Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.711
MSC 97N20, 62G05

GUARANTEED ROOT MEAN SQUARE ESTIMATES OF OBSERVATIONS WITH UNKNOWN MATRICES

O. G. Nakonechnyi, G. I. Kudin, P. M. Zinko, T. P. Zinko

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, gkudin@ukr.net, petro.zinko@gmail.com, taras.zinko@gmail.com

ГАРАНТОВАНІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОЦІНКИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ІЗ НЕВІДОМИМИ МАТРИЦЯМИ

О. Г. Наконечний, Г. І. Кудін, П. М. Зінько, Т. П. Зінько

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, gkudin@ukr.net, petro.zinko@gmail.com, taras.zinko@gmail.com

Abstract. The problems of guaranteed mean square estimation of unknown rectangular matrices based on observations of linear functions from random matrices with random errors are considered in the paper. Asymptotic distributions of guaranteed errors and guaranteed estimates are obtained in the case of small perturbations of the matrices. A test example of the asymptotic distribution is given.
Keywords: linear estimation, rms guaranteed estimate, estimation error, quasi-minimax guaranteed estimate, perturbed observation matrix, correlation matrix, operator equation, small parameter, statistical uncertainty.

Анотація. В роботі розглянуто задачі гарантованого середньоквадратичного оцінювання невідомих прямокутних матриць за спостереженнями лінійних функцій від випадкових матриць з випадковими похибками. У випадку малих збурень матриць одержані асимптотичні розклади гарантованих похибок та гарантованих оцінок. Наводиться тестовий приклад асимптотичного розкладу.
Ключові слова: лінійне оцінювання, гарантована середньоквадратична оцінка, похибка оцінки, квазімінімаксна гарантована оцінка, збурена матриця спостережень, кореляційна матриця, операторне рівняння, малий параметр, статистична невизначеність.

Вступ

Задачі оцінювання невідомих параметрів за результатами спостережень досліджувались в роботах багатьох авторів [1–9]. Задачам оцінювання параметрів в умовах невизначеності присвячено порівняно мало робіт.

Проблеми оцінювання матричних параметрів за результатами спостережень мають свої особливості. Гарантованому підходу до оцінки таких параметрів присвячені наші роботи [10–14].

У даній статті отримана гарантована средньоквадратична похибка оцінок лінійних операторів у припущенні, що невідома матриця – це реалізація випадкової матриці з кореляційним оператором, який визначається зі спеціального операторного співвідношення й належить обмеженій множині. Передбачається, що похибка спостережень має нульове середнє значення, а кореляційна матриця невідома й може належати одній із двох обмежених множин. Наводиться гарантована средньоквадратична похибка оцінки, представленої вектором.

У якості тестового прикладу отримані гарантовані середньоквадратичні похибки оцінки двох наборів параметрів невідомого вектора для одного з варіантів похибок спостережень із урахуванням малих збурень відомих матриць моделі спостереження.

1. Постановка задачі лінійного оцінювання спостережень

Нехай спостерігаються скалярні величини:

$$y_k = sp(XA_k^T) + \eta_k,\ k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $X \in H_{m\times n}$ — невідома матриця; $A_k \in H_{m\times n},\ k = \overline{1, N}$ — відомі матриці; $H_{m\times n}$ — простір матриць розмірності $m \times n$; $sp\,(W)$ – слід квадратної матриці W; $sp(XA_k^T) \triangleq \langle X, A_k\rangle$ — скалярний добуток матриць; T — символ транспонування матриці; $\eta_k,\ k = \overline{1, N}$ — послідовність випадкових величин.

Вводяться лінійний оператор $\wp$, який діє з векторного простору R^N в простір матриць $H_{m\times n}$ і лінійний оператор $\wp^*$, спряжений до оператора $\wp$:

$$\wp x \triangleq \sum_{k=1}^{N} A_k x_k = X,\ x_k \in R^1,\ k = \overline{1, N},\ \ X \in H_{m\times n},$$

$$\wp^* X \equiv\ (sp(X^T A_1), ..., sp(X^T A_N))^T;$$

а також вектори $y = (y_1, ..., y_N)^T$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_N)^T,\ x = (x_1, ..., x_N)^T$.

Очевидно, що спостереження (1) у векторній формі представляються в такому вигляді

$$y = \wp^* X + \eta. \tag{2}$$

Передбачається, що середнє значення випадкового вектора $\eta \in\ R^N$ — нуль-вектор, тобто $E\eta = 0$ (E — символ математичного сподівання), а кореляційна матриця $R =\ E\eta\eta^T$ невідома й належить обмеженим множинам G_2 або G_3 :

$$G_2 = \{R : sp(R - R_0)^2 \le q^2\},\quad G_3 = \{R : sp(Q_2 R) \le q^2\}, \tag{3}$$

де $R_0 = (r_{kj}^{(0)})_{k,j=\overline{1,N}}$ — відома симетрична від'ємно визначена матриця, q^2 — відоме додатне дійсне число, $Q_2 \in H_{N\times N}$ — відома симетрична додатно-визначена матриця.

Уводиться лінійний оператор L, що діє із простору $H_{m\times n}$ в простір R^s:

$$LX = (\langle V_1, X\rangle, ..., \langle V_s, X\rangle)^T,$$

де $V_p,\ p=\overline{1,s}$ — задані матриці.

Передбачається далі, що невідома матриця X — реалізація випадкової матриці із середнім значенням X_0 і кореляційним оператором R_1, який визначається зі співвідношення:

$$\langle R_1 Z_1, Z_2\rangle_1 = E(sp((X-X_0)Z_1^T)sp((X-X_0)Z_2^T)),$$

де $X_0 = EX$, $Z_1,\ Z_2 \in H_{m\times n}$ — довільні матриці.

Якщо R_1, R_2 — кореляційні оператори, то їх скалярний добуток задається виразом:

$$\langle R_1, R_2\rangle_2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} r_{i,j,k,l}^{(1)} r_{i,j,k,l}^{(2)},$$

$$r_{i,j,k,l}^{(p)} = \langle R_p E_{i,j}, E_{k,l}\rangle_1,\ \ i,j,k,l \in \overline{1,N},\ \ p=1,2;$$

де $E_{i,j}$ — ортонормований базис в $H_{m\times n}$, $\langle R_1, R_2\rangle_2$ — скалярний добуток операторів.

Також передбачається, що кореляційний оператор R_1 невідомий і належить множині $G(R_1)$:

$$G(R_1) \triangleq \{R_1 : \left\langle (R_1 - R_1^{(0)}), (R_1 - R_1^{(0)}) \right\rangle_2 \le q_1^2\},$$

де $R_1^{(0)}$ — відомий кореляційний оператор, q_1^2 — відоме додатне число.

Не обмежуючи загальності, надалі передбачається, що $X_0 = 0$.

2. Розв'язок задачі лінійного оцінювання

Означення 1. Лінійною оцінкою вектора $L\,X$ називається вектор $\widehat{LX}$ вигляду

$$\widehat{LX} \triangleq Uy + c = \sum_{k=1}^{N} u^k y_k + c,$$

де $u^k \in R^s,\ \ k=\overline{1,N}$; U — лінійний оператор, що відображає векторний простір R^N у простір R^s; вектор $c \in R^s$.

Уводяться вектори $u_{(p)} = \left(u_p^1, u_p^2, ..., u_p^N\right)^T,\ p=\overline{1,s}$, де u_p^k — p-а компонента вектора $u^k,\ k\in\overline{1,N}$.

Означення 2. Гарантованою середньоквадратичною похибкою оцінки $\widehat{LX}$ називається величина

$$\sigma_i(U,c) = \left\{ \max_{G(R_1),G_i} E\left\|\widehat{LX} - L\,X\right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},\quad i=2,3, \tag{4}$$

де $\left\|\widehat{LX} - L\,X\right\|^2 = (\,(\widehat{LX} - L\,X)^T(\widehat{LX} - L\,X)).$

Означення 3. Оцінка $\widetilde{LX} = \tilde{U}^{(i)}y + \tilde{c}^{(i)}$, для якої значення $\tilde{U}^{(i)}, \tilde{c}^{(i)},\ i = 2, 3$ визначаються з умов:

$$\tilde{U}^{(i)}, \tilde{c}^{(i)} \in Arg \min_{U,\, c} \sigma_i(U,\, c), \ \ i = 2, 3,$$

називається гарантованою середньоквадратичною оцінкою.

Надалі припускаємо, що $c = 0$.

Твердження 1. *Нехай $R_1 \in G(R_1)$, кореляційна матриця $R = E\eta\eta^T$ належить множинам G_2 або G_3, а X й η не корельовані. Тоді при $i = 2$ або $i = 3$ мають місце рівності*

$$\sigma_i^2(U, c) = \max_{G(R_1), G_i} E\left\|\hat{L}X - L\,X\right\|^2 = J_1(U^{(i)}) + J_i(U^{(i)}),$$

$$\hat{L}X = U^{(i)}y = ((u_{(1)}^{(i)}, y), ..., (u_{(s)}^{(i)}, y))^T,$$

$$J_1(U^{(i)}) = \sum_{p=1}^{s} sp(R_1^{(0)} Z_p^{(i)} Z_p^{(i)T}) + q_1^2(\sum_{p,j=1}^{s} sp^2(Z_p^{(i)} Z_j^{(i)T}))^{\frac{1}{2}},$$

$$Z_p^{(i)} = V_p - \rho u_{(p)}^{(i)}, p = \overline{1, s},$$

$$J_2(U^{(2)}) = \sum_{p=1}^{s}(Ru_{(p)}^{(2)},\, u_{(p)}^{(2)}) + q^2\{\sum_{p,j=1}^{s}(u_{(p)}^{(2)},\, u_{(j)}^{(2)})^2\}^{\frac{1}{2}},$$

$$J_3(U^{(3)}) = q^2\lambda_{\max}\,(D_1),\ D_1 = (Q_2^{-1}u_{(p)}^{(3)},\, u_{(j)}^{(3)})_{p,j=\overline{1,s}},$$

де $(u_{(p)}^{(i)}, y),\ \ i = 2, 3,\ \ p = \overline{1, s}$ *– скалярний добуток векторів.*

Доведення. Оскільки

$$\left\|\hat{L}X - L\,X\right\|^2 = \sum_{p=1}^{s}(\langle V_p, X\rangle - (u_{(p)}^{(i)},\, y))^2 =$$

$$= \sum_{\mathrm{p}=1}^{s}(\langle V_{\mathrm{p}}, X\rangle - (u_{(p)}^{(i)},\, \rho^*\, X) - (u_{(p)}^{(i)},\, \eta))^2 =$$

$$= \sum_{\mathrm{p}=1}^{s}(\left\langle V_{\mathrm{p}} - \rho u_{(p)}^{(i)},\ X\right\rangle - (u_{(p)}^{(i)},\, \eta))^2,$$

то, враховуючи, що $E\,(\,\langle Z_p, X\rangle\ \ (u_{(p)}^{(i)}, \eta)) = 0$, одержимо

$$E\left\|\hat{L}X - L\,X\right\|^2 = \sum_{\mathrm{p}=1}^{s} E\,\langle \mathrm{Z_p}, X\rangle^2 + \sum_{\mathrm{p}=1}^{s} E(u_{(p)}^{(i)},\, \eta)^2.$$

Використовуючи рівності

$$E\,\langle Z_p, X\rangle^2 = \langle R_1, Z_p \otimes\ Z_p\rangle_2 =\ \langle R_1 Z_p, Z_p\rangle_1\,,\ p = \overline{1, s}$$

(тут $Z_p \otimes Z_p$ — тензорний добуток матриць), і застосовуючи нерівності Коші-Буняковского у відповідних просторах, можна записати такі співвідношення:

$$\max_{G(R_1)} \left\langle R_1, \sum_{p=1}^{s} Z_p \otimes Z_p \right\rangle_2 = \left\langle R_1^{(0)}, \sum_{p=1}^{s} Z_p \otimes Z_p \right\rangle_2 +$$

$$+q_1^2 \left\langle \sum_{p=1}^{s} Z_p \otimes Z_p, \sum_{p=1}^{s} Z_p \otimes Z_p \right\rangle_2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{p=1}^{s} \left\langle R_1^{(0)} Z_p,\, Z_p \right\rangle_1 + q_1^2 \sum_{p,j=1}^{s} \langle Z_p \otimes Z_p, Z_j \otimes Z_j \rangle_2^{\frac{1}{2}},$$

де $\langle Z_p \otimes Z_p, Z_j \otimes Z_j \rangle_2 = \langle Z_p, Z_j \rangle^2 = sp^2(Z_p Z_j^T)$, $p, j = \overline{1, s}$.

У підсумку одержуємо необхідну формулу для $J_1(U^{(i)})$, $i = 2, 3$.

Оскільки виконуються рівності

$$E(u_{(p)}, \eta)^2 = (Ru_{(p)}^{(2)}, u_{(p)}^{(2)}) = sp(Ru_{(p)}^{(2)} u_{(p)}^{(2)T}) = \left(R, u_{(p)}^{(2)} u_{(p)}^{(2)T}\right), \quad p = \overline{1, s},$$

то аналогічні перетворення дозволяють отримати необхідний вираз для $J_2(U^{(2)})$.

Зі співвідношень:

$$\max_{G_3} \sum_{p=1}^{s} E(u_{(p)}^{(3)}, \eta)^2 = \max_{b \in \bar{G}_3} \sum_{p=1}^{s} (u_{(p)}^{(3)}, b)^2 = \max_{|\alpha|=1} \max_{b \in \bar{G}_3} (\sum_{p=1}^{s} \alpha_p u_{(p)}^{(3)}, b)^2 =$$

$$= \max_{|\alpha|=1} q^2 \sum_{p,j=1}^{s} (Q_2^{-1} u_{(p)}^{(3)}, u_{(j)}^{(3)}) \alpha_p \alpha_j = q^2 \lambda_{\max}(D_1),$$

де $\bar{G}_3 = \{b : (Q_2 b, b) \le q^2\}$, випливає вираз для $J_3(U^{(3)})$. □

Наслідок 1. *Нехай* $s = 1$. *Тоді:*

$$\begin{gathered} \sigma_i^2(u_{(1)}) = \max_{G(R), G_i} E \left| (V_1, X) - (u_{(1)}^{(i)}, y) \right|^2 = \\ = sp(R_1^{(0)} Z_1^{(i)} Z_1^{(i)T}) + q_1^2 sp(Z_1^{(i)} Z_1^{(i)T}) + J_i(u_{(1)}^{(i)}), \quad i = 2, 3, \end{gathered} \tag{5}$$

де $J_2(u_{(1)}^{(2)}) = (Ru_{(1)}^{(2)}, u_{(1)}^{(2)}) + q^2(u_{(1)}^{(2)}, u_{(1)}^{(2)})$, $J_3(u_{(1)}^{(3)}) = q^2(Q_2^{-1} u_{(1)}^{(3)}, u_{(1)}^{(3)})$, $Z_1^{(i)} = V_1 - \rho u_{(1)}^{(i)}$, $i = 2, 3$.

Твердження 2. *Нехай виконуються умови:*

$$\hat{u}_{(1)}^{(i)} \in Arg \min_{u_{(1)}^{(i)}} (J_1(u_{(1)}^{(i)}) + J_i(u_{(1)}^{(i)})), \quad i = 2, 3.$$

Тоді

$$\hat{u}_{(1)}^{(i)} = R_i^{-1} \rho^* P_1^{(i)} V_1, \quad P_1^{(i)} = (\bar{R}_1^{-1} + \rho R_i^{-1} \rho^*)^{-1}, \quad i = 2, 3, \tag{6}$$

де $\bar{R}_1 = R_1^{(0)} + q_1^2 \bar{I}, R_2 = R_0 + q^2 I_N, R_3 = q^2 Q_2^{-1}$, $\bar{I}$ *— одиничний оператор,* I_N *— одинична матриця розмірності* $N \times N$*, і при цьому*

$$\sigma_i^2(\hat{u}_{(1)}^{(i)}) = sp(P_1^{(i)} V_1 V_1^T), \quad i = 2, 3.$$

Доведення. Знайдемо $\hat{u}_{(1)}^{(i)}$ при $i = 2$ або $i = 3$ з умов:

$$\frac{d}{d\tau} \sigma_i^2(\hat{u}_{(1)}^{(i)} + \tau v^{(i)}) \,|_{\tau=0} = 0.$$

Тоді маємо $\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sigma_i^2(\hat{u}_{(1)}^{(i)} + \tau v^{(i)}) \,|_{\tau=0} = sp(\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} \tilde{Z}_1^{(i)} T) + (R_i \hat{u}_{(1)}^{(i)}, v^{(i)}) = 0$, $\tilde{Z}_1^{(i)} = -\rho v^{(i)}$.

Звідки випливає, що $\hat{u}_{(1)}^{(i)} = R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)}$.

Враховуючи рівності

$$\hat{Z}_1^{(i)} = V_1 - \rho \hat{u}_{(1)}^{(i)} = V_1 - \rho R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)}, \tag{7}$$

одержимо співвідношення:

$$\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} = P_1^{(i)} V_1, \; \hat{u}_{(1)}^{(i)} = R_i^{-1} \rho^* P_1^{(i)} V_1. \tag{8}$$

Далі відмітимо, що

$$\sigma_i^2(\hat{u}_{(1)}^{(i)}) = sp(\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} \hat{Z}_1^{(i)T}) + (R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)}, \rho^* \bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)}) =$$

$$= sp(\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} V_1^T) - sp(\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} (\rho \hat{u}_{(1)}^{(i)})^T) + (\hat{u}_{(1)}^{(i)}, \rho^* \bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)}) = sp(\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} V_1^T).$$

Оскільки $\bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} = P_1^{(i)} V_1$, то $\sigma_i^2(\hat{u}_{(1)}^{(i)}) = sp(P_1^{(i)} V_1 V_1^T), \quad i = 2, 3.$

□

Зауваження. Для векторів $\hat{u}_{(1)}^{(i)}$, $i = 2, 3$ (формула (8)) можна одержати інше представлення, якщо використати формулу (7):

$$\hat{u}_{(1)}^{(i)} = R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 \hat{Z}_1^{(i)} = R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 (V_1 - \rho \hat{u}_{(1)}^{(i)}) \Rightarrow$$

$$(R_i^{-1} R_i + R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 \rho) \hat{u}_{(1)}^{(i)} = R_i^{-1} \rho^* \bar{R}_1 V_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{(1)}^{(i)} = (R_i + \rho^* \bar{R}_1 \rho)^{-1} \rho^* \bar{R}_1 V_1,$$

$$\hat{u}_{(1)}^{(i)} = P^{(i)} \rho^* \bar{R}_1 V_1, \quad P^{(i)} = (R_i + \rho^* \bar{R}_1 \rho)^{-1}, \; i = 2, 3.$$

Далі передбачається, що $R_1 \in G(R_1)$, кореляційна матриця $R = E\eta\eta^T$ належить множинам G_2 або G_3, X і η не корельовані, параметр $s \geq 1$.

Означення 4. Квазімінімаксною гарантованою оцінкою вектора $LX = (sp(XV_1^T), ..., sp(XV_s^T))^T$ за спостереженнями вектора y вигляду (2), де $V_p, \;\; p = \overline{1, s}$ — відомі лінійно незалежні матриці, назвемо вектор

$$\widetilde{LX} = ((\tilde{u}_{(1)}^{(i)}, y), ..., (\tilde{u}_{(s)}^{(i)}, y))^T,$$

компоненти якого знаходяться із умов:

$$\tilde{u}_{(p)}^{(i)} \in Arg \min_u \sigma_{i,p}^2(u), \quad p = \overline{1, s}, \;\; i = 2, 3,$$

де $\sigma_{i,p}(\tilde{u}) = \left\{ \max\limits_{G(R_1),G_i} E\left\| sp(XV_p^T) - (\tilde{u}, y)\right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad p = \overline{1,s}, \quad i = 2,3.$

Наслідок 2. *Із твердження 2 і зауваження 1 одержуємо такі вирази для векторів* $\tilde{u}_{(p)}^{(i)}$, $p = \overline{1,s}$, $i = 2,3$*:*

$$\begin{gathered} \tilde{u}_{(p)}^{(i)} = P^{(i)}\rho^*\bar{R}_1 V_p = (R_i + \rho^*\bar{R}_1\rho)^{-1}\rho^*\bar{R}_1 V_p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{u}_{(p)}^{(i)} = R_i^{-1}\rho^* P_1^{(i)} V_p = R_i^{-1}\rho^*(\bar{R}_1^{-1} + \rho R_i^{-1}\rho^*)^{-1} V_p. \end{gathered} \tag{9}$$

Зауваження. З першої рівності формули (9) випливає, що вектори $\tilde{u}_{(p)}^{(i)}$, $p = \overline{1,s}$, $i = 2,3$ також можуть бути отримані як розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$R_i\,\tilde{u}_{(p)}^{(i)} = \rho^*\bar{R}_1 V_p, \quad p = \overline{1,s}, \;\; i = 2,3,$$

де $B_i = (R_i + \rho^*\bar{R}_1\rho)$, $i = 2,3$ — матриці розмірності $N \times N$.

3. Використання методу малого параметра

Нехай у моделі спостереження (2) $A_k \in H_{m\times n}$, $k = \overline{1,N}$ — відомі матриці, що залежать від малого параметра $\varepsilon \in R^1$:

$$A_k(\varepsilon) = A_k(0) + \varepsilon A_k(1) + I_{m\times n}o(\varepsilon), \quad k = \overline{1,N}, \tag{10}$$

де $I_{m\times n} \in H_{m\times n}$ — матриця, усі елементи якої рівні одиниці.

Тоді для операторів ρ і ρ^* одержимо розклад:

$$\begin{aligned} \wp(\varepsilon)x &= \wp(0)x + \varepsilon\wp(1)x + I_{m\times n}o(\varepsilon), \;\; x \in R^N, \\ \wp^*(\varepsilon)X &= \wp^*(0)X + \varepsilon\wp^*(1)X + I_{N\times 1}o(\varepsilon), \quad X \in H_{m\times n}, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\wp(0)x \triangleq \sum_{k=1}^{N} A_k(0)x_k, \quad \wp(1)x \triangleq \sum_{k=1}^{N} A_k(1)x_k, \; x_k \in R^1, \; k = \overline{1,N},$$

$$\wp^*(0)X \triangleq (sp(X^T A_1(0)), ..., sp(X^T A_N(0)))^T,$$

$$\wp^*(1)X \triangleq (sp(X^T A_1(1)), ..., sp(X^T A_N(1)))^T.$$

Відмітимо, що в цьому випадку квазімінімаксні оцінки мають вигляд

$$\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)\,y = (\tilde{u}_1^{(i)}(\varepsilon), y), ..., (\tilde{u}_s^{(i)}(\varepsilon), y))^T, \tag{12}$$

де $\tilde{u}_p^{(i)}(\varepsilon)$, $p = \overline{1,s}$; $i = 2,3$ визначаються згідно формул (9) наслідку 2, у яких матриці $A_k(\varepsilon)$, $k = \overline{1,N}$ залежать від малого параметра.

Твердження 3. *Якщо в моделі спостереження* (2) *відомі матриці* $A_k(\varepsilon) \in H_{m\times n}$, $k = \overline{1,N}$ *залежать від малого параметра* $\varepsilon \in R^1$ *і справедливий розклад:*

$$A_k(\varepsilon) = A_k(0) + \varepsilon A_k(1) + I_{m\times n}o(\varepsilon), \quad k = \overline{1,N},$$

причому виконуються умови тверджень 1, 2, то для квазімінімаксних оцінок вектора

$$\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)\,y = (\tilde{u}_{(1)}^{(i)}(\varepsilon), y), ..., (\tilde{u}_{(s)}^{(i)}(\varepsilon), y))^T,$$

$$(\tilde{u}_p^{(i)}(\varepsilon), y) = (\tilde{u}_p^{(i)}(0), y) + \varepsilon(\tilde{u}_p^{(i)}(1), y) + o(\varepsilon), p = \overline{1, s};\ \ i = 2, 3$$

у першому наближенні методу малого параметра мають місце рівності:

$$\tilde{u}_{(p)}^{(i)}(\varepsilon) = \tilde{u}_{(p)}^{(i)}(0) + \varepsilon\tilde{u}_{(p)}^{(i)}(1) + I_{N\times 1}o(\varepsilon), \tag{13}$$

де $\tilde{u}_{(p)}^{(i)}(0) = (\tilde{u}_{(p)1}^{(i)}(0), ..., \tilde{u}_{(p)N}^{(i)}(0))^T$, $\tilde{u}_{(p)k}^{(i)}(0) = \sum_{j=1}^{N} P_{kj}^{(i)}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0))$, $\{P_{kj}^{(i)}(0)\}_{k,j=1}^N = P^{(i)}(0) = (R_i + \rho^*(0)\bar{R}_1\rho(0))^{-1}$,

$$\rho^*(0)\bar{R}_1\rho(0) = \begin{pmatrix} sp(\bar{R}_1 A_1(0) A_1^T(0)) & ... & sp(\bar{R}_1 A_1(0) A_N^T(0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ sp(\bar{R}_1 A_N(0) A_1^T(0)) & ... & sp(\bar{R}_1 A_N(0) A_N^T(0)) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\tilde{u}_{(p)}^{(i)}(1) = (\tilde{u}_{(p)1}^{(i)}(1), ..., \tilde{u}_{(p)N}^{(i)}(1))^T,$$

$$\tilde{u}_{(p)k}^{(i)}(1) = \sum_{j=1}^{N} (P_{kj}^{(i)}(1) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0)) + P_{kj}^{(i)}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(1))),$$

$$\{P_{kj}^{(i)}(1)\}_{k,j=1}^N = P^{(i)}(1) = -(P^{(i)}(0) P P^{(i)}(0)), P = q_1^2(\rho^*(0)\rho(1) + \rho^*(1)\rho(0)) =$$

$$= 2q_1^2 \begin{pmatrix} sp(A_1(1) A_1^T(0)) & ... & sp(A_1(1) A_N^T(0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ sp(A_N(1) A_1^T(0)) & ... & sp(A_N(1) A_N^T(0)) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Згідно формули (9) наслідку 2 вектори $\hat{u}_{(1)}^{(i)}(\varepsilon)$, $i = 2, 3$ мають вигляд:

$$\hat{u}_{(1)}^{(i)}(\varepsilon) = P^{(i)}(\varepsilon)\rho^*(\varepsilon)\bar{R}_1 V_1, \ \ P^{(i)}(\varepsilon) = (R_i + \rho^*(\varepsilon)\bar{R}_1\rho(\varepsilon))^{-1}, \ i = 2, 3.$$

Для асимптотичного представлення матриць $P^{(i)}(\varepsilon)$, $i = 2, 3$ у першому наближенні методу малого параметра справедливі рівності:

$$P^{(i)}(\varepsilon) = (R_i + \rho^*(\varepsilon)\bar{R}_1\rho(\varepsilon))^{-1} = P^{(i)}(0) + \varepsilon P^{(i)}(1) + I_{N\times N}o(\varepsilon), \ i = 2, 3, \tag{15}$$

де нульові наближення визначаються згідно формул:

$$P^{(i)}(0) = (R_i + \rho^*(0)\bar{R}_1\rho(0))^{-1}.$$

Тут доданок $\rho^*(0)\bar{R}_1\rho(0)$ має матричний вигляд (14).

Перші наближення $P^{(i)}(1)$ матриць $P^{(i)}(\varepsilon)$, $i = 2, 3$ також представляються в матричному вигляді:

$$\begin{gathered} P^{(i)}(1) = \left(\frac{dP^{(i)}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = -\left(P^{(i)}(\varepsilon)\left(\frac{d}{d\varepsilon}P^{(i)}{-1}(\varepsilon)\right)P^{(i)}(\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = \\ = -(P^{(i)}(0) P P^{(i)}(0)), \end{gathered} \tag{16}$$

де матриця P визначається формулою:

$$P = \rho^*(0)\bar{R}_1\rho(1) + \rho^*(1)\bar{R}_1\rho(0) =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} sp(\bar{R}_1 A_1(1) A_1^T(0)) & ... & sp(\bar{R}_1 A_1(1) A_N^T(0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ sp(\bar{R}_1 A_N(1) A_1^T(0)) & ... & sp(\bar{R}_1 A_N(1) A_N^T(0)) \end{pmatrix} = \{P_{kj}\}_{k,j=1}^N.$$

Таким чином, можемо записати співвідношення:

$$P^{(i)}(1) = \{P^{(i)}_{kj}(1)\}^N_{k,j=1},$$

де $P^{(i)}_{kj}(1) = \sum_{\mu=1}^N \sum_{l=1}^N P^{(i)}_{(k)l}(0) P_{l\mu} P^{(i)}_{(\mu)j}(0)$, $k, j = \overline{1, N}$, $i = 2, 3$.

Отримані асимптотичні представлення матриць $P^{(i)}(\varepsilon)$, $i = 2, 3$ (формула (15)) дозволяють визначити асимптотичні представлення векторів $\hat{u}^{(i)}_{(1)}(\varepsilon) = P^{(i)}(\varepsilon)\rho^*(\varepsilon)\bar{R}_1 V$, $i = 2, 3$:

$$(P^{(i)}(0) + \varepsilon P^{(i)}(1))(\wp^*(0)\bar{R}_1 V + \varepsilon\wp^*(1)\bar{R}_1 V) + I_{N\times 1} o(\varepsilon) =$$

$$= \tilde{u}^{(i)}_{(p)}(0) + \varepsilon \tilde{u}^{(i)}_{(p)}(1) + I_{N\times 1} o(\varepsilon),$$

де

$$\tilde{u}^{(i)}_{(p)}(0) = P^{(i)}(0)\rho^*(0)\bar{R}_1 V_p = (\tilde{u}^{(i)}_{(p)1}(0), ..., \tilde{u}^{(i)}_{(p)N}(0))^T,$$

$$\tilde{u}^{(i)}_{(p)k}(0) = \sum_{j=1}^N P^{(i)}_{kj}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0)),$$

$$\tilde{u}^{(i)}_{(p)}(1) = P^{(i)}(1)\rho^*(0)\bar{R}_1 V_p + P^{(i)}(0)\rho^*(1)\bar{R}_1 V_p = (\tilde{u}^{(i)}_{(p)1}(1), ..., \tilde{u}^{(i)}_{(p)N}(1))^T,$$

$$\tilde{u}^{(i)}_{(p)k}(1) = \sum_{j=1}^N (P^{(i)}_{kj}(1) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0)) + P^{(i)}_{kj}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(1))).$$

Твердження 3 доведено. □

Твердження 4. *Якщо в моделі спостереження* (2) *відомі матриці* $A_k \in H_{m\times n}$, $k = \overline{1, N}$, *залежать від малого параметра* $\varepsilon \in R^1$ *й справедливе представлення:*

$$A_k(\varepsilon) = A_k(0) + \varepsilon A_k(1) + I_{m\times n} o(\varepsilon), \quad k = \overline{1, N},$$

а також виконуються умови тверджень 1, 2, то для гарантованої середньоквадратичної похибки квазімінімаксної оцінки

$$(\widetilde{LX})(\varepsilon) \equiv \tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)\, y = ((\tilde{u}^{(i)}_{(1)}(\varepsilon), y), ..., (\tilde{u}^{(i)}_{(s)}(\varepsilon), y))^T, \; i = 2, 3$$

у першому наближенні методу малого параметра мають місце рівності:

$$\sigma^2_{i,p}(\tilde{U}^{(i)}) = \max_{G(R_1), G_i} E \left\| \widetilde{LX}(\varepsilon) - L\,X \right\|^2 = J_1(\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)) + J_i(\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)), \qquad (17)$$

де

$$\begin{array}{c} J_1(\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)) = J_1(\tilde{U}^{(i)}(0)) + \varepsilon J_1(\tilde{U}^{(i)}(1)) + o(\varepsilon), \\ J_1(\tilde{U}^{(i)}(0)) = F_{1i}(0) + F_{2i}(0)\; J_1(\tilde{U}^{(i)}(1)) = F_{1i}(1) + F_{2i}(1), \end{array} \qquad (18)$$

$$F_{1i}(0) = \sum_{p=1}^s sp(R_1^{(0)} Z_p^{(i)}(0)\, Z_p^{(i)} T(0)), F_{2i}(0) = q_1^2 (\sum_{p,j=1}^s sp^2(Z_p^{(i)}(0) Z_j^{(i)} T(0)))^{\frac{1}{2}},$$

$$Z_p^{(i)}(0) = V_p - \rho(0)\tilde{u}^{(i)}_{(p)}(0) = V_p - \sum_{k=1}^N A_k(0) (\sum_{j=1}^N P^{(i)}_{kj}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0))),$$

$$Z_p^{(i)}(1) = -\sum_{k=1}^{N} A_k(0)(\sum_{j=1}^{N}(P_{kj}^{(i)}(1)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(0))+P_{kj}^{(i)}(0)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(1)))) -$$

$$-A_k(1)\sum_{j=1}^{N}P_{kj}^{(i)}(0)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(0)),$$

$$F_{1i}(1) = \sum_{p=1}^{s}(sp(R_1^{(0)}Z_p^{(i)}(1)\, Z_p^{(i)}T(0))+sp(R_1^{(0)}Z_p^{(i)}(0)\, Z_p^{(i)}T(1))),$$

$$F_{2i}(1) = q_1^2(\sum_{p,j=1}^{s} sp^2(Z_p^{(i)}(0)Z_j^{(i)}T(0)))^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times 2\sum_{p,j=1}^{s}(sp(Z_p^{(i)}(0)Z_j^{(i)}T(1))\; sp(Z_p^{(i)}(0)Z_j^{(i)}T(0))),$$

$$J_2(\tilde{U}^{(2)}(\varepsilon)) = (F_2^{(1)}(0) + F_2^{(2)}(0)) + \varepsilon(F_2^{(1)}(1) + F_2^{(2)}(1)) + o(\varepsilon), \tag{19}$$

$$F_2^{(1)}(0) = \sum_{p=1}^{s}(R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\, \tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0)),\; F_2^{(2)}(0) = q^2\{\sum_{p,j=1}^{s}(\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\, \tilde{u}_{(j)}^{(2)}(0))^2\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0) = (\tilde{u}_{(p)1}^{(2)}(0), ..., \tilde{u}_{(p)N}^{(2)}(0))^T,\;\; \tilde{u}_{(p)k}^{(2)}(0) = \sum_{j=1}^{N}P_{kj}^{(2)}(0)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(0)),$$

$$F_2^{(1)}(1) = \sum_{p=1}^{s}((R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\, \tilde{u}_{(p)}^{(2)}(1) + (R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(1),\, \tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0)),$$

$$F_2^{(2)}(1) = q^2 2\{\sum_{p,j=1}^{s}(\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\, \tilde{u}_{(j)}^{(2)}(0))^2\}^{\frac{1}{2}}\sum_{p,j=1}^{s}((\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\, \tilde{u}_{(j)}^{(2)}(1))(\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\, \tilde{u}_{(j)}^{(2)}(0)),$$

$$\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(1) = (\tilde{u}_{(p)1}^{(2)}(1), ..., \tilde{u}_{(p)N}^{(2)}(1))^T,$$

$$\tilde{u}_{(p)k}^{(2)}(1) = \sum_{j=1}^{N}(P_{kj}^{(2)}(1)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(0)) + P_{kj}^{(2)}(0)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(1))),$$

$$J_3(\tilde{U}^{(3)}(\varepsilon)) = q^2\lambda_{\max}(D(\varepsilon)), \tag{20}$$

$$D(\varepsilon) \equiv (Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(\varepsilon),\, \tilde{u}_{(j)}^{(3)}(\varepsilon))_{p,j=\overline{1,s}} = D(0) + \varepsilon D(1) + I_{s\times s}o(\varepsilon),$$

$$D(0) \equiv (Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(0),\, \tilde{u}_{(j)}^{(3)}(0))_{p,j=\overline{1,s}},$$

$$\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(0) = (\tilde{u}_{(p)1}^{(3)}(0), ..., \tilde{u}_{(p)N}^{(3)}(0))^T,\;\; \tilde{u}_{(p)k}^{(3)}(0) = \sum_{j=1}^{N}P_{kj}^{(3)}(0)sp(V_p^T\bar{R}_1A_j(0)),$$

$$D(1) = (Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(1),\, \tilde{u}_{(j)}^{(3)}(0))_{p,j=\overline{1,s}} + (Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(0),\, \tilde{u}_{(j)}^{(3)}(1))_{p,j=\overline{1,s}},$$

$$\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(1) = (\tilde{u}_{(p)1}^{(3)}(1), ..., \tilde{u}_{(p)N}^{(3)}(1))^T,$$

$$\tilde{u}^{(3)}_{(p)k}(1) = \sum_{j=1}^{N} (P^{(3)}_{kj}(1) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0)) + P^{(3)}_{kj}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(1))).$$

Доведення. Згідно твердження 1 при наявності малих збурень відомих матриць моделі спостережень гарантована середньоквадратична похибка оцінки визначається виразом:

$$\sigma_i^2(\tilde{U}(\varepsilon)) = J_1(\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)) + J_i(\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)), \tag{21}$$

де

$$J_1(\tilde{U}^{(i)}(\varepsilon)) = \sum_{p=1}^{s} sp(R_1^{(0)} Z_p^{(i)}(\varepsilon) Z_p^{(i)} T(\varepsilon)) \, + q_1^2 (\sum_{p,j=1}^{s} sp^2(Z_p^{(i)}(\varepsilon) Z_j^{(i)} T(\varepsilon)))^{\frac{1}{2}},$$

$$J_2(\tilde{U}^{(2)}(\varepsilon)) = \sum_{p=1}^{s} (R\tilde{u}^{(2)}_{(p)}(\varepsilon),\, \tilde{u}^{(2)}_{(p)}(\varepsilon)) \, + q^2 \{ \sum_{p,j=1}^{s} (\tilde{u}^{(2)}_{(p)}, (\varepsilon)\, \tilde{u}^{(2)}_{(j)}(\varepsilon))^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

$$J_3(\tilde{U}^{(3)}(\varepsilon)) = q^2 \lambda_{\max}(D_1(\varepsilon)),$$

$$D_1(\varepsilon) = (Q_2^{-1} \tilde{u}^{(3)}_{(p)}(\varepsilon),\, \tilde{u}^{(3)}_{(j)}(\varepsilon))_{p,j=\overline{1,s}}, p = \overline{1,s}, \;\; i = 2, 3.$$

Запишемо далі асимптотичні розклади функцій:

$$F_{1i}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{s} sp(R_1^{(0)} Z_p^{(i)}(\varepsilon)\, Z_p^{(i)} T(\varepsilon)) = F_{1i}(0) + \varepsilon F_{1i}(1) + o(\varepsilon), \tag{22}$$

$$F_{2i}(\varepsilon) = q_1^2 (\textstyle\sum_{p,j=1}^{s} sp^2(Z_p^{(i)}(\varepsilon) Z_j^{(i)} T(\varepsilon)))^{\frac{1}{2}} = F_{2i}(0)) + \varepsilon F_{2i}(1) + o(\varepsilon), \tag{23}$$

$$F_2^{(1)}(\varepsilon) = \sum_{p=1}^{s} (R\tilde{u}^{(2)}_{(p)}(\varepsilon),\, \tilde{u}^{(2)}_{(p)}(\varepsilon)),$$

$$F_2^{(2)}(\varepsilon) = q^2 \{ \sum_{p,j=1}^{s} (\tilde{u}^{(2)}_{(p)}, (\varepsilon)\, \tilde{u}^{(2)}_{(j)}(\varepsilon))^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

а також матриць

$$Z_p^{(i)}(\varepsilon) = V_p - \rho(\varepsilon) \tilde{u}^{(i)}_{(p)}(\varepsilon), \tag{24}$$

$$\begin{gathered} D(\varepsilon) \equiv (Q_2^{-1} \tilde{u}^{(3)}_{(p)}(\varepsilon),\, \tilde{u}^{(3)}_{(j)}(\varepsilon))_{p,j=\overline{1,s}} = D(0) + \varepsilon D(1) + I_{s \times s} o(\varepsilon), \\ p = \overline{1,s}; \;\; i = 2, 3. \end{gathered} \tag{25}$$

Використовуючи асимптотичний розклад для векторів $\tilde{u}^{(i)}_{(p)}(\varepsilon)$, $p = \overline{1,s}$; $i = 2, 3$, які отримано у твердженні 3, одержимо наступні співвідношення:

$$Z_p^{(i)}(\varepsilon) = V_p - \rho(\varepsilon) \tilde{u}^{(i)}_{(p)}(\varepsilon) = Z_p^{(i)}(0) + \varepsilon \; Z_p^{(i)}(1) + I_{m \times n} o(\varepsilon),$$

$$Z_p^{(i)}(0) = V_p - \rho(0) \tilde{u}^{(i)}_{(p)}(0) = V_p - \sum_{k=1}^{N} A_k(\,0\,) \, (\sum_{j=1}^{N} P^{(i)}_{kj}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0))),$$

$$Z_p^{(i)}(1) = - \sum_{k=1}^{N} (A_k(\,0\,)\, \tilde{u}^{(i)}_{(p)k}(1) + A_k(\,1\,) \, (\sum_{j=1}^{N} P^{(i)}_{kj}(0) sp(V_p^T \bar{R}_1 A_j(0)))).$$

$$F_{1i}(1)=\sum_{p=1}^{s}(sp(R_1^{(0)}Z_p^{(i)}(1)\,Z_p^{(i)}T(0))+sp(R_1^{(0)}Z_p^{(i)}(0)\,Z_p^{(i)}T(1))),$$

$$F_{2i}(1)=q_1^2(\sum_{p,j=1}^{s}sp^2(Z_p^{(i)}(0)Z_j^{(i)}T(0)))^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times 2\sum_{p,j=1}^{s}(sp(Z_p^{(i)}(0)Z_j^{(i)}T(1))\;sp(Z_p^{(i)}(0)Z_j^{(i)}T(0))),$$

$$F_2^{(1)}(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{s}(R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(\varepsilon),\,\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(\varepsilon))\;=F_2^{(1)}(0)+\varepsilon F_2^{(1)}(1)+o(\varepsilon),$$

$$F_2^{(2)}(\varepsilon)=q^2[\sum_{p,j=1}^{s}(\tilde{u}_p^{(2)}(\varepsilon),\,\tilde{u}_j^{(2)}(\varepsilon))^2]^{\frac{1}{2}}=F_2^{(2)}(0)+\varepsilon F_2^{(2)}(1)+o(\varepsilon),$$

$$F_2^{(1)}(0)=\sum_{p=1}^{s}(R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\,\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0)),\;F_2^{(2)}(0)=q^2\{\sum_{p,j=1}^{s}(\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\,\tilde{u}_{(j)}^{(2)}(0))^2\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_2^{(1)}(1)=\sum_{p=1}^{s}((R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\,\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(1)+(R\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(1),\,\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0)),$$

$$F_2^{(2)}(1)=q^2\sum_{p,j=1}^{s}((\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(0),\,\tilde{u}_{(j)}^{(2)}(1))+(\tilde{u}_{(p)}^{(2)}(1),\,\tilde{u}_{(j)}^{(2)}(0)).$$

$$D(\varepsilon)=(Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(\varepsilon),\,\tilde{u}_{(j)}^{(3)}(\varepsilon))_{p,j=\overline{1,s}}=D(0)+\varepsilon D(1)+I_{s\times s}o(\varepsilon).$$

$$D(0)\equiv(Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(0),\,\tilde{u}_{(j)}^{(3)}(0))_{p,j=\overline{1,s}},$$

$$D(1)=(Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(1),\,\tilde{u}_{(j)}^{(3)}(0))_{p,j=\overline{1,s}}+(Q_2^{-1}\tilde{u}_{(p)}^{(3)}(0),\,\tilde{u}_{(j)}^{(3)}(1))_{p,j=\overline{1,s}}.$$

Твердження 4 доведено. □

Зауваження. Якщо $\lambda_p(0),\;\; p=\overline{1,s}$ — прості власні числа матриці нульового наближення $D(0)$, а $e_{\max}(0)$ — власний вектор максимального власного числа $\lambda_{\max}\,(D(0))$, то має місце формула:

$$J_{33}(\varepsilon)=q^2(\lambda_{\max}\,(D(0))\;+\varepsilon\,(D(1)e_{\max}(0),e_{\max}(0)))+o(\varepsilon)\,.$$

4. Приклад

Нехай спостереження описуються системою лінійних рівностей:

$$y_k=sp(XA_k^T(\varepsilon))+\eta_k,\quad k=\overline{1,N},$$

де $A_k(\varepsilon)=A_k(0)+\varepsilon A_k(1),\quad k=\overline{1,N}$,

$$A_k\,(0)=B_1+kB_2,\quad A_k\,(1)=\begin{pmatrix} c_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad k=\overline{1,N}, \qquad (26)$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

ε — малий параметр; $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ — невідома випадкова матриця; η_k, $k \in \overline{1,N}$ — компоненти випадкового вектора $\eta = (\eta_1, ..., \eta_N)^T$, для якого виконується умови: $E\eta = 0$, $E\eta\eta^T = R$; R — кореляційна матриця, що належить множині G_3 (формула (3), де $Q_2 = I_N$): $\bar{R}_1 = q_1^2 I_2$, $R_3 = q^2 I_2$; випадкові величини X й η не корельовані, I_2 — одинична матриця розмірності 2.

Будемо оцінювати вектор

$$L\,X = (\langle V_1, X\rangle\,, \langle V_2, X\rangle)^T, \tag{27}$$

де V_i, $i = \overline{1,2}$ — задані матриці: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Лінійна оцінка вектора $(x_{11}, x_{22})^T$ представляється у вигляді:

$$\widetilde{LX} = (\tilde{U}^{(3)}(\varepsilon), y) = ((\tilde{u}^{(3)}_{(1)}(\varepsilon), y), (\tilde{u}^{(3)}_{(2)}(\varepsilon), y))^T, \tag{28}$$

де $\tilde{u}^{(3)}_{(1)}(\varepsilon)$, $\tilde{u}^{(3)}_{(2)}(\varepsilon)$ — невідомі вектори.

4.1. Асимптотичний розклад для квазімінімаксних оцінок

Знайдемо в першому наближенні методу малого параметра асимптотичний розклад для квазімінімаксних оцінок:

1) Оскільки

$$\tilde{u}^{(3)}_{(p)}(\varepsilon) = q_1^{-2}\rho^*(\varepsilon)(q_1^{-2}I_2 + q^{-2}\rho(\varepsilon)\,\rho^*(\varepsilon))^{-1}V_p,\ p = 1,\,2,$$

то $\left\langle \widehat{V_p, X} \right\rangle = \left\langle q_1^{-2}\rho^*(\varepsilon)(q_1^{-2}I_2 + q^{-2}\rho(\varepsilon)\,\rho^*(\varepsilon))^{-1}V_p, y\right\rangle =$

$$= \left\langle q_1^{-2}\rho^*(\varepsilon)(q_1^{-2}I_2 + q^{-2}\rho(\varepsilon)\,\rho^*(\varepsilon)^{-1}\rho(\varepsilon)y,\, V_p\right\rangle = \left\langle \hat{X},\, V_p\right\rangle,\ p = 1,\,2.$$

2) Оцінка $\hat{X}$ може бути отримана з умови:

$$\hat{X} \in Arg\min_X\, J(X), \tag{29}$$

де $J(X) = (y - \rho^*(\varepsilon)X,\ y - \rho^*(\varepsilon)X) + \langle X,\, X\rangle$.

Необхідні умови оптимальності матричної функції (29) для різних варіантів збурення матриці X мають вигляд:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(J(\hat{X} + tV))_{t=0} = -(y - \rho^*(\varepsilon)\hat{X},\ \rho^*(\varepsilon)\,V) + \left\langle \hat{X},\, V\right\rangle \equiv 0, \tag{30}$$

де послідовно вважаємо $V = V_p$, $p = 1,\,2$.

Якщо представити оцінку матриці $\hat{X}$ розкладом по малому параметру:

$$\hat{X} = \hat{X}(0) + \varepsilon\hat{X}(1) + o(\varepsilon)I_{2\times 2},$$

то отримані співвідношення визначають системи рівнянь відносно невідомих значень

$$\gamma_p(0) = \left\langle \hat{X}(0),\, V_p\right\rangle,\ \ p = 1, 2$$

у нульовому наближенні і, відповідно, $\gamma_p(1) = \left\langle \hat{X}(1),\, V_p \right\rangle,\ \ p = 1,2$ в першому наближенні.

З врахуванням залежності складових рівності (30) від малого параметра отримаємо такі співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{N}(y_k - \left\langle A_k(0) + \varepsilon A_k(1), \hat{X}(0) \,+ \varepsilon \hat{X}(1) \right\rangle \langle A_k(0) + \varepsilon A_k(1),\, V_p\rangle) =$$

$$= \left\langle \hat{X}(0) + \varepsilon \hat{X}(1),\, V_p \right\rangle + \, o(\varepsilon),\, p = 1,2.$$

Отже, рівняння нульового наближення мають вигляд:

$$\left\langle \hat{X}(0), V_p \right\rangle + \sum_{k=1}^{N} \left\langle A_k(0), \hat{X}(0) \right\rangle \langle A_k(0), V_p\rangle = \sum_{k=1}^{N} y_k \, \langle A_k(0), V_p\rangle \,,\, p = 1,2.$$

Таким чином, враховуючи значення параметрів прикладу, можемо записати наступні рівняння нульового наближення:

$$\begin{cases} (1+N)\gamma_1(0) \ + \ N_2\,\gamma_2\,(0) = \,Y_1\,(0), \\ N_2\,\gamma_1(0) \ + \ (1+\,N_3\,)\gamma_2\,(0) = \,Y_2\,(0), \end{cases} \tag{31}$$

де $Y_1\,(0) \,=\, \sum_{k=1}^{N} y_k,\, Y_2\,(0) \,=\, \sum_{k=1}^{N} k y_k, N_2 \,=\, (N+1)/2,\, N_3 \,=\, N(2N^2 + 3N+1)/6.$

Розв'язок рівнянь (31) має такий вигляд:

$\gamma_1(0) = ((1+\ N_3)Y_1(0) - N_2Y_2(0))/\Delta,\, \gamma_2(0) = ((1+\ N)Y_2(0) - N_2Y_1(0))/\Delta,$ де $\Delta = (1+\ N_3)(1+\ N) - N_2^2.$

Рівняння першого наближення мають вигляд:

$$\sum_{k=1}^{N}(y_k - \left\langle A_k(0), \hat{X}(0) \right\rangle \langle A_k(1), V_p\rangle) -$$

$$-\sum_{k=1}^{N}(\left\langle A_k(0), \hat{X}(1) \right\rangle + \left\langle A_k(1), \hat{X}(0) \right\rangle \langle A_k(0), V_p\rangle) = \left\langle \hat{X}(1), V_p \right\rangle,\, p = 1,2,$$

а, з врахуванням значень параметрів прикладу, рівняння першого наближення такі:

$$\begin{cases} (1+N)\gamma_1(1) \ + \ N_2\,\gamma_2\,(1) = \,Y_1\,(1), \\ N_2\,\gamma_1(0) \ + \ (1+N_3\,)\gamma_2\,(0) = \,Y_2\,(1), \end{cases} \tag{32}$$

де

$$Y_1(1) = \sum_{k=1}^{N} c_k y_k - 2\gamma_1(0) \sum_{k=1}^{N} c_k - \gamma_2(0) \sum_{k=1}^{N} k c_k,\ \ Y_2\,(1) = -\gamma_1(0) \sum_{k=1}^{N} c_k k.$$

Отже, розв'язок рівнянь (32) має вигляд:

$$\gamma_1(1) = ((1+N_3)Y_1(1) - N_2Y_2(1))/\Delta, \gamma_2(1) = ((1+N)Y_2(1)N_2Y_1(1))/\Delta.$$

Остаточно отримуємо, що:

$$\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle = \gamma_1(0) + \varepsilon\gamma_1(1) + o(\varepsilon),$$

де $\gamma_1(0) = ((1 + N(2N^2 + 3N + 1)/6)Y_1(0) - (N(N + 1)/2)Y_2(0))/\Delta$,

$$\gamma_1(1) = (((1 + N(2N^2 + 3N + 1)/6)Y_1(1) - (N(N + 1)/2)Y_2(1))/\Delta,$$

та $\left\langle \overset{\wedge}{V_2, X} \right\rangle = \gamma_2(0) + \varepsilon\gamma_2(1) + o(\varepsilon)$, де $\gamma_2(0) = ((1 + N)Y_2(0) - (N(N + 1)/2)Y_1(0))/\Delta$, $\gamma_2(1) = ((1 + N)Y_2(1) - (N(N + 1)/2)Y_1(1))/\Delta$,

$$Y_1(0) = \sum_{k=1}^{N} y_k, \quad Y_2(0) = \sum_{k=1}^{N} k y_k,$$

$$Y_1(1) = \sum_{k=1}^{N} c_k y_k - 2\gamma_1(0)\sum_{k=1}^{N} c_k - \gamma_2(0)\sum_{k=1}^{N} k c_k, \; Y_2(1) = -\gamma_1(0)\sum_{k=1}^{N} c_k k,$$

$$\Delta = (1 + N(2N^2 + 3N + 1)/6)(1 + N) - (N(N + 1)/2)^2.$$

4.2. Асимптотичні разклади для похибок квазімінімаксних оцінок

Для визначення похибок оцінок $\left\langle \overset{\wedge}{V_p, X} \right\rangle$, $p = 1, 2$ використовуємо результат твердження 2:

$$\sigma_3^2(\hat{u}_{(p)}^{(3)}) = sp(P_1^{(3)}(\varepsilon)V_p V_p^T),$$

де матриці

$$P_1^{(3)}(\varepsilon)V = z_{(p)}(\varepsilon) = (q_1^{-2} I_2 + q^{-2}\rho(\varepsilon)\,\rho^*(\varepsilon))^{-1} V_p, p = 1,\, 2$$

визначаються з систем лінійних рівнянь:

$$(q_1^{-2} I_2 + q^{-2}\rho(\varepsilon)\,\rho^*(\varepsilon))\, z_{(p)}(\varepsilon) = V_p, p = \overline{1, 2.} \tag{33}$$

Отже, похибки оцінок $\left\langle \overset{\wedge}{V_p, X} \right\rangle$, $p = 1, 2$ визначаються формулами:

$$\sigma_3^2(\left\langle \overset{\wedge}{V_p, X} \right\rangle) = \left\langle z_{(p)}(\varepsilon), V_p \right\rangle, \, p = 1, 2. \tag{34}$$

Запишемо розклад $z_{(p)}(\varepsilon)$ за малим параметром ε:

$$z_{(p)}(\varepsilon) = z_{(p)}(0) + \varepsilon z_{(p)}(1) + o(\varepsilon) I_{2\times 2}, p = \overline{1, 2.}$$

4.3. Знаходження похибок оцінок $\left\langle \overset{\wedge}{V_p, X} \right\rangle$, $p = 1, 2$ у нульовому наближенні

Матриці $z_{(p)}(0)$, $p = 1, 2$ визначаються як розв'язки систем лінійних рівнянь:

$$q_1^{-2}\, z_{(p)}(0) + q^{-2} \sum_{k=1}^{N} A_k(0) \left\langle A_k(0),\, z_{(p)}(0) \right\rangle = V_p, p = \overline{1, 2,} \tag{35}$$

які, з врахуванням значень параметрів прикладу схеми спостережень, дозволяють отримати для невідомих матриць $z_{(p)}(0)$, $p = 1, 2$ більш прості системи лінійних матричних рівнянь:

$$q_1^{-2}\begin{pmatrix} z_{11}^{(p)}(0) & z_{12}^{(p)}(0) \\ z_{21}^{(p)}(0) & z_{22}^{(p)}(0) \end{pmatrix} + q^{-2}\sum_{k=1}^{N}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}(z_{11}^{(p)}(0) + kz_{11}^{(p)}(0)) = V_p, \quad p = \overline{1,2}, \tag{36}$$

розв'язки яких можна подати у вигляді співвідношень для елементів невідомих матриць $z_{(p)}(0)$, $p = \overline{1,2}$:

$$\begin{cases} (q_1^{-2} + q^{-2}N)z_{11}^{(1)}(0) + q^{-2}N_2\, z_{22}^{(1)}(0) = 1, \\ q^{-2}N_2\, z_{11}^{(1)}(0) + (q_1^{-2} + q^{-2}N_3)z_{22}^{(1)}(0) = 0, \end{cases} \begin{cases} (q_1^{-2} + q^{-2}N)z_{11}^{(2)}(0) + q^{-2}N_2\, z_{22}^{(2)}(0) = 0, \\ q^{-2}N_2\, z_{11}^{(2)}(0) + (q_1^{-2} + q^{-2}N_3)z_{22}^{(2)}(0) = 1, \end{cases} \tag{37}$$

$$z_{11}^{(1)}(0) = (q_1^{-2} + q^{-2}N_3)/\Delta, \quad z_{22}^{(1)}(0) = -q^{-2}N_2\,/\Delta,$$
$$z_{22}^{(2)}(0) = (q_1^{-2} + q^{-2}N)/\Delta, \quad z_{11}^{(2)}(0) = -q^{-2}N_2\,/\Delta,$$
$$z_{12}^{(p)}(0) = 0,\ z_{21}^{(p)}(0) = 0, p = \overline{1,2}, \Delta = (q_1^{-2} + q^{-2}N)(q_1^{-2} + q^{-2}N_3) - q^{-4}N_2^2.$$

Таким чином, одержуємо в нульовому наближенні похибки:

$$\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle)(0) = \left\langle z_{(1)}(0), V_1 \right\rangle = (q_1^{-2} + q^{-2}N_3)/\Delta, \tag{38}$$

$$\sigma_3^2(\left\langle V_2, \hat{X} \right\rangle)(0) = \left\langle z_{(1)}(0), V_2 \right\rangle = (q_1^{-2} + q^{-2}N)/\Delta.$$

4.4. Знаходження похибок оцінок $\left\langle V_p, \hat{X} \right\rangle$, $p = 1, 2$ у першому наближенні

Матриці $z_{(p)}(1)$, $p = 1, 2$ визначаються як розв'язки систем лінійних рівнянь:

$$q_1^{-2}\, z_{(p)}(1) + q^{-2}\sum_{k=1}^{N} A_k(0)\left\langle A_k(0),\, z_{(p)}(1)\right\rangle = V_p(1),\ p = \overline{1,2}, \tag{39}$$

де $V_p(1) = -q^{-2}[\sum_{k=1}^{N} A_k(1)\left\langle A_k(0),\, z_{(p)}(0)\right\rangle + \sum_{k=1}^{N}[A_k(0)\left\langle A_k(\,1),\, z_{(p)}(0)\right\rangle]$.

Системи лінійних рівнянь (39) можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} (q_1^{-2} + q^{-2}N)z_{11}^{(p)}(1) + q^{-2}N_2\, z_{22}^{(p)}(1) = V_{11}^{(p)}(1), \\ q^{-2}N_2\, z_{11}^{(p)}(1) + (q_1^{-2} + q^{-2}N_3)z_{22}^{(p)}(1) = V_{22}^{(p)}(1), \end{cases}$$

де $V_{11}^{(p)}(1) = -q^{-2}[z_{22}^{(p)}(0)\sum_{k=1}^{N} kc_k + 2z_{11}^{(p)}(0)\sum_{k=1}^{N} c_k]$, $V_{22}^{(p)}(1) = -q^{-2}z_{11}^{(p)}(0)\sum_{k=1}^{N} kc_k$, та їх розв'язки визначаються формулами:

$$z_{11}^{(p)}(1) = (V_{11}^{(p)}(1)(q_1^{-2} + q^{-2}N_3) - V_{22}^{(p)}(1)q^{-2}N_2)/\Delta,$$
$$z_{22}^{(p)}(1) = (V_{22}^{(p)}(1)(q_1^{-2} + q^{-2}N) - V_{11}^{(p)}(1)q^{-2}N_2)\,/\Delta,$$

$$z_{12}^{(p)}(1) = 0, \quad z_{21}^{(p)}(1) = 0, \; p = \overline{1,2}.$$

Одержуємо в першому наближенні:

$$\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle)(1) = \langle z_{(1)}(1), V_1 \rangle = (V_{11}^{(1)}(1)(q_1^{-2} + q^{-2}N_3) - V_{22}^{(1)}(1)q^{-2}N_2)/\Delta.$$

Остаточно, похибки оцінок $\left\langle V_p, \hat{X} \right\rangle$, $p = 1,2$ задаються виразами:

$$\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle) = [(q_1^{-2} + q^{-2}N_3) + \varepsilon(V_{11}^{(1)}(1)(q_1^{-2} + q^{-2}N_3) -$$
$$-V_{22}^{(1)}(1)q^{-2}N_2)/\Delta]/\Delta + o(\varepsilon),$$
$$\sigma_3^2(\left\langle V_2, \hat{X} \right\rangle) = [(q_1^{-2} + q^{-2}N) + \varepsilon(V_{22}^{(2)}(1)(q_1^{-2} + q^{-2}N) -$$
$$-V_{11}^{(2)}(1)q^{-2}N_2)/\Delta]/\Delta + o(\varepsilon),$$

де $V_{11}^{(p)}(1) = -q^{-2}[z_{22}^{(p)}(0)\sum_{k=1}^{N} kc_k + 2z_{11}^{(p)}(0)\sum_{k=1}^{N} c_k]$, $V_{22}^{(p)}(1) = -q^{-2}z_{11}^{(p)}(0)\sum_{k=1}^{N} kc_k$, $p = 1,2$, $\Delta = (q_1^{-2} + q^{-2}N)(q_1^{-2} + q^{-2}N_3) - q^{-4}N_2^2$, $N_2 = (N+1)/2$, $N_3 = N(2N^2+3N+1)/6$.

Якщо припустити, що $q_1 = q$, а $c_k = k$, $k = \overline{1,N}$, то отримані похибки матимуть вигляд:

$$\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle) = q^2 \frac{2(6+\bar{N}_3)}{(1+N)[12+N(1+N)^2]} +$$
$$+\varepsilon q^4 \frac{12[6+\bar{N}_3][2\bar{N}_3 - N(N+1)(12+\bar{N}_3)]}{(1+N)^2[12+N(1+N)^2]^2} + o(\varepsilon), \bar{N}_3 = N(2N^2+3N+1)),$$

$$\sigma_3^2(\left\langle V_2, \hat{V} \right\rangle) = q^2 \frac{12}{[12+N(1+N)^2]} - \varepsilon\, q^4 \frac{72N^2(N-1)}{[12+N(1+N)^2]^2} + o(\varepsilon).$$

Відмітимо, що при достатньо великих значеннях кількості спостережень N згідно першого наближення методу малого параметра похибки $\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle)$, $\sigma_3^2(\left\langle V_2, \hat{X} \right\rangle)$ близькі до нульових. Також, згідно першого наближення методу малого параметра, збурення відомих матриць моделі прикладу при додатних значеннях малого параметра похибку $\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle)$ збільшують, а похибку $\sigma_3^2(\left\langle V_2, \hat{X} \right\rangle)$ зменшують; при від'ємних значеннях малого параметра похибку $\sigma_3^2(\left\langle V_1, \hat{X} \right\rangle)$ зменшують, а похибку $\sigma_3^2(\left\langle V_2, \hat{X} \right\rangle)$ збільшують.

5. Висновок

Досліджені задачі гарантованого середньоквадратичного оцінювання невідомих прямокутних матриць за спостереженнями лінійних функцій від

випадкових матриць з випадковими похибками. У припущені, що кореляційні матриці та випадкові величини невідомі і належать множинам спеціального вигляду, одержані вирази для гарантованих середньоквадратичних похибок та гарантованих лінійних середньоквадратичних оцінок. У випадку малих збурень матриць одержані асимптотичні розклади гарантованих похибок та гарантованих оцінок. Наводиться тестовий приклад асимптотичного розкладу.

Література

1. Chatterjee S. Matrix Estimation by Universal Singular Value Thresholding. *The Annals of Statistics.* 2015. Vol. 43. № 1. P. 177–214.
2. Negahban S., Wainwright M. J. Estimation of (near) low-rank matrices with noise and high-dimensional scaling. *Ann. Statist.* 2011, 39. P. 1069–1097. MR2816348
3. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. Пер. с англ. М.: Наука, 1977. 305 с.
4. Arnold B. F., Stanlecker P. Linear estimation in regression analysis using fuzzy prior information. *Rardom Oper. And Stoch. Equ.* 1997, Vol. 5, № 2, P. 105–116.
5. Nakonechnyi O., Michalek J. Minimax estimates of a linear parameter function in a regression model under restrictions on the parameters and variance-covariance matrix. *J.Comput. and Appl. Math. , Обчислювальна та прикладна математика.* 2000, № 1 (102). P. 3790–3802.
6. Christopeit N., Helmes K. Linear minimax estimation with ellipsoidal constraints. *Acta Applicandae Mathematicae.* 1996, 43, I1, P. 3–15.
7. Girko V. Spektral Theory of Minimax Estimation. *Acta applicandae mathematicae.* 1996. 43, 1, P. 59–69. Dordrtchl (Kluver Akademic Publichers).
8. Trenkler G. Quasi minimax estimation in the Linear regression model. *Statistics.* 18. 1987. P. 219–226.
9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Издательский дом «Вильямс». 2007. 912 с.
10. Nakonechnyi O. G., Kudin G.I., Zinko T.P. Formulas of perturbation for one class of inverse operators. *Matematychni Studii.* 2019. 52, № 2. P. 124–132.
11. Наконечный А. Г., Кудин Г. И., Зинько П. Н., Зинько Т. П. Метод возмущений в задачах линейной матричной регрессии. *Проблемы управления и информатики.* 2020. № 1. С. 38–47.
12. Наконечний О. Г., Кудін Г. І., Зінько П. М., Зінько Т. П. Наближені гарантовані оцінки матриць у задачах лінійної регресії з малим параметром. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2020. № 4. С. 88–102.
13. Наконечный А. Г., Кудин Г. И., Зинько П. Н., Зинько Т. П. Гарантированные среднеквадратические оценки линейных преобразований матриц в условиях статистической неопределённости. *Проблемы управления и информатики.* 2021. № 2. С. 24–37.
14. Наконечный А. Г., Кудин Г. И., Зинько П. Н., Зинько Т. П. Минимаксные среднеквадратические оценки матричных параметров в задачах линейной регрессии в условиях неопределённости. *Проблемы управления и информатики.* 2021. № 4. С. 28–37.

Надійшла: 27.09.2022 / Прийнята: 30.09.2022