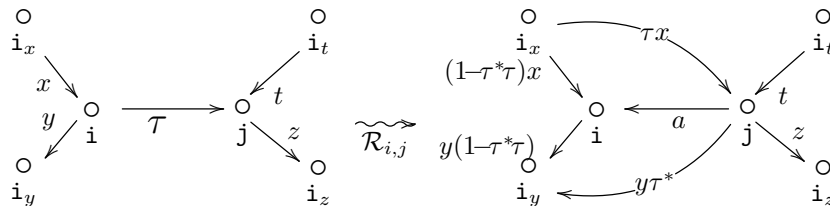
Зв'язна задача  $\mathfrak{A} \in \Upsilon_0$  називається *афінною задачею*, і відповідний граф  $\Gamma$  називається афінним (розширеним) орієнтованим градуйованим графом, якщо  $\mathcal{B}(\Gamma)$  є однією з афінних діаграм  $(\tilde{A}_n, \tilde{D}_n (n \geq 4), \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8)$ . У цьому випадку  $\mathbf{r}$  є добре відомим мінімальним додатним уявним коренем, що має щонайменше один елемент рівний 1. Підклас афінних задач позначається через  $\Upsilon_{aff} \subset \Upsilon_0$ .

Отже ми розглядаємо задачу  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon$ . Трансформації на класі  $\Upsilon$ , описані у цьому підрозділі, та їх послідовні комбінації називаються *допустимими*. Задача, отримана з використанням таких трансформацій, знову належить до класу  $\Upsilon$ . Ми повторюємо та розширяємо алгоритм редукції задачі  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$ , побудований у третьому розділі.

Позначимо через  $\widehat{\mathcal{U}}$  дг категорію поповнену для категорії  $\mathcal{U}$ , а через  $\widehat{\Gamma}$  відповідний граф (див. означення на сторінках 61-62 у третьому розділі).

Тут на діаграмі нижче ми зображаємо усі ребра суцільними стрілками, але вони можуть мати різні степені, більше того, ми не зображуємо орієнтацію стрілок, якщо вона не має значення.

**Редукція глибокого ребра** Припустимо, що  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  – глибоке мінімальне регулярне ребро зі степенем  $\deg \tau = |\tau|$  (див. Означення 1.15, 1.16, 1.8 відповідно). У загальному випадку:



Визначимо редукцію  $\mathcal{R}_{ij} : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ . Ми припускаємо, що існує  $\tau^* : j \rightarrow i$ , таке що  $\tau\tau^* = \mathbf{1}_j$ , та  $\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_{i_1} + \mathbf{1}_{i_2} = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$  – розклад у суму взаємно комутуючих іденпотентів. Тоді у  $\widehat{\mathcal{U}}$  ми отримаємо

$$\omega_i \iff \begin{pmatrix} \omega_{i_1} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \omega_{i_2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)\omega_i(1-\tau^*\tau) & (1-\tau^*\tau)\omega_i\tau^*\tau \\ \tau^*\tau\omega_i(1-\tau^*\tau) & \tau^*\tau\omega_i\tau^*\tau \end{pmatrix} \tau \iff \begin{pmatrix} 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

Використовуючи, що  $\partial(\tau) = \tau\omega_i + \omega_j\tau$  на  $\mathcal{U}$ , маємо  $\varphi_{12} = 0$ , і на  $\widehat{\mathcal{U}}$ :  $\partial(\tau) = \tau\omega_{i_2} + \omega_j\tau$ ,  $\partial(\tau^*) = \omega_{i_2}\tau^* + \tau^*\omega_j$ ,  $\partial(\varphi_{21}) = \varphi_{21}\omega_{i_2} + \omega_{i_1}\varphi_{21}$ . За побудовою,  $\mathbf{1}_j = \tau\tau^*$  та  $\mathbf{1}_{i_2} = \tau^*\tau$ , отже вершини  $j$ ,  $i_2$  ізоморфні. Позначимо через  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  та  $\mathcal{R}_{ij}\Gamma$  дгк та граф, що отримується з побудованого вище факторизацією на точці  $i_2$ . Позначимо  $a = \varphi_{21}\tau^* : j \rightarrow i_1$ , тоді  $|a| = |\tau^*| + 1 = 1 - |\tau|$ , та  $\partial(a) = \partial(\varphi_{21}\tau^*) = \partial(\varphi_{21})\tau^* - \varphi_{21}\partial(\tau^*) = (\varphi_{21}\omega_{i_2} + \omega_{i_1}\varphi_{21})\tau^* - \varphi_{21}(\omega_{i_2}\tau^* + \tau^*\omega_j) = \omega_{i_1}a - a\omega_j$ .

Для довільного  $x : i_x \rightarrow i$  отримуємо ребра  $(1-\tau^*\tau)x : i_x \rightarrow i$ ,  $|(1-\tau^*\tau)x| = |x|$  та  $\tau x : i_x \rightarrow j$ ,  $|\tau x| = |x| + |\tau|$ , крім того,  $\mathbf{d}'((1-\tau^*\tau)x) = a\tau x + (\mathbf{d}(x))'$ . Для довільного  $y : i \rightarrow i_y$  існують:  $y(1-\tau^*\tau) : i \rightarrow i_y$ ,  $|y(1-\tau^*\tau)| = |y|$  та  $y\tau^* : i \rightarrow j$ ,  $|y\tau^*| = |y| - |\tau|$ , та,  $\mathbf{d}'(y\tau^*) = y(1-\tau^*\tau)a + (\mathbf{d}(y))'$ .

Диференціал на  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  отримується підстановкою  $\mathbf{1}_i = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$ . Будь який шлях, що проходить через вершину  $i$  є комбінацією шляхів:

$$y_1 \dots y_q y x x_p \dots x_1 \iff y_1 \dots y_q (y(1-\tau^*\tau) \quad y\tau^*\tau) \begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix} x_p \dots x_1.$$

Редукція  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  визначає редукцію  $\mathcal{R}_{ij} : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  та  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ . Для довільного  $x \in \mathbb{Z}^n$  ми отримуємо:  $\mathcal{R}_{ij} : x \rightarrow x'$ , де  $x'_i = x_i - (-1)^{|\tau|} x_j$  та  $x'_k = x_k$  в іншому випадку. Тому трансформація  $\mathcal{R}_{ij} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$  визначена. Іноді ми позначаємо її через  $\mathcal{R}_{ij}^+$ , якщо  $|\tau|$  є парним, та через  $\mathcal{R}_{ij}^-$  у іншому випадку. Якщо вершини  $i$  та  $j$  не є інцидентними на  $\Gamma$ , тоді редукція  $\mathcal{R}_{i,j}$  є тривіальною, отже  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ .

Помітимо, що  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$  це недоповнена, орієнтована дгк без циклів (так само як  $\mathcal{U}$ ), але вона не обов'язково є регулярною. А саме, можливо, що  $\Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = \{x, y\}$  для деякої  $\mathbf{k} \in \Gamma_0$ . За побудовою, у цьому випадку  $\mathbf{d}(x) = \kappa y + l$ , де  $l \in \mathcal{P}^2$ ,  $|y| = |x| + 1$  та  $\kappa \in \mathbb{k}$ . Тоді ми можемо покласти:  $x = 0$ ,  $\mathbf{d}(x) = 0$ ,  $y = -\kappa^{-1}l$ , та отримаємо нову дгк  $\mathcal{U}'$  з графом  $\Gamma'$ . Кажемо, що  $\mathcal{U}'$  отримується з  $\mathcal{U}$  за допомогою *регуляризації* на  $x, y$ . Квадратична форма  $\chi$  та прикріплений вектор  $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$  не змінюються після операції регуляризації. Випадок  $|\Gamma_1(\mathbf{j}, \mathbf{k})| = 2$  аналогічний. Маючи редуковану задачу  $\mathcal{R}_{ij}\mathfrak{A}$ , ми можемо зробити деяку кількість процедур регуляризації, щоб отримати регулярну задачу. Ми називаємо цю трансформацію *повною редукцією* та позначаємо її тією ж літерою  $\mathcal{R}_{ij}$ .

Наступна лема випливає з умови  $\mathbf{d}^2 = 0$  та з того факту, що для додатної форми сума степенів за чистим контуром не може бути парною.

**Лема 4.1.** *Нехай  $\mathfrak{A} \in \Upsilon$ , та  $\tau \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  – мінімальне глибоке регулярне ребро, та нехай  $\mathcal{R}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$  – повна редукція. Тоді  $\mathfrak{A}\mathcal{R}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \in \Upsilon$  та  $\mathfrak{A}\mathcal{R}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \in \Upsilon_0$ , коли  $\mathfrak{A} \in \Upsilon_0$ .*

**Розвертання ребер у вершині** Припустимо, що граф  $\Gamma$  – орієнтований граф без циклів. Позначимо через  $\Gamma_0^+$  (відповідно,  $\Gamma_0^-$ ) підмножину вершин  $\mathbf{i} \in \Gamma_0$ , таких що  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \emptyset$  (відповідно,  $\Gamma_1(\mathbf{j}, \mathbf{i}) = \emptyset$ ) для довільної  $\mathbf{j} \in \Gamma_0$ . У цьому підрозділі ми розглядаємо  $\text{add } \mathcal{P}$  – адитивне замкнення категорії шляхів  $\mathcal{P}$ . Нехай  $\mathbf{j} \in \Gamma_0^+$ ,  $\mathbf{i}_k \in \Gamma_0$ , та  $a_k \in \Gamma_1(\mathbf{i}_k, \mathbf{j})$ ,  $k \in \{1, \dots, p\}$  – усі ребра, що закінчуються у точці  $\mathbf{j}$ . Розглянемо наступне відображення  $\Theta_{\mathbf{j}} : \text{add } \mathcal{P} \rightarrow \text{add } \mathcal{P}$ :  $\Phi_{\mathbf{j}} : \mathbf{i}_1 \oplus \mathbf{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_p \rightarrow \mathbf{j}$ ,  $[\Phi_{\mathbf{j}}] = (-\hat{a}_k)_{k=1}^p$ , де  $\hat{a}_k = (-1)^{|a_k|} a_k$ . Існує відображення

$$\Theta_{\mathbf{j}} : \mathbf{i}_1 \oplus \mathbf{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_p \rightarrow \mathbf{i}_1 \oplus \mathbf{i}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_p, \quad [\Theta_{\mathbf{j}}] = (\theta_{ij}), \quad \theta_{ij} \in \mathcal{P}(\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_j)$$

, таке що диференціал, визначається наступним чином:

$$[\Phi_{\mathbf{j}}\Theta_{\mathbf{j}}] = [\Phi_{\mathbf{j}}][\Theta_{\mathbf{j}}] = [\mathbf{d}(a_i)] = (\mathbf{d}(a_1) \dots \mathbf{d}(a_p)).$$

Тепер ми розвертаємо ребра  $a_1, \dots, a_p$ , отримуємо ребра  $b_k : \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{i}_k$  і покладемо  $|b_k| = -|a_k|$ . Позначимо через  $\Gamma'$  новий градуйований граф. Він є градуйованим та не має циклів, квадратичні форми  $\chi_{\Gamma}$  та  $\chi_{\Gamma'}$  співпадають.

Для довільного  $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$ , визначимо вектор  $\mathbf{r}' \in \mathbb{Z}^n$ , такий що  $r'_k = r_k$ , якщо  $k \neq j$ , та  $r'_j$  визначається за формулами:  $r'_j = \sum_{k=1}^p (-1)^{|\{i_k, j\}|} r_i - r_j$ . Якщо  $\mathbf{r} \in \ker \chi$ , тоді  $\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j$ .

**Лема 4.2.** Нехай  $\mathfrak{A} \in \Upsilon$ ,  $j \in \Gamma_0^+$ . Визначимо дгк  $\mathcal{U}'$ , що має ребра  $b_1, \dots, b_p$  замість  $a_1, \dots, a_p$  та диференціал визначається за формулами:

$$[\Theta_j \Psi_j] = [\Theta_j] [\Psi_j] = [\mathbf{d}(b_i)] = (\mathbf{d}(b_1) \dots \mathbf{d}(b_p))^t$$

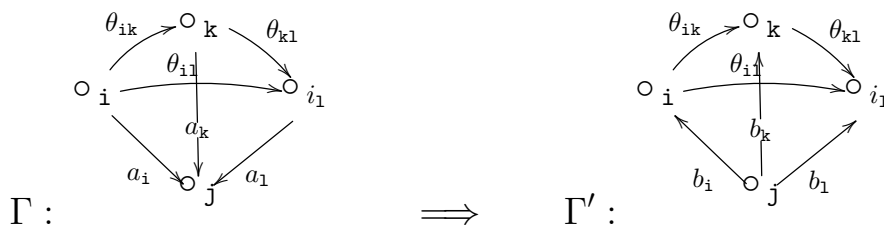
де  $\Psi_j : j \rightarrow i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_p$ ,  $[\Psi_j]^t = (b_k)_{k=1}^p$ . Тоді задача  $\mathfrak{A}' = (\mathcal{U}', \Gamma', \mathcal{B}', \mathbf{r}')$  належить до  $\Upsilon$ , та, якщо довільний чистий контур на  $\Gamma$  є активним, то довільний контур на  $\Gamma'$  теж є активним.

*Доведення.* За означенням диференціала, маємо:

$$\mathbf{d}(a_i) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+1} a_k \theta_{ik}$$

, таке що  $\mathbf{d}^2(a_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , де  $\theta_{ik} \in \mathcal{P}(i, k)$  є шляхами. Тоді

$$\mathbf{d}^2(a_i) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_l (-1)^{|a_k|+|a_l|} \theta_{kl} \theta_{ik} + \sum_{l=1}^p (-1)^{|a_l|+|a_l|+1} a_l \mathbf{d}(\theta_{il}).$$



Отримуємо умову:  $\mathbf{d}(\theta_{il}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{|a_k|+|a_l|} \theta_{kl} \theta_{ik} = 0$ ,  $i, l = 1, \dots, p$ .

Крім того, виконуються наступні рівності:  $|a_i| + 1 = |\theta_{ik}| + |a_k|$ .

Після повороту отримуємо ребра  $b_l : j \rightarrow i_l$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Позначимо отриманий граф через  $\Gamma'$ . Розглянемо диференціал  $\mathbf{d} : \Gamma_1^q(j, i_l) \rightarrow \mathcal{U}'_{q+1}(j, i_l)$ , такий що  $\mathbf{d}(b_l) = \sum_i \theta_{il} b_i$ . Тут  $|b_l| = -|a_l| = |\theta_{il}| - |a_i| - 1 = |\theta_{il}| + |b_i| - 1$ . Доведемо, що  $\mathbf{d}^2(b_l) = 0$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Маємо:  $\mathbf{d}^2(b_l) = \sum_i \mathbf{d}(\theta_{il}) b_i + \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \mathbf{d}(b_k) = \sum_i \mathbf{d}(\theta_{il}) b_i + \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \sum_i \theta_{ik} b_i$ , тоді  $\mathbf{d}^2(b_l) = \sum_i \mathbf{d}(\theta_{il}) b_i + \sum_i \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|} \theta_{kl} \theta_{ik} b_i$ , і ми отримуємо потрібну

умову:  $\mathbf{d}(\theta_{il}) = \sum_k (-1)^{|\theta_{kl}|+1} \theta_{kl} \theta_{ik}$ ,  $i, l = 1, \dots, p$ . Тому, що  $|a_l| + |\theta_{kl}| = |a_k| + 1$ , тоді це та сама умова, як вище.  $\square$

Випадок  $j \in \Gamma_0^-$  можна розглядати аналогічно.

**Зміна степеня** Для довільного  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{A} \in \Upsilon$  та довільної  $j \in \Gamma_0$  визначаємо наступну трансформацію  $\mathcal{D}_j^{(k)} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ . Припускаємо, що категорія  $\mathcal{U}'$  має ті самі об'єкти та морфізми, що і  $\mathcal{U}$ . Для довільного  $a \in \Gamma_1$ , інцидентного з  $j$ , покладемо

$$\deg_{\mathcal{U}'} a = \begin{cases} \deg_{\mathcal{U}} a + k & \text{при } t(a) = j, \\ \deg_{\mathcal{U}} a - k & \text{при } s(a) = j. \end{cases}$$

Тоді диференціал  $\mathbf{d}$  на  $\mathcal{U}$  коректно визначений на  $\mathcal{U}'$  також. Для довільного  $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$ , визначаємо вектор  $\mathbf{r}' \in \mathbb{Z}^n$ , такий що  $r'_k = r_k$ , якщо  $k \neq j$ , та  $r'_j$  визначено за формулами:  $r'_j = (-1)^k r_j$ . Тоді  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon$ . Трансформація  $\mathcal{D}_j^{(k)}$  називається *змінюю степеня* для дгк  $\mathcal{U}$ .

## 4.2. Основний результат

Ми розглядаємо задачі, що складаються з регулярної диференціальної градуїованої категорії (дгк)  $\mathcal{U}$  разом з її градуїованим орієнтованим графом без циклів  $\Gamma$  та біграфом  $\mathcal{B}$ . Ми припускаємо, що кожен чистий контур такої дгк є активним, а відповідний граф є коректно визначеним. Клас таких задач позначається через  $\Upsilon$ . Підклас  $\Upsilon$ , що складається з задач з додатною квадратичною  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$ , буде позначатися  $\Upsilon_+$ . Задача з  $\Upsilon$  розглядається як трійка  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B})$ .

Підклас, що розглядається у цьому розділі, складається з задач, що мають критичну квадратичну форму  $\chi = \chi_{\mathcal{B}}$ , отже  $\chi$  є напіввизначеною

квадратичною формою з точним однопараметричним ядром. Цей клас позначається через  $\Upsilon_0$ . За Лемою 1.2 кожна задача з  $\Upsilon_0$  має єдиний точний уявний корінь  $\mathbf{r} \in \ker \chi$ , такий що  $r_j = 1$  для деякої  $j \in \Gamma_0$ . Тому, задача з  $\Upsilon_0$  є четвіркою  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r})$ , де  $(\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon$ .

Зв'язна задача  $\mathfrak{A} \in \Upsilon_0$  називається *афінною задачею*, і відповідний граф  $\Gamma$  називається афінним (розширеним) орієнтованим градуйованим графом, якщо  $\mathcal{B}(\Gamma)$  є однією з афінних діаграм  $(\tilde{A}_n, \tilde{D}_n (n \geq 4), \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8)$ . У цьому випадку  $\mathbf{r}$  є добре відомим мінімальним додатним уявним коренем, що має щонайменше один елемент рівний 1. Підклас афінних задач позначається через  $\Upsilon_{aff} \subset \Upsilon_0$ . Ми використовуємо твердження з третього розділу, що для зручності може бути переформульоване наступним чином.

**Твердження 4.1.** *Для довільної  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon_+$  існує композиція дозволених трансформацій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}' = (\mathcal{U}', \Gamma', \mathcal{B}')$ , таких що  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon_+$  є деревом, отже  $\mathcal{B}'$  є діаграмою Динкіна.*

У цьому розділі ми доводимо наступну теорему

**Теорема 4.1.** *Нехай  $\mathcal{U}$  – диференціальна градуйована категорія з коректно визначеним градуйованим графом  $\Gamma$ , критичною напіввизначеною квадратичною формою  $\chi$  і біграфом  $\mathcal{B}$ . Припустимо, що довільний чистий контур є контуром диференціального типу. Тоді існує композиція трансформацій  $\mathcal{R} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , така що  $\mathcal{U}'$  є афінною задачею.*

Ми переформуємо Теорему 4.1 аналогічним до Твердження 4.1 чином:

**Теорема 4.2.** *Для довільної  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ , існує композиція допустимих трансформацій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}' = (\mathcal{U}', \Gamma', \mathcal{B}', \mathbf{r}')$ , таких що  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon_{aff}$ ,*

отже  $\mathcal{B}'$  є афінною діаграмою.

Доведемо теорему 4.2. Кажемо, що дерево  $\Gamma$  є *добре орієнтованим*, якщо воно не містить нетривіальних шляхів довжиною  $> 1$ . Ми доводимо у третьому розділі, що граф Динкіна  $\Gamma$  можна редукувати до добре орієнтованого градуйованого графа відповідного типу. Наступна Лема стверджує, що добре орієнтований граф можна трансформувати до добре орієнтованого 0-дерева.

**Лема 4.3.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}) \in \Upsilon_+$ , та нехай  $\Gamma$  добре орієнтоване дерево Динкіна. Тоді існує композиція трансформацій типу зміни степеня  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ , така що граф  $\Gamma'$  добре орієнтоване 0-дерево Динкіна.*

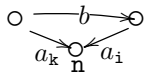
Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ , тобто квадратична форма  $\chi$  критична напів визначена. Тоді  $\Gamma$  зв'язний граф. За Лемою 1.3 для  $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n r_i e^i$ , існує  $j \in \Gamma_0$  така що  $r_j = 1$ . Позначимо  $\check{\mathbf{r}} = \sum_{i \neq j} r_i e^i \in \mathbb{Z}^{n-1}$  точний корінь додатної повної підзадачі  $\check{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}|_{\Gamma_0 \setminus \{j\}} \in \Upsilon_0$ .

Використовуючи розвертання ребер у деякій вершині  $\mathfrak{A}$ , якщо це необхідно, отримуємо умову  $j \in \Gamma_0^+$  (або аналогічно  $j \in \Gamma_0^-$ ). Тоді довільне ребро  $a \in \Gamma_1$  є глибоким на підграфі  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  тоді і лише тоді, якщо воно є глибоким на усьому графі  $\Gamma$ . Тому вершина  $j$  все ще належить до  $\Gamma_0^+$  або  $\Gamma_0^-$  відповідно після редукції на підзадачі  $\check{\mathfrak{A}}$ .

За Теоремою 4.1, щодо додатної форми, існує допустима трансформація без використання процедури розвертання  $\mathcal{R}_1 : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ ,  $\mathcal{R}_1 : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'$ ,  $r'_j = r_j = 1$ , так що підграф  $\check{\Gamma} = \Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{j\}}$  редукується до добре орієнтованого дерева типу Динкіна (див. третій розділ). За Лемою 4.3, існує трансформація редукція  $\mathcal{R}_2 : \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{A}''$ ,  $\mathcal{R}_2 : \mathbf{r}' \mapsto \mathbf{r}''$ , де  $\mathcal{R}_2 : \check{\mathfrak{A}}' \rightarrow \check{\mathfrak{A}}''$  з  $\check{\Gamma}''$ , що є добре орієнтованим 0-деревом Динкіна. Оскільки  $\mathbf{r}''_j = \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j$ ,

то  $\check{r}'' = \sum_{i \neq j} r_i'' e^i$  є точним коренем на  $\check{\mathfrak{A}}''$  за Лемою 1.2. Точний корінь 0-дерева Динкіна є або додатним або від'ємним, ми припускаємо, що він від'ємний.

Позначимо через  $\mathbf{n} = |\Gamma_0|$ , ми можемо задати таку нумерацію на  $\Gamma_0$ , що  $\mathbf{j} = \mathbf{n}$ . Для подальшого доведення можна припустити, що  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^+$ , випадок  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^-$  можна розглядати аналогічно. Для подальшого доведення можна припустити, що задача  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r})$  уже задовольняє умові, що  $\check{\Gamma} = \Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  є добре орієнтованим 0-деревом Динкіна.

Кожен чистий контур на  $\Gamma$  є активним трикутником інцидентним до  $\mathbf{n}$  типу , де  $\mathbf{d}(a_k) = \alpha b a_i + \dots$ ,  $\alpha \in \mathbb{k}^*$ . У цій ситуації ми пишемо:  $b a_i \in \mathbf{d}(a_k)$ . Тоді  $\deg(a_k) = \deg(a_i) + \deg(b) - 1 = \deg(a_i) - 1$ , оскільки  $\deg(b) = 0$ . Якщо  $a_i, a_k$  належить до того ж активного трикутника, то одне з цих ребер має парну степінь, а інше непарну.

Для довільних  $\mathbf{i}, \mathbf{i}' \in \check{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$ , існує ціле число  $k = k(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \geq 2$  та існує послідовність різних вершин  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k = \mathbf{i}' \in \check{\Gamma}_0$ , такі що  $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_{r+1}$  інцидентні для усіх  $r = 1, \dots, k - 1$ . Вершини  $\mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_{k-1}$  називаються *проміжними* для  $\mathbf{i}, \mathbf{i}'$  на  $\check{\Gamma}$ . Ми називаємо вершини  $\mathbf{i}, \mathbf{i}'$  *сусідніми* на  $\check{\Gamma}$  якщо  $k(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = 2$ .

**Лема 4.4.** *Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ ,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^+$  (або  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^-$ ) та  $\Gamma_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  добре орієнтоване 0-дерево, тоді виконуються наступні властивості:*

1. *Якщо  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$  є сусідніми і обидві інцидентні до  $\mathbf{n}$ , тоді підпроблема  $\Gamma|_{\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{n}\}}$  є активним трикутником.*
2. *Якщо  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$  обидві інцидентні до  $\mathbf{n}$ , тоді усі проміжні вершини також інцидентні до  $\mathbf{n}$ .*

3. Два трикутники інцидентні або спільному мінімальному або спільному максимальному ребру.

4. Довільне ребро з  $\Gamma_1$  є або мінімальним глибоким або максимальним.

Доведення випливає прямо з побудови, отже усі чисті контури є активними і на  $\check{\Gamma}$  немає шляхів.

**Лема 4.5.** Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ ,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^\pm$  та  $\check{\Gamma}$  – добре орієнтоване 0-дерево. Використовуючи, якщо необхідно, зміну степеня у точці  $\mathbf{n}$  та, якщо необхідно, розвертання ребер у точці  $\mathbf{n}$ , отримуємо еквівалентну задачу  $\mathfrak{A}'$ , таку що  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^\pm$ ,

- усі максимальні ребра на  $\Gamma'$  мають степінь 0,
- усі мінімальні ребра на  $\Gamma'$ , що інцидентні до  $\mathbf{n}$ , мають степінь 1,
- $\mathbf{r}'$  співпадає з  $\mathbf{r}$ .

*Доведення.* Ми можемо підняти степінь у точці  $\mathbf{n}$  на  $2d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ , таке що усі мінімальні ребра, що інцидентні до  $\mathbf{n}$ , отримують степінь 0 або 1. У другому випадку всі максимальні ребра мають степінь 0. У першому випадку всі ребра мають степені 0 та  $-1$ . Виконавши поворот ребер у вершині  $\mathbf{n}$  отримуємо потрібні степені 0 та 1. Помітимо, що  $\mathbf{r}'_{\mathbf{n}} = \mathbf{r}_{\mathbf{n}} = 1$ .

□

**Лема 4.6.** Нехай  $\mathfrak{A} = (\mathcal{U}, \Gamma, \mathcal{B}, \mathbf{r}) \in \Upsilon_0$ ,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^+$  та  $\check{\Gamma}$  – добре орієнтоване 0-дерево,  $\mathbf{r} \in \ker \chi$  – додатний точний вектор з  $\mathbf{r}_{\mathbf{n}} = 1$ . Тоді існує послідовність редуцій  $\mathcal{R} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ , така що  $\mathfrak{A}'$  задовольняє умовам Лема,

$$\text{та } \sum_{\mathbf{i} \in \Gamma_0} \mathbf{r}'_{\mathbf{i}} > \sum_{\mathbf{i} \in \Gamma_0} \mathbf{r}_{\mathbf{i}}.$$

*Доведення.* Ми можемо одразу використати Лему 4.5 та припустити, що усі максимальні ребра на  $\Gamma$  мають степінь 0, і мінімальні ребра на  $\Gamma$  інцидентні до  $\mathbf{n}$ , мають степінь 1, крім того існує щонайменше одне ребро степеня 1. Позначимо через  $V_0$  множину вершин  $\mathbf{i} \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$ , таких що  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \{a_{\mathbf{i}\mathbf{n}}\}$  та  $\deg a_{\mathbf{i}\mathbf{n}} = 0$ . Позначимо через  $V_1$  множину вершин  $\mathbf{i} \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$ , таких що  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \{\varphi_{\mathbf{i}\mathbf{n}}\}$  та  $\deg \varphi_{\mathbf{i}\mathbf{n}} = 1$ . Більш того, ми позначаємо через  $N(\mathbf{i})$  множину сусідніх до  $\mathbf{i}$  у  $\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$ . Якщо  $\mathbf{i}$  інцидентна до  $\mathbf{n}$ , тоді можемо припустити, що  $N(\mathbf{i}) \neq \emptyset$  оскільки інакше існує точно одне ребро інцидентне до  $\mathbf{n}$ , отже  $\Gamma$  уже є деревом. Нехай  $\mathbf{i} \in V_0$ . Тоді  $N(\mathbf{i}) \cap V_0 = \emptyset$  та  $1 \leq |N(\mathbf{i}) \cap V_1| \leq 2$ . Справді, якщо  $\mathbf{i}' \in N(\mathbf{i}) \cap V_0$ , тоді обмеження задачі  $\mathfrak{A}$  на множину  $\{\mathbf{i}, \mathbf{i}', \mathbf{n}\}$  має критичну квадратичну форму, і доведення закінчено. Якщо  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \in N(\mathbf{i}) \cap V_1$ , тоді обмеження задачі на множину  $\{\mathbf{i}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{n}\}$  має критичну квадратичну форму, і доведення отримується у цьому випадку напряму. Так само для  $\mathbf{i} \in V_1$ , ми можемо припустити, що  $N(\mathbf{i}) \cap V_1 = \emptyset$  та  $1 \leq |N(\mathbf{i}) \cap V_0| \leq 2$ .

Нехай  $\mathcal{R}_1$  – композиція повних редукцій  $\mathcal{R}_{\mathbf{i}\mathbf{n}}$  для усіх  $\mathbf{i} \in V_1$ . Позначимо через  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\mathcal{R}_1$ . Тоді  $\mathfrak{A}' \in \Upsilon_0$  і виконується:

1.  $\Gamma|_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  та  $\Gamma'|_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  співпадають;
2. для довільного  $\mathbf{i} \in V_1$ , маємо  $\Gamma'_1(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \{b_{\mathbf{n}\mathbf{i}} = \varphi_{\mathbf{i}\mathbf{n}}^*\}$  з  $\deg b_{\mathbf{n}\mathbf{i}} = 0$ ;
3. для довільного  $\mathbf{j} \in V_0$ , такого що  $|N(\mathbf{j}) \cap V_1| = 1$ , маємо  $\Gamma'_1(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \Gamma'_1(\mathbf{j}, \mathbf{n}) = \emptyset$ ;
4. для довільної  $\mathbf{j} \in V_0$ , такої що  $N(\mathbf{j}) \cap V_1 = \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\}$ , маємо  $\Gamma'_1(\mathbf{j}, \mathbf{n}) = \{\psi_{\mathbf{j}\mathbf{n}}\}$  з  $\deg \psi_{\mathbf{j}\mathbf{n}} = 1$ , де  $\psi_{\mathbf{j}\mathbf{n}} = \varphi_{\mathbf{j}\mathbf{n}} a_{\mathbf{i}_1\mathbf{j}} = \varphi_{\mathbf{j}\mathbf{n}} a_{\mathbf{i}_2\mathbf{j}}$  ( $a_{\mathbf{k}\mathbf{j}} \in \Gamma_1(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ );
5. для довільної  $\mathbf{j} \notin V_0 \cup V_1$ ,  $\mathbf{j} \neq \mathbf{n}$ , маємо  $\Gamma'_1(\mathbf{j}, \mathbf{n}) = \Gamma'_1(\mathbf{j}, \mathbf{n}) = \emptyset$ , якщо

$N(j) \cap V_1 = \emptyset$ , та  $\Gamma'_1(j, \mathbf{n}) = \{\psi_{j\mathbf{n}}\}$  з  $\deg \psi_{j\mathbf{n}} = 1$ , де  $\psi_{j\mathbf{n}} = \varphi_{j\mathbf{n}} a_{ij}$ , якщо  $N(j) \cap V_1 = \{i\}$ .

Тут  $r'_i = r_i + 1$  для довільної  $i \in V_1$ , та  $r'_j = r_j, i \neq j$ .

Розглянемо задачу  $\mathfrak{A}'$ . Нехай  $V'_0 = \{j \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\} \mid \exists b_{nj}\}$ . Визначимо  $V'_1 = \{j \in \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\} \mid \exists \psi_{j\mathbf{n}}\}$  як множину усіх  $j \in V_0$ , таких що кількість ребер інцидентних  $j$  на графі без точки  $\mathbf{n}$  дорівнює 2 ( $|V_0(j)| = 2$ ). Ми позначаємо через  $\mathcal{R}_2$  композицію повних редукцій  $\mathcal{R}_{j\mathbf{n}}$  для усіх  $j \in V'_1$ . Позначимо через  $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'\mathcal{R}_2 = \mathfrak{A}\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ . Тоді  $\Gamma''$  є коректно визначеним графом,  $\Gamma|_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  та  $\Gamma''|_{\Gamma_0 \setminus \{\mathbf{n}\}}$  співпадають,  $\mathbf{n} \in \Gamma_0''^-$ , та виконується наступне:

1. для довільної  $j \in V'_1$ , маємо  $\Gamma''_1(\mathbf{n}, j) = \{c_{nj} = \psi_{j\mathbf{n}}^*\}$  з  $\deg c_{ni} = 0$ ;
2. для довільної  $i \in V'_0$ , такої що  $|N(i) \cap V'_1| = 1$ , маємо  $\Gamma''_1(\mathbf{n}, i) = \Gamma''_1(i, \mathbf{n}) = \emptyset$ ;
3. для довільної  $i \in V'_0$ , такої що  $N(i) \cap V'_1 = \{j_1, j_2\}$ , маємо  $\Gamma''_1(i, \mathbf{n}) = \{\tau_{ni}\}$  з  $\deg \tau_{ni} = -1$ , де  $\tau_{ni} = \psi_{i\mathbf{n}}^* a_{j_1 i} = \psi_{i\mathbf{n}}^* a_{j_2 i}$  (тут  $a_{ki} \in \Gamma_1(k, i)$ );
4. для довільної  $i \notin V'_0 \cup V'_1$ ,  $i \neq \mathbf{n}$ , маємо  $\Gamma''_1(i, \mathbf{n}) = \Gamma''_1(\mathbf{n}, i) = \emptyset$ , якщо  $N(i) \cap V'_1 = \emptyset$ , та  $\Gamma''_1(i, \mathbf{n}) = \{\tau_{ni}\}$  з  $\deg \tau_{ni} = 1$ , де  $\tau_{ni} = \psi_{i\mathbf{n}}^* a_{ji}$ , якщо  $N(i) \cap V'_1 = \{j\}$ .

Як раніше, маємо  $r''_j = r'_j + 1$  для довільної  $j \in V'_1$ , та  $r''_i = r'_i$  інакше.

Лишається розвернути ребра у точці  $\mathbf{n}$ , щоб отримати задачу  $\mathfrak{A}'''$  з того ж класу, але з умовами:  $\mathbf{r}''' > \mathbf{r}$  та  $\mathbf{r}'''_{\mathbf{n}} = \mathbf{r}_{\mathbf{n}} = 1$ .  $\square$

Звичайно, аналогічна Лема має місце для випадку  $\mathbf{n} \in \Gamma_0^-$ .

Щоб довести Теорему 4.2 потрібно використати відомий факт, що координати вектора ядра з 1 є обмеженими, а саме не перевищують 6.

Висновки: Цей розділ розглядає класифікаційну задачу для диференціальних градуїованих категорій з критичною напів визначеною квадратичною формою. Ми доводимо, що така задача, що задовольняє деяким умовам коректності, може бути трансформована до диференціально градуїованої категорії з орієнтованим градуїованим графом, що є колчаном афінного (розширеного) типу.

## РОЗДІЛ 5

# Кореневі бази для несиметричних цілих білінійних форм

У даному розділі розглядається задача класифікації корневих баз для несиметричної білінійної форми з додатно визначеною квадратичною формою. Ми використовуємо теорію диференціальних градуїованих категорій та процедуру їх приведення. Градуїований колчан допускає тривіальну структуру диференціальної градуїованої категорії. Коренева база, яка приведена зі стандартної кореневої бази колчана типу Динкіна, визначає структуру диференціальної градуїованої категорії та відповідну несиметричну білінійну форму. Ми показуємо, що якщо на категорії шляхів зв'язного градуїованого графа деякої несиметричної білінійної форми можна визначити структуру диференціальної градуїованої категорії, яка задовольняє природним умовам коректності, то стандартна база цієї форми є редукованою з деякого градуїованого колчана типу Динкіна. Доведення основної теореми використовує теорему 3.2 для білінійних та квадратичних форм відносно їх коренів та корневих баз.

Алгоритми редукції лінійних категорій та інших структур широко використовуються у теорії зображень. Цей підхід дозволяє вивчати зображення індуктивно, редукуючи відповідні категорії крок за кроком ([2]). З іншого боку, важливою характеристикою зображуваної структури є інду-

кована квадратична форма, корені якої, за деяких додаткових умов, ставляться у відповідність нерозкладним зображенням. Теорія квадратичних форм добре відома ([3], [4]). Ми надаємо алгоритм одночасної трансформації диференціальної градуїрованої категорії зі спеціальними властивостями та відповідних білінійної та квадратичної форм до канонічного вигляду. Цей алгоритм використовується для доведення класифікаційних тверджень з теорії квадратичних форм та категорій.

Системи коренів є лише одним прикладом серед великої кількості математичних об'єктів скінченного типу, що класифікуються діаграмами Динкіна. Такий підхід дає змогу встановити зв'язок між теорією квадратичних форм та теорією зображень. Ми використовуємо не класичне, а модифіковане поняття кореневої бази. Ми доводимо, що за деяких умов скінченності та коректності коренева база зводиться до деякої класичної бази послідовністю трансформацій.

Усі необхідні означення та твердження для даного розділу стосовно диференціальних градуїваних категорій, їх графів та квадратичних форм описано в підрозділах 1.2 - 1.6 першого розділу. У підрозділі 1.3 того ж розділу наведено коротку історичну довідку про графи Динкіна. Розділ 1.7 присвячено дійсним кореням та групі Вейля.

## 5.1. Структура ДГК

$\mathbb{k}$ -лінійна категорія  $\mathcal{U}$  над алгебраїчно замкненим полем  $\mathbb{k}$  називається *градуїваною*, якщо вона оснащена мультиплікативним відображенням  $\deg : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{Z}$  та  $\mathcal{U}(i, j) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_q(i, j)$  є сумою скінченно вимірних векторних просторів  $\mathcal{U}_q(i, j) = \deg^{-1}(q)$ ,  $i, j \in \text{Ob } \mathcal{U}$ . Для  $x \in \mathcal{U}$ , позначає-

мо через  $|x| = \deg x \pmod{2}$  та  $\hat{x} = (-1)^{|x|}x$ . Градуїювана  $\mathbb{k}$ -категорія  $\mathcal{U}$  називається *диференціальною градуїюваною категорією* або дГК, якщо задано диференціал  $\mathbf{d} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ , що діє за правилом  $\mathbf{d} : \mathcal{U}_q(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \rightarrow \mathcal{U}_{q+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \text{Ob } \mathcal{U}$ , і виконуються наступні властивості:

1.  $\mathbf{d}(1_{\mathbf{i}}) = 0$ ,  $\mathbf{i} \in \text{Ob } \mathcal{U}$ ;
2. правило Лейбніца:  $\mathbf{d}(x_1 \dots x_{i-1} x_i \dots x_k) =$   
 $= \sum_{i=1}^k \hat{x}_1 \dots \hat{x}_{i-1} \mathbf{d}(x_i) x_{i+1} \dots x_k =$   
 $= \sum_{i=1}^k (-1)^{|x_1|} x_1 \dots (-1)^{|x_{i-1}|} x_{i-1} \mathbf{d}(x_i) x_{i+1} \dots x_k;$
3.  $\mathbf{d}^2 = 0$ .

Нехай  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \deg)$  – градуїюваний орієнтований граф, і нехай  $\mathbb{k}\Gamma$  його категорія шляхів. Ми позначаємо  $\text{coeff}_{x_1 \dots x_k} x = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{k}$ , коли  $x = \kappa x_1 \dots x_k + \dots$  – розклад по базі. Категорія  $\mathbb{k}\Gamma$  успадковує степінь (градування) від  $\Gamma$  наступним чином:  $\deg x_1 x_2 \dots x_k = \sum_{i=1}^k \deg x_i$ . Елементи поля  $\mathbb{k}$  мають степінь 0.

Ми розглядаємо диференціальну градуїювану категорію  $\mathcal{U}$  зі скінченною кількістю об'єктів. Визначимо відповідний орієнтований градуїюваний граф  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{U})$ , такий що  $\Gamma_0 = \text{Ob } \mathcal{U}$ , та  $\Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  є базою  $(\mathcal{U}/\mathcal{U}^{\otimes 2})(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Gamma_0$  з індукованим градуванням. Позначимо через  $\mathbb{k}\Gamma_{q+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  множину усіх шляхів з вершини  $\mathbf{i}$  у вершину  $\mathbf{j}$ , що мають степінь  $q + 1$ . Диференціал  $\mathbf{d} : \Gamma_1^q \rightarrow \mathbb{k}\Gamma_{q+1}$  визначає відображення  $\mathbf{d} : \Gamma_q(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \rightarrow \mathbb{k}\Gamma_{q+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Gamma_0$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , що розширюється на усю  $\mathbb{k}\Gamma$  за означенням диференціала. Надалі ми розглядаємо графи, що не мають петель.

Повний підграф  $\Gamma_S$ ,  $S \subset \Gamma_0$ ,  $|S| > 1$  називається *замкнутим контуром*, якщо на множині вершин задано порядок  $S = \{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k\}$ ,  $k > 1$ ,

такий що

$$|\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1}) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_{j+1}, \mathbf{i}_j)| = 1, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

$$|\Gamma_1(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_k) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_1)| = 1.$$

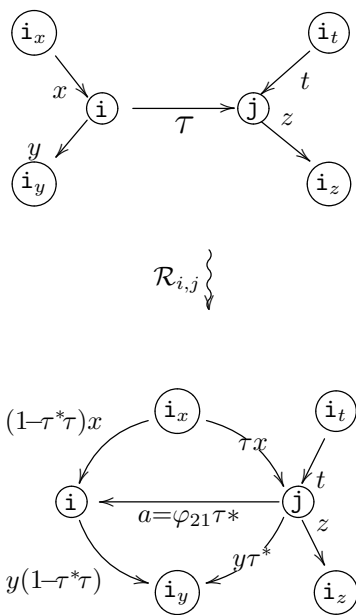
Замкнутий контур  $\Gamma_S$ ,  $S = \{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k\} \subset \Gamma_0$  називається *чистим*, якщо  $\Gamma_1(\mathbf{i}_s, \mathbf{i}_t) \cup \Gamma_1(\mathbf{i}_t, \mathbf{i}_s) = \emptyset$ ,  $|s - t| > 1 \pmod{k}$ . Замкнутий контур  $\Gamma_S$  називається *орієнтованим циклом*, якщо  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1})| > 0$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , та  $|\Gamma_1(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_1)| > 0$ . Замкнутий контур  $\Gamma_S$  називається *градуїтованим обходом*, якщо  $\Gamma_1(\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_{j+1}) = \{a_j\}$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , та  $\Gamma_1(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_k) = \{a\}$ , крім того  $\deg a + 1 = \sum_{j=1}^{k-1} \deg a_j$ . Позначимо через  $x_{\mathbf{i}_j}$  ребро, що починається у вершині  $\mathbf{i}$  та закінчується у вершині  $\mathbf{j}$ . Градуїтований обхід  $\Gamma_S$  називається *активним контуром* (або контуром диференціального типу), якщо  $ax_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2} \dots x_{\mathbf{i}_{k-1}\mathbf{i}_k}$  є доданком диференціала ребра  $x_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_k}$ . Ребро  $a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  називається *глибоким*, якщо немає інших шляхів на  $\Gamma$  з  $\mathbf{i}$  до  $\mathbf{j}$ . Ребро  $a \in \Gamma_1(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  називається *мінімальним*, якщо  $\mathbf{d}(a) = 0$ . Кожне глибоке ребро є мінімальним. Граф  $\Gamma$ , що відповідає скінченновимірній диференціальній градуїтованій категорії, є скінченним. Скінченний граф  $\Gamma$  називається *коректно визначеним графом*, якщо його категорія шляхів  $\mathbb{k}\Gamma$  не має орієнтованих циклів та паралельних ребер (паралельними називаються ребра, що мають спільні початок та кінець), та довільний чистий замкнутий контур є градуїтованим обходом.

Дгк  $\mathcal{U}$  називається *коректно визначеною*, якщо відповідний орієнтований градуїтований граф  $\Gamma$  є коректно визначеним, та довільний чистий замкнутий контур є активним. У такому випадку ми називаємо  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  *коректно визначеною дгк задачею*.

## 5.2. Редукція та форми колчанного типу, редукція дгк

Ми розглядаємо дгк  $\mathcal{U}$  разом з відповідним градуйованим графом  $\Gamma$  з  $\Gamma_0 = \text{Ob } \mathcal{U}$ . Для  $i, j \in \Gamma_0$  ми детально визначили у третьому розділі. редукцію  $\mathcal{R}_{i,j} : (\mathcal{U}, \Gamma) \rightarrow (\mathcal{U}', \Gamma')$ . Тут ми коротко опишемо результуючу дгк та граф. Якщо вершини  $i$  та  $j$  не є інцидентними на  $\Gamma$ , тоді редукція  $\mathcal{R}_{i,j}$  є тривіальною, отже в цьому випадку  $\Gamma' = \Gamma, \mathcal{U}' = \mathcal{U}$ . Ми застосовуємо редукцію для випадку, у якому є єдине глибоке ребро  $\tau$  між  $i$  та  $j$  для двох можливих орієнтацій.

Ми зображаємо усі ребра суцільними стрілками, але вони можуть мати різні степені, ми опускаємо напрямки стрілок, якщо він не має значення. Припустимо, що  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  – єдине глибоке ребро зі степенем  $\deg \tau = d$ . Загальний випадок можна зобразити на графі наступним чином:



В результаті конструкції з розділу 3 ми вважаємо, що існує  $\tau^* : j \rightarrow i$ , таке що  $\tau\tau^* = \mathbf{1}_j$ , та  $\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_{i_1} + \mathbf{1}_{i_2} = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$  є розкладом на суму взаємнокомутуючих іденпотентів. Тоді  $\deg \tau^* = -\deg \tau = -d$ . Є нове

ребро  $a = \varphi_{21}\tau^* : j \rightarrow i$  на  $\Gamma'$  з  $\deg(a) = \deg \tau^* + 1 = 1 - d$ , та  $\mathbf{d}(a) = 0$ . Кожне ребро  $x \in \Gamma_1(i_x, i)$  розділяється на два ребра  $\tau x$  та  $(1 - \tau^*\tau)x$  на  $\Gamma'$ , та  $a(\tau x) \in \partial((1 - \tau^*\tau)x)$ . Кожне ребро  $y \in \Gamma_1(i, i_y)$  розділяється на два ребра  $y\tau^*$  та  $y(1 - \tau^*\tau)$ , та крім того  $y(1 - \tau^*\tau)a \in \partial(y\tau^*)$ . Усі інші ребра не змінюються. Градування та диференціал визначаються алгоритмічно зі структури  $\mathcal{U}$ . Диференціал отримується заміною  $\mathbf{1}_i = (1 - \tau^*\tau) + \tau^*\tau$ . Будь який шлях  $y_1 \dots y_q y x x_p \dots x_1$  з категорії  $\mathcal{U}$ , що проходить через точку  $i$  є комбінацією шляхів:

$$y_1 \dots y_q (y(1 - \tau^*\tau) \quad y\tau^*\tau) \begin{pmatrix} (1 - \tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix} x_p \dots x_1.$$

У другому випадку є єдине глибоке ребро  $\tau \in \Gamma_1(j, i)$ . Цей випадок може розглядатися так само додаванням  $\tau^* : i \rightarrow j$ , такого що  $\tau^*\tau = \mathbf{1}_j$  та використовуючи розклад  $\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_{i_1} + \mathbf{1}_{i_2} = (1 - \tau\tau^*) + \tau\tau^*$  на суму взаємно комутуючих ідемпотентів.

Ми отримуємо орієнтований градуйований граф  $\mathfrak{u}\Gamma' = (\Gamma_0, \Gamma'_1)$  та дгк  $\mathcal{U}'$ , відповідна трансформація позначається через  $\mathcal{R}_{ij} : (\Gamma, \mathcal{U}) \rightarrow (\Gamma', \mathcal{U}')$  і називається *редукцією* від  $i$  до  $j$  (вздовж ребра  $\tau$ ).

Нехай  $\Gamma_1(i, j) = \{\tau\}$ . Редукція  $\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  визначає трансформацію решіток  $\mathcal{R}_{ij} : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \rightarrow \mathbb{Z}^{\Gamma'_0}$ . Для довільного  $x \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  ми отримуємо:  $\mathcal{R}_{ij} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ , де  $x'_i = x_i - (-1)^{|\tau|}x_j$  та  $x'_k = x_k, k \neq i$ , інакше. Іноді ми позначаємо редукцію через  $\mathcal{R}_{ij}^+$ , якщо  $|\tau|$  парна, та через  $\mathcal{R}_{ij}^-$  у іншому випадку.

Помітимо, що  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U} = \mathcal{U}'$  не є поповненою дгк та її орієнтований граф не має циклів, але вона не обов'язково регулярна. Дгк називається *регулярною*, якщо усі ребра  $a$  її орієнтованого графа регулярні, тобто якщо шляхи довжини  $= 1$  не є доданками диференціала  $a$ . А саме, можливо, що  $\Gamma_1(\mathbf{k}, j) = \{x, y\}$  для деякої  $\mathbf{k} \in \Gamma_0$ . За конструкцією у цьому випадку

$\mathbf{d}(x) = \kappa y + l$ , де  $l \in \mathbb{k}[\Gamma]^2$  та  $|y| = |x| + 1$ . Потім покладемо:  $x = 0$ ,  $\mathbf{d}(x) = 0$ ,  $y = -\kappa^{-1}l$ , та отримуємо нову дгк  $\mathcal{U}''$  з графом  $\Gamma''$ . Кажемо, що  $\mathcal{U}''$  отримується з  $\mathcal{U}'$  *регуляризацією* на  $x, y$ , після якої  $x, y$  відсутні. Квадратична форма  $\chi$  та решітка  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  не змінюються після операції регуляризації. Випадок  $|\Gamma_1(j, \mathbf{k})| = 2$  аналогічний. Маючи редуковану дгк  $\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}$ , ми можемо виконати деяку кількість процедур регуляризації для отримання регулярної дгк задачі. Ми називаємо отриману в результаті процедуру *повною редукцією* та позначаємо її тією ж літерою  $\mathcal{R}_{ij}$ .

Нехай  $\Gamma_1(i, j) \cup \Gamma_1(j, i) = \{\tau\}$ . Стандартна коренева база  $E = \{\mathbf{e}_i\} \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$  трансформується редукцією  $\mathcal{R}_{ij}$  до кореневої бази  $E' = \{\mathbf{e}'_i\}$ , де  $\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_j + (-1)^{|\tau|} \mathbf{e}_i = \omega_i(\mathbf{e}_j)$  та  $\mathbf{e}'_k = \mathbf{e}_k$  для  $k \neq j$ ,  $\omega_i$  – відбиття. Тоді  $E'$  є кореневою базою  $\Gamma'$ . Ми позначаємо через  $\mathcal{R}_{ij}\Gamma$  орієнтований біграф асоційований з кореневою базою  $E'$  та з білінійною формою  $\langle, \rangle_{\Gamma}$ . Редукція  $\mathcal{R}_{ij}$  коректно визначеної дгк  $\mathcal{U}$  називається *допустимою*, якщо  $i, j$  – *1-зв'язні вершини*, та ребро  $\tau \in \Gamma_1(i, j) \cup \Gamma_1(j, i)$  глибоке.

Ми розглядаємо коректно визначений скінченний орієнтований граду-йований граф  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \text{deg})$  разом з відповідним біграфом  $\bar{\Gamma}$ , його схемою  $\tilde{\Gamma}$ , квадратичною формою  $\chi$  та відповідною білінійною формою  $\langle, \rangle$ .

**Лема 5.1.** *Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  – коректно визначена дгк задача з додатно визначеною формою Тітса, нехай  $\tau \in \Gamma_1(i, j)$  – глибоке регулярне ребро, та нехай  $\mathcal{R}_{ij} : (\mathcal{U}, \Gamma) \rightarrow (\mathcal{U}', \Gamma')$  – допустима повна редукція. Тоді  $(\mathcal{R}_{ij}\mathcal{U}, \mathcal{R}_{ij}\Gamma)$  є коректно визначеною дгк задачею та підграфи  $\mathcal{R}_{ij}\Gamma, \bar{\Gamma}'$  збігаються.*

Доведення впливає зі структури дгк та додатності квадратичної форми.

Маючи коректно визначену дгк задачу  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  ми будуємо *композицію допустимих редукцій* типу  $\mathcal{R}_{ij}$ . Ми починаємо з  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  та стандартної кореневої бази  $E$  решітки  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ . Припустимо, що  $\mathcal{R}' : (\mathcal{U}, \Gamma) \rightarrow (\mathcal{U}', \Gamma')$  композиція  $r > 0$  простих редукцій, та нехай  $E' = \{\alpha'_i\}_{i \in \Gamma_0}$  – отримана коренева база  $(\mathcal{U}', \Gamma')$ . Для довільних  $i, j \in \Gamma_0$  з 1-зв'язними на  $\Gamma'$  коренями  $\alpha'_i, \alpha'_j$ , ми виконуємо редукцію  $\mathcal{R}'' : (\mathcal{U}', \Gamma') \rightarrow (\mathcal{U}'', \Gamma'')$ , і ми конструюємо кореневу базу  $E'' = \{\alpha''_i\}_{i \in \Gamma_0}$ , таку що  $\alpha''_j = \omega_{\alpha'_i}(\alpha'_j)$  та  $\alpha''_k = \alpha_k$  для  $k \neq j$ . Редукція  $\mathcal{R} = \mathcal{R}''\mathcal{R}' : (\mathcal{U}, \Gamma, E) \rightarrow (\mathcal{U}'', \Gamma'', E'')$  є композицією  $r+1$  простих редукцій, вона називається допустимою редукцією.

Для коректно визначеної дгк задачі  $(\mathcal{U}, \Gamma)$ , коренева база  $R$  називається *редукованою кореневою базою* (від стандартної бази  $E$ ), якщо існує допустима редукція  $(\mathcal{U}, \Gamma, E) \rightarrow (\mathcal{U}', \Gamma', R)$ .

Нехай  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  – дгк задача,  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \text{deg})$  та  $i \in \Gamma_0$ . Ми будуємо новий граф  $\Gamma' = \mathcal{T}_i(\Gamma) = (\Gamma_0, \Gamma_1, \text{deg}')$  зміною градування  $\Gamma$  наступним чином. Для довільної  $a \in \Gamma_1(j, i)$  (відповідно,  $b \in \Gamma_1(i, j)$ ) покладемо  $\text{deg}'(a) = \text{deg}(a) + 1$  (відповідно,  $\text{deg}'(b) = \text{deg}(b) - 1$ ). Структура дгк задачі  $(\mathcal{U}, \Gamma, \text{deg})$  переноситься на задачу  $(\mathcal{U}, \Gamma', \text{deg}') = \mathcal{T}_i(\mathcal{U}, \Gamma, \text{deg})$ , оскільки умова  $\text{deg}'(\mathbf{d}(a)) = \text{deg}(\mathbf{d}(a))$  тривіально виконується для довільної  $a \in \Gamma_1$ . Трансформація  $\mathcal{T}$  дгк задачі називається *зсувом градування у точці  $i$* , якщо це композиція трансформацій типу  $\mathcal{T}_i$ .

### 5.3. Форми колчанного типу

Ми кажемо, що дгк задача  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  *колчанного типу* (відповідно, *колчанного типу Динкіна*), якщо існує  $Q = (Q_0, Q_1, \text{deg})$  градуований колчан (відповідно, градуований колчан типу Динкіна), редукована коренева

база  $R$  колчана, та допустима редукція  $(\mathcal{U}_Q, Q, E) \rightarrow (\mathcal{U}_R, \Gamma_R, R)$ , така що задачі  $(\mathcal{U}, \Gamma)$  та  $(\mathcal{U}_R, \Gamma_R)$  співпадають. У цьому випадку білінійна форма є формою Ойлера колчана, і квадратична форма є формою Тітса.

У колчана  $Q = (Q_0, Q_1)$  диференціал рівний нулю для довільного ребра. Тут  $E^{Q_0}$  – стандартна база  $\mathbb{Z}^{|Q_0|}$ . Тоді за означенням довільна задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, E^{\Gamma_0})$  є коректно визначеною, коли вона є редукованою від задачі  $(\mathcal{U}_Q, Q, E^{Q_0})$  для деякого колчана Динкіна  $Q$ .

**Теорема 5.1.** *Нехай  $\mathcal{U}$  – коректно визначена диференціальна градуїрована категорія,  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  – її зв'язний градуїований граф, що має додатно визначену квадратичну форму  $\chi = \chi_\Gamma$ , та  $E$  – стандартна база  $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ . Тоді дгк задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, E)$  є градуїованого колчанного типу Динкіна.*

Доведення Теорема полягає у модифікації та застосуванні Теорема 3.2 для білінійних і квадратичних форм відносно їх коренів та кореневих баз.

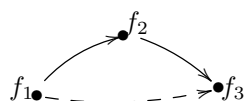
**Наслідок 5.1.** *За припущень Теорема 5.1, існує зсув градуїування  $\mathcal{T} : (\mathcal{U}, \Gamma, E) \rightarrow (\mathcal{U}', \Gamma', E)$ , такий що дгк задача  $(\mathcal{U}', \Gamma', E)$  є класичного типу Динкіна (або колчанного 0-типу).*

**Теорема 5.2.** *Орієнтований градуїований граф  $\Gamma$  з додатно визначеною квадратичною формою  $\chi_\Gamma$  редукується до колчана Динкіна тоді і лише тоді, коли  $\Gamma$  може бути наділений структурою коректно визначеної дгк задачі.*

**Наслідок 5.2.** *Нехай  $\langle , \rangle$  – несиметрична ціла білінійна форма з асоційованим зв'язним біграфом  $B = (B_0, B_1)$ , і квадратична форма  $\chi_B$  є додатно визначеною. Тоді існує градуїований кочан Динкіна  $Q$  та редукована дійсна коренева база  $R$ , така, що  $\langle , \rangle = \langle , \rangle_R$  тоді і тільки тоді,*

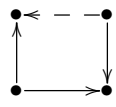
коли є коректно визначена дгк задача  $(\mathcal{U}, \Gamma, E)$  з  $E$  – стандартною базою  $\mathbb{Z}^{|B_0|}$ , такі що біграфи  $\bar{\Gamma}$  та  $B$  співпадають.

**Приклад 5.1.** Для 0-градуйованого колчана  $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$  ми розглядаємо наступну кореневу базу:  $R = \{f_1, f_2, f_3\}$ , де  $f_1 = -e_2$ ,  $f_2 = e_1 + e_2$ ,  $f_3 = e_3$ . Побудований біграф  $\Gamma_R$  є чистим замкнутим контуром, що містить 3 вершини типу



де  $\deg a_{12} = \deg a_{23} = 0$ , та  $\deg a_{13} = -1$ , і диференціал задано наступним чином:  $d(a_{13}) = a_{23}a_{12}$ . Він отримується послідовністю редуцій:

$\mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12}$ .  $\{e_1, e_2, e_3\} \mapsto \{e_1, w_{e_1}(e_2), e_3\} = \{e_1, e_1 + e_2, e_3\} \mapsto \{w_{e_1+e_2}(e_1), e_1 +$

$e_2, e_3\} = \{-e_2, e_1 + e_2, e_3\}$  Градуйований граф  не можна редукувати до колчана, оскільки його не можна наділити структурою коректно визначеної дгк задачі.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджуються диференціальні градуйовані категорії. Розв'язано класифікаційні задачі для диференціальних градуйованих категорій з додатною квадратичною формою та з напіввизначеною квадратичною формою. Також вивчається питання класифікації кореневих баз для несиметричної білінійної форми з додатно визначеною квадратичною формою. Для доведення класифікаційних задач використовується алгоритм редукції, що дозволяє приводити складні задачі до деякого канонічного вигляду. Окремо приділено увагу питанням з теорії комодулів, а саме, вивчається категорія індукованих комодулів, на якій будується повний і точний функтор.

Автором отримано такі нові теоретичні результати:

- Побудовано повний і точний функтор на категорії індукованих комодулів, використовуючи мову комодулів.
- Розв'язано класифікаційну задачу для диференціальних градуйованих категорій з додатною квадратичною формою. Доведено, що такі задачі можуть бути трансформовані у диференціальні градуйовані категорії з градуйованим графом, що є колчаном типу Динкіна. Побудовано алгоритми таких трансформацій.
- Розв'язано класифікаційну задачу для диференціальних градуйованих категорій з критичною напів визначеною квадратичною формою. Доведено, що така задача, що задовольняє деяким умовам коректності може бути трансформована до диференціальній градуйованій категорії з орі-

ентованим градуїованим графом, що є колчаном афінного (розширеного) типу.

- Розглядається задача класифікації корневих баз для несиметричної білінійної форми з додатно визначеною квадратичною формою. Доведено, що якщо на категорії шляхів зв'язного градуїованого графа деякої несиметричної білінійної форми можна визначити структуру диференціальної градуїованої категорії, яка задовольняє очевидним умовам коректності, то стандартна база цієї форми є редукованою з деякого градуїованого колчана типу Динкіна.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Y.A. Drozd. Tame and wild matrix problems. // Representations and Quadratic Forms – 1979, Kiev, 39–74.
2. Y.A. Drozd. Reduction algorithm and representations of boxes and algebras. // Comptes Rendue Math. Acad. Sci. Canada, 23 – 2001, 97–125.
3. S.A. Ovsienko. Integer weakly positive forms.// Shurian Matrix problems and quadratic forms (1978), Kiev, 3–17.
4. M. Barot, J.A.de la Peña. The Dynkin type of a non-negative unit form. // Expo. Math. **17**, – 1999, 339–348.
5. M. Barot, J.A.de la Peña. Algebras whose Euler form is non-negative.// Coll. Math. 79(1), – 1999, 119–131.
6. М.М. Клейнер, А.В. Ройтер. Представления дифференциальных градуированных категорий. // Матричные задачи. АН УССР. Институт математики. Киев – 1977, 5–70.
7. M. Kleiner and A. V. Roiter. Representations of differential graded categories // "Matrix problems Kiev, – 1977, 5-70.

8. Y.A. Drozd. Tame and wild matrix problems. // Representations and Quadratic Forms – 1979, Kiev, 39–74 (English translation in AMS Translations v.128).
9. M. Kleiner. Induced modules and comodules and representations of BOCS's and DGC's. // Lecture Notes in Math., vol. 903, Springer-Verlag, Berlin and New York, – 1981, pp. 168-185.
10. A.V. Roiter. The roots of integral quadratic forms. // Quadratic forms and representations – 1978, Kiev, 3–17.
11. O. Gnatiuk, N. Golovashchuk. Differential graded categories with positive quadratic form. // Visnyk Kyiv National Taras Shevchenko University, – 2012, 3, 15–19.
12. Olena Gnatiuk. Induced comodules over the coalgebra. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: фізико-математичні науки, – 2012, 4, сс. 13-16
13. Olena Gnatiuk, Natalia Golovashchuk. Differential graded categories associated with the critical semi-definite quadratic forms. // Algebra and Discrete Mathematics Volume 16 – 2013. Number 2. pp. 188 – 200
14. Gnatiuk O., Golovashchuk N. Differential graded categories associated with the Dynkin diagram. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки – 2013. -14. сс. 14-23
15. Natalia Golovashchuk, Olena Gnatiuk. Root bases for nonsymmetrical integer bilinear forms. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: фізико-математичні науки – 2014, 4, сс. 14-20

16. O. Gnatiuk. Induced comodules over the category. // 8th International Algebraic Conference in Ukraine, – July 5-12, 2011, Lugansk Taras Shevchenko National University Ukraine, p. 200
17. Olena Gnatiuk. Classification problem for differential graded categories. // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ — 2013, с. 120
18. Ringel C.M. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. // Springer Verlag, Vol. 1099 – 1984
19. R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, L. Salmeron. Representation-finite algebras and multiplicative bases. // Invent. Math. 81 – 1984, 217-285
20. Th. Brustle, J. A. de la Peña and A. Skowroński. Tame algebras and Tits quadratic form. // Advances in Mathematics 226 – 2011, 887–951
21. P. Gabriel and A. V. Roiter. Representations of finite-dimensional algebras. // Algebra VIII, Encyclopaedia of Math. Sc. Vol 73. Springer – 1992.
22. J. A. de la Peña. Quadratic forms and the representation type of an algebra. // Sonderforschungsbereich Diskrete Strukturen in der Mathematik. Ergänzungsreihe 343, 90-003. Bielefeld – 1990
23. I. Assem, D. Simson, A. Skowroński Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1: Techniques of Representation Theory // London Mathematical Society, Student Texts 65, Cambridge University Press, New York - 2006

24. N.S. Golovaschuk, G.V. Kriukova On non-negative integer quadratic forms. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 14–21.
25. Н.С. Головащук, Г.В. Крюкова Критерій невід’ємновизначеності цілих квадратичних форм // Вісник Київського університету. – 2009. – Вип. 4. – С. 7–13.
26. Kriukova G.V. The Lie algebra associated to an integer quadratic form. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 3. – С. 43–46.
27. M. Barot. A characterization of positive unit forms. // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, – vol. 5, – 1999. – P. 87-93.
28. M. Barot, J. A. de la Pēna. The Dynkin type of a non-negative unit form // Expositiones Mathematicae. – 1999. – vol 17 – pp. 339–348.
29. Zeldich M.V. Integral critical and hypercritical quadratic forms // Communications in Algebra. – 1994. – Vol. 22(9). – P. 3629–3634.
30. G. Marczaka, A. Polaka, D. Simson.  $P$ -critical integral quadratic forms and positive unit forms: An algorithmic approach // Linear Algebra and its Applications. – vol. 433, Issues 11-12, – 2010. – P. 1873-1888
31. С. Ленг. Алгебра // Издательство "МИР". – 1968. – P. 396–402.
32. Ройтер А. В. Корни целых квадратических форм // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1978. – Т. 148. – С. 201–210.

33. Roiter A.V., Ovsienko S.A. Bilinear forms and categories of representations // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. – 1972. – Vol. 28. – P. 71–80.
34. Yuri A. Drozd, Sergey A. Ovsienko Covering of tame boxes and algebras // Max - Plank - Institut fuer Mathematik Preprint Series. – 2000. – Vol. 26. – 44 pp.
35. Gabriel P., Roiter A.V. Representations of finite-dimensional algebras // Algebra–8, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. – 2003. – 73. – Moscow. P. 5–224
36. Dieter H. The converse of Drozd’s theorem on quadratic forms // Communications in Algebra. – 1995. – Vol. 23:2. – P. 737-738.
37. Dlab V., Ringel C.M. Indecomposable representations of graphs and algebras // Memoirs of the American Mathematical Society. – 1976. – Number 173. – Vol. 6. – American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
38. H.J. von Höhne. On weakly positive unit forms. // Comment. Math. Helvetici 63 – 1988, 312-336
39. H.J. von Höhne. On weakly non-negative unit forms. // Proc. London Math. Soc. (3) 73 – 1996, 47-67
40. E.B. Dynkin. Classification of the simple Lie groups. // MSb 18, 3 (60) – 1946, 347 - 353