ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)



**УДК 517.938** **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.9**

**Оксана ВИШЕНСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.**
**ORCID ID: 0000-0002-3360-8552**
**e-mail: oksana.vyshenska@gmail.com**
**Національний транспортний університет, Київ, Україна**

**Людмила ШЕВЧУК, Канд. техн. наук, Доц.**
**ORCID ID: 0000-0002-5748-9527**
**e-mail: ludmilashevchuk25@gmail.com**
**Національний транспортний університет, Київ, Україна**

# МЕТОД ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ В ЗАДАЧАХ ПРО РУХ ДВОХ ТОЧОК

***Анотація.*** *Однією з цілей, які стоять перед математичною освітою в цілому, є вміння обирати вдалий математичний метод для розв'язування задач. Корисним може бути описання станів певного процесу як точок фазового простору. У статті розв'язано три цікаві задачі єдиним методом, заснованим на понятті фазового простору. Вона засвідчує, що цей метод дає можливість будувати ефектні, чіткі, наочні розв'язки.*

***Ключові слова:*** *фазовий простір; фазова точка; фазова крива; фазовий простір системи.*

## 1. Вступ

Математичні поняття стосуються ідеальних об'єктів. Щоб правильно усвідомити їхній зміст, слід мати не лише точне означення, а й чималу низку ілюстративних прикладів. У статті показано, як поняття фазового простору можна безпосередньо застосовувати до розв'язування конкретних задач. Розв'язані задачі, з одного боку, зайвий раз роблять рекламу надзвичайно вдалому, дієвому, «працюючому» поняттю фазового простору, а з другого – можуть добре прислужитись для початкового ознайомлення з цим поняттям.

У статті запропоновано задачі, котрі стимулюють до поглибленого вивчення математики, потребують нестандартного підходу для розв'язання. Таким чином сприяють дієвості набутих математичних знань, розвитку логічного та творчого мислення.

Мета статті – надати тим, хто виявляє підвищений інтерес до математики, можливість ознайомитися з деякими теоретичними питаннями (зокрема, з поняттям фазового простору) через розв'язання цікавих нестандартних задач.

## 2. Означення фазового простору

*Фазовим простором* називають множину, кожна точка якої зображує один із можливих станів деякої системи. Розмірність фазового простору визначається кількістю функцій, необхідних для опису станів системи у довільний момент часу.

Значення цих функцій відкладають на осях системи координат фазового простору. Точку фазового простору, що фіксує стан системи у різні моменти часу, називають *фазовою точкою*, а лінію, яку вона описує у фазовому просторі, – *фазовою траєкторією*.

## 3. Приклади

**Приклад 1.** Нехай маємо коло завдовжки 1 і на ньому фіксовану точку $O$ (рис.1).

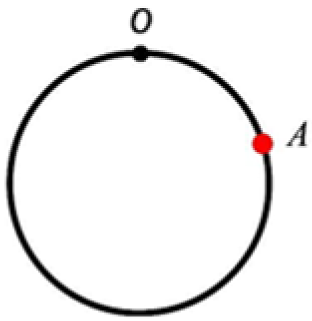


Рис. 1. Точка на колі

Припустимо, що по колу рухається об'єкт, який називатимемо точкою $A$. Що є фазовим простором такої системи? Розглянемо числову пряму. Вважатимемо, що додатні координати точок на ній означають відстань по колу від точки $O$ до точки $A$ (тобто довжину дуги $OA$), виміряну за годинниковою стрілкою. Ототожнимо точку $O$ з початком відліку на числовій прямій, що міститься на відрізку $[0,1]$ (при цьому кінцеві точки відрізка ототожнюються). Цей відрізок і є фазовим простором даної системи, а його точка – *фазова точка* (рис. 2). Послідовна зміна положень точки $A$ зображується у фазовому просторі рухом фазової точки вздовж відрізка $[0,1]$. У цьому випадку фазова точка описує так звану *фазову криву*.


Рис. 2. Фазовий простір точки на колі

Нехай, наприклад, точка $A$, вийшовши з точки $O$ рухається рівномірно вздовж кола до половини, а потім повертається назад. Фазова точка при цьому рухатиметься вздовж відрізка $[0,1]$ від його лівого кінця до точки з координатою $\frac{1}{2}$ і назад. Фазовою кривою є відрізок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Якщо ж, наприклад, точка $A$ не рухається, то її фазова крива – це одна точка на відрізку $[0,1]$, яка характеризує положення точки $A$ на колі.

**Зауваження.** *Крайні точки відрізка $[0,1]$ відповідають одній і тій же точці на колі – точці $O$. Звідси випливає, що в наведеному прикладі фазовим простором є по суті саме коло, по якому рухається точка $A$. Відрізок $[0,1]$ – розгортка цього кола.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

**Приклад 2.** Маємо те саме коло, що й у прикладі 1. По ньому рухаються дві точки: синя та червона. Яким буде фазовий простір цієї системи?

Розглянемо прямокутну систему координат на площині. Координати точок означатимуть відстані від точки $O$ до синьої чи червоної точок, відповідно. Фазовим простором системи є множина всіх точок квадрата зі стороною $1$ (рис. 3).

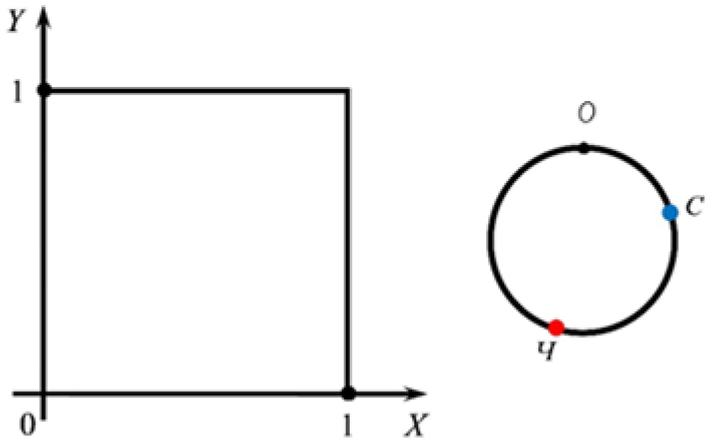


Рис. 3. Система двох точок на колі та її фазовий простір

Справді візьмемо, наприклад, точку $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Ця фазова точка зображає такий стан системи, коли синя точка перебуває за півкола від точки $O$, а червона зливається з $O$ (рис. 4). Навпаки, будь-яке положення синьої і червоної точок на колі можна зобразити фазовою точкою.

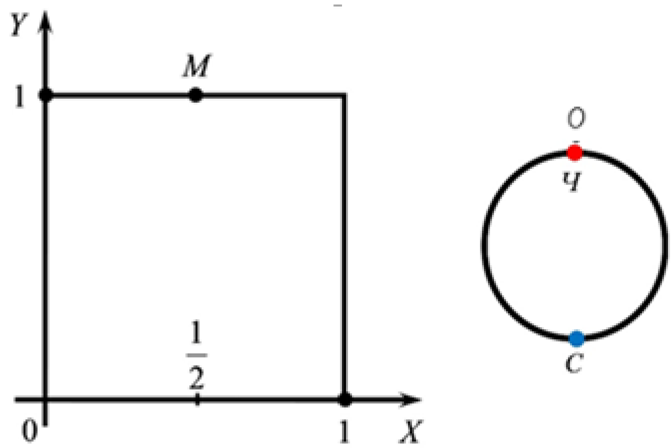


Рис. 4. Фазова точка та відповідний стан системи

Зафіксуємо положення точок на колі. Хай відстань від точки $O$ до синьої точки дорівнює $\frac{1}{4}$, а до червоної – $\frac{2}{3}$. Такому станові системи відповідає фазова точка з координатами $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$ (рис. 5).

Припустимо тепер, що синя точка увесь час лишається на місці на відстані $\frac{1}{2}$ по колу від точки $O$, а червона точка рівномірно рухається. Можливі стани цієї системи зображають ті і тільки ті фазові точки, перші координати яких дорівнюють $\frac{1}{2}$. Отже, фазовою кривою є відрізок, що сполучає точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ та $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (рис. 6).

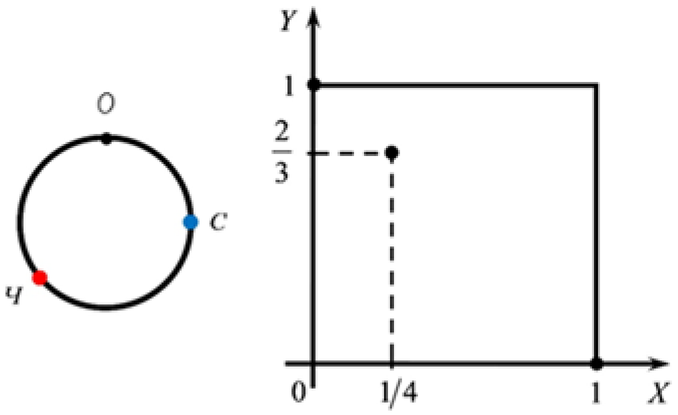


Рис. 5. Стан системи та його фазова точка-відповідник

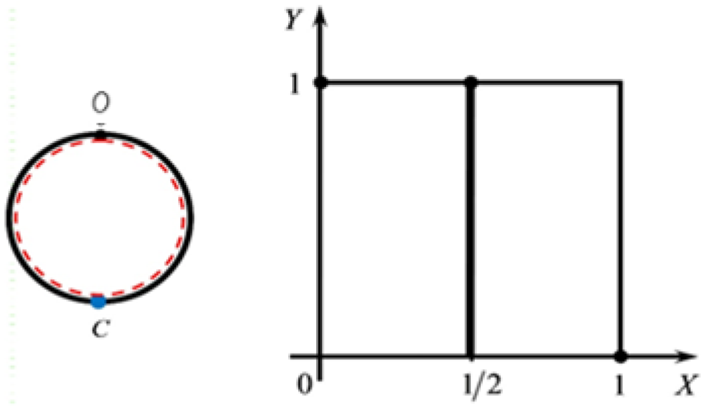


Рис. 6. Рух точок і відповідна фазова крива

Нерідко одне лиш використання поняття фазового простору уможливлює ефектно розв'язати порівняно непросту задачу. З другого боку, належним чином дібрані задачі висвітлюють сутність цього важливого поняття, сприяючи його правильному усвідомленню і засвоєнню. У цій роботі наведемо три такі задачі.

Перша з них описана відомим математиком В.І. Арнольдом у його монографії «Ordinary Differential Equations».

**Задача 1.** *Два міста $A$ і $B$ сполучені двома дорогами. Якби з одного міста в друге виїхали два велосипедисти, велосипеди яких зв'язані мотузкою завдовжки $L$, то вони змогли б проїхати увесь шлях, не розірвавши мотузки.*

*Припустимо, що цими дорогами рухаються назустріч однин одному два вози завширшки $L$ кожен (рис. 7). Чи зможуть вони розминутися, не доторкнувшись один одного?*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

*Розв'язання*. Хай на площині $XOY$ (рис. 8) абсциси точок означають частку відстані від міста $A$ до об'єкта, що рухається першою дорогою, а ординати точок – частку відстані від міста $A$ до об'єкта, що рухається другою дорогою. Тоді будь-яка пара чисел $(x, y)$, кожне з яких не менше від нуля і не більше $1$, буде характеризувати певне положення двох об'єктів на дорогах. Геометричним образом усіх точок з такими координатами є квадрат зі стороною $1$ (рис. 8). Цей квадрат і є фазовим простором, а його точки – фазовими точками.

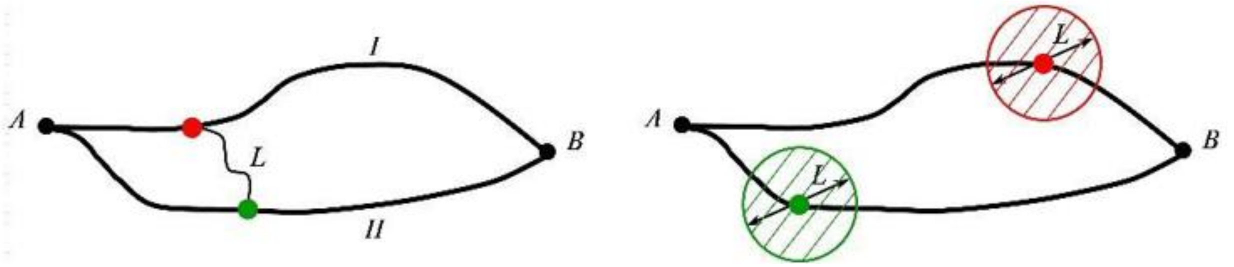


Рис. 7. Рух велосипедистів і возів

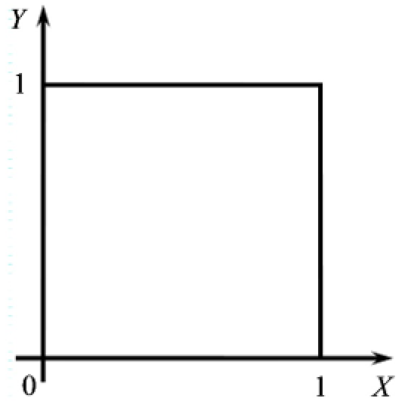


Рис. 8. Фазовий простір руху дорогами I і II

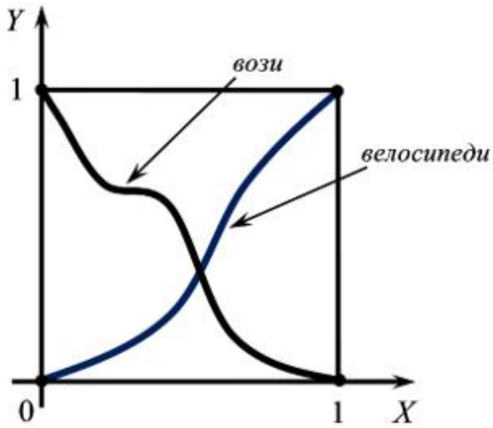


Рис. 9. Фазові криві руху велосипедистів і возів

Початковому положенню возів відповідає фазова точка з координатами $(0,1)$, а кінцевому – $(1,0)$ (чи навпаки, що несуттєво). Рух возів зобразить фазова крива, що сполучає ці дві точки неперервною лінією. Рух двох велосипедистів – фазова крива, що сполучає неперервною лінією точки $(0,0)$ і $(1,1)$ (рис. 9). Зрозуміло, що ці криві принаймні один раз перетнуться. Точка їх перетину відповідає такому положенню возів, у якому були в деякі моменти велосипедисти. Але в такій ситуації відстань між серединами возів не може бути більшою від $L$.

*Відповідь*: Вози не зможуть розминутися, не доторкнувшись один одного.

Застосувавши поняття фазового простору, можна дістати наочний розв'язок цікавої задачі, яка свого часу пропонувалася на одній з Київських олімпіад.

**Задача 2.** *Є годинник, у якого годинна та хвилинна стрілки абсолютно однакові. За рухом стрілок спостерігати не можна, але можна в будь-який момент точно визначити їх положення. Скільки разів протягом доби ми не зможемо сказати котра година?*

*Розв'язання*. Досить визначити кількість таких моментів від $0$ год $00$ хв до $12$ год $00$ хв.

Ототожнимо циферблат годинника з колом завдовжки $1$. Тоді рух годинникових стрілок – це рух двох точок (кінців стрілок) по цьому колу. В прикладі 2 вже було описано фазовий простір такої системи. Його розгортка – квадрат зі стороною $1$ (рис. 10). Вершину квадрата, яка збігається з початком координат і відповідає точці $0$ на колі, ототожнимо з точкою $12$ на годиннику. Позначимо буквою $p$ координату годинної стрілки, а буквою $q$ – хвилинної. Будь-якому положенню стрілок годинника відповідатиме точка $(p,q)$ у фазовому просторі. Наприклад, коли годинник показує $8$ год $20$ хв, фазова точка має координати $\left(\frac{25}{36},\frac{1}{3}\right)$. Справді, о $8$ год $20$ хв довжина дуги від точки $0$ до кінця хвилинної стрілки дорівнює $\frac{1}{3}$, а до кінця годинної

$$8\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}=\frac{25}{36}.$$

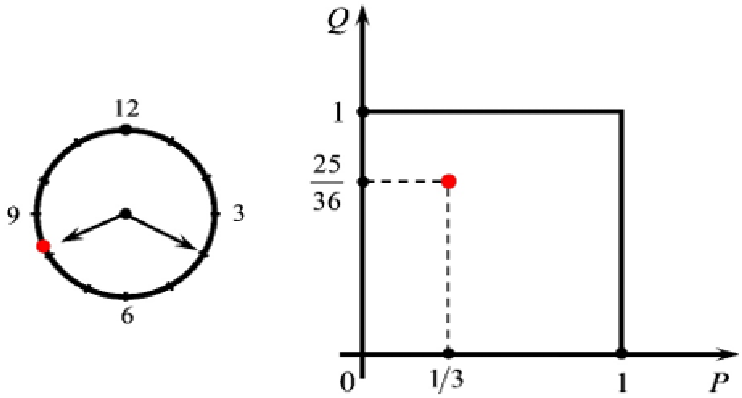


Рис. 10. Фазовий простір положень годинникових стрілок

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Навпаки неправильно: не кожній точці фазового простору відповідає певне положення стрілок годинника. Такою є, наприклад, точка $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$ (справді, коли годинна стрілка показує першу годину, то хвилинна повинна вказувати на точку $O$).

З'ясуємо, як пов'язані між собою координати $p$ і $q$.

Хвилинна стрілка рухається у $12$ разів швидше за годинну. Якщо вважати початком руху $0$ год $00$ хв, то за першу годину $p$ і $q$ змінюватимуться в таких межах:

$$0 \le p \le \frac{1}{12}, \qquad 0 \le q \le 1;$$

за другу годину:

$$\frac{1}{12} \le p \le \frac{2}{12}, \qquad 0 \le q \le 1;$$

і т.д. за $k+1$-шу годину:

$$\frac{k}{12} \le p \le \frac{k+1}{12}, \qquad 0 \le q \le 1, \qquad k = 0,1,2,\dots,11.$$

Коли хвилинна стрілка описує дугу завдовжки $q$, годинна – дугу завдовжки $\frac{1}{12}q$.

Рух стрілок між $k$-ю та $k+1$-ю годинами відбуватиметься за законом:

$$p = \frac{k}{12} + \frac{1}{12}q.$$

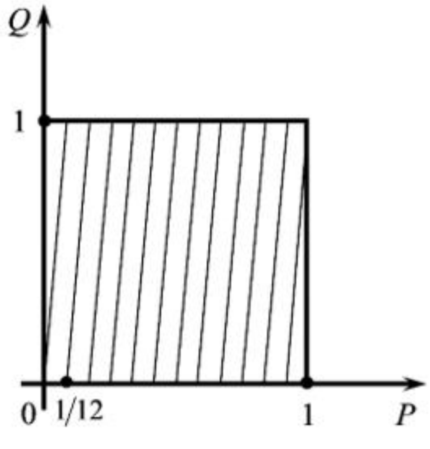


Рис. 11. Фазова крива руху стрілок ($p$ – години, $q$ – хвилини)

Звідси маємо: $q = 12p - k$, $k = 0,1,2,\dots,11$. Окрім того: $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$. Отже, фазова точка опише відрізки прямих $q = 12p - k, k = 0,1,2,\dots,11$, які належать квадрату $\{(p,q): 0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1\}$ (рис. 11). На торі ці відрізки зімкнуться в одну лінію.

Повернімося тепер до нашого годинника. Його стрілки однакові, отже, щоб визначити час нам треба прийняти одну з них за годинну, а другу – за хвилинну.

Припустимо, що ми це зробили. Тоді, як було описано вище, фазова точка, відображаючи рух стрілок, опише у фазовому просторі відрізки, зображені на рисунку 11.

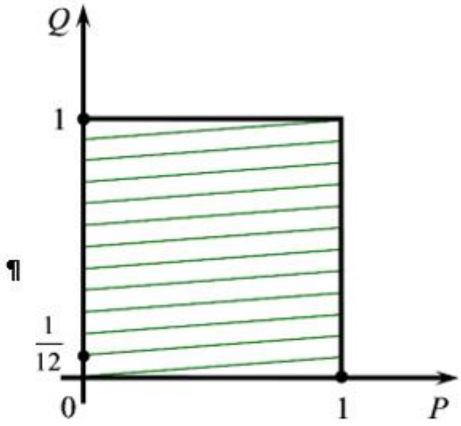


Рис. 12. Фазова крива руху стрілок ($p$ – хвилини, $q$ – години)

Оскільки годинну і хвилинну стрілки обирали довільним чином, то можемо тепер поміняти їх місцями. Тоді у фазовому просторі треба інакше інтерпретувати осі координат. Фазова крива при цьому набуде вигляду, зображеному на рисунку 12. Накладемо один на одний рисунки 11 і 12 (рис. 13). Точки перетину фазових кривих мають ту властивість, що відображають можливе положення стрілок годинника при будь-якій з двох інтерпретацій. (Розглянемо, наприклад, точку $A$. Для її координат $(s, l)$ виконуються нерівності

$$\frac{9}{12} \leq s \leq \frac{10}{12}, \qquad \frac{1}{12} \leq l \leq \frac{2}{12}.$$

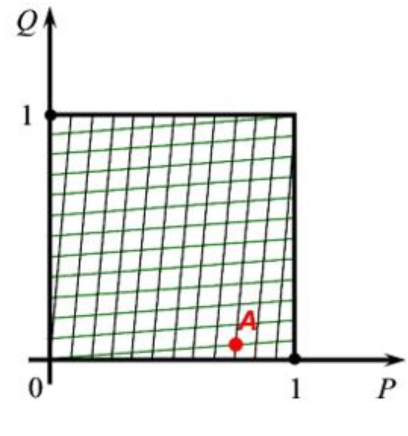


Рис. 13. У точках перетину стрілки інтерпретуються довільно

Отже, відповідне положення стрілок на годиннику буде приблизно таким, як на рис. 14. Очевидно, що у такому випадку не можна визначити час, бо кожну зі стрілок

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

можемо розглядати і як годинну, і як хвилинну). Таких точок буде $12 \cdot 12 = 144$. Від цього числа треба відняти кількість тих точок, що лежать на діагоналі квадрата: $p = q$. Їх $12$. У них обидві координати однакові. У такі моменти на годиннику обидві стрілки зливаються в одну і їх інтерпретація не грає ролі.

Таким чином, за період від $0$ год $00$ хв до $12$ год $00$ хв ми не зможемо визначити час $144 - 12 = 132$ рази, а протягом доби $132 \cdot 2 = 264$ рази.

*Відповідь*: $264$.

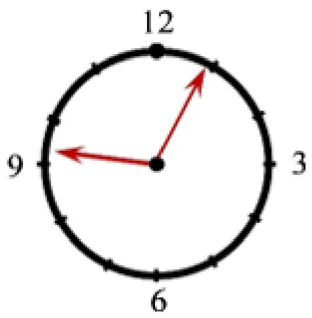


Рис. 14. Один з варіантів довільної інтерпретації

**Задача 3.** *Скільки разів на добу стрілки годинника взаємно перпендикулярні?*

*Розв'язання*. Знову трактуємо дві стрілки годинника як дві точки на одиничному колі. Фазову криву цієї системи зображено на рисунку 10. Тепер будуємо фазову криву системи двох точок на одиничному колі за умови, що вони рухаються по колу так, що відстань між ними лишається незмінною і дорівнює $\frac{1}{4}$ (умова перпендикулярності).

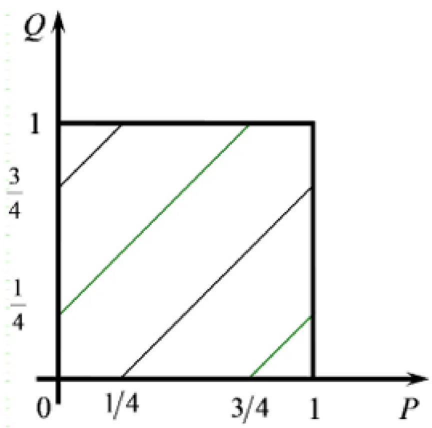


Рис. 15. Дві точки кола на сталій відстані

Координати $p$ і $q$ таких точок пов'язані одним із співвідношень: $p = q + \frac{1}{4}$ (mod $1$) або $p = q - \frac{1}{4}$ (mod $1$).

Отже, фазова крива цієї системи складена з двох замкнутих обмоток тора. Її «плоску розгортку» зображено на рисунку 15. Сумістивши рисунки 11 та 15, дістанемо рис. 16. Він і дає відповідь на запитання задачі.

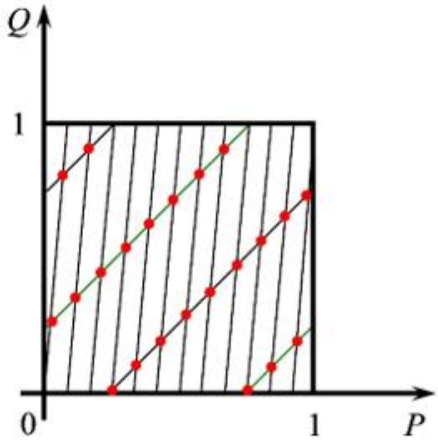


Рис. 16. Фазові точки взаємної перпендикулярності стрілок

Точки перетину двох фазових кривих (на рис. 16 вони відзначені кружечками) і тільки вони означають взаємну перпендикулярність стрілок годинника. Отже, протягом пів доби таких моментів на годиннику буде $22$, а протягом доби – $44$.

*Відповідь*: $44$.

## 3. Висновки

У процесі навчання математики важливою є прикладна спрямованість курсу. Тому необхідно якомога більше розглядати задачі, котрі розкривають доцільність введення тих чи інших понять та можливість їх практичного застосування. Наведені у роботі приклади і задачі покликані допомогти у цьому питанні.

**Список використаних джерел**

Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984 – 1993 рр. Збірник задач. Київ. «Либідь» 1993.

Arnold V. I. (1988). Geometrical Methods In The Theory Of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag. 351 p.

Arnold V. I. (1978). Ordinary Differential Equations, The MIT Press. 280 p.

*Отримано редакцією журналу: 26.01.2025*
*Прорецензовано: 15.02.2025*
*Схвалено до друку: 10.06.2025*

**Oksana VYSHENSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.**
**ORCID ID: 0000-0002-3360-8552**
**e-mail: oksana.vyshenska@gmail.com**
**National Transport University, Kyiv, Ukraine**

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

**Liudmila SHEVCHUK, Ph.D (Engin), Assoc. prof.**
**ORCID ID: 0000-0002-5748-9527**
**e-mail: ludmilashevchuk25@gmail.com**
**National Transport University, Kyiv, Ukraine**

# PHASE SPACE METHOD IN PROBLEMS OF TWO POINT MOTION

***Abstract.*** *One of the goals of mathematical education in general is the ability to choose a successful mathematical method for solving problems. Describing the states of a certain process as points in a phase space can be useful. The article solves three interesting problems using a single method based on the concept of phase space. It shows that this method allows one to construct effective, clear, and visual solutions.*

***Keywords:*** *phase space; phase point; phase curve; phase space of the system.*