

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

**Кучук-Яценко Сергій Вікторович**

УДК 519.21

**ВІДСУТНІСТЬ АРБИТРАЖУ ТА ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ У  
МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ  
ВОЛАТИЛЬНІСТЮ**

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник  
**Мішура Юлія Степанівна,**  
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2017

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b>		<b>5</b>
<b>Розділ 1. Огляд літератури</b>		<b>29</b>
1.1.	Деякі класичні моделі фінансових ринків з не випадковою волатильністю . . . . .	29
1.2.	Точне та наближене оцінювання опціонів у моделях фінансових ринків зі стохастичною волатильністю . . . . .	32
1.3.	Дослідження питань арбітражу на фінансових ринках . . . . .	36
<b>Розділ 2. Слабка збіжність “грецьких” символів для цін опціонів європейського типу: від дискретного часу до неперервного</b>		<b>39</b>
2.1.	Гранична модель Блека–Шоулса та компоненти, пов’язані зі стратегіями і капіталом . . . . .	40
2.2.	Симетрична модель Кокса–Росса–Рубінштейна . . . . .	41
2.3.	Слабка збіжність симетричної моделі Кокса–Росса–Рубінштейна до моделі Блека–Шоулса . . . . .	45
2.4.	Допоміжні результати . . . . .	47
2.5.	Збіжність $\Delta_k^{(n)}$ до $\Delta(x, T - t)$ . . . . .	50
2.6.	Висновки до розділу 2 . . . . .	54
<b>Розділ 3. Оцінювання Європейського опціону купівлі у моделі зі стохастичною волатильністю, яка задається процесом Орнштейна–Уленбека. Точні формули</b>		<b>55</b>
3.1.	Дифузійна модель зі стохастичною волатильністю, що керується процесом Орнштейна–Уленбека . . . . .	56
3.2.	Визначення та попередні результати . . . . .	58
3.3.	Питання відсутності арбітражу у загальній моделі . . . . .	62

3.4.	Випадок некорельованих процесів . . . . .	64
3.5.	Відшукування аналітичного виразу для ціни опціону . . . . .	67
3.6.	Висновки до розділу 3 . . . . .	74
Розділ 4.	<b>Оцінювання Європейського опціону купівлі у моделі зі стохастичною волатильністю, яка задається процесом Орнштейна–Уленбека. Симуляції</b>	<b>76</b>
4.1.	Модель ринку і дискретна апроксимація процесу, що визначає волатильність . . . . .	77
4.2.	Похибка при наближеному обчисленні ціни європейського опціону купівлі . . . . .	78
4.3.	Приклади застосування апроксимаційної схеми Ейлера–Маруями	82
4.4.	Перевірка точності апроксимації у випадку не випадкової волатильності . . . . .	90
4.5.	Апроксимаційна схема Ейлера – визначення і допоміжні результати . . . . .	93
4.6.	Висновки до розділу 4 . . . . .	95
Розділ 5.	<b>Застосування числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю</b>	<b>96</b>
5.1.	Модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека . . . . .	96
5.2.	Стохастична похідна і ціна опціону . . . . .	97
5.3.	Допоміжні результати . . . . .	103
	Висновки до розділу 5 . . . . .	110
Розділ 6.	<b>Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах із заданими доходами</b>	<b>111</b>
6.1.	Модель ринку та попередні відомості . . . . .	111
6.2.	Теорема про необхідні та достатні умови строгої додатності розв’язків рівнянь економічної рівноваги . . . . .	114

6.3. Постановка задачі . . . . .	117
Висновки до розділу 6 . . . . .	121
<b>Висновки</b>	<b>122</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>123</b>

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Історія ринків похідних цінних паперів, або похідних контрактів, бере свій початок ще з часів, коли ані самих цінних паперів, ані контрактів у сучасному розумінні цих слів не існувало. Одне з перших згадувань про домовленість, у якій одна зі сторін сплачує кошти іншій у обмін на право користування активом у майбутньому, зустрічається у одній з робіт Арістотеля. З плином часу типи похідних контрактів урізноманітнювалися та набували сучасного вигляду, водночас виводячи на перший план питання справедливої вартості таких контрактів.

Модель фінансового ринку з деривативами, представлена Ф. Блеком та М. Шоулсом у 1973 році, яка формалізувала процеси, що вже довгий час відбувалися на світових біржах, стала видатним проривом у тогочасній фінансовій математиці та стимулювала стрімкий розвиток ринку похідних цінних паперів. Класична модель, спираючись на певні припущення та обмеження, дозволяла відносно легко розраховувати справедливу вартість опціону Європейського типу. Саме згадані припущення та обмеження залишаються об'єктом досліджень і донині.

Біноміальна модель Кокса–Росса–Рубінштейна, представлена наприкінці 70-х років, є дискретною, що усуває один з недоліків моделі Блека–Шоулса. Встановлено, що ця модель надає більш точні результати при оцінюванні опціонів, особливо у випадку довгострокових контрактів. У розділі 2 розглядається поведінка так званих “греків” – величин, що характеризують ринок і активи на ньому в моделі Блека–Шоулса. Введено у розгляд дискретні аналоги цих величин у біноміальній моделі ринку і показано слабку збіжність цих аналогів до греків за умови, що кількість періодів прямує до нескінченності.

Класична модель Блека–Шоулса використовує припущення про сталість волатильності. Проте дослідження реальних фінансових ринків свідчать про

протилежне: волатильність змінюється із часом, причому майже у всіх випадках не детермінованим чином. Очевидно, що за таких умов формула справедливої вартості опціону з класичної моделі потребує перегляду. Більше того, стохастична природа волатильності ставить під сумнів інше припущення класичної моделі – відсутність на ринку арбітражних можливостей. Отже, при розгляді модифікованих моделей інтерес викликає також і безарбітражність ринків. У розділі 3 для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю вивчається питання відсутності арбітражних можливостей та із застосуванням оберненого перетворення Фур'є встановлюється точна формула справедливої вартості Європейського опціону. Інший підхід до точного обчислення ціни Європейського опціону, що застосовує елементи числення Маллявена, реалізовано у розділі 5. Актуальність досліджень підтверджує той факт, що обидві отримані формули для розглядуваної моделі ринку є новими, а застосування числення Маллявена до поставленої задачі не досліджувалося.

Поряд із точними формулами для оцінювання опціонів зацікавленість дослідників та практиків викликають наближені формули, які можуть бути технічно простішими, вимагати меншого часу обчислення та разом із цим забезпечувати прийнятну точність результатів. Зокрема наближені методи застосовуються, коли розрахунок за точними формулами технічно важко реалізувати, тобто саме у випадку розглядуваної моделі. Наближені методи, які використовують дискретизацію, стають все більш актуальними із зростанням технічних можливостей обчислювальної техніки. Розділ 4 цієї роботи представляє одну з можливих схем обчислення наближеного значення справедливої вартості Європейського опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Розкрито чисельні результати, встановлено швидкість збіжності дискретизованих моделей до неперервної при спрямуванні кроку дискретизації до нуля та проведено аналіз похибок дискретизації.

У моделях ринку, які розглядаються у згаданих вище розділах, як буде показано у роботі, існують еквівалентні мартингальні міри. Відсутність ар-

бітражу на ринку за певних умов є наслідком існування таких мір. Проте у багатьох моделях про існування мартингальних мір стверджувати не можна. У розділі 6 розглядається модель економіки обміну, де вигляд цінового процесу невідомий. Знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана у рамках державних бюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-02 “Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей” (номер державної реєстрації №0111U006561) і №16БФ038-02 “Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем” (номер державної реєстрації №0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт “Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів”, а також у рамках державних бюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-01 “Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудови керувань для нелінійних еволюційних систем зі складною динамікою” (номер державної реєстрації №0111U006677) і №16БФ038-01 “Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури” (номер державної реєстрації №0116U004732), що виконуються на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, і входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт “Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів”.

**Мета і завдання дослідження.** Ця робота має на меті запропонувати нові та поглибити і розвинути минулі дослідження у сфері оцінювання деривативів та питань відсутності арбітражу у різних моделях фінансових ринків, зокрема, у моделях ринків зі стохастичною волатильністю, моделях із дискретним часом та моделях економіки обміну. Для досягнення мети дисертації були поставлені наступні завдання:

- відшукування у моделі Кокса–Росса–Рубінштейна дискретних аналогів величин, що характеризують опціони у неперервному часі у моделі Блека–Шоулса;
- побудова моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Визначення властивостей волатильності, які варто імплементувати у модель, щоб забезпечити подібність до реальних фінансових ринків;
- дослідження питань відсутності арбітражу та справедливої вартості опціону Європейського типу у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека;
- отримання чисельних результатів наближеного обчислення та оцінка швидкості збіжності цін опціонів у моделі ринку зі стохастичною волатильністю при застосуванні дискретизаційної схеми Ейлера–Маруями. Оцінка та характеристика похибки дискретизації;
- застосування числення Маллявена до проблеми оцінювання опціонів у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека. Отримання точних формул для обчислення справедливої вартості опціону Європейського типу;
- вивчення питання відсутності арбітражу у моделі економіки обміну. Встановлення умов відсутності арбітражу у моделі.

**Об'єктом дослідження** є математичні моделі фінансового ринку.

**Предметом дослідження** є відсутність або наявність арбітражу та оцінювання деривативів у таких моделях, а також збіжність та швидкість збіжності дискретних моделей до неперервних аналогів.

**Методи дослідження.** У роботі використано методи теорії ймовірностей, випадкових процесів, мартингальні методи, методи теорії диференціальних рівнянь, фінансової математики, математичної економіки.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист:

- доведено, що дельта-хедж у біноміальній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна є аналогом грецького символу дельта у моделі Блека–Шоулса у тому сенсі, що має місце слабка збіжність дельта-хеджу до дельти при спрямуванні кількості періодів у дискретній моделі до нескінченності;
- для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, доведено відсутність на ринку арбітражу у сенсі  $\overline{NA}_+$  та  $\overline{NA}_g$ ;
- із застосуванням оберненого перетворення Фур’є та числення Маллявена для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, для випадку, коли процеси Вінера, що керують еволюцією ціни активу та його волатильністю, є некорельованими, відшукано точні та наближені формули розрахунку справедливої вартості Європейського опціону;
- встановлено швидкість збіжності ціни опціону Європейського типу у дискретизованій за схемою Ейлера–Маруяма моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, до ціни опціону у неперервній моделі при спрямуванні кроку дискретизації до нуля;
- у моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв’язків рівнянь економічної рівноваги, встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів, представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. На практиці одержані результати можуть бути застосовані на реальних фінансових ринках при моделюванні первинних цінних паперів і наближеному обчисленні цін похідних цінних паперів.

**Особистий внесок здобувача.** Усі основні результати роботи належать здобувачу. У трьох статтях, підготовлених разом із науковим керівником проф. Мішурою Ю.С., останній належить формулювання задач та методика досліджень, а всі результати отримані здобувачем самостійно. Одна робота опублікована у співпраці з Мішурою Ю.С. та Мунчак Є.Ю., де здобувачу належать такі результати: із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання Європейського опціону, та отримано формулу справедливої вартості Європейського опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, яка задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, для випадку, коли процеси Вінера, що керують еволюцією ціни активу та його волатильністю, є некорельованими.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних наукових семінарах, міжнародних і всеукраїнських конференціях:

1. Міжнародна міждисциплінарна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2016” (Київ, Україна). 06.04.2016 – 08.04.2016.
2. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (сmt. Ворохта, Івано-Франківська обл., Україна). 24.02.2016 – 27.02.2016.
3. Міжнародна літня математична школа пам’яті В.О. Плотнікова (Одеса, Україна). 12.09.2016 – 17.09.2016.
4. Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх за-

- стосування” (Ужгород, Україна). 19.05.2016 – 21.05.2016.
5. Міжнародна наукова конференція “Modern Stochastics: Theory and Applications III” (Київ, Україна). 10.09.2012 – 14.09.2012.
  6. Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Київ, Україна). 08.06.2011 – 10.06.2011.
  7. Обчислювальна та прикладна математика, Четверта Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка 08.09.2011 – 10.09.2011.
  8. Засідання наукового семінару “Теорія ймовірностей та математична статистика” при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Мішури Ю.С. та проф. Козаченка Ю.В. (м.Київ, Україна, 2016).
  9. Засідання наукового семінару при кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О.Г. (м.Київ, Україна, 2016).
  10. Засідання наукового семінару при кафедрі теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я.І. (м.Київ, Україна, 2016).
  11. Засідання наукового семінару Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України під керівництвом проф. Кнопова П.С. (м.Київ, Україна, 2016).

**Публікації.** За результатами дисертації опубліковано 12 наукових публікацій. З них 5 статей, опублікованих у фахових виданнях, [1, 2, 3, 4, 5], та 7 тез доповідей [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Дві статті [3], [4] опубліковані у закордонних виданнях. Статті [2], [5] опубліковано у виданнях України, що включено до наукометричної бази Scopus.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, шести розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 133 сторінки, список використаних джерел займає 11 сторінок і містить 99 найменувань.

**Зміст роботи.** У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначені мета і задачі дослідження, виділено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача та апробацію отриманих результатів.

**Перший розділ** містить огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями. Наведені деякі результати інших авторів щодо проблем, які досліджуються в дисертації.

У **другому розділі** розглядається поведінка так званих “греків” – величин, що характеризують ринок і активи на ньому в моделі Блека–Шоулса. Введено у розгляд дискретні аналоги цих величин у біноміальній моделі ринку і показано слабку збіжність цих аналогів до греків за умови, що кількість періодів прямує до нескінченності.

Опис розглядуваних моделей починається із представлення граничної моделі Блека–Шоулса. В умовах повного ймовірнісного простору  $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}\}$  з фільтрацією  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ , розглядається фінансовий ринок, що задається двома активами: еволюцію ціни безризикового активу визначає формула  $B(t) = e^{rt}$ , а ціну ризикового активу задано випадковим процесом  $S(t) = \exp\{\mu t + \sigma W_t^{\mathbb{P}}\}$ , де  $\{W_t^{\mathbb{P}}, \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  – вінерівський процес відносно міри  $\mathbb{P}$ . Процес  $X(t) = S(t)e^{-rt}$ , є еволюцією дисконтованої вартості ризикового активу. Для такої моделі ринку встановлено існування та єдиність ризик-нейтральної (мартингальної) міри  $\mathbb{P}^*$ , відносно якої процес  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  є мартингалом та допускає зображення  $X(t) = S_0 \exp\{\sigma W_t^{\mathbb{P}^*} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$ .

Нехай  $V(S, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\{(S(T) - K)^+ | \mathfrak{F}_t\}$  – справедлива ціна Європейського опціону купівлі зі страйковою ціною  $K$  та часом виконання  $T$  за умови, що поточна ціна ризикового активу дорівнює  $S$ . Так звані грецькі символи,

або “греки”, відповідають різним частинним похідним функції  $V$ . У роботі розглядається “грек”  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ , який характеризує зміну вартості опціону або портфелю опціонів в залежності від ціни активу  $S$ . Дельта визначає міру кореляції між змінами вартості опціону і змінами ціни відповідного активу.

У другому підрозділі другого розділу догранична модель ринку в  $n$ -й серії описується на просторі

$$\Omega^{(n)} := \{-1, +1\}^n = \{\omega^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) | y_i^{(n)} \in \{-1, +1\}\}.$$

Вводяться дві числові послідовності  $a_n, b_n, n \geq 1$ . Позначимо через  $Y_k(\omega^{(n)}) := y_k^{(n)}$  для  $\omega^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$   $k$ -ту координату, і нехай

$$R_k^{(n)}(\omega^{(n)}) := a_n \frac{1 - Y_k(\omega^{(n)})}{2} + b_n \frac{1 + Y_k(\omega^{(n)})}{2}.$$

Вважаємо, що догранична модель в  $n$ -й серії є  $n$ -періодною моделлю, і це модель Кокса–Росса–Рубінштейна з відсотковою ставкою

$$r_n = \frac{rT}{n},$$

що задає еволюцію безризикового активу  $B_k^{(n)} = (1 + r_n)^k, k = 0, \dots, n$ , одним ризиковим активом  $S_k^{(n)}, k = 0, \dots, n$ , та доходами, які визначаються за формулою  $R_k^{(n)} = (S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)})/S_{k-1}^{(n)}, k = 1, \dots, n$ . Доходи незалежні і набувають одного з двох можливих значень:  $a_n$  і  $b_n, k = 1, \dots, n$ .

У такій моделі при переході до наступного періоду ціна активу здійснює стрибок від значення  $S_{k-1}^{(n)}$  до більшого значення  $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1 + b_n)$  (якщо  $b_n > 0$ ), або ж до меншого –  $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1 + a_n)$ , (якщо  $a_n < 0$ ).

Наступна частина підрозділу присвячується попереднім відомостям, означенням та відомим результатам. Зокрема на розглядуваному просторі описується об’єктивна та ризик-нейтральна ймовірнісні міри, вводиться фільтрація, описується вигляд дисконтованої вартості ризикового активу та розкривається поняття симетричної біноміальної моделі. Вводяться означення самофінансованої торгівельної стратегії, реплікуючої стратегії, процесу вартості,

функції капіталу. Наступною відомою лемою у якості аналогу до “греку” дельта представлено поняття дельта-хеджу Європейського опціону.

**Лема 0.1.** *Реплікуюча стратегія для Європейського опціону купівлі має вигляд*

$$\Delta_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)}) = (1 + r_n)^k \frac{v_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)} \hat{b}_n) - v_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)} \hat{a}_n)}{S_{k-1}^{(n)} (\hat{b}_n - \hat{a}_n)}, \quad (1)$$

де

$$v_k^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(\hat{b}_n^i \hat{a}_n^{n-i-k} y - K)^+}{(1 + r_n)^n} C_{n-k}^i (p_n^*)^i (1 - p_n^*)^{n-i-1}. \quad (2)$$

У подальших підрозділах другого розділу доводиться слабко збіжність дельта-хеджу до “грека” дельти. Основний результат роботи сформульовано у вигляді теореми.

**Теорема 0.1.** *Нехай догранична модель є симетричною біноміальною, а гранична є моделлю Блека–Шоулса. Тоді дельта-хедж для Європейського опціону купівлі у дограничній моделі слабко збігається до дельти Європейського опціону купівлі у моделі Блека–Шоулса, коли кількість періодів у дискретній моделі прямує до нескінченності, тобто*

$$\Delta_k^{(n)}(S_{k_t}^{(n)}) \xrightarrow{d} \Delta(S(t), T - t), \quad n \rightarrow \infty.$$

У **третьому розділі** розглядається модель ринку Блека–Шоулса, модифікована з метою урахування стохастичної природи волатильності. У першому підрозділі вводиться основний об’єкт дослідження – дифузійна модель зі стохастичною волатильністю, що керується процесом Орнштейна–Уленбека. Розглядається повний ймовірнісний простір  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(B,W)}, t \geq 0\}, \mathbb{P}\}$  з фільтрацією, породженою корельованими процесами Вінера  $\{B_t, W_t, 0 \leq t \leq T\}$ . Модель ринку з одним ризиковим активом, ціна якого еволюціонує відповідно геометричному броунівському руху  $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ , а волатильність ціни задається деякою функцією від стохастичного процесу, описується системою:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dB_t, \quad (3)$$

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + k dW_t. \quad (4)$$

У найбільш загальній постановці задача розглядається у наступних припущеннях:

- (A1) процеси Вінера  $B$  та  $W$  є корельованими з коефіцієнтом кореляції  $\rho \in [-1; 1]$ , тобто  $dB_t dW_t = \rho dt$ ;
- (A2) функція волатильності  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  є вимірною, відділеною від нуля деякою сталою  $c$ :

$$\sigma(x) \geq c > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

і задовольняє умови  $\int_0^T \sigma^2(Y_t) dt < \infty$  м.н.;

- (A3)  $\alpha$ ,  $\mu$  і  $k$  – додатні сталі.

Описано відомі властивості процесу Орнштейна–Уленбека, вказано у явному вигляді розв'язки рівнянь (3)-(4).

Наступний підрозділ третього розділу представляє попередні відомості та допоміжні результати. Вводиться низка важливих понять, таких як еквівалентна (локальна) мартингальна міра, мінімальна мартингальна міра. Зокрема наведено два наступні означення відсутності арбітражу. Зауважимо, що означення оперують великою кількістю позначень, сутність яких розкривається у третьому розділі.

**Означення 0.1.** Будемо говорити, що на ринку виконується властивість  $\overline{NA}_+$  (або, що те саме, що ринок є  $\overline{NA}_+$ ), якщо

$$\overline{\Psi}_+(S) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) = \{0\},$$

де  $L_\infty^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  – підмножина невід'ємних випадкових величин у  $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ .

**Означення 0.2.** Будемо говорити, що на ринку виконується властивість  $\overline{NA}_g$  (або, що те саме, що ринок є  $\overline{NA}_g$ ), якщо

$$\overline{\Psi}_g(S) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) = \{0\}.$$

Представлено деякі попередні результати, що пов'язують безарбітражність на фінансових ринках та наявність на них еквівалентних (локальних) мартин-

гальних мір, а також визначають структуру еквівалентних локальних мартингальних мір на ринку.

Подальші викладки містять основні результати розділу, серед яких той факт, що розглядувана модель ринку за виконання певних умов задовольняє обом введеним вище означенням відсутності арбітражу.

**Теорема 0.2.** *Ринок, визначений моделлю (3)–(4) з умовами (A1)–(A3):*

- (i) *має властивість  $\overline{NA}_+$ ;*
- (ii) *має властивість  $\overline{NA}_g$ , якщо для деякої еквівалентної локальної мартингальної міри  $\mathbb{Q}$  виконується наступна нерівність*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_0^T \sigma^2(Y_s) X_s^2 ds < \infty. \quad (5)$$

Описано вигляд сімейства еквівалентних мартингальних мір та представлено модель у ризик-нейтральному середовищі.

У наступному підрозділі вводиться звуження загальної задачі, яке характеризується відсутністю кореляції між процесами Вінера, які керують ціновим процесом та процесом волатильності. Це зводить ризик-нейтральну модель до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(Y_t) S_t dB_t^{\mathbb{Q}}, \\ dY_t &= (-\alpha Y_t - k\nu(t)) dt + kdZ_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} B_t^{\mathbb{Q}} &= B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(Y_s)} ds, \\ Z_t^{\mathbb{Q}} &= Z_t + \int_0^t \nu(s) ds. \end{aligned}$$

некорельовані процеси Вінера відносно  $\mathbb{Q}$ ,  $\nu(s)$  – процес ринкової ціни ризику волатильності що характеризує міру  $\mathbb{Q}$ .

Подальше дослідження зводиться до відшукування формули для ціни Європейського опціону відносно мінімальної мартингальної міри, яка визначається єдиним чином згідно з наступним твердженням.

**Твердження 0.1.** *Еквівалентна мартингальна міра  $\mathbb{Q}$  на ринку, визначеному моделлю (6) є мінімальною тоді і тільки тоді, коли процес  $\nu$ , асоційований з мірою  $\mathbb{Q}$ , тотожно рівний нулю.*

Ціна Європейського опціону купівлі у момент часу 0 відносно мінімальної мартингальної міри визначається наступною загальною формулою:

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \{ (S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leq s \leq T \} \}. \quad (7)$$

Внутрішнє математичне сподівання у (7) має таке зображення:

$$\begin{aligned} P &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \{ (S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leq s \leq T \} \\ &= e^{\ln S + rT} \Phi \left( \frac{\ln S + (r + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_0^2) T - \ln K}{\bar{\sigma}_0 \sqrt{T}} \right) \\ &\quad - K \Phi \left( \frac{\ln S + (r - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_0^2) T - \ln K}{\bar{\sigma}_0 \sqrt{T}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\bar{\sigma}_t := \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^T \sigma^2(Y_s) ds} \geq 0$ ,  $\Phi$  функція стандартного нормального розподілу.

Таким чином, головною проблемою у відшуванні аналітичної формули для ціни опціону є те, що необхідно обчислювати математичне сподівання від функції  $\Phi$ . Ця проблема розв'язана у останньому підрозділі третього розділу, і результат сформульовано у вигляді теореми. Наведемо скорочений її варіант нижче.

**Теорема 0.3.** *Нехай ринок, визначений моделлю (6),  $\mathbb{Q}$  є мінімальною мартингальною мірою,  $V_0$  ціна у початковий момент часу європейського опціону купівлі. Нехай функція щільності випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$  є кусково-неперервною на  $\mathbb{R}$ , і  $\ln(S/K) + rT \geq 0$  і  $k = \sqrt{2(\ln(S/K) + rT)}$ . Тоді має*

місце наступне зображення:

$$\begin{aligned}
V_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( S e^{rT} \left( \Phi(k) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \int_k^\infty \left( \int_{-\infty}^{\sigma_1^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}) \phi(u) dudy + \int_{\sigma_2^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) dudy \right) e^{-s^2/2} ds \right) \right. \right. \\
& - K \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\sigma_4^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}) \phi(u) dudy e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{-\infty}^0 \int_{\sigma_4^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) dudy e^{-s^2/2} ds \right) \right) \Bigg),
\end{aligned}$$

де  $\phi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{iu\bar{\sigma}_0^2})$  є характеристичною функцією випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$ ;  $\sigma_i = \sigma_i(s)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  мають вигляд

$$\sigma_{1,2}(s) = \frac{s}{\sqrt{T}} \mp \frac{\sqrt{s^2 T - 2T(\ln(S/K) + rT)}}{T}, \quad (9)$$

$$\sigma_{3,4}(s) = \frac{-s}{\sqrt{T}} \mp \frac{\sqrt{s^2 T + 2T(\ln(S/K) + rT)}}{T}. \quad (10)$$

У четвертому розділі розглядається наближення неперервних траєкторій процесу Орнштейна–Уленбека дискретними аналогами з метою отримання апроксимації для ціни Європейського опціону купівлі у моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Застосовується апроксимаційна схема Ейлера–Маруями. Для заданих наборів параметрів визначено наближення ціни опціону. Визначено швидкість збіжності до точного значення ціни і точного значення середньої волатильності при спрямуванні величини дискретизаційного інтервалу до нуля. Досліджується точність апроксимації для випадку, коли точне значення ціни опціону можливо обчислити.

У першому підрозділі визначено модель, до якої застосовуватиметься апроксимаційна схема, – ризик-нейтральна модель (6). Наближенням Ейлера–

Маруями істинного розв'язку рівняння Ланжевена, що задає стохастичну волатильність, є марківський ланцюг  $Y^{(m)}$ , визначений наступним чином:

- розглянемо розбиття інтервалу  $[0, T]$  на  $m$  рівних підінтервалів довжини  $\Delta t = T/m$ ;
- початкове значення схеми визначається тотожністю:  $Y_0^{(m)} = Y_0$ ;
- $Y_{l+1}^{(m)}$ , що є скороченим записом  $Y_{(l+1)T/m}^{(m)}$ ,  $0 \leq l \leq m-1$ , визначається рекурсивно:

$$Y_{l+1}^{(m)} = (1 - \alpha\Delta t)Y_l^{(m)} + k\Delta Z_l^{\mathbb{Q}}, \quad (11)$$

$$\text{де } \Delta Z_l^{\mathbb{Q}} = Z_{(l+1)T/m}^{\mathbb{Q}} - Z_{lT/m}^{\mathbb{Q}}.$$

Неперервний процес  $Y_t^{(m)}$  є ступінчастим процесом, який визначається таким чином:

$$Y_t^{(m)} = Y_{[tm/T]T/m}^{(m)}, \quad t \in [0, T],$$

де " $[x]$ " позначає цілу частину  $x$ .

Введемо позначення для внутрішнього математичного сподівання з виразу (7), визначеного у (8):

$$\begin{aligned} P &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leq s \leq T\} = e^{\ln S + rT} \Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \\ &:= e^{\ln S + rT} \Phi\left(\frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - K\Phi\left(\frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Подальше дослідження четвертого розділу має на меті відшукати оцінку похибки, що виникає у результаті наближення точної формули (7) шляхом застосування апроксимаційної схеми Ейлера до процесу, який керує волатильністю. Необхідно оцінити математичне сподівання випадкової величини  $R$ , визначеної наступним чином:

$$R := |P - \hat{P}_m|, \quad (12)$$

де  $P$  визначається рівністю (8),  $m$  – кількість точок розбиття інтервалу  $[0, T]$  на інтервали однакового розміру,  $\hat{P}_m$  – ціна опціону у дискретній моделі, роз-

рахована за формулою, аналогічною до (8):

$$\hat{P}_m = e^{\ln S + rT} \Phi\left(d_1^{(m)}\right) - K \Phi\left(d_2^{(m)}\right), \quad (13)$$

де

$$d_1^{(m)} = \frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_m \sqrt{T}}; \quad (14)$$

$$d_2^{(m)} = \frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_m \sqrt{T}} \quad (15)$$

Попередні вирази використовують наступні позначення:

$$\bar{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{l=1}^m \sigma^2\left(Y_l^{(m)}\right) \frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \sigma^2\left(Y_l^{(m)}\right)}, \quad (16)$$

Похибка апроксимації виникає виключно через різницю між  $\bar{\sigma}$  та  $\bar{\sigma}_m$ . Тому для кожного  $m$  встановлюється оцінку згори для математичного сподівання модуля цієї різниці. Після цього  $R$  можна представити у вигляді  $R_\sigma := \mathbb{E}|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m|$ . У роботі доведено наступну лему:

**Лема 0.2.** *Нехай  $\sigma^2(x)$  задовольняє умову Гельдера:*

$$|\sigma^2(x) - \sigma^2(y)| \leq L|x - y|^\gamma, \quad (17)$$

де  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $L$  – деяка додатна стала. Тоді  $\mathbb{E}R_\sigma \leq Ct^{-0.5\gamma}$ , де  $C$  – деяка додатна стала.

Попередня лема дозволяє довести основний результат четвертого розділу.

**Теорема 0.4.** *Нехай  $\sigma^2(x)$  задовольняє умову Гельдера (17). Тоді  $\mathbb{E}R \leq Dt^{-\gamma/2}$ , де  $D$  – деяка додатна стала.*

Четвертий розділ продовжується розрахунками ціни Європейського опціону купівлі шляхом симуляцій із застосуванням апроксимаційної схеми Ейлера. Проводиться перевірка точності апроксимації при різних кроках дискретизації та аналізуються характеристики вибірки похибок. Розділ завершується додатковими відомостями про апроксимаційну схему Ейлера–Маруями, які було використано при отриманні основних результатів розділу.

У п'ятому розділі питання точного обчислення ціни Європейського опціону купівлі розглядається крізь призму методів числення Маллявена. Встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціону. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціону за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними.

У першому підрозділі описується розглядувана модель ринку із дещо зміненими відносно попередніх розділів припущеннями.

- (C1) вінерівські процеси  $W$  і  $\widetilde{W}$  є некорельованими, а отже, незалежними;
- (C2) функція волатильності  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  вимірна, віддалена від нуля і має не більш ніж поліноміальне зростання, тобто  $c \leq \sigma(x) \leq q(1 + |x|^l)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  та деяких додатних сталих  $c, q$  і деякого  $l \in \mathbb{N}$ .
- (C3) коефіцієнти  $\alpha$  і  $k$  є додатними.

Наступний підрозділ вводить низку відомих базових означень та деякі попередні результати з числення Маллявена. Зокрема вводиться поняття стохастичної похідної. Нехай  $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ , – вінерівський процес на імовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^W, t \in [0, T]\}, \mathbb{P}\}$ , де  $\Omega = C([0, T], \mathbb{R})$ .

Позначимо  $\widehat{C}^\infty(\mathcal{R})$  множину всіх нескінченно диференційовних функцій із похідними не вище поліноміального зростання на нескінченності.

**Означення 0.3.** Назвемо гладкими випадкові величини  $F$  вигляду  $F = f(W(t_1), \dots, W(t_n))$ ,  $f = f(x^1, \dots, x^n) \in \widehat{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ . Клас гладких величин позначимо через  $\mathcal{S}$ .

**Означення 0.4.** Нехай  $F \in \mathcal{S}$ . Стохастичною похідною випадкової величини  $F$  в точці  $t$  назвемо випадкову величину

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(W(t_1), \dots, W(t_n)) 1_{[0, t_i]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Введемо позначення  $\nu(x) = \sigma(x)\sigma'(x)$  і випадкову величину

$$\eta_t = \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1}, \quad (18)$$

Основний результат розділу сформульовано у вигляді наступної теореми.

**Теорема 0.5.** *Нехай функція  $\sigma$  задовольняє припущення (C2), є двічі неперервно диференційовною, похідна  $\sigma'$  є строго додатною та має не більше, ніж поліноміальний зростання на нескінченності. Тоді для процесу Орнштейна–Уленбека  $Y$ , визначеного стохастичним диференціальним рівнянням (4), випадкова величина  $\bar{\sigma}^2$  має неперервну обмежену щільність розподілу виду*

$$p_{\bar{\sigma}^2}(x) = \mathbb{E} \left[ 1_{\{\bar{\sigma} > \sqrt{x}\}} \left( \int_0^T \eta_t \int_0^t e^{\alpha s} dW_s dt - \int_0^T \int_0^t e^{\alpha h} D_h \eta_t dh dt \right) \right], \quad (19)$$

значення стохастичної похідної  $D_h \eta_t$  наведено у лемі 0.3, і всі величини у правих частинах рівностей (18) і (19) коректно означені.

Справедлива наступна лема, яка визначає вигляд стохастичної похідної від  $\eta_t$ .

**Лема 0.3.** *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 0.5. Тоді стохастична похідна  $D_h \eta_t$  має вигляд*

$$\begin{aligned}
D_h \eta_t = & \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \left( e^{-\alpha(t-h)} 1_{\{h < t\}} \nu'(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \right. \right. \\
& \times \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \left. \right]^{-1} - \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \right. \\
& \times \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \left. \right]^{-2} \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \\
& \times \left( \nu(Y_{t_1}) e^{-\alpha(t_2-h)} 1_{\{h < t_2\}} \nu'(Y_{t_2}) \right. \\
& \left. + \nu(Y_{t_2}) e^{-\alpha(t_1-h)} 1_{\{h < t_1\}} \nu'(Y_{t_1}) \right) dt_1 dt_2 \left. \right). \tag{20}
\end{aligned}$$

Теорема 0.5 має простий, проте дуже важливий наслідок, який дозволяє обчислити вартість Європейського опціону купівлі у розглядуваній моделі.

**Наслідок 0.1.** *Нехай виконуються умови теореми 0.5. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі  $C = (S_T - K)^+$  зі страйковою ціною  $K \geq 0$  задається виразом*

$$\begin{aligned}
V_C = & \int_0^\infty \left( S_0 \Phi \left( \frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}} \right) \right. \\
& \left. - K e^{-rT} \Phi \left( \frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}} \right) \right) p_{\sigma^2}(x) dx,
\end{aligned}$$

де  $p_{\sigma^2}(x)$  визначено у (19).

Доведення ряду технічних результатів винесено у останній підрозділ п'ятого розділу.

У **шостому розділі** у моделі економіки обміну відшуковуються необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлюються нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

Розглядається економічна модель обміну з пропорційним споживанням і заданими доходами. Однією з основних задач є встановлення умов, за яких рівноважний ціновий вектор є строго додатним.

Розглядатимемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^l C_{ki} \frac{\langle b_i, p \rangle + D_i}{\langle C_i, p \rangle} = \psi_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (21)$$

розв'язки якої описують стан рівноваги в таких економічних системах, де  $C = |C_{ki}|_{k=1, i=1}^{n, l}$ ,  $B = |b_{ki}|_{k=1, i=1}^{n, l}$  є невід'ємними матрицями,  $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$  і  $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , - невід'ємні вектори, побудовані за цими матрицями відповідно,  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  строго додатний вектор,  $D_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Припустимо також, що мають місце нерівності

$$\sum_{k=1}^n C_{ki} > 0, \quad \sum_{k=1}^n b_{ki} > 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \sum_{i=1}^l C_{ki} > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Використовуватимемо наступні позначення

$$\langle b_i, p \rangle = \sum_{k=1}^n p_k b_{ki}, \quad \langle C_i, p \rangle = \sum_{k=1}^n p_k C_{ki}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Нехай існує строго додатний вектор  $p_0$ , який є розв'язком системи рівнянь (21). Введемо позначення

$$y_i = \frac{\langle b_i, p \rangle + D_i}{\langle C_i, p \rangle}, \quad i = \overline{1, l}. \quad (23)$$

Внаслідок виконання нерівностей (22) і строгої додатності компонент вектора  $D$  маємо  $y_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ , та справедлива рівність  $\psi = \sum_{i=1}^l y_i C_i$ ,  $y_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ .

З рівностей (23) отримуємо систему рівностей

$$\langle -b_i + y_i C_i, p_0 \rangle = D_i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (24)$$

У першому підрозділі шостого розділу поряд із описом розглядуваної моделі наведено деякі попередні результати, на які спираємося далі при доведенні основного результату підрозділу, сформульованого у вигляді наступної теореми.

**Теорема 0.6.** Нехай  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  - строго додатний вектор, а  $i$ -й споживач має невід'ємний вектор запасу товарів  $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$  та кошти  $D_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ , і виконуються наступні умови:

- вектор  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  належить внутрішності  $r$ -вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами  $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , тобто

$$\psi = \sum_{i=1}^l y_i C_i, \quad y_i > 0, \quad i = \overline{1, l};$$

- вектор  $D = \{D_i\}_{i=1}^l$  належить внутрішності  $r_1$ -вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами  $d_k = \{-b_{ki} + y_i C_{ki}\}_{i=1}^l$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;
- існує підсистема  $r$  лінійно незалежних векторів множини векторів  $\{C_i, i = \overline{1, l}\}$ , таких, що вектор  $\psi$  належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів;
- існує підсистема  $r_1$  лінійно незалежних векторів множини векторів  $\{d_k = -b_k + y C_k, k = \overline{1, n}\}$ , таких, що вектор  $D = \{D_i, i = \overline{1, l}\}$  належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів.

Тоді існує такий набір векторів  $f_k^1$ ,  $k = \overline{1, l}$ , що справедливі наступні твердження:

- існує  $n - r_1 + 1$  лінійно незалежних невід'ємних розв'язків системи рівнянь (24)  $z_k^1$  таких, що множину строго додатних розв'язків системи рівнянь (24) задає формула

$$p = \sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 z_m^1,$$

де

$$z_m^1 = \{\langle D, f_1^1 \rangle - \langle d_m, f_1^1 \rangle p_m^*, \dots, \langle D, f_{r_1}^1 \rangle - \langle d_m, f_{r_1}^1 \rangle p_m^*, 0, \dots, p_m^*, 0, \dots, 0\},$$

$$m = \overline{r_1 + 1, n},$$

$$z_{r_1}^1 = \{\langle D, f_1^1 \rangle, \dots, \langle D, f_{r_1}^1 \rangle, 0, \dots, 0\},$$

$$p_m^* = \begin{cases} \min_{s \in K_m} \frac{\langle D, f_s^1 \rangle}{\langle d_m, f_s^1 \rangle}, & K_k = \{s, \langle d_m, f_s^1 \rangle > 0\}, \\ 1, & \langle d_m, f_s^1 \rangle \leq 0, \forall s = \overline{1, r_1}, \end{cases}$$

а компоненти вектора  $\{\gamma_m^1\}_{m=r_1}^n$  задовольняють систему нерівностей

$$\sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 = 1, \quad \gamma_m^1 > 0, \quad m = \overline{r_1, n},$$

$$\sum_{m=r_1+1}^n \langle d_m, f_i^1 \rangle p_m^* \gamma_m^1 < \langle D, f_i^1 \rangle, \quad i = \overline{1, r_1};$$

— існує строго додатний вектор  $p$ , який є розв'язком системи рівнянь (21), і для компонент якого виконуються нерівності:

$$\begin{cases} p_i \geq \gamma_{r_1}^1 \langle D, f_i^1 \rangle, & i = \overline{1, r_1}, \\ p_i \geq \gamma_i^1 p_i^*, & i = \overline{r_1 + 1, n}, \end{cases} \quad (25)$$

У наступному підрозділі припускається, що економічна система функціонує протягом  $N$  періодів,  $N < \infty$ . У  $t$ -му періоді функціонування економіки вектори попиту  $C_i^t(\omega) = \{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$  задаються на ймовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ . Рівні споживання у  $t$ -му періоді задано деяким випадковим вектором

$$y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l,$$

всі компоненти якого є строго додатними, тобто  $y_i^t(\omega) > 0$ . Таким чином, вектор пропозиції в  $t$ -му періоді задається формулою

$$\psi^t(\omega) = \sum_{i=1}^l C_i^t(\omega) y_i^t(\omega).$$

Як наслідок попередніх результатів, сформульовано теорему про необхідні та достатні умови існування економічної динаміки. Крім того, введено означення безарбітражної економічної динаміки.

**Означення 0.5.** Нехай  $p_1^t$  - рівноважна ціна грошей в  $t$ -му періоді функціонування економічної системи. Економічну динаміку, називатимемо безарбітражною, якщо для будь-якої підмножини множини товарів, визначеної індексами  $i_1, \dots, i_{n_0}$  і довільними числами  $1 \leq N_0 < N_1 \leq N$ , для еволюції цін активів, заданої законом

$$S_t = \left\{ \bar{p}_{i_1}^t, \dots, \bar{p}_{i_{n_0}}^t \right\}, \quad N_0 \leq t \leq N_1, \quad i_k < i_{k+1}, \quad k = \overline{1, n_0 - 1}, \quad (26)$$

та еволюції безризикового активу, заданої законом

$$B_t = \prod_{i=N_0}^t (1 + p_1^i), \quad t = \overline{N_0, N_1}, \quad (27)$$

множина самофінансованих арбітражних стратегій без коротких продажів між періодами функціонування економічної системи є порожньою.

В умовах такого означення доведено теореми про загальні умови відсутності арбітражу в динамічних системах без коротких продажів. Основний результат розділу сформульовано у вигляді наступної теореми.

**Теорема 0.7.** Нехай множина векторів  $C_i^t(\omega)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , що є стовпчиками матриці  $C^t(\omega) = \|C_{ki}^t(\omega)\|_{k=1, i=1}^{n, l}$ , задовольняє нерівності

$$\sum_{s=1}^l C_{ks}^t(\omega) > 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad t = \overline{1, N},$$

$$\sum_{k=1}^n C_{ki}^t(\omega) > 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad t = \overline{1, N},$$

і нехай вектори

$$y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l, \quad b_i(\omega) = \{b_{ki}(\omega)\}_{k=1}^n, \quad D_i(\omega) > 0, \quad i = \overline{1, l},$$

є строго додатними для всіх  $\omega \in \Omega$ . Нехай у кожному періоді  $t$  виконуються умови теореми 0.6 з ймовірністю 1, та  $f_i^{1,t}$  і  $\gamma_i^{1,t}$  визначені Теоремою 0.6 у періоді  $t$ . Економічна динаміка, означена вище, є неарбітражною, якщо з

ймовірністю 1 для деякого  $0 < \delta < 1$  виконуються наступні нерівності:

$$\frac{A^{t+1}}{r_0^{t+1}} \leq \min_{j=1,2} \{l_j^t(\omega)\} (1 + \delta \min_{j=1,2} \{l_j^{t+1}(\omega)\}), \quad t = \overline{1, N}, \quad (28)$$

де

$$r_0^t = r_0^t(\omega) = \min_i \psi_i^t(\omega), \quad R_0^t = R_0^t(\omega) = \max_i \psi_i^t(\omega),$$

$$A^t = A^t(\omega) = \sum_{i=1}^n p_i^t(\omega) \psi_i^t(\omega),$$

$$l_0^t = l_0^t(\omega) = \min_{i=1, r_1^t} \{\gamma_{r_1^t}^{1,t} \langle D^t, f_i^{1,t}(\omega) \rangle\}, \quad l_1^t = l_1^t(\omega) = \min_{i=r_1^t+1, n} \{\gamma_i^{1,t} p_i^{*,t}\}.$$

**Подяка.** Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Юлії Степанівні Мішурі за постановку розглянутих у дисертації задач, цінні поради та підтримку в роботі.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Наведемо короткий огляд робіт за тематикою, що близька до теми дисертаційної роботи.

#### 1.1. Деякі класичні моделі фінансових ринків з не випадковою волатильністю

Незважаючи на те, що історія фінансових ринків бере свій початок більше шестисот років тому, ґрунтовні математичні дослідження пов'язаних із ними процесів почалися лише наприкінці XIX сторіччя. Значна частина дослідників висловлюють думку, що нова галузь математичної науки була започаткована Л. Башельє у [13]. У цій дисертаційній роботі було зокрема запропоновано застосування броунівського руху до моделювання еволюції цін цінних паперів та отримано формулу ціни опціона. Щоправда у ті часи опціони, принаймні у Франції, продавалися на умовах, відмінних від теперішніх: премія сплачувалася тільки у разі виконання опціона. Еволюція ціни активу у роботі Башельє задається формулою  $S(t) = \sigma B(t)$ , де  $\sigma$  – сталий коефіцієнт, що виражає волатильність активу,  $(B(t), t \geq 0)$  – броунівський рух. З огляду на встановлені правила розрахунків за опціоном вигідно виконувати опціон, коли  $S(T) > K - p$ , де  $K$  – страйкова ціна,  $p$  – ціна опціону. Вважаючи, що у момент укладення контракту очікувана вартість у момент виконання має бути рівна нулю, автор використовує функцію переходу броунівського руху, щоб отримати наступне рівняння відносно  $p$  :

$$\sigma \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\frac{(K-p-x)^2}{2\sigma^2(T-t)}} + (K-x-p) \Phi\left(\frac{K-p-x}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + x - K = 0,$$

де  $x$  – ціна активу у початковий момент часу,  $\Phi$  – функція стандартного нормального розподілу. Башельє зазначає, що якщо  $K - p = x$ , то розв'язком рівняння є  $p = \sigma \sqrt{(T - t)/2\pi}$ .

У наступні сімдесят років фінансова математика майже не розвивалася. Здебільшого це було пов'язане із тим, що не відбувалося суттєвого розвитку фінансових ринків через несприятливі політичні та економічні умови у багатьох розвинених країнах світу. Проте розвивався математичний апарат, що став у нагоді пізніше. Зокрема Н. Вінер у [14] встановив можливість визначення ймовірнісної міри на просторі неперервних функцій, що відповідає функції переходу броунівського руху. Наприкінці 1930-их років було представлено теорію мартингалів, визначні результати якої згодом було винайдено та опубліковано Дж. Дубом у [15]. Японський математик К. Іто увів до розгляду стохастичні диференціальні рівняння та розробив теорію, що пізніше отримала назву “числення Іто” (див. [16]).

Модель Башельє мала суттєвий недолік, – еволюція ціни активу лінійним чином залежала від броунівського руху, а тому ціна активу могла набувати від'ємних значень всупереч практичним міркуванням. П. Самуельсон у [17] представив модель, у якій еволюція ціни активу задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t). \quad (1.1)$$

Розв'язок (1.1) отримується за допомогою числення Іто:

$$S(t) = x \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right), \quad (1.2)$$

звідки  $\mathbb{E}S(t) = x e^{\mu t}$ , і у цьому випадку  $S(t) > 0$  з ймовірністю 1. Процес у правій частині (1.2) називається геометричним броунівським рухом.

Ця модель стала міцним підґрунтям для визначального для подальшого розвитку фінансової математики результату, який за кілька років отримали Ф. Блек та М. Шоулс [18]. У роботі побудовано модель, у якій за певних припущень можливо визначити справедливую вартість Європейського опціона

за відносно простою формулою. На відміну від моделі Башельє було представлено строге математичне обґрунтування моделі. Вагомі результати, що розвивали напрямок, заданий у [18], було опубліковано Р. Мертоном [19], [20]. Модель, стохастичне диференціальне рівняння у частинних похідних та формула вартості опціона Блека–Шоулса є загально відомими та не потребують окремого представлення у цьому розділі.

Не менш відомими є і недоліки моделі, які є наслідками технічного спрощення при моделюванні процесів, що відбуваються на реальних фінансових ринках. Серед них припущення про відсутність витрат на адміністрування портфеля, стала безризикова ставка доходності, стала волатильність, припущення про неперервність торгів.

Модель, запропонована у 1979 році Дж. Коксом, С. Россом та М. Рубінштейном [21], зіграла важливу роль у розвитку індустрії деривативів. Зрозуміла структура та просте застосування надали аналітикам можливість оцінювати широкий спектр деривативів у зручний спосіб. Біноміальна модель Кокса–Росса–Рубінштейна, є дискретною, що усуває один з недоліків моделі Блека–Шоулса. Встановлено, що ця модель надає більш точні результати при оцінюванні опціонів, особливо у випадку довгострокових контрактів.

Слабку збіжність в кожний фіксований момент часу біноміальної моделі ринку в схемі серій до моделі Блека–Шоулса було продемонстровано ще у перших роботах, що досліджували біноміальні моделі, зокрема у [21]. З того часу з'явилася значна кількість різних узагальнень та уточнень цієї збіжності (наприклад, [22]). В статті [23] наведено умови слабкої збіжності мір, що відповідають біноміальній та набагато більш загальним дограничним моделям, до міри, що відповідає граничному дифузійному процесу. Чимало робіт присвячено оцінкам швидкості збіжності цін опціонів за умов збіжності цін ризикових активів ([24, 25]). Проте біноміальні аналоги для “треків” залишаються недостатньо дослідженим і до сьогодні. Необхідність знаходження різноманітних дискретних моделей, асимптотично близьких до моделі Блека–Шоулса, диктувалася тим фактом, що реальні фінансові ринки є дискретни-

ми. Модель Блека–Шоулса є зручним та добре дослідженим наближенням більш реалістичних дискретних моделей. Тому дослідження асимптотичної поведінки моделей з дискретним часом при спрямуванні кількості періодів до нескінченності має цілком практичний інтерес.

## **1.2. Точне та наближене оцінювання опціонів у моделях фінансових ринків зі стохастичною волатильністю**

Одним з перспективних напрямків вдосконалення класичної моделі Блека–Шоулса є побудова та дослідження дифузійних моделей, у яких волатильність ризикового активу керується випадковим процесом. Емпіричні дослідження [26, 27] свідчать на користь того факту, що класична модель із сталою волатильністю не здатна відтворити важливі риси волатильності, що спостерігається на реальних фінансових ринках. Усвідомлення важливості дослідження та усунення недоліків моделі Блека–Шоулса привело до розширення теорії у трьох напрямках: моделі з залежною від часу невідповідною волатильністю, моделі з залежною від стану системи волатильністю і моделі зі стохастичною волатильністю. Дві перші з попередніх категорій моделей можна вважати проміжними між класичною моделлю і третьою категорією. Щоправда, увівши певні обмеження на ринку, найважливішим з яких є встановлення відносно короткого часового періоду, можна домогтися від менш складних моделей прийнятної точності.

Незважаючи на популярність досліджень моделей зі стохастичною волатильністю, коло розглядуваних моделей у сучасній літературі досить вузьке. З числа фундаментальних робіт у цьому напрямку можна виділити [28], [29], [30], [31]. Автори перерахованих досліджень розглядали ціну опціону як розв’язок диференціального рівняння у частинних похідних за двома змінними, ціною активу та волатильністю, отриманого у роботі [32]. Одну з перших таких моделей представлено у [28], де автори вважають волатильність ціни актива процесом, який у кожній точці траєкторії є квадратним коренем про-

цесу геометричного броунівського руху. Для випадку, коли процес волатильності не залежить від цінового процесу, знайдено наближення ціни опціону шляхом розкладу у степеневий ряд з урахуванням умовного розподілу ціни активу відносно середнього значення волатильності. У [29] процес, який задає еволюцію волатильності, вважається процесом Орнштейна–Уленбека. Цей процес володіє властивістю повернення до середнього, яка спостерігається у волатильності на реальних фінансових ринках ([33, 34]). У таких умовах автори описують розподіл вартості активу і застосовують результати для оцінки вартості опціону. Альтернативним вибором процесу волатильності є процес Кокса–Інгерсола–Роса ([31]). У роботах [31] та [29] отримано аналітичні формули із застосуванням оберненого перетворення Фур'є у випадку відсутності кореляції між ціновим процесом та процесом, що описує волатильність. На противагу цим підходам у [30] для розв'язання згаданого диференціального рівняння застосовується метод скінченних різниць, що дозволяє дослідити задачу у найбільш загальній постановці.

Зазначимо, що попри беззаперечну значущість отриманих результатів, у наведених роботах спостерігалися деякі спрощення (наприклад, відсутність властивості повернення до середнього або можливі від'ємні значення волатильності), які в певній мірі усувалися у подальших дослідженнях модифікованих моделей. Опубліковано велику кількість робіт із дослідженнями більш складних та більш реалістичних моделей. Розгорнутий огляд таких результатів наводиться у [36].

Результати, отримані у згаданих вище роботах, відкрили шляхи для нових досліджень. Зокрема, обернене перетворення Фур'є у різних варіаціях досі залишається популярним інструментом при виведенні аналітичних формул для цін опціонів у різноманітних моделях (широкий огляд застосувань перетворення Фур'є до проблеми оцінювання опціонів наведено у [37]). Серед більш пізніх робіт, у яких розглядаються питання відшукування точних або наближених значень цін опціонів, можна виділити [38], де аналітичний вираз для ціни опціону знайдено для класу негаусових моделей зі стохастичною во-

латильністю, яка задається процесом Орнштейна-Уленбека (див. також [39]). Згадаємо також результати зі статей [40, 41, 42], де автори встановлювали вигляд наближених та точних формул цін опціонів у різних моделях. Зокрема, у [40] досліджуються моделі дифузії зі стрибками, для яких застосуванням перетворення Фур'є отримано аналітичні вирази для ціни опціону. Стрибкові дифузії також розглядаються у [20, 43], а їх поєднання із стохастичною волатильністю у [44], [45], [46]. Грунтуючись на даних з реальних ринків, ці моделі потребують як стохастичної волатильності, так і стрибків, адже перша необхідна для пояснення варіації страйку на довгих проміжках часу, а стрибки – для пояснення варіації страйку на коротких проміжках часу. У [42] для моделі, у якій ціна активу еволюціонує відповідно до геометричного броунівського руху, а волатильність задається експонентою від процесу Орнштейна-Уленбека, застосовано поліноми Ерміта для отримання шуканого наближення. Автор [41] застосовує методи симетрії Лі для розв'язання згаданих вище диференціальних рівнянь у частинних похідних у моделі “3/2”, тобто у моделі, у якій волатильність є розв'язком стохастичного диференціального рівняння  $dY_t = Y_t(y - \alpha Y_t)dt + kY_t^{3/2}dW_t$ .

Зауважимо, що бажаною рисою процесу, який має задавати волатильність, є невід'ємність. Вибір у якості волатильності, наприклад, експоненційної функції від процесу Орнштейна-Уленбека надає моделі шуканої якості (див. [35, 42] і посилання у цих роботах).

Задачі існування еквівалентних (локальних) мартингальних мір розглядаються у різних постановках та із різним рівнем загальності у [34, 47, 48, 49]. Інколи автори, описавши модель, стверджують, що ризик-нейтральна міра існує та продовжують дослідження у ризик-нейтральній постановці задачі без визначення відповідної міри.

Перешкодою при точному обчисленні є те, що ціна опціону на акцію зі стохастичною волатильністю залежить від інтегрального функціонала, який, в свою чергу, залежить від всієї траєкторії процесу, що описує волатильність. Розподіл цього інтегрального функціоналу апріорі невідомий. Але за допомо-

гою числення Маллявена щільність розподілу функціонала від стохастичної волатильності можна знайти, що і зроблено в даній статті.

Дослідження задач фінансової математики методами числення Маллявена набуло поширення після представлення застосування формули Кларка–Окона до задачі формування оптимальних портфелів цінних паперів у [50]. У роботі [51] за допомогою числення Маллявена отримано формули для обчислення так званих “греків” – величин, що виражають чутливість цін деривативів, здебільшого опціонів, до змін параметрів моделі. Таке застосування залишається чи не найбільш поширеним і до сьогодні. Розвиток отримали і інші застосування числення Маллявена (див. [52, 53, 54] та посилання у цих джерелах).

Аналітичні формули для оцінювання опціонів часто важко застосувати на практиці та імплементувати у комп'ютерні моделі. Тому поряд із точними формулами багато дослідників розглядають різноманітні наближення. Зокрема дискретні апроксимації значно легше піддаються моделюванню та мають широке застосування на практиці.

Задача побудови дискретних аналогів неперервних моделей зі стохастичною волатильністю вивчається у широкому колі робіт, зокрема у [28, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Застосовуються різноманітні техніки, наприклад багаторівневий метод Монте–Карло [55], умовний метод Монте–Карло [57, 60], точна симуляція [57, 59], метод апроксимацій Іто–Тейлора [58]. У [61] досліджується швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом до моделі Блека–Шоулса. В роботі [62] розглядається дискретна апроксимаційна схема цін акцій, змодельованих геометричним процесом Орнштейна–Уленбека, оцінюється швидкість збіжності об'єктивних та справедливих цін опціонів.

Автори більшості робіт конструюють дискретні апроксимації як для процесу еволюції ціни активу, так і для процесу, що керує волатильністю ціни активу. Проте у даній роботі застосовано підхід, який дозволяє дискретизувати лише процес волатильності. Отриманий процес волатильності у дис-

кретному часі особливим чином усереднюється і імплементується у формулу для ціни опціона. Ціна опціона визначається умовно відносно траєкторії процесу волатильності, тому далі можна застосувати метод Монте–Карло. Крім того, оцінюється швидкість збіжності дискретної апроксимаційної схеми до неперервної в умовах заданої траєкторії процесу волатильності.

Проблема дискретизації моделі природнім чином пов'язана із проблемою відшукування дискретних наближень розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Ці питання глибоко досліджені та систематизовані у [63, 64, 65]. Найпростіша дискретна апроксимація – це стохастичне узагальнення апроксимаційної схеми Ейлера, також відома як схема Ейлера–Маруяма. Інший зручний для імплементації метод – схема Мільштейна [66]. Оскільки модель, що розглядається у даній роботі, є дифузійною із адитивним шумом, дві попередні апроксимаційні схеми співпадають. Слід зауважити, що як схема Ейлера, так і схема Мільштейна належать до класу апроксимацій Іто–Тейлора і мають швидкість збіжності 0.5 і 1 відповідно. Для деяких дифузійних схем можуть бути застосовані модифіковані апроксимаційні схеми, що забезпечують більш високу швидкість збіжності, проте це зазвичай супроводжується суттєвим збільшенням часу обчислень.

### 1.3. Дослідження питань арбітражу на фінансових ринках

З економічної точки зору арбітраж можна вважати ціновою аномалією на ринку, яка дозволяє учасникам отримувати прибуток з нульовою інвестицією і без ризику. Реальні фінансові ринки допускають арбітражні можливості. Проте зазвичай цими можливостями може користуватися обмежене коло учасників торгів і протягом обмеженого періоду часу. Економічна теорія стверджує, що ефективні ринки протягом дуже короткого часу самотійно зводять нанівець арбітражні можливості, які на них виникають. Дійсно, коли про арбітраж стає відомо учасникам ринку, всі вони намагаються експлуатувати його. Внаслідок цього попит на певні товари або активи змінюється,

а за ним змінюються і ціни, усуваючи арбітражну можливість. Якщо ж з якихось причин не всі поінформовані економічні агенти в змозі використати арбітраж, або ж ціни не можуть відреагувати на підвищений попит, то такий ринок не є ефективним, і учасники намагатимуться лишити його. Отже, припущення про безарбітражність, яке широко використовується у моделях фінансових ринків, незважаючи на невідповідність реальній практиці, має логічне обґрунтування.

Поняття арбітражу набуло широкого розгляду у рамках фінансової теорії, починаючи зі згаданих вище робіт [18, 19]. У моделях, де ціна активу задається геометричним броунівським рухом, автори статей отримували ціну європейського опціону безпосередньо з принципу відсутності арбітражу. Згодом було опубліковано роботи [67, 68, 69], де представлено перші визначні результати теорії арбітражу. У цих статтях умови відсутності арбітражу досліджуються у загальній постановці задачі, без прив'язки до конкретної моделі фінансового ринку, крізь призму теорії мартингалів. У [69] доведено теорему, яка пов'язує існування еквівалентної “розділяючої” міри з безарбітражністю типу “no free lunch” (NFL). Простими словами принцип “free lunch” можна пояснити так, – це форма арбітражу, яка полягає у тому, що інвестори, оперуючи простими підінтегральними виразами, можуть у деякий момент часу вивести частину грошей, а потім перейти до границі у відповідній топології і не мати збитку. У згаданих роботах розглядається широкий клас семімартингальних моделей, а застосування отриманих результатів до моделі Блека–Шоулса наводиться у [68] як окремий випадок.

Зв'язок відсутності або наявності арбітражу на ринку із існуванням мартингальних мір, який встановили автори вищезазначених робіт, відкрив нові можливості для застосування математичної теорії до проблем фінансової математики. Термін “фундаментальна теорема оцінювання активів” завдяки авторам [70] став загальноприйнятною назвою принципу, що встановлює зв'язок між арбітражем та мартингальними мірами на ринку. Однією з основних задач при розгляді питань безарбітражності є відшукання строгого матема-

тичного формулювання цього принципу. У [68], зокрема, ця задача розв'язана для випадку скінченних ймовірнісних просторів.

Для більш загального (і більш близького до реальності) випадку нескінченного ймовірнісного простору фундаментальна теорема оцінювання активів у скінченному дискретному часі доведена у [71]. Визначальність результату була швидко оцінена дослідниками, а сама теорема отримала назву згідно з прізвищами авторів: теорема Даланга–Мортон–Віллінгера. Доведення у загальному випадку не є простим розширенням доведення для скінченного ймовірнісного простору. Згодом теорема Даланга–Мортон–Віллінгера отримала велику кількість альтернативних доведень (див. [72, 73, 74, 75, 76]). Ряд робіт (наприклад, [77, 78, 79]) усувають деякі відомі недоліки теореми, серед яких припущення про відсутність обмежень на короткі продажі та обсяги інвестування, витрат на здійснення транзакцій та інших. Чимало досліджень присвячено розширенню та узагальненню теореми Даланга–Мортон–Віллінгера. Зокрема, у [80] розглядаються можливі узагальнення теореми у контексті теорії випадкових полів Кайролі–Уолша, а автори [81] доводять її для випадку, коли рішення інвестора базуються на неповній інформації (наприклад, через затримку в отриманні даних).

У 1990-их Ф. Дельбаен та В. Шахермайер присвятили велику кількість робіт вивченню питань теорії арбітражу. Зокрема, у [82, 75] введено означення відсутності арбітражу у формі “no free lunch with vanishing risk” (NFLVR), яке має цілком природний фінансовий сенс, та доведено що у моделі, у якій ціновий процес є семімартингалом, безарбітражність у формах NFL та NFLVR співпадають. Автори дійшли фундаментального результату, що встановлює зв'язок NFLVR із існуванням на ринку локальних мартингальних мір.

## РОЗДІЛ 2

# СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ “ГРЕЦЬКИХ” СИМВОЛІВ ДЛЯ ЦІН ОПЦІОНІВ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ТИПУ: ВІД ДИСКРЕТНОГО ЧАСУ ДО НЕПЕРЕРВНОГО

У розділі 2 розглядається поведінка так званих “греків” – величин, що характеризують ринок і активи на ньому в моделі Блека–Шоулса. Введено у розгляд дискретні аналоги цих величин у біноміальній моделі ринку і показано слабку збіжність цих аналогів до греків за умови, що кількість періодів прямує до нескінченності.

Розділ побудовано наступним чином: у першому підрозділі представлено граничну модель Блека–Шоулса і наводиться означення грека, який є основним предметом дослідження цієї статті, – “дельти”. У третьому підрозділі визначено дограничну модель – симетричну біноміальну модель Кокса–Росса–Рубінштейна, описано основні її властивості та введено поняття дельта-хеджу. У четвертому підрозділі доведено слабку збіжність мір, що відповідають симетричній біноміальній моделі, до міри, що відповідає граничному процесу Блека–Шоулса. П’ятий підрозділ містить допоміжні результати, необхідні для доведення слабкої збіжності греків. У шостому підрозділі формулюється та доводиться основний результат розділу: теорема про слабку збіжність дискретного аналогу дельти у біноміальній моделі до самої дельти при спрямуванні кількості періодів до нескінченності. Висновки сформульовано у сьомому підрозділі.

## 2.1. Гранична модель Блека–Шоулса та компоненти, пов’язані зі стратегіями і капіталом

Нехай  $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}\}$  – повний ймовірнісний простір з фільтрацією  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ , що задовольняє стандартні умови (див., наприклад, [83]). Розглянемо фінансовий ринок, що задається двома активами – безризиковим та ризиковим. Нехай еволюцію безризикового активу задано формулою  $B(t) = e^{rt}$ , а ціну ризикового активу задано випадковим процесом  $S(t) = S_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t^{\mathbb{P}}\}$ ,  $S_0 > 0$ ,  $\{W_t^{\mathbb{P}}, \mathfrak{F}, t \geq 0\}$  – вінерівський процес відносно міри  $\mathbb{P}$ . Введемо процес  $X(t) = S(t)e^{-rt}$ , що є еволюцією дисконтованої вартості ризикового активу. Для такої моделі ринку встановлено (див., наприклад, [84]) існування та єдиність ризик-нейтральної (мартингальної) міри  $\mathbb{P}^*$ , відносно якої процес  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  є мартингалом та допускає зображення  $X(t) = S_0 \exp\{\sigma W_t^{\mathbb{P}^*} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$ . Надалі, не зменшуючи загальності, вважаємо  $S_0 = 1$ , та будемо опускати верхній індекс в позначенні вінерівського процесу, вважаючи, що це вінерівський процес відносно міри  $\mathbb{P}$ .

Нехай  $V(S, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \{(S(T) - K)^+ | \mathfrak{F}_t\}$  – справедлива ціна Європейського опціону купівлі зі страйковою ціною  $K$  та часом виконання  $T$  за умови, що поточна ціна ризикового активу дорівнює  $S$ . Запишемо рівняння Блека–Шоулса в частинних похідних ([84]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad t \in [0, T].$$

Так звані грецькі символи, або “греки” відповідають різним частинним похідним функції  $V$ . Зокрема, означимо  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  і надалі розглядатимемо у цій роботі саме цього представника “греків”, який називатимемо “дельтою”. Дельта характеризує зміну вартості опціону або портфелю опціонів в залежності від ціни активу  $S$ . Дельта визначає міру кореляції між змінами вартості опціону і змінами ціни відповідного активу.

З формули Блека–Шоулса для ціни опціону ([84])

$$V(S(t), t) = S(t)\Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-)$$

отримуємо відомий вираз для  $\Delta$  в термінах фіксованого  $S(t) = x$ :

$$\Delta(x, T - t) = \frac{\partial V}{\partial x} = \Phi(d_+(x, T - t)),$$

де  $\Phi(x)$  – функція стандартного нормального розподілу,

$$d_{\pm}(x, T - t) = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Задача полягає у знаходженні дискретного аналогу дельти у введєній далі моделі ринку Кокса–Росса–Рубінштейна і дослідженні її збіжності до  $\Delta(x, T - t)$ .

## 2.2. Симетрична модель Кокса–Росса–Рубінштейна

Опишемо дограничну модель ринку в  $n$ -й серії. Введемо ймовірнісний простір

$$\Omega^{(n)} := \{-1, +1\}^n = \{\omega^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) | y_i^{(n)} \in \{-1, +1\}\},$$

а також дві числові послідовності  $a_n, b_n, n \geq 1$ . Позначимо  $k$ -ту координату через  $Y_k(\omega^{(n)}) := y_k^{(n)}$  для  $\omega^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$ , і нехай

$$R_k^{(n)}(\omega^{(n)}) := a_n \frac{1 - Y_k(\omega^{(n)})}{2} + b_n \frac{1 + Y_k(\omega^{(n)})}{2}.$$

Вважаємо, що догранична модель в  $n$ -й серії є  $n$ -періодною моделлю, і це модель Кокса–Росса–Рубінштейна з відсотковою ставкою

$$r_n = \frac{rT}{n},$$

що задає еволюцію безризикового активу  $B_k^{(n)} = (1 + r_n)^k, k = 0, \dots, n$ , одним ризиковим активом  $S_k^{(n)}, k = 0, \dots, n$ , та доходами, які визначаються за формулою  $R_k^{(n)} = (S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)})/S_{k-1}^{(n)}, k = 1, \dots, n$ . Доходи незалежні і набувають одного з двох можливих значень:  $a_n$  і  $b_n, k = 1, \dots, n$ .

У такій моделі при переході до наступного періоду ціна активу здійснює стрибок від значення  $S_{k-1}^{(n)}$  до більшого значення  $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1 + b_n)$  (якщо  $b_n >$

0), або ж до меншого  $-S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1 + a_n)$ , (якщо  $a_n < 0$ ). Далі розглядається саме такий випадок.

Не обмежуючи загальності, як і для граничної моделі, вважаємо далі, що ціна активу в початковий момент часу  $S_0^{(n)} = 1$ . Введемо процес дисконтованої вартості ризикового активу

$$X_k^{(n)} := \frac{S_k^{(n)}}{(1 + r_n)^k} = \prod_{i=1}^k \frac{1 + R_i^{(n)}}{1 + r_n}.$$

Фільтрація на розглядуваному просторі задається виразом

$$\mathfrak{F}_k^{(n)} := \sigma(S_1^{(n)}, \dots, S_k^{(n)}) = \sigma(X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}), \quad k = 1, \dots, n,$$

і нехай  $\mathfrak{F}^{(n)} = \mathfrak{F}_n^{(n)}$ . Об'єктивну ймовірнісну міру на просторі  $(\Omega^{(n)}, \mathfrak{F}^{(n)})$  позначимо  $\mathbb{P}^{(n)}$ . Припустимо, що модель є симетричною, тобто

$$\hat{a}_n = 1 + a_n = \exp\{-\sigma\sqrt{T/n}\}, \quad \hat{b}_n = 1 + b_n = \exp\{\sigma\sqrt{T/n}\} \quad (2.1)$$

для деякого заданого  $\sigma > 0$ . Оскільки

$$\sqrt{n}r_n \rightarrow 0, \quad \sqrt{n}a_n \rightarrow -\sigma\sqrt{T}, \quad \sqrt{n}b_n \rightarrow \sigma\sqrt{T} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

то  $a_n < r_n < b_n$ , починаючи з деякого номера  $n_0$ . Тоді для  $n \geq n_0$  така модель є безарбітражною, ринок повним, причому єдина еквівалентна мартингальна міра  $\mathbb{P}_n^*$  характеризується рівністю (див., наприклад, [84])

$$\mathbb{P}_n^* \left\{ R_k^{(n)} = b_n \right\} =: p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

При цьому з (2.2) неважко отримати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^* = 1/2$ . Таку модель назвемо симетричною біноміальною моделлю.

Нехай  $C$  – деяке платіжне зобов'язання, вимірне відносно  $\sigma$ -алгебри  $\mathfrak{F}_n^{(n)}$ . Тоді існує борелева функція  $h$  така, що дисконтоване платіжне зобов'язання  $H = C e^{-rT}$  допускає зображення

$$H = h(S_1^{(n)}, \dots, S_n^{(n)}).$$

Повнота ринку забезпечує досяжність платіжного зобов'язання  $C$ .

**Означення 2.1.** Торгівельна стратегія  $\bar{\xi}^{(n)} = (\xi_B^{(n)}, \xi_S^{(n)})$  називається *самофінансованою*, якщо  $\bar{\xi}_k^{(n)} \bar{S}_k^{(n)} = \bar{\xi}_{k+1}^{(n)} \bar{S}_k^{(n)}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

**Означення 2.2.** Самофінансована торгівельна стратегія  $\bar{\xi}^{(n)} = (\xi_B^{(n)}, \xi_S^{(n)})$  називається *реплікуючою стратегією* для досяжного платіжного зобов'язання  $C$ , якщо  $C = \bar{\xi}_n^{(n)} \bar{S}_n^{(n)}$  м.н..

**Означення 2.3.** Процес вартості  $V = (V_k^{(n)})_{k=0, \dots, n}$ , асоційований з торгівельною стратегією  $\bar{\xi}^{(n)}$ , визначається наступним чином:

$$V_0^{(n)} := \bar{\xi}_1^{(n)} \bar{X}_0^{(n)}, \quad V_k^{(n)} := \bar{\xi}_k^{(n)} \bar{X}_k^{(n)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

де  $\bar{X}_k^{(n)} = (1, X_k^{(n)})$ ,  $k = 0, \dots, n$ , – процес дисконтованої вартості активів.

Має місце наступне твердження ([84], ст. 250).

**Твердження 2.1.** Процес вартості реплікуючої стратегії для платіжного зобов'язання  $H$  дорівнює

$$V_i^{(n)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}[H | \mathfrak{F}_i^{(n)}], \quad i = 0, \dots, n,$$

і допускає зображення

$$V_i^{(n)}(\omega) = v_i^{(n)}(S_1^{(n)}(\omega), \dots, S_i^{(n)}(\omega)),$$

де функція  $v_i^{(n)}$  задається наступним чином:

$$v_i^{(n)}(x_0, \dots, x_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} \left[ h(x_0, \dots, x_i, x_i S_1^{(n)}, \dots, x_i S_{n-i}^{(n)}) \right]. \quad (2.3)$$

Функцію  $v_i^{(n)}$  називатимемо *функцією капіталу*. Зазначимо, що функція капіталу може бути визначена рекурсивно, причому шляхом оберненої рекурсії:

$$v_n^{(n)}(x_0, \dots, x_n) = h(x_0, \dots, x_n),$$

$$v_i^{(n)}(x_0, \dots, x_i) = p_n^* v_{i+1}^{(n)}(x_0, \dots, x_i, x_i \hat{b}_n) + (1 - p_n^*) v_{i+1}^{(n)}(x_0, \dots, x_i, x_i \hat{a}_n).$$

Називатимемо реплікуючу стратегію для зобов'язання  $H$  *дельта-хеджем* та позначатимемо її  $\Delta_i^{(n)} := \Delta_i^{(n)}(S_1^{(n)}(\omega), \dots, S_{i-1}^{(n)}(\omega))$ . Встановимо вигляд дельта-хеджу для Європейського опціону купівлі

$$C^{(n)} = f(S_n^{(n)}) = \left( S_n^{(n)} - K \right)^+$$

на ринку з дискретним часом, описаному вище.

**Лема 2.1.** *Реплікуюча стратегія для Європейського опціону купівлі має вигляд*

$$\Delta_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)}) = (1 + r_n)^k \frac{v_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)} \hat{b}_n) - v_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)} \hat{a}_n)}{S_{k-1}^{(n)} (\hat{b}_n - \hat{a}_n)}, \quad (2.4)$$

де

$$v_k^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(\hat{b}_n^i \hat{a}_n^{n-i-k} y - K)^+}{(1 + r_n)^n} C_{n-k}^i (p_n^*)^i (1 - p_n^*)^{n-i-1}. \quad (2.5)$$

*Доведення.* Рівність (2.4) випливає з твердження 5.45, [84], ст. 252, яке встановлює загальний вигляд реплікуючої стратегії  $\Delta_k^{(n)}$ .

У нашому випадку  $H = h(S_n^{(n)})$ ,  $h(x) = (x - K)^+ / (1 + r_n)^n$ . Таким чином,  $H$  залежить лише від вартості активу у термінальний момент часу. В цьому випадку  $V_k^{(n)}$  залежить тільки від поточної вартості активу:

$$V_k^{(n)}(\omega) = v_k^{(n)}(S_k^{(n)}(\omega)).$$

Більше того, формула для визначення функції капіталу (2.3) зводиться до вигляду математичного сподівання функції, що залежить від біноміально розподіленої величини з параметром  $p_n^*$ :

$$v_k^{(n)}(x_k) = \sum_{i=0}^{n-k} h(x_k \hat{b}_n^i \hat{a}_n^{n-i-k}) C_{n-k}^i (p_n^*)^i (1 - p_n^*)^{n-i-k},$$

звідки випливає (2.5). □

Зважаючи на таке означення дельта-хеджу, природно сподіватися, що саме він і буде шуканим аналогом дельти. Дріб у правій частині (2.4) є певним дискретним аналогом похідної функції капіталу, тому є підстави вважати, що при переході до границі, якщо функція капіталу буде збігатися до граничного значення, отримаємо дельту.

### 2.3. Слабка збіжність симетричної моделі

#### Кокса–Росса–Рубінштейна до моделі Блека–Шоулса

Оскільки дельта-хедж та дельта опціону визначені на ринках з різною часовою структурою, позначимо  $k_t^n$  те ціле число, для якого  $\frac{k_t^n T}{n} \leq t < \frac{(k_t^n + 1)T}{n}$ , причому  $0 \leq k_t^n \leq n$ . Таким чином,  $k_t^n = \lceil \frac{nt}{T} \rceil$ . Введемо послідовність випадкових процесів

$$S_n(t) = S_{k_t^n}^{(n)}.$$

Позначимо  $\xrightarrow{d}$  слабку збіжність за розподілом,  $\xrightarrow{P}$  збіжність за ймовірністю та  $\xrightarrow{W}$  слабку збіжність мір, що відповідають випадковим процесам. Зауважимо, що згідно з теоремою 5.53 та наслідком 5.55 з [84], має місце слабка збіжність одновимірних розподілів  $S_{k_t^n}^{(n)} \xrightarrow{d} S(t)$  для кожного  $t \in [0, T]$ . Щоб довести слабку збіжність мір  $\mathbb{Q}_n$ , що відповідають випадковим процесам  $S_n$ , до міри  $\mathbb{Q}$ , що відповідає випадковому процесу  $S$ , застосуємо теорему 3.3 з [23], яку сформулюємо наступним чином.

**Теорема 2.1.** *Нехай  $B_t^{(n)} = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{k_t^n}$ ,  $S_t^{(n)} = \prod_{k=1}^{k_t^n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)$ , причому виконуються наступні умови:*

- (i)  $\sup_{1 \leq k \leq n} |R_k^{(n)}| \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$ ;
- (ii) для будь-якого  $a \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} & \lim_{C \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n^* \left( \sum_{1 \leq k \leq n} |\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)} \mathbf{1}_{|R_k^{(n)}| \leq a} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)})| \geq C \right) \\ &= \lim_{C \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n^* \left( \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}((R_k^{(n)})^2 \mathbf{1}_{|R_k^{(n)}| \leq a} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) \geq C \right) = 0 \end{aligned}$$

- (iii) для будь-якого  $\varepsilon > 0, a \in (0, 1]$

$$\lim_n \mathbb{P}_n^* \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \sum_{1 \leq k \leq \lceil \frac{nt}{T} \rceil} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)} \mathbf{1}_{|R_k^{(n)}| \leq a} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) - rt \right| \geq \varepsilon \right) = 0;$$

- (iv) для будь-якого  $\varepsilon > 0, a \in (0, 1]$

$$\lim_n \mathbb{P}_n^* \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \sum_{1 \leq k \leq \lceil \frac{nt}{T} \rceil} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)})^2 \mathbf{1}_{|R_k^{(n)}| \leq a} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) - \sigma^2 t \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Тоді має місце слабка збіжність мір

$$\mathbb{Q}_n \xrightarrow{W} \mathbb{Q}.$$

Позначимо число  $R := r - \frac{\sigma^2}{2}$ . За допомогою теореми 2.1 доведемо наступний результат.

**Теорема 2.2.** *Симетрична біноміальна модель задовольняє умови (i) – (iv) теореми 2.1, і значить, має місце слабка збіжність мір*

$$\mathbb{Q}_n \xrightarrow{W} \mathbb{Q}.$$

*Доведення.* Нагадаємо, що  $R_k^{(n)} = b_n = \exp\{\sigma\sqrt{T/n}\} - 1 = \sigma\sqrt{T/n} + \frac{\sigma^2 T}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  та  $R_k^{(n)} = a_n = \exp\{-\sigma\sqrt{T/n}\} - 1 = -\sigma\sqrt{T/n} + \frac{\sigma^2 T}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  з імовірностями

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n^* \left\{ R_k^{(n)} = b_n \right\} &= p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n} \\ &= \frac{\sigma\sqrt{T/n} + \frac{RT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sigma\sqrt{T/n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{R\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

та

$$1 - p_n^* = \frac{\sigma\sqrt{T/n} - \frac{RT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sigma\sqrt{T/n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{R\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

відповідно. Виконання умови (i) очевидне. Тепер, для будь-якого  $a \in (0, 1]$ , починаючи з деякого номера  $n$ , маємо

$$|\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)} \mathbf{1}_{|R_k^{(n)}| \leq a} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)})| = |\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)})| = |\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)})| = \frac{rT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}((R_k^{(n)})^2 \mathbf{1}_{|R_k^{(n)}| \leq a} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}((R_k^{(n)})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_k^{(n)})^2 = \frac{\sigma^2 T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

тому умова (ii) виконується, і ці обчислення також з очевидністю показують, що виконуються умови (iii) та (iv), що й доводить теорему.  $\square$

**Зауваження 2.1.** Тепер, використовуючи метод Скорохода побудови випадкових процесів на одному ймовірнісному просторі, ми можемо перенести

всі випадкові процеси  $S, S_n$  на один імовірнісний простір зі збереженням скінченновимірних розподілів, і при цьому будемо мати збіжність дограничних процесів до граничних в кожній точці з імовірністю 1.

## 2.4. Допоміжні результати

Почнемо з теореми, яка дозволить відшукати альтернативне зображення для  $\Delta_k^{(n)}$ , більш зручне для дослідження збіжності, ніж (2.4). Згідно із зауваженням 2.1, всі цінові процеси вважаємо заданими на одному ймовірнісному просторі. Це дозволяє опустити випадкову величину  $S_{k-1}^{(n)}$  в означенні  $\Delta_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)})$  і розглядати збіжність  $\Delta_k^{(n)}(x_n)$  за умови, що числа послідовність  $x_n$  збігається до деякого фіксованого  $x > 0$ . Спочатку розглянемо  $\Delta_k^{(n)}(x)$  при кожному фіксованому  $x > 0$ .

**Теорема 2.3.** *Для кожного  $x > 0$  знайдеться такий номер  $n = n(x)$ , починаючи з якого існують такі цілі числа  $m_a = m_a(x)$  та  $m_b = m_b(x)$ , що  $0 \leq m_a(x) \leq m_b(x) \leq n - k_t^n$  та  $0 < p_n^1 < 1$ , і такі, що дельта-хедж для Європейського опіону купівлі допускає зображення*

$$\Delta_{k_t^n}^{(n)}(x) = P(n - k_t^n, m_a(x), p_n^1) + M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) 1\{m_a(x) \neq m_b(x)\}, \quad (2.7)$$

де  $p_n^1 = \frac{\hat{b}_n}{(1 + r_n)} p_n^*$ ,  $P(L, l, p)$  – ймовірність  $l$  та більше успіхів у  $L$  випробуваннях Бернуллі з параметром  $p$ , і

$$M_k^{(n)}(x, p) = \frac{\left(x \hat{b}_n^{m_b+1} \hat{a}_n^{n-m_b-k} - K\right)}{(1 + r_n)^{n-k}} C_{n-k}^{m_b} p^{m_b} (1 - p)^{n-m_b-k}. \quad (2.8)$$

*Доведення.* З (2.5) легко бачити, що ненульові доданки в сумах, що фігурують у визначенні (2.4) як  $v_k^{(n)}(x \hat{a}_n)$  і  $v_k^{(n)}(x \hat{b}_n)$ , розташовуються послідовно і з'являються, тільки починаючи з деяких номерів  $m_a(x)$  і  $m_b(x)$ , відповідно. Знайдемо ці номери. Спочатку відзначимо, що найбільший доданок, який відповідає значенню індексу сумування  $i = n - k_t^n$ , має порядок  $x \exp\{\sigma \sqrt{nT}(1 - \frac{t}{T})\} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , отже знайдеться номер  $n(x)$ , починаючи з якого число доданків ненульове. Далі, для надходження доданків в

першу суму має виконуватись нерівність  $\left(x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-k-m_b} - K\right)^+ > 0$ . Запишемо її в еквівалентному вигляді

$$x\hat{b}_n^{m_b+1}\hat{a}_n^{n-k-m_b} > K$$

і перетворимо при  $k = k_t^n$ :

$$(m_b + 1) \ln \hat{b}_n + (n - k_t^n - m_b) \ln \hat{a}_n + \ln x > \ln K,$$

або

$$m_b \ln \left(\frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}\right) > \ln K - (n - k_t^n) \ln \hat{a}_n - \ln x - \ln \hat{b}_n.$$

Зауважимо, що  $\ln \hat{b}_n = \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}}$ ,  $\ln \hat{a}_n = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}}$ , та  $\ln \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n} = \frac{2\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}}$ , звідки

$$m_b > \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n - k_t^n - 1).$$

Таким чином, можна покласти

$$m_b = 0 \vee \left( \left[ \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n - k_t^n - 1) \right] + 1 \right) \quad (2.9)$$

для першої суми і аналогічно

$$m_a = 0 \vee \left( \left[ \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n - k_t^n + 1) \right] + 1 \right)$$

для другої. Очевидно, що для  $n \geq n(x)$  можливий один з двох випадків:  $m_a > m_b$  або  $m_a = m_b = 0$ . У будь-якому разі  $\Delta_{k_t^n}^{(n)}(x)$  міститиме ненульові елементи обох сум на значеннях  $i$  від  $m_a$  до  $n - k_t^n$ . Розглянемо випадок  $m_a > m_b$ . Елементи першої суми будуть ненульовими на значеннях  $i$  від  $m_b$  до  $m_a$ . Проте виявляється, що існує лише одне таке значення ( $i$  тому воно рівне  $m_b$ ). Дійсно,

$$m_a - m_b =$$

$$\left[ \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n - k_t^n + 1) \right] - \left[ \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}(n - k_t^n - 1) \right] = 1.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Delta_{k_t^n}^{(n)}(x) &= \frac{\sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} C_{n-k_t^n}^i (p_n^*)^i (1-p_n^*)^{n-i-k_t^n} x \hat{a}_n^{n-k_t^n-i} \hat{b}_n^i (\hat{b}_n - \hat{a}_n)}{(1+r_n)^n x (\hat{b}_n - \hat{a}_n)} \\ &\quad \times (1+r_n)^{k_t^n} + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\ &= \sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} \frac{C_{n-k_t^n}^i (p_n^*)^i (1-p_n^*)^{n-i-k_t^n} \hat{a}_n^{n-i-k_t^n} \hat{b}_n^i}{(1+r_n)^{n-k_t^n}} \\ &\quad + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\ &= \sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} C_{n-k_t^n}^i \left( \frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^* \right)^i \left( \frac{\hat{a}_n}{(1+r_n)} (1-p_n^*) \right)^{n-k_t^n-i} \\ &\quad + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\ &= \sum_{i=m_a}^{n-k_t^n} C_{n-k_t^n}^i (p_n^1)^i (1-p_n^1)^{n-k_t^n-i} + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\} \\ &= P(n - k_t^n, m_a(x), p_n^1) + M_{k_t^n}^{(n)} 1\{m_a \neq m_b\}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

де  $p_n^1 = \frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^*$ ,  $1-p_n^1 = \frac{\hat{a}_n}{(1+r_n)} (1-p_n^*)$  (цей запис є коректним, оскільки

$p_n^* = \frac{r_n - a_n}{\hat{b}_n - a_n} = \frac{r_n - \hat{a}_n + 1}{\hat{b}_n - \hat{a}_n}$ , і тому  $\frac{\hat{b}_n}{(1+r_n)} p_n^* + \frac{\hat{a}_n}{(1+r_n)} (1-p_n^*) = 1$ ).  $\square$

Далі нам також знадобиться певний аналог нерівності Ессеєна, який ми наведемо нижче без доведення (див. [85], ст. 111).

**Теорема 2.4.** *Нехай  $Y_j^n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , – незалежні випадкові величини. Нехай для  $\mathbb{E}Y_j^n = 0$ ,  $\mathbb{E}(Y_j^n)^2 = \sigma_j^2 > 0$ ,  $\mathbb{E}|Y_j^n|^3 < \infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Покладемо*

$$B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad F_n(x) = P\left(B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n Y_j^n < x\right), \quad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|Y_j^n|^3.$$

Тоді

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq AL_n, \tag{2.11}$$

де  $A$  – деяка додатна стала,  $\Phi(x)$  – функція стандартного нормального розподілу.

## 2.5. Збіжність $\Delta_k^{(n)}$ до $\Delta(x, T - t)$

Теоремою 2.3 ми зобразили дискретний грек  $\Delta_k^{(n)}$  у вигляді суми двох компонент і далі розглядатимемо їх поведінку при спрямуванні  $n$  до нескінченності окремо. Далі всюди припускаємо, що  $0 < t < T$ , тому що при  $t = 0$  та  $t = T$  висновки аналогічні, але доведення простіші. Спершу доведемо наступний результат.

**Теорема 2.5.** *Послідовність  $M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  рівномірно по будь-якій обмеженій множині значень  $x > 0$ .*

*Доведення.* Зауважимо, що з міркувань, викладених у доведенні теореми 2.3, з рівності  $m_a > m_b$  випливає, що  $m_a > 0$ , і тому функцію максимуму з означення  $m_a$  можна опустити. Зазначимо, що

$$m_a > m_b \geq \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \rightarrow \infty.$$

при  $n \rightarrow \infty$ , і  $m_b = m_a - 1 \rightarrow \infty$ . Більше того, при  $n \rightarrow \infty$

$$n - k_t^n - m_b \approx \frac{\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1}{2}n\left(1 - \frac{t}{T}\right) \rightarrow \infty.$$

Для застосування локальної теореми Муавра-Лапласа (див. [86], ст. 67) залишається довести рівномірну обмеженість по  $n$  послідовності

$$\alpha(m_b, n) := \frac{m_b - (n - k_t^n)p_n^*}{\sqrt{(n - k_t^n)p_n^*(1 - p_n^*)}}.$$

Застосуємо формули (2.6) та (2.9) і запишемо цю послідовність у такому вигляді:

$$\alpha(m_b, n) = \frac{\frac{\sqrt{n}\ln(K/x)}{2\sigma\sqrt{T}} - (n - k_t^n)\frac{R\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}} + O(1)}{\sqrt{n\left(1 - \frac{t}{T}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{R^2T}{4\sigma^2n}\right) + O(1)}} \rightarrow \frac{\ln(K/x) - (T - t)R}{\sqrt{T - t}}. \quad (2.12)$$

Отже, при кожному  $x > 0$  послідовність  $\alpha(m_b, n), n \geq 1$  є обмеженою. Таким чином, всі умови локальної теореми Муавра-Лапласа виконуються, і для достатньо великих  $n$  має місце рівність

$$M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) = \frac{\left(x \hat{b}_n^{m_b+1} \hat{a}_n^{n-m_b-k_t^n} - K\right) e^{-\varphi(n)}}{(1+r_n)^{n-k_t^n} \sqrt{n-k_t^n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (2.13)$$

де  $\varphi(n) \geq 0, n \geq 1$  – деяка функція (точний її вигляд нас не цікавить, проте у [86] докладно показаний спосіб його визначення).

Нехай  $x \leq C$ . Перший дріб у зображенні (2.13) перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\left(x \hat{b}_n^{m_b+1} \hat{a}_n^{n-m_b-k_t^n} - K\right)}{(1+r_n)^{n-k_t^n}} \\ &\leq C \exp\left\{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}(2m_b+1 - (n-k_t^n))\right\} \leq K + o(1). \end{aligned}$$

Отже,  $M_{k_t^n}^{(n)}(x, p_n^*) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  рівномірно по будь-якій обмеженій множині значень  $x$ .  $\square$

Сформулюємо та доведемо основний результат.

**Теорема 2.6.** *Нехай догранична модель є симетричною біноміальною, а гранична є моделлю Блека–Шоулса. Тоді дельта-хедж для Європейського опціону купівлі у дограничній моделі слабко збігається до дельти Європейського опціону купівлі у моделі Блека–Шоулса, коли кількість періодів у дискретній моделі прямує до нескінченності, тобто*

$$\Delta_k^{(n)}(S_{k_t^n}^{(n)}) \xrightarrow{d} \Delta(S(t), T-t), \quad n \rightarrow \infty.$$

*Доведення.* З попереднього зрозуміло, що нам достатньо перевірити, що

$$\Delta_k^{(n)}(x_n) \rightarrow \Delta(x, T-t), \quad n \rightarrow \infty$$

за умови, що  $x_n \rightarrow x > 0$ . Застосуємо зображення (2.7) з теореми 2.3. За теоремою 2.5, в цьому зображенні  $M_{k_t^n}^{(n)}(x_n, p_n^*) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отже, для доведення шуканої збіжності  $\Delta_k^{(n)}(x_n)$  до  $\Delta(x, T-t)$  тепер достатньо показати

збіжність до  $\Delta(x, T - t)$  виразу  $P(n - k_t^n, m_a(x_n), p_n^1)$  з (2.10), де замість фіксованого  $x$  підставлено  $x_n$ . З метою технічного спрощення будемо позначати просто  $m_a$  замість  $m_a(x_n)$ .

Розглянемо суму  $P(n - k, m_a, p_n^1) = \sum_{i=m_a}^{n-k} C_{n-k}^i (p_n^1)^i (1 - p_n^1)^{n-i-k}$ , яка дорівнює ймовірності  $m_a$  або більше успіхів у схемі з  $n - k$  випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху  $p_n^1$  у кожному випробуванні. Тобто

$$\sum_{i=m_a}^{n-k} C_{n-k}^i (p_n^1)^i (1 - p_n^1)^{n-i-k} = 1 - P(\nu_n < m_a),$$

де

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n-k} X_i^n, \quad X_i^n = \begin{cases} 0 & \text{з йм. } q_n^1 \\ 1 & \text{з йм. } p_n^1 \end{cases}, \quad q_n^1 := 1 - p_n^1.$$

Таким чином, треба довести, що

$$\begin{aligned} P(\nu_n < m_a) &\rightarrow 1 - \Phi(d_+(x, T - t)) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(K/x) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Наступним кроком доведення є застосування до нашої суми теореми 2.4. Враховуючи, що  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} X_j^n = p_n^1$ , центруємо доданки, тобто покладемо  $Y_j^n = X_j^n - p_n^1$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Тоді

$$Y_j^n = \begin{cases} -p_n^1 & \text{з йм. } q_n^1 \\ 1 - p_n^1 & \text{з йм. } p_n^1 \end{cases}, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} Y_j^n = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Визначимо другий і третій моменти:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} (Y_j^n)^2 &= p_n^1 (1 - p_n^1)^2 + (p_n^1)^2 q_n^1 = (1 - p_n^1) (p_n^1 (1 - p_n^1) + (p_n^1)^2) = q_n^1 p_n^1, \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} |Y_j^n|^3 &= (1 - p_n^1)^3 p_n^1 + (p_n^1)^3 (1 - p_n^1) \\ &= p_n^1 - 3(p_n^1)^2 + 3(p_n^1)^3 - (p_n^1)^4 + (p_n^1)^3 - (p_n^1)^4 \\ &= p_n^1 (2(p_n^1)^3 - 4(p_n^1)^2 + 3p_n^1 - 1). \end{aligned}$$

Очевидно, що  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} |Y_j^n|^3 < \infty$ ,  $B_n = \sum_{j=1}^{n-k} p_n^1 q_n^1 = (n - k) p_n^1 q_n^1$ .

Отже, умови теореми 2.4 виконуються, і нерівність (2.11) для розглядуваної суми має місце. Розглянемо величину  $L_n$ , враховуючи, що  $k = k_t^n$ :

$$\begin{aligned} L_n &= B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*} |Y_j^n|^3 = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} p_n^1 \left( 2(p_n^1)^3 - 4(p_n^1)^2 + 3p_n^1 - 1 \right)}{\sqrt{\left( (n-k)p_n^1 q_n^1 \right)^3}} \\ &= - \frac{(n-k)p_n^1 \left( 2(p_n^1)^3 - 4(p_n^1)^2 + 3p_n^1 - 1 \right)}{\sqrt{\left( (n-k)p_n^1 q_n^1 \right)^3}} = - \frac{2(p_n^1)^3 - 4(p_n^1)^2 + 3p_n^1 - 1}{\sqrt{(n-k)p_n^1 (q_n^1)^3}} \\ &= \frac{(1-p_n^1) \left( 2(p_n^1)^2 - 2p_n^1 + 1 \right)}{\sqrt{(n-k)p_n^1 (q_n^1)^3}} = \frac{2(p_n^1)^2 - 2p_n^1 + 1}{\sqrt{(n-k)p_n^1 q_n^1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тобто  $L_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , звідки отримуємо, що

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y) - \Phi(y)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Згадаємо, що

$$F_n(y) = P \left( B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n-k} Y_j^n < y \right) = P \left( \frac{\sum_{j=1}^{n-k} X_j^n - (n-k)p_n^1}{\sqrt{(n-k)p_n^1 q_n^1}} < y \right)$$

за визначенням  $Y_j^n$ . Очевидно, що  $F_n(\alpha_{m_a}) = P(\nu_n < m_a)$ , де

$$\alpha_{m_a} := \frac{m_a - (n - k_t^n)p_n^1}{\sqrt{(n - k_t^n)p_n^1 q_n^1}}.$$

Отже, треба довести, що

$$F_n(\alpha_{m_a}) \rightarrow \Phi \left( \frac{\ln(K/x) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).$$

З цією метою перетворимо  $\alpha_{m_a}$ . Спочатку використаємо розклад (2.6) і перетворимо ймовірності:

$$p_n^1 = \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{1 + \frac{rT}{n}} p_n^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \sigma + \frac{R}{\sigma} \right) \sqrt{\frac{T}{n}} \right) + o\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

звідки випливає аналогічний асимптотичний розклад для  $q_n^1$ . Тепер, аналогічно до (2.12),

$$\alpha_{m_a} = \frac{m_a(x_n) - (n - k_t^n)p_n^1}{\sqrt{(n - k_t^n)p_n^1q_n^1}} = \frac{\ln(K/x_n) - (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (2.16)$$

Позначимо

$$d(x) = \frac{\ln(K/x) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

і оцінимо

$$\begin{aligned} |F_n\left(d(x_n) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \Phi(d(x))| &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y) - \Phi(y)| + |\Phi(d(x)) \\ &\quad - \Phi\left(d(x_n) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , чим і завершується доведення теореми.  $\square$

## 2.6. Висновки до розділу 2

У симетричній біноміальній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна утворено аналог грецького символу “дельта” – функціоналу від ціни Європейського опціону у моделі Блека–Шоулса. Встановлено, що аналогом найуживанішого у моделях ринку Блека–Шоулса грецького символу “дельти” є так званий дельта-хедж у біноміальній моделі. Із застосуванням модифікації нерівності Ессеєна доведено, що при спрямуванні кількості періодів в моделях з дискретним часом до нескінченності послідовності цих аналогів збігаються до значень самих греків у граничній моделі.

### РОЗДІЛ 3

## ОЦІНЮВАННЯ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ОПЦІОНУ КУПІВЛІ У МОДЕЛІ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ, ЯКА ЗАДАЄТЬСЯ ПРОЦЕСОМ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА. ТОЧНІ ФОРМУЛИ

У цьому розділі розглядається модель ринку Блека–Шоулса, модифікована з метою урахування стохастичної природи волатильності, яка спостерігається на реальних фінансових ринках. Для волатильності, заданої функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, доведено існування на ринку еквівалентної мартингальної міри. Встановлено аналітичний вираз для ціни опціону відносно мінімальної мартингальної міри для випадку, коли випадкові процеси, що керують волатильністю і ціною активу, є некорельованими. Точний вираз для ціни опціону відшукується із застосуванням оберненого перетворення Фур'є та гауссової властивості процесу Орнштейна–Уленбека.

Розділ побудовано наступним чином: у першому підрозділі визначено загальну модель. Другий підрозділ представляє означення та допоміжні результати, необхідні для подальшого дослідження. Третій підрозділ досліджує питання існування еквівалентних (локальних) мартингальних мір і арбітражних можливостей у загальній моделі. У четвертому підрозділі визначено окремий випадок загальної моделі і розглянуто проблему оцінювання Європейського опціону. У п'ятому підрозділі виводиться аналітична формула для обчислення ціни опціону.

### 3.1. Дифузійна модель зі стохастичною волатильністю, що керується процесом Орнштейна–Уленбека

Нехай  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(B,W)}, t \geq 0\}, \mathbb{P}\}$  – повний ймовірнісний простір з фільтрацією, породженою корельованими процесами Вінера  $\{B_t, W_t, 0 \leq t \leq T\}$ . Розглядається модель ринку з одним ризиковим активом, ціна якого еволюціонує відповідно до геометричного броунівського руху  $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ , а волатильність ціни задається деякою функцією від стохастичного процесу. Таким чином, ринок задається парою стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dB_t, \quad (3.1)$$

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + k dW_t. \quad (3.2)$$

Позначимо  $S_0 = S$  та  $Y_0 = Y$  – не випадкові початкові значення процесів, визначених рівняннями (3.1)–(3.2).

У наступних параграфах, якщо не буде вказано інше, дослідження будуть проводитися у наступних припущеннях:

- (A1) процеси Вінера  $B$  та  $W$  є корельованими з коефіцієнтом кореляції  $\rho \in [-1; 1]$ , тобто  $dB_t dW_t = \rho dt$ ;
- (A2) функція волатильності  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  є вимірною, відділеною від нуля деякою сталою  $c$ :

$$\sigma(x) \geq c > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

і задовольняє умови  $\int_0^T \sigma^2(Y_t) dt < \infty$  м.н.;

- (A3)  $\alpha, \mu$  і  $k$  – додатні сталі.

Умови, вказані у припущенні (A2) виконуються, наприклад, для вимірної функції  $\sigma(x)$ , для якої нерівність  $c \leq \sigma^2(x) \leq C$  виконується для  $0 < x < T$  і деяких сталих  $0 < c < C$ . Крім того, за умови квадратичної інтегровності  $\sigma(Y_s)$  розв'язок стохастичного диференціального рівняння (3.1) задається

виразом

$$S_t = S_0 \exp \left( \mu t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(Y_s) ds + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s \right), \quad (3.3)$$

звідки випливає, що  $S_t$  неперервна. Тоді добуток  $\sigma(Y_s)S_t$  є квадратично інтегровним:  $\int_0^T \sigma^2(Y_t) S_t^2 dt < \infty$  м.н.

Єдиним розв'язком рівняння Ланжевена (3.2) є так званий процес Орнштейна–Уленбека. Завдяки своїм властивостям цей процес є зручним інструментом для моделювання волатильності на фінансових ринках. Однією з найбільш важливих у цьому контексті є властивість повернення до середнього. В українськомовній та російськомовній літературі цей термін не надто поширений. Він є перекладом англійського терміну “mean-reversion”. Сутність цього поняття полягає у тому, що прагнення процесу до свого середнього значення зростає разом із відстанню, на яку він від цього значення віддалюється. Крім того, процес Орнштейна–Уленбека є гауссовим з наступними характеристиками:

$$E[Y_t] = Y_0 e^{-\alpha t}, \quad \text{Var}[Y_t] = \frac{k^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Наступними важливими властивостями процесу Орнштейна–Уленбека є марковість та той факт, що він допускає явне зображення

$$Y_t = Y_0 e^{-\alpha t} + k \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s.$$

Процес Орнштейна–Уленбека є єдиним нетривіальним процесом, який поєднує такі характеристики як стаціонарність, гауссовість та марковість.

Процес  $W$  можна зобразити у вигляді

$$W_t = \rho B_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t,$$

де  $Z$  процес Вінера, незалежний від  $B$ . Надалі використовуватимемо саме таке зображення. Зауважимо, що  $\mathcal{F}^{(B,W)} = \mathcal{F}^{(B,Z)}$ , де фільтрація  $\{\mathcal{F}_t^{(B,Z)}, 0 \leq t \leq T\}$  породжується незалежними процесами Вінера  $B$  and  $Z$ .

### 3.2. Визначення та попередні результати

Більшу частину відомостей, представлених у цьому параграфі, у розгорнутому вигляді можна знайти у [87], [76] (інші посилання вказано нижче).

Розглядається ринок, на якому представлено один ризиковий актив і один безризиковий. Еволюції цін цих активів задаються відповідно семімартингалом  $(\hat{S}_t)_{t=0}^T$  та детермінованим процесом  $(B_t)_{t=0}^T = e^{rt}$ , де  $r$  – стала безризикова відсоткова ставка. Введемо процес дисконтованої ціни ризикового активу  $(S_t)_{t=0}^T := e^{-rt} \hat{S}_t$ .

Агенти, що діють на ринку, можуть продавати або купувати цей актив, і приймають рішення щодо побудови портфеля на підставі інформації, наявної у момент рішення. Формалізувати цей принцип можна за допомогою наступного означення.

**Означення 3.1.** Торгівельною стратегією називається передбачуваний процес  $(\pi_t)_{t=0}^T$ . Значення  $\pi_t$  цього процесу представляють кількість активу  $\hat{S}$  у портфелі у момент часу  $t$ .

Нам знадобляться деякі попередні означення для того, щоб ввести важливе поняття допустимої самофінансованої стратегії. Нехай семімартингал  $S$  допускає зображення у вигляді суми  $S = S_0 + A + M$ , де  $A$  – процес із обмеженою варіацією,  $M$  – локальний мартингал. Згідно з, наприклад, [76], ст.635, існує неспадний адаптований (до фільтрації  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) процес  $C = (C_t)_{t \geq 0}$ ,  $C_0 = 0$ , і адаптовані процеси  $c = (c_t)_{t \geq 0}$ ,  $\hat{c} = (\hat{c}_t)_{t \geq 0}$ , такі, що

$$A_t = \int_0^t c_s dC_s, \quad t > 0,$$

а квадратична варіація процесу  $M$  задається рівністю

$$[M, M]_t = \int_0^t \hat{c}_s dC_s.$$

**Означення 3.2.** Нехай  $\pi$  передбачуваний процес. Говоритимемо, що:

- $\pi \in L_{var}(A)$ , якщо для всіх  $\omega \in \Omega : \int_0^t \pi_s c_s dC_s < \infty, t > 0$ ;
- $\pi \in L_{loc}^q(M)$ ,  $q \geq 1$ , якщо існує послідовність моментів зупинки  $\tau_n$ , що прямує до нескінченності при  $n \rightarrow \infty$ , така, що

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_n} \pi^2 \hat{c}_s dC_s \right]^{q/2} < \infty;$$

- $\pi \in L^q(S)$ , якщо існує зображення  $S = S_0 + A + M$ , таке, що  $\pi \in L_{var}(A) \cap L_{loc}^q(M)$ .

**Означення 3.3.** Торгівельна стратегія називається допустимою (відносно цінового процесу  $S$ ), якщо  $\pi \in L^1(S)$ .

**Означення 3.4.** Допустима торгівельна стратегія називається самофінансованою (відносно цінового процесу  $S$ ), та використовується позначення  $\pi \in SF(S)$ , якщо для вартості портфеля  $S_t^\pi = \pi_t S_t$  справедливе зображення  $S_t^\pi = S_0^\pi + \int_0^t \pi_s dS_s$ .

Нижче визначимо два особливих класи торгівельних стратегій разом із відповідними класами  $\mathcal{F}_T$ -вимірних функцій виплат  $\psi = \psi(\omega)$ , які можна мажорувати доходами від стратегій, що належать відповідним класам.

**Означення 3.5.** Для кожного  $a \geq 0$  визначимо

$$\Pi_a(S) = \{\pi \in SF(S) : S_t^\pi \geq -a, t \in [0, T]\}$$

та

$$\Psi_+(S) = \{\psi \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) : \psi \leq \int_0^T (\pi_s, dS_s) \text{ для деякого } \pi \in \Pi_+(S)\},$$

де  $\Pi_+(S) = \bigcup_{a \geq 0} \Pi_a(S)$ .

**Означення 3.6.** Нехай  $g(S_t) = g^0 + g^1 S_t$ ,  $g^0 \geq 0$ ,  $g^1 \geq 0$ . Визначимо

$$\Pi_g(S) = \{\pi \in SF(S) : S_t^\pi \geq -g(S_t), t \in [0, T]\}$$

та

$$\Psi_g(S) = \{\psi \in L_g(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) : \psi \leq \int_0^T (\pi_s, dS_s) \text{ для деякого } \pi \in \Pi_g(S)\},$$

де  $L_g(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  є множиною  $\mathcal{F}_T$ -вимірних випадкових величин  $\psi$ , таких, що  $|\psi| \leq g(S_T)$ .

Позначатимемо замикання множин  $\Psi_+(S)$  і  $\Psi_g(S)$  відносно норм  $\|\cdot\|_\infty$  і  $\|\cdot\|_g$  (означення цих норм наведено у [76], ст.648) через  $\overline{\Psi}_+(S)$  і  $\overline{\Psi}_g(S)$  відповідно.

Слідуючи позначенням, представленим у [76], перейдемо до основних означень відсутності арбітражу.

**Означення 3.7.** Будемо говорити, що на ринку виконується властивість  $\overline{NA}_+$  (або, що те саме, що ринок є  $\overline{NA}_+$ ), якщо

$$\overline{\Psi}_+(S) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) = \{0\},$$

де  $L_\infty^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  – підмножина невід’ємних випадкових величин у  $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ .

**Означення 3.8.** Будемо говорити, що на ринку виконується властивість  $\overline{NA}_g$  (або, що те саме, що ринок є  $\overline{NA}_g$ ), якщо

$$\overline{\Psi}_g(S) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) = \{0\}.$$

Відомі дві теореми, що встановлюють необхідні і достатні умови відсутності арбітражу на ринку в термінах еквівалентних (локальних) мартингальних мір. Важливою умовою, яку буде використано нижче, є локальна обмеженість цінового процесу.

**Означення 3.9.** Ймовірнісна міра  $\mathbb{Q}$ , еквівалентна до об’єктивної міри  $\mathbb{P}$ , називається еквівалентною (локальною) мартингальною мірою, якщо дисконтований ціновий процес є (локальним) мартингалом за мірою  $\mathbb{Q}$ .

**Означення 3.10.** Стохастичний процес  $S$  називається локально обмеженим, якщо існує послідовність моментів зупинки  $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ , що зростає м.н. до нескінченності при  $n \rightarrow \infty$ , така, що зупинені процеси  $S_t^{\tau_n} = S_{t \wedge \tau_n}$  є рівномірно обмеженими для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 3.1 ([76]).** *Нехай семімартингал  $S$  є локально обмеженим. Тоді ринок має властивість  $\overline{NA}_+$  тоді і тільки тоді, коли на ринку існує еквівалентна локальна мартингальна міра.*

**Теорема 3.2 ([76]).** *Нехай семімартинал  $S$  є локально обмеженим. Тоді ринок має властивість  $\overline{NA}_g$  тоді і тільки тоді, коли на ринку існує еквівалентна мартигальна міра.*

Наступна теорема є наслідком твердження 6.1 з [47] і визначає конструкцію еквівалентних локальних мартигальних мір у моделі (3.1)–(3.2).

**Теорема 3.3.** *Ймовірнісна міра  $\mathbb{Q}$ , еквівалентна до об'єктивної міри  $\mathbb{P}$  на  $\mathcal{F}_T$ , є локальною мартигальною мірою для процесу  $S$ , визначеного моделлю (3.1) – (3.2), на  $\mathcal{F}_T$  тоді і тільки тоді, коли існує прогресивно вимірний процес  $\nu = (\nu_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $\int_0^T \nu_s^2 ds < \infty$   $\mathbb{P}$ -м.н., для якого справедливе твердження: локальний мартинал  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $L_t = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ , що має вигляд*

$$L_t = \exp \left( \int_0^t (r - \mu) / \sigma(Y_s) dB_s + \int_0^t \nu_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t ((r - \mu)^2 / \sigma^2(Y_s) + \nu_s^2) ds \right), \quad (3.4)$$

задовольняє умову  $\mathbb{E}L_T = 1$ .

Позначимо через  $\mathcal{LM}^S(\mathbb{P})$  і  $\mathcal{M}^S(\mathbb{P})$  множини еквівалентних локальних мартигальних мір та еквівалентних мартигальних мір на ринку, заданому моделлю (3.1)–(3.2), відповідно. Очевидно, що  $\mathcal{M}^S(\mathbb{P}) \subset \mathcal{LM}^S(\mathbb{P})$ .

Відомо, що має місце розклад  $\mathbb{P}$ -семімартинала  $S$  у суму локального  $\mathbb{P}$ -мартинала  $M$  і адаптованого процесу з обмеженою варіацією  $A$ :  $S = S_0 + M + A$ .

**Означення 3.11.** *Ймовірнісна міра  $\mathbb{Q}$ , еквівалентна до об'єктивної міри  $\mathbb{P}$ , називається мінімальною мартигальною мірою, якщо  $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$  на  $\mathcal{F}_0$ , і будь-який квадратично інтегровний  $\mathbb{P}$ -мартинал, строго ортогональний до процесу  $M$ , є локальним  $\mathbb{Q}$ -мартигалом.*

Мінімальна мартигальна міра визначається єдиним чином (див. [88]).

### 3.3. Питання відсутності арбітражу у загальній моделі

Дослідимо питання безарбітражності визначеного вище моделлю (3.1)–(3.2) ринку. Зауважимо, що далі матимемо справу із недисконтованим процесом  $S$ , визначеним у розділі 3.1.

**Теорема 3.4.** *Ринок, визначений моделлю (3.1)–(3.2) з умовами (A1)–(A3):*

- (i) *має властивість  $\overline{NA}_+$ ;*
- (ii) *має властивість  $\overline{NA}_g$ , якщо для деякої еквівалентної локальної мартингальної міри  $\mathbb{Q}$  виконується наступна нерівність*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_0^T \sigma^2(Y_s) X_s^2 ds < \infty. \quad (3.5)$$

*Доведення.* (i) Оскільки  $S$  – неперервний процес, то він є локально обмеженим. Тоді з теореми 3.1 випливає, що для доведення першої частини твердження теореми достатньо показати, що  $\mathcal{LM}^S(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ .

Розглянемо процес  $L_t$ , визначений у (3.4), з  $\nu = (\nu_t)_{0 \leq t \leq T} = 0$ . Нехай  $L_T = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ . З огляду на теорему 3.3 достатньо довести, що за вказаного вибору  $\nu$  має місце рівність

$$\mathbb{E}L_T = 1. \quad (3.6)$$

У свою чергу для цього достатньо виконання умови Новікова:

$$\mathbb{E} \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T ((r - \mu)^2 / \sigma^2(Y_s) + \nu_s^2) ds \right) < \infty. \quad (3.7)$$

З відділеності функції  $\sigma$  від нуля (припущення (A2)) і нашого вибору  $\nu$  випливає, що нерівність (3.7) виконується. Отже,  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{LM}^S(\mathbb{P})$ , що і доводить твердження частини (i) теореми.

(ii) Покажемо тепер, що міра  $\mathbb{Q}$ , побудована при доведенні частини (i) теореми, є еквівалентною мартингальною мірою. Позначимо  $\alpha(s) := (r - \mu) / \sigma(Y_s)$ . До міри  $\mathbb{Q}$ , яка є еквівалентною до міри  $\mathbb{P}$  і визначається похідною

Радона–Нікодима  $L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_T$ , можна застосувати теорему Гірсанова і зробити висновок, що процеси  $B_t^{\mathbb{Q}} := B_t - \int_0^t \alpha(s)ds$ ,  $Z_t^{\mathbb{Q}} := Z_t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , є процесами Вінера відносно міри  $\mathbb{Q}$ . Ціновий процес за мірою  $\mathbb{Q}$  є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(Y_t)S_t dB_t^{\mathbb{Q}},$$

звідки отримуємо наступне зображення для дисконтованого цінового процесу  $X_t := e^{-rt} S_t$ :

$$X_t = S + \int_0^t \sigma(Y_s)X_s dB_s^{\mathbb{Q}}. \quad (3.8)$$

Отже, оскільки з припущення (A2), як було вказано вище, впливає квадратична інтегровність  $\sigma(Y_s)X_s$  на  $[0, T]$ ,  $X_t$  є мартингалом. Тоді  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{M}^S(\mathbb{P})$ , і за теоремою (3.2) ринок  $(S, Y)$  має властивість  $\overline{NA}_g$ .  $\square$

Для доведення того факту, що ринок має властивості  $\overline{NA}_g$  і  $\overline{NA}_+$ , було встановлено існування однієї еквівалентної мартингальної міри. Однак виявляється, що насправді на ринку існує ціле сімейство таких мір. Дійсно, дисконтований ціновий процес має вигляд (3.8), а відтак є мартингалом за умови квадратичної інтегровності  $\sigma(Y_s)X_s$  при будь-якому виборі процесу  $\nu$ .

**Лема 3.1.** *Нехай ринок визначено моделлю (3.1)-(3.2), виконуються припущення (A1)-(A3) і додаткова умова (3.5), і міра  $\mathbb{Q}$  така, що виконується наступна нерівність:*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \nu_s^2 ds \right) < \infty.$$

Тоді  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{M}^S(\mathbb{P})$ .

Оскільки на ринку є більше однієї мартингальної міри, ринок є неповним. Кожна еквівалентна мартингальна міра на ринку визначається процесом  $\nu(s) = \nu(s, Y_s, S_s)$ , асоційованим із нею. У фінансовій літературі процес  $\nu_s$  називається ринковою ціною ризику волатильності.

За еквівалентною мартингальною мірою  $\mathbb{Q} := \mathbb{Q}^\nu$  пара процесів  $(S_t, Y_t)$  має наступне зображення:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(Y_t)S_t dB_t^{\mathbb{Q}}, \\ dY_t &= \left( -\alpha Y_t - k \left( \rho \frac{\mu - r}{\sigma(Y_t)} + \nu(t) \sqrt{1 - \rho^2} \right) \right) dt + k dW_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

де процеси

$$\begin{aligned} B_t^{\mathbb{Q}} &= B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(Y_s)} ds, \\ W_t^{\mathbb{Q}} &= \rho B_t^{\mathbb{Q}} + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^{\mathbb{Q}}, \\ Z_t^{\mathbb{Q}} &= Z_t + \int_0^t \nu(s) ds, \end{aligned}$$

є процесами Вінера відносно  $\mathbb{Q}$  за теоремою Гірсанова, причому  $B^{\mathbb{Q}}$  і  $Z^{\mathbb{Q}}$  некорельовані.

У ризик-нейтральній моделі (3.9) процес, що визначає еволюцію волатильності, набуває незручного для дослідження вигляду, адже  $Y$  більше не є процесом Орнштейна–Уленбека, розв'язок відповідного диференціального рівняння в аналітичній формі відшукати не видається можливим. Тому далі ми переходимо до дослідження звужень загальної моделі, які визначатимуться наборами припущень щодо поведінки та вигляду окремих параметрів моделі.

### 3.4. Випадок некорельованих процесів

Визначимо оновлений набір припущень:

(B1) процеси Вінера  $B$  і  $W$  некорельовані, тобто  $\rho = 0$ ;

(B2)=(A2);

(B3)=(A3).

Припущення (B1) спрощує ризик-нейтральну модель до наступного ви-

гляду:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(Y_t)S_t dB_t^{\mathbb{Q}}, \\ dY_t &= (-\alpha Y_t - k\nu(t))dt + kdZ_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

де

$$\begin{aligned} B_t^{\mathbb{Q}} &= B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(Y_s)} ds, \\ Z_t^{\mathbb{Q}} &= Z_t + \int_0^t \nu(s) ds \end{aligned}$$

– некорельовані процеси Вінера відносно  $\mathbb{Q}$ .

Мета подальшого дослідження – оцінити Європейський опціон купівлі у (3.10). Обмежимося відшукуванням формули для ціни опціону відносно мінімальної мартингальної міри. У цьому контексті нам стане у нагоді наступний результат.

**Твердження 3.1.** *Еквівалентна мартингальна міра  $\mathbb{Q}$  на ринку, визначеному моделлю (3.10), є мінімальною тоді і тільки тоді, коли процес  $\nu$ , асоційований з мірою  $\mathbb{Q}$ , тотожно рівний нулю.*

Необхідність доводиться цілком аналогічно до доведення леми 13.3 [48]. Обернене твердження теореми впливає з властивості єдиності мінімальної мартингальної міри.

Розв’язок стохастичного диференціального рівняння, що визначає еволюцію ціни активу, має наступний вигляд:

$$S_t = S \exp\left\{rt + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(Y_s)ds\right\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.11)$$

Для фіксованої траєкторії  $Y_s$  аргумент експоненційної функції у правій частині (3.11) є гауссовим процесом, і  $S_t$ ,  $1 \leq t \leq T$ , має логнормальний розподіл з  $\ln S_t \sim N\left(\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_t^2)t, \bar{\sigma}_t^2 t\right)$ , де  $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_t^2(Y_s) := \frac{1}{t} \int_0^t \sigma^2(Y_s)ds$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Цей факт є визначальним для відшукування виразу для ціни Європейського опціону купівлі.

Ціна Європейського опціону купівлі у момент часу 0 відносно мінімальної мартингальної міри визначається наступною загальною формулою:

$$V_0 = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+.$$

Застосуємо телескопічну властивість математичного сподівання і перетворимо попередній вираз таким чином:

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leq s \leq T\}\}. \quad (3.12)$$

Внутрішнє математичне сподівання є умовним відносно траєкторії  $Y_s, 0 \leq s \leq T$ , а тому фактично є ціною Блека–Шоулса для моделі із не випадковою залежною від часу волатильністю. Згідно з лемою 2.1 з [89] внутрішнє математичне сподівання у (3.12) має таке зображення:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leq s \leq T\} \\ &= e^{\ln S + rT} \Phi\left(\frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_0\sqrt{T}}\right) \\ & \quad - K\Phi\left(\frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_0\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

де  $\bar{\sigma}_t := \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^T \sigma^2(Y_s) ds} \geq 0$ ,  $\Phi$  – функція стандартного нормального розподілу. Зауважимо, що  $\bar{\sigma}_0^2(Y_s) = \hat{\sigma}_T^2(Y_s)$ . Вираз у лівій частині можна трактувати як середнє значення волатильності у період часу від поточного моменту до часу виконання опціону. У свою чергу вираз у правій частині являє собою середню волатильність у періоді часу від початкового до поточного.

Зауважимо, що внутрішнє математичне сподівання є зростаючою функцією  $\bar{\sigma}_0^2$  (див. лему 3.1 з [89]). Саме таку поведінку можна очікувати від ціни Блека–Шоулса європейського опціону купівлі.

Беручи до уваги вигляд внутрішнього інтеграла, доходимо висновку, що задля того, щоб відшукати аналітичний вираз для ціни опціону  $V_0$ , необхідно досліджувати та перетворювати математичне сподівання  $\Phi$ . Альтернативний підхід полягає у застосуванні на цьому етапі методу Монте-Карло.

### 3.5. Відшукування аналітичного виразу для ціни опціону

З рівностей (3.12)-(3.13) можна зробити висновок, що відшукування формули для ціни опціону вимагає виведення точної формули для математичного сподівання  $\Phi$ . У цьому розділі з цією метою буде застосовано обернене перетворення Фур'є після перетворення правої частини (3.13).

Введемо не випадкові функції  $\sigma_i = \sigma_i(s)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  вигляду

$$\sigma_{1,2}(s) = \frac{s}{\sqrt{T}} \mp \frac{\sqrt{s^2 T - 2T(\ln(S/K) + rT)}}{T}, \quad (3.14)$$

$$\sigma_{3,4}(s) = \frac{-s}{\sqrt{T}} \mp \frac{\sqrt{s^2 T + 2T(\ln(S/K) + rT)}}{T}. \quad (3.15)$$

Оберемо області визначення кожної з вищевказаних функцій таким чином, щоб гарантувати невід'ємність виразів під знаком квадратного кореня, тобто:  $s^2 T \geq 2T(\ln(S/K) + rT)$  для  $\sigma_1, \sigma_2$ , і  $s^2 T \geq -2T(\ln(S/K) + rT)$  для  $\sigma_3, \sigma_4$ .

**Лема 3.2.** *Нехай ринок описується моделлю (3.10) з припущеннями (B1)-(B3),  $\mathbb{Q}$  є мінімальною мартингальною мірою,  $V_0$  – ціна європейського опціону купівлі у початковий момент часу. Тоді має місце наступне зображення:*

1) для  $\ln(S/K) + rT \geq 0$  і  $k = \sqrt{2(\ln(S/K) + rT)}$ :

$$\begin{aligned} V_0 = & S e^{rT} \left( \Phi(k) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s)) \right. \\ & \left. + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_2(s))) e^{-s^2/2} ds \right) \\ & - K \left( \Phi(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^\infty \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_4(s)) e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{-\infty}^0 \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_4(s)) e^{-s^2/2} ds \right) \right); \end{aligned} \quad (3.16)$$

2) для  $\ln(S/K) + rT < 0$  і  $l = \sqrt{-2(\ln(S/K) + rT)}$  :

$$\begin{aligned}
 V_0 = S e^{rT} & \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\infty} \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_2(s)) e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\
 & \left. \left. - \int_{-\infty}^0 \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_2(s)) e^{-s^2/2} ds \right) \right) \\
 & - K \left( \Phi(-l) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-l} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s)) \right. \\
 & \left. + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_4(s))) e^{-s^2/2} ds \right).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Доведення. З (3.12) і (3.13) маємо:

$$V_0 = S e^{rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_1)) - K \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_2)),$$

де  $d_1$  і  $d_2$  визначаються наступним чином:

$$d_1 = \frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_0\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \bar{\sigma}_0\sqrt{T}. \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-s^2/2} ds \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{I}_{\{d_1 > 0\}} \int_0^{d_1} e^{-s^2/2} ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{I}_{\{d_1 < 0\}} \int_{d_1}^0 e^{-s^2/2} ds.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_1)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \mathbb{Q}(s < d_1) e^{-s^2/2} ds \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \mathbb{Q}(s > d_1) e^{-s^2/2} ds.
 \end{aligned}$$

Ймовірності, які є частиною підінтегральних виразів, можна представити

у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(s < d_1) &= \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2 T - s\bar{\sigma}_0\sqrt{T} + \ln(S/K) + rT > 0\right), \\ \mathbb{Q}(s > d_1) &= \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2 T - s\bar{\sigma}_0\sqrt{T} + \ln(S/K) + rT < 0\right).\end{aligned}$$

Аналогічно для  $\Phi(d_2)$  виконується

$$\begin{aligned}\Phi(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-s^2/2} ds = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{I}_{\{d_2 > 0\}} \int_0^{d_2} e^{-s^2/2} ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{I}_{\{d_2 < 0\}} \int_{d_2}^0 e^{-s^2/2} ds.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_2)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \mathbb{Q}(s < d_2) e^{-s^2/2} ds \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \mathbb{Q}(s > d_2) e^{-s^2/2} ds.\end{aligned}$$

Ймовірності з підінтегральних виразів мають наступне зображення:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(s < d_2) &= \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2 T + s\bar{\sigma}_0\sqrt{T} - \ln(S/K) - rT < 0\right), \\ \mathbb{Q}(s > d_2) &= \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2 T + s\bar{\sigma}_0\sqrt{T} - \ln(S/K) - rT > 0\right).\end{aligned}$$

Розв'язки квадратних рівнянь, що відповідають описаним вище квадратним нерівностям, можуть не існувати, тому розглянемо далі наступні можливості для дискримінантів:

- 1) дискримінант  $D_{12} := s^2 T - 2T(\ln(S/K) + rT)$  є квадратичною формою відносно  $s$ . Маємо два варіанти:
  - 1.1)  $\ln(S/K) + rT > 0$ . Тоді для  $k = \sqrt{2(\ln(S/K) + rT)}$  :  $D_{12} < 0$ ,  $s \in (-k; k)$ ;  $D_{12} > 0$ ,  $s \in (-\infty; -k) \cup (k; \infty)$ . За таких умов має

місце наступне зображення для  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_1))$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_1)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^k e^{-s^2/2} ds + \int_k^{\infty} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s)) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_2(s))) e^{-s^2/2} ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-k} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_2(s)) - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s))) e^{-s^2/2} ds. \end{aligned}$$

1.2)  $\ln(S/K) + rT \leq 0$ . Тоді для всіх  $s \in \mathbb{R}$  :  $D_{12} > 0$ . За таких умов має місце наступне зображення для  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_1))$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_1)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s)) \\ &\quad + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_2(s))) e^{-s^2/2} ds \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_2(s)) - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s))) e^{-s^2/2} ds. \end{aligned}$$

2) дискримінант  $D_{34} := s^2T + 2T(\ln(S/K) + rT)$  є квадратичною формою відносно  $s$ . Маємо два варіанти:

2.1)  $\ln(S/K) + rT < 0$ . Тоді для  $l = \sqrt{-2(\ln(S/K) + rT)}$  :  $D_{34} < 0$ ,  $s \in (-l; l)$ ;  $D_{34} > 0$ ,  $s \in (-\infty; -l) \cup (l; \infty)$ . За таких умов має місце наступне зображення для  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_2))$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_2)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_l^{\infty} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_4(s)) \\ &\quad - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s))) e^{-s^2/2} ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-l}^0 e^{-s^2/2} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-l} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s)) + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_4(s))) e^{-s^2/2} ds \right). \end{aligned}$$

2.2)  $\ln(S/K) + rT \geq 0$ . Тоді для всіх  $s \in \mathbb{R}$  :  $D_{34} > 0$ . За таких умов

має місце наступне зображення для  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_2))$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Phi(d_2)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_4(s)) \\ &\quad - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s))) e^{-s^2/2} ds \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s)) + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_4(s))) e^{-s^2/2} ds. \end{aligned}$$

Поєднуючи описані вище випадки, отримуємо наступний вираз для ціни опціону:

1) для  $\ln(S/K) + rT \geq 0$ :

$$\begin{aligned} V_0 &= S e^{rT} \left( \Phi(k) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_k^{\infty} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_2(s))) e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-\infty}^{-k} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_2(s)) - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s))) e^{-s^2/2} ds \right) \right) \quad (3.20) \\ &- K \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\infty} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_4(s)) - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s))) e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-\infty}^0 (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s)) + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_4(s))) e^{-s^2/2} ds \right) \right); \end{aligned}$$

2) для  $\ln(S/K) + rT < 0$  :

$$\begin{aligned}
V_0 = & S e^{rT} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^\infty (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s)) \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_2(s)) \right) e^{-s^2/2} ds \right. \\
& \left. - \int_{-\infty}^0 (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_2(s)) - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_1(s))) e^{-s^2/2} ds \right) \\
& - K \left( \Phi(-l) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_l^\infty (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_4(s)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s)) \right) e^{-s^2/2} ds \right. \\
& \left. - \int_{-\infty}^{-l} (\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_3(s)) + \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 > \sigma_4(s))) e^{-s^2/2} ds \right). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що  $\bar{\sigma}_0 \geq 0$ , і деякі з ймовірностей, описаних вище тотожно рівні нулю. Тоді (3.20) і (3.21) спрощуються до зображень (3.16) і (3.17) відповідно.  $\square$

Нехай  $S_i \subset \mathbb{R}$  – множини, на яких  $\sigma_i(s)$ ,  $i = \overline{1,4}$ , додатні. Легко переконатися, що функції, які стоять під знаками інтегралів у (3.16)-(3.17) додатні на інтервалах інтегрування.

Припустимо, що функція щільності випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$  є кусково-неперервною на  $\mathbb{R}$ . Тоді згідно з теоремою про обернене перетворення Фур'є для майже всіх  $s \in S_i$  ймовірності у підінтегральних виразах (3.16)-(3.17) мають наступне зображення:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0 < \sigma_i(s)) &= \mathbb{Q}(\bar{\sigma}_0^2 < \sigma_i^2(s)) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\sigma_i^2(s)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du \right) dy, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

де  $\phi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{iu\bar{\sigma}_0^2})$  – характеристична функція  $\bar{\sigma}_0^2$ .

З огляду на викладене вище, ми довели основний результат цієї частини роботи, який тепер сформулюємо у вигляді теореми.

**Теорема 3.5.** *Нехай ринок визначено моделлю (3.10) з припущеннями (B1)-(B3),  $\mathbb{Q}$  є мінімальною мартингальною мірою,  $V_0$  – ціна у початковий момент часу європейського опціону купівлі. Нехай функція щільності випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$  є кусково-неперервною на  $\mathbb{R}$ . Тоді мають місце наступні зображення:*

1) для  $\ln(S/K) + rT \geq 0$  і  $k = \sqrt{2(\ln(S/K) + rT)}$  :

$$\begin{aligned}
V_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( S e^{rT} \left( \Phi(k) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \int_k^\infty \left( \int_{-\infty}^{\sigma_1^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy + \int_{\sigma_2^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy \right) e^{-s^2/2} ds \right) \right. \\
& - K \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\sigma_4^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy e^{-s^2/2} ds \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{-\infty}^0 \int_{\sigma_4^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy e^{-s^2/2} ds \right) \right) \Bigg);
\end{aligned}$$

2) для  $\ln(S/K) + rT < 0$  і  $l = \sqrt{-2(\ln(S/K) + rT)}$  :

$$\begin{aligned}
V_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( S e^{rT} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \int_0^\infty \int_{\sigma_2^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy e^{-s^2/2} ds \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\sigma_2^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy e^{-s^2/2} ds \right) \right) \\
& - K \left( \Phi(-l) - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{-l} \left( \int_{-\infty}^{\sigma_3^2(s)} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{\sigma_4^2(s)}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) \phi(u) du dy \right) e^{-s^2/2} ds \right) \Bigg),
\end{aligned}$$

де  $\phi(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{iu\bar{\sigma}_0^2})$  є характеристичною функцією випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$ ;  $\sigma_i = \sigma_i(s)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , мають вигляд (3.14), (3.15).

*Зауваження 3.1.* Якщо  $\bar{\sigma}_0 \in L^2(\mathbb{R})$ , то у теоремі 3.5 допустимий граничний перехід під знаками інтегралів. Тоді  $\varepsilon$  можна прирівняти до нуля, і тим самим спростити вираз для ціни опціону.

*Зауваження 3.2.* У припущенні, що  $\sigma$  обмежена, аналітичний вираз для ціни опціону можна записати у термінах моментів випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$ .

Дійсно, у цьому випадку  $\bar{\sigma}_0^2$  також обмежена, тому характеристична функція  $\phi(u)$  допускає розклад у ряд Тейлора в околі нуля:

$$\phi(u) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j u^j}{j!} m_j, \quad (3.23)$$

де  $m_n$  є  $n$ -тим моментом випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Моменти випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$  можуть бути обчислені із застосуванням того факту, що скінченно-вимірні розподіли процесу Орнштейна–Уленбека є гауссовими розподілами. Беручи до уваги, що коваріаційна матриця процесу  $Y_s$  є невідродженою і складається з елементів вигляду

$$\begin{aligned} (\Sigma^{i,l})_{i,l=1}^j &= \frac{k^2}{2\alpha} \exp(-\alpha(t_i + t_l)) \\ &\times (\exp(2\alpha \min(t_i, t_l)) - 1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

отримуємо наступне зображення для моментів випадкової величини  $\bar{\sigma}_0^2$ :

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{1}{T^j} \int_0^T \cdots \int_0^T \int_{\mathbb{R}^j} \frac{\sigma^2(y_1) \dots \sigma^2(y_j)}{(2\pi)^{j/2} |\Sigma|^{1/2}} \\ &\times e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})} \mathbf{d}\mathbf{y} dt_1 \dots dt_j, \end{aligned} \quad (3.25)$$

де  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_j)$ ,  $\mathbf{d}\mathbf{y} = dy_1 \times \cdots \times dy_j$ ,  $\boldsymbol{\mu} = (Y_0 e^{-\alpha y_1}, \dots, Y_0 e^{-\alpha y_j})$ .

### 3.6. Висновки до розділу 3

У цьому розділі введено та описано основний об'єкт дослідження значної частини дисертаційної роботи – дифузійну модель фінансового ринку зі стоха-

стичною волатильністю, заданою деякою функцією від процесу Орнштейна–Уленбека.

Головним результатом цього розділу є точна аналітична формула ціни європейського опціону купівлі у розглядуваній моделі. Проте точна формула є достатньо складною у застосуванні, тому у подальших розділах буде зокрема приділено увагу точності результатів наближених обчислень ціни опціону, а також відшуканню альтернативних підходів до оцінювання опціонів.

## РОЗДІЛ 4

# ОЦІНЮВАННЯ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ОПЦІОНУ КУПІВЛІ У МОДЕЛІ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ, ЯКА ЗАДАЄТЬСЯ ПРОЦЕСОМ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА. СИМУЛЯЦІЇ

У розділі 4 розглядається наближення неперервних траєкторій процесу Орнштейна–Уленбека дискретними аналогами з метою отримання апроксимації для ціни Європейського опціону купівлі у моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Застосовується апроксимаційна схема Ейлера–Маруяма. Для заданих наборів параметрів визначено наближення ціни опціону. Визначено швидкість збіжності до точного значення ціни і точного значення середньої волатильності при спрямуванні величини дискретизаційного інтервалу до нуля. Досліджується точність апроксимації для випадку, коли точне значення ціни опціону можливо обчислити.

Розділ побудовано наступним чином: у першому підрозділі визначено розглядувану модель ринку і апроксимуючу дискретизаційну схему. Другий підрозділ представляє порівняння цін Європейського опціону у випадку дискретного та неперервного часу та представляє результат дослідження швидкості збіжності. У третьому підрозділі наведено числові результати симуляції. У четвертому підрозділі досліджується точність дискретної апроксимації у випадку невинуваткової волатильності. У п'ятому підрозділі наведено означення та допоміжні результати, що стосуються дискретизаційних схем і швидкості їхньої збіжності.

#### 4.1. Модель ринку і дискретна апроксимація процесу, що визначає волатильність

Нехай  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(B,Z)}, t \geq 0\}, \mathbb{P}\}$  – повний ймовірнісний простір з фільтрацією, породженою процесами Вінера  $\{B_t, Z_t, 0 \leq t \leq T\}$ . Розглядається модель ринку, на якому відбувається торгівля одним ризиковим активом, еволюція ціни якого задається геометричним броунівським рухом  $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ , а волатильність ціни визначається стохастичним процесом Орнштейна–Уленбека. Таким чином, ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь (3.1)-(3.2).

Використовуватимемо введені у пункті 3.1 позначення та вважатимемо виконаними припущення, встановлені у пункті 3.4:

(B1) процеси Вінера  $B$  і  $Z$  некорельовані;

(B2) функція волатильності  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  є вимірною, відділеною від нуля деякою сталою  $c$ :

$$\sigma(x) \geq c > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

і задовольняє умови  $\int_0^T \sigma^2(Y_t) dt < \infty$  м.н.;

(B3)  $\alpha, \mu$  і  $k$  – додатні сталі.

Процес Орнштейна–Уленбека, що керує волатильністю ціни активу, допускає наступне явне зображення:

$$Y_t = Y_0 e^{-\alpha t} + k \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dZ_s. \quad (4.1)$$

Згідно з міркуваннями, викладеними у розділі 3, можемо перейти до ризик-нейтральної моделі, яка визначається мінімальною мартингальною мірою  $\mathbb{Q}$ . Тоді рівняння (3.1)-(3.2) відносно мінімальної мартингальної міри набувають вигляду (3.10).

Розглядувана неперервна модель допускає різноманітні апроксимації у дискретному часі. У цьому розділі застосуємо добре відому апроксимаційну схему Ейлера–Маруями, яку також називають схемою Ейлера. Наближенням

Ейлера–Маруями істиного розв’язку рівняння Ланжевена (3.2) є марківський ланцюг  $Y^{(m)}$ , визначений наступним чином:

- розглянемо розбиття інтервалу  $[0, T]$  на  $m$  рівних підінтервалів довжини  $\Delta t = T/m$ ;
- почтакове значення схеми визначається тотожністю:  $Y_0^{(m)} = Y_0$ ;
- $Y_{l+1}^{(m)}$ , що є скороченим записом  $Y_{(l+1)T/m}^{(m)}$ ,  $0 \leq l \leq m-1$ , визначається рекурсивно:

$$Y_{l+1}^{(m)} = (1 - \alpha\Delta t)Y_l^{(m)} + k\Delta Z_l^{\mathbb{Q}}, \quad (4.2)$$

де  $\Delta Z_l^{\mathbb{Q}} = Z_{(l+1)T/m}^{\mathbb{Q}} - Z_{lT/m}^{\mathbb{Q}}$ .

Неперервний процес  $Y_t^{(m)}$  є ступінчастим процесом, який визначається таким чином:

$$Y_t^{(m)} = Y_{[tm/T]T/m}^{(m)}, \quad t \in [0, T],$$

де “[ $x$ ]” позначає цілу частину  $x$ .

## 4.2. Похибка при наближеному обчисленні ціни європейського опціону купівлі

Ціна європейського опціону купівлі  $V$  у початковий момент часу у моделі (3.10) задається формулою (3.12). Введемо позначення для внутрішнього математичного сподівання з виразу (3.12), визначеного у (3.13):

$$\begin{aligned} P &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leq s \leq T\} = e^{\ln S + rT} \Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \\ &:= e^{\ln S + rT} \Phi\left(\frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - K\Phi\left(\frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Ми маємо на меті оцінити похибку, що виникає у результаті наближення точної формули (3.12) шляхом застосування апроксимаційної схеми Ейлера до процесу, який керує волатильністю. Тобто необхідно оцінити математичне сподівання випадкової величини  $R$ , визначеної наступним чином:

$$R := |P - \hat{P}_m|, \quad (4.3)$$

де  $P$  описано вище,  $m$  – кількість точок розбиття інтервалу  $[0, T]$  на інтервали однакового розміру,  $\hat{P}_m$  – ціна опціону у дискретній моделі, розрахована за формулою, аналогічною до (3.13):

$$\hat{P}_m = e^{\ln S + rT} \Phi\left(d_1^{(m)}\right) - K\Phi\left(d_2^{(m)}\right), \quad (4.4)$$

де

$$d_1^{(m)} = \frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_m\sqrt{T}}; \quad (4.5)$$

$$d_2^{(m)} = \frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_m\sqrt{T}} \quad (4.6)$$

Попередні вирази використовують наступні позначення:

$$\bar{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{l=1}^m \sigma^2\left(Y_l^{(m)}\right) \frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \sigma^2\left(Y_l^{(m)}\right)}, \quad (4.7)$$

де  $Y_l^{(m)}$  визначено у (4.2).

Ми не досліджуємо питання відшукання точного або наближеного значення  $R$ . Описана вище система моделей цікава з точки зору швидкості збіжності дискретної моделі до непервної. Для того, щоб оцінити швидкість збіжності, необхідно отримати оцінку згори для  $R$  у термінах  $m$ .

Порівнюючи (3.13) і (4.4), можна переконатися, що похибка апроксимації виникає виключно через різницю між  $\bar{\sigma}$  та  $\bar{\sigma}_m$ . Тому в першу чергу для кожного  $m$  встановимо оцінку згори для математичного сподівання модуля цієї різниці. Після цього  $R$  можна представити у вигляді  $R_\sigma := \mathbb{E}|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m|$ .

**Лема 4.1.** *Нехай  $\sigma^2(x)$  задовольняє умову Гельдера:*

$$|\sigma^2(x) - \sigma^2(y)| \leq L|x - y|^\gamma, \quad (4.8)$$

де  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $L$  – деяка додатна стала. Тоді  $\mathbb{E}R_\sigma \leq Ct^{-0.5\gamma}$ , де  $C$  – деяка додатна стала.

*Доведення.* Вигляд функцій  $\bar{\sigma}_m$  і  $\bar{\sigma}$  спонукає до розгляду їх квадартів.

Щоб перейти до розгляду  $\bar{\sigma}_m^2$  і  $\bar{\sigma}^2$ , застосуємо нерівність Гельдера:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}| &= \mathbb{E} \left| \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(Y_s) ds} - \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma^2(Y_i^{(m)})} \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left| \sqrt{\left| \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(Y_s) ds - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma^2(Y_i^{(m)}) \right|} \right| \\ &\leq \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(Y_s) ds - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma^2(Y_i^{(m)}) \right| \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тепер представимо інтеграл у вигляді суми інтегралів за більш короткими проміжками. Оскільки другий доданок не залежить від  $s$ , можемо занести його під знак інтегралу, помноживши на число, обернене до довжини інтервалу інтегрування.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}| &\leq \left( \mathbb{E} \left| \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{1}{T} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} \sigma^2(Y_s) ds - \frac{1}{m} \sigma^2(Y_{i+1}^{(m)}) \right) \right| \right)^{1/2} \\ &= \left( \mathbb{E} \left| \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{1}{T} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} \sigma^2(Y_s) ds - \frac{1}{m} \frac{m}{T} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} \sigma^2(Y_{i+1}^{(m)}) ds \right) \right| \right)^{1/2} \\ &= \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} \left( \sigma^2(Y_s) - \sigma^2(Y_{i+1}^{(m)}) \right) ds \right| \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Скористаємося властивістю Гельдера функції  $\sigma^2(x)$  :

$$\begin{aligned} &\left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} \left( \sigma^2(Y_s) - \sigma^2(Y_{i+1}^{(m)}) \right) ds \right| \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \frac{L}{T} \mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} |Y_s - Y_{i+1}^{(m)}|^\gamma ds \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{L}{T} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{iT/m}^{(i+1)T/m} \mathbb{E} \left| Y_s - Y_{i+1}^{(m)} \right|^\gamma ds \right)^{1/2}.$$

Нагадаємо, що  $Y_i^{(m)}$  є коротким записом виразу  $Y_{iT/m}^{(m)} = Y_s^{(m)}$ ,  $s \in [iT/m, (i+1)T/m)$ . Тоді з твердження 4.1 випливає, що  $\mathbb{E} \left| Y_s - Y_{i+1}^{(m)} \right| \leq C_1 m^{-1}$ , де  $C_1$  деяка додатна стала. Застосуємо нерівність Гельдера, щоб отримати

$$\mathbb{E} \left| Y_s - Y_{i+1}^{(m)} \right|^\gamma \leq C_1^\gamma m^{-\gamma}.$$

Отже:

$$\mathbb{E} |\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}| \leq \left( \frac{L}{T} m \frac{T}{m} C_1^\gamma m^{-\gamma} \right)^{1/2} = C m^{-\gamma/2},$$

для  $C := \sqrt{LC_1^\gamma}$ , що і доводить твердження леми.  $\square$

Попередня лема дозволяє довести основний результат цієї частини роботи.

**Теорема 4.1.** *Нехай  $\sigma^2(x)$  задовольняє умову Гельдера (4.8). Тоді  $\mathbb{E}R \leq Dm^{-\gamma/2}$ , де  $D$  – деяка додатна стала.*

*Доведення.* Функція  $\Phi(x)$  має неперервну обмежену похідну на  $\mathbb{R}$ , тому ми можемо скористатися її ліпшицевістю:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R &= \mathbb{E} \left| P - \hat{P}_m \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left( S e^{rT} \left| \Phi(d_1) - \Phi(d_1^{(m)}) \right| + K \left| \Phi(d_2) - \Phi(d_2^{(m)}) \right| \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left( \sup_x |f(x)| (S e^{rT} |d_1 - d_1^{(m)}| + K |d_2 - d_2^{(m)}|) \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} (S e^{rT} |d_1 - d_1^{(m)}| + K |d_2 - d_2^{(m)}|), \end{aligned}$$

де  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  – функція щільності стандартного нормального розподілу. У попередньому виразі

$$\begin{aligned} |d_1 - d_1^{(m)}| &= \left| \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_m} \right) \frac{\ln S - \ln K + rT}{\sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sqrt{T} (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m) \right| \\ &\leq |\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m| \left| \frac{1}{\bar{\sigma}\bar{\sigma}_m} \frac{\ln(S/K) + rT}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\leq |\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m| \left| \frac{\ln(S/K) + rT}{c^2 \sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{2} \right|,$$

де  $c$  – додатна стала, і виконання останньої нерівності забезпечується припущенням про те, що  $\sigma(x)$  відділена від нуля для всіх  $x \in \mathbb{R}$  (див. припущення (B2) вище). Тоді, застосовуючи лему 4.1, отримуємо

$$\mathbb{E}|d_1 - d_1^{(m)}| \leq C_1 \mathbb{E}|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m| \leq D_1 m^{-\gamma/2},$$

де  $C_1 := \left| \frac{\ln(S/K) + rT}{c^2 \sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{2} \right|$  і  $D_1$  – додатні сталі.

Аналогічно  $\mathbb{E}|d_2 - d_2^{(m)}| \leq D_2 m^{-\gamma/2}$ ,  $D_2 = \text{const} > 0$ , і тому маємо

$$\mathbb{E}R = \mathbb{E} \left| P - \hat{P}_m \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( D_1 S e^{rT} m^{-\gamma/2} + D_2 K m^{-\gamma/2} \right) = D m^{-\gamma/2}, \quad (4.9)$$

для додатної сталої  $D$ .

Теорему доведено. □

### 4.3. Приклади застосування апроксимаційної схеми Ейлера-Маруями

Теорема 3.5, доведена у розділі 3, надає аналітичне зображення для ціни європейського опціону купівлі для розглядуваної моделі зі стохастичною волатильністю. Проте застосування представленої у теоремі формули для обчислення ціни опціону є досить важкою задачею через складність формули та потенційно високі витрати часу на розрахунки. Нижче у цьому розділі представлено результати розрахунків ціни Європейського опціону купівлі шляхом симуляцій.

Розрахунки проводяться у Matlab 7.9.0 і здійснюються за наступним загальним алгоритмом:

1. Обираються набори значень параметрів;
2. Обирається вигляд функції  $\sigma(Y_s)$ ;
3. Для всіх комбінацій параметрів генеруємо 1000 траєкторій процесу Орнштейна–Уленбека шляхом розбиття всього часового проміжку на

інтервали довжини  $\Delta t = 0.001$  і моделювання значень процесу у цих точках (тобто генеруються нормально розподілені випадкові величини із відомим середнім та стандартним відхиленням за допомогою співвідношення (4.2)). Далі для кожної траєкторії застосовуємо (4.4), щоб обчислити  $\bar{\sigma}_m^2$  і ціну опціону. В результаті отримуємо вибірку значень ціни опціону. Вибіркове середнє позначатимемо  $\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$ . Середня волатильність за всіма траєкторіями уздовж всього часового проміжку позначається через  $\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$ .

Таблиця 4.1

$$\sigma^2(Y_s) = a|Y_s| + b$$

$T$	$k$	$r$	$K$	a	b	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
						$\alpha = 1$	$\alpha = 100$	$\alpha = 100$	$\alpha = 100$
0,25	0,1	0	0,8	1	0	0,088	<b>0,204</b>	0,009	<b>0,200</b>
0,5	0,1	0	0,8	1	0	0,082	<b>0,213</b>	0,007	<b>0,200</b>
1	0,1	0	0,8	1	0	0,073	<b>0,227</b>	0,007	<b>0,200</b>
0,25	0,5	0	0,8	1	0	0,147	<b>0,211</b>	0,031	<b>0,200</b>
0,5	0,5	0	0,8	1	0	0,185	<b>0,235</b>	0,030	<b>0,201</b>
1	0,5	0	0,8	1	0	0,216	<b>0,280</b>	0,029	<b>0,207</b>
0,25	1	0	0,8	1	0	0,264	<b>0,224</b>	0,059	<b>0,201</b>
0,5	1	0	0,8	1	0	0,338	<b>0,264</b>	0,058	<b>0,207</b>
1	1	0	0,8	1	0	0,412	<b>0,334</b>	0,058	<b>0,221</b>
0,25	0,1	0,01	1	1	0,2	0,289	<b>0,108</b>	0,209	<b>0,092</b>
0,5	0,1	0,01	1	1	0,2	0,281	<b>0,151</b>	0,207	<b>0,130</b>
1	0,1	0,01	1	1	0,2	0,273	<b>0,210</b>	0,207	<b>0,184</b>
0,25	0,5	0,01	1	1	0,2	0,346	<b>0,117</b>	0,231	<b>0,097</b>
0,5	0,5	0,01	1	1	0,2	0,375	<b>0,172</b>	0,230	<b>0,137</b>
1	0,5	0,01	1	1	0,2	0,414	<b>0,254</b>	0,229	<b>0,193</b>
0,25	1	0,01	1	1	0,2	0,459	<b>0,134</b>	0,259	<b>0,102</b>

Таблиця 4.1 – Продовження таблиці

$T$	$k$	$r$	$K$	$a$	$b$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
						$\alpha = 1$	$\alpha = 100$		
0,5	1	0,01	1	1	0,2	0,532	<b>0,203</b>	0,258	<b>0,145</b>
1	1	0,01	1	1	0,2	0,617	<b>0,305</b>	0,258	<b>0,204</b>
0,25	0,1	0,02	1,2	1	1	1,089	<b>0,141</b>	1,009	<b>0,134</b>
0,5	0,1	0,02	1,2	1	1	1,079	<b>0,228</b>	1,007	<b>0,218</b>
1	0,1	0,02	1,2	1	1	1,073	<b>0,347</b>	1,007	<b>0,335</b>
0,25	0,5	0,02	1,2	1	1	1,148	<b>0,147</b>	1,031	<b>0,136</b>
0,5	0,5	0,02	1,2	1	1	1,178	<b>0,240</b>	1,030	<b>0,221</b>
1	0,5	0,02	1,2	1	1	1,216	<b>0,371</b>	1,029	<b>0,339</b>
0,25	1	0,02	1,2	1	1	1,262	<b>0,157</b>	1,059	<b>0,138</b>
0,5	1	0,02	1,2	1	1	1,341	<b>0,260</b>	1,058	<b>0,225</b>
1	1	0,02	1,2	1	1	1,414	<b>0,402</b>	1,058	<b>0,344</b>

Почнемо з того, що нагадаємо сутність параметрів, та оберемо набори їх значень для симуляцій:

$T$  – час до виконання опціону,  $T = 0.25; 0.5; 1$ ;

$k$  – волатильність процесу Орнштейна–Уленбека,  $k = 0.1; 0.5; 1$ ;

$\alpha$  – рівень повернення до середнього (mean-reversion rate),  $\alpha = 1; 100$ ;

$r$  – відсоткова ставка,  $r = 0; 0.01; 0.02$ ;

$K$  – страйкова ціна,  $K = 0.8; 1; 1.2$ ;

$S_0$  – ціна активу у початковий момент часу,  $S_0 = 1$ ;

$Y_0$  – значення процесу Орнштейна–Уленбека, який керує волатильністю, у початковий момент часу,  $Y_0 = 0.1$ .

Розглядатимемо наступні варіанти функції  $\sigma(Y_s)$  :

1.  $\sigma^2(Y_s) = a|Y_s| + b$ , де  $a = \{0, 1\}$ ,  $b = \{0, 0.2, 1\}$ ;

$$2. \sigma^2(Y_s) = e^{Y_s} + c, c = 0.02.$$

Результати симуляцій розбиваються на групи в залежності від рівня повернення до середнього  $\alpha$  та функції  $\sigma(Y_s)$ . Беззмістовні та не цікаві результати, які можна отримати у результаті симуляцій з певними комбінаціями параметрів, ігноруються.

Рівень повернення до середнього, рівний 1, відповідає моделям з повільним поверненням до середнього, а моделі, що швидко повертаються до середнього, у ході цього дослідження характеризуватимуться значенням  $\alpha = 100$ . Питання швидкості повернення до середнього розглядаються, зокрема, у [34].

Таблиця 4.2

$$\sigma^2(Y_s) = e^{Y_s} + c$$

$T$	$k$	$r$	$K$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
				$\alpha = 1$	$\alpha = 100$		
0,25	0,1	0	0,8	1,113	<b>0,303</b>	1,024	<b>0,297</b>
0,5	0,1	0	0,8	1,103	<b>0,372</b>	1,022	<b>0,363</b>
1	0,1	0	0,8	1,088	<b>0,465</b>	1,021	<b>0,456</b>
0,25	0,5	0	0,8	1,135	<b>0,305</b>	1,025	<b>0,297</b>
0,5	0,5	0	0,8	1,131	<b>0,374</b>	1,023	<b>0,363</b>
1	0,5	0	0,8	1,119	<b>0,468</b>	1,022	<b>0,456</b>
0,25	1	0	0,8	1,184	<b>0,307</b>	1,027	<b>0,297</b>
0,5	1	0	0,8	1,212	<b>0,380</b>	1,025	<b>0,363</b>
1	1	0	0,8	1,238	<b>0,478</b>	1,024	<b>0,456</b>
0,25	0,1	0,01	1	1,112	<b>0,209</b>	1,024	<b>0,201</b>
0,5	0,1	0,01	1	1,103	<b>0,291</b>	1,022	<b>0,281</b>
1	0,1	0,01	1	1,086	<b>0,401</b>	1,021	<b>0,390</b>
0,25	0,5	0,01	1	1,121	<b>0,209</b>	1,025	<b>0,201</b>
0,5	0,5	0,01	1	1,129	<b>0,294</b>	1,023	<b>0,281</b>
1	0,5	0,01	1	1,128	<b>0,405</b>	1,022	<b>0,390</b>

Таблиця 4.2 – Продовження таблиці

$T$	$k$	$r$	$K$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
				$\alpha = 1$	$\alpha = 100$		
0,25	1	0,01	1	1,178	<b>0,213</b>	1,026	<b>0,201</b>
0,5	1	0,01	1	1,206	<b>0,299</b>	1,025	<b>0,281</b>
1	1	0,01	1	1,216	<b>0,412</b>	1,023	<b>0,390</b>
0,25	0,1	0,02	1,2	1,110	<b>0,143</b>	1,024	<b>0,135</b>
0,5	0,1	0,02	1,2	1,103	<b>0,231</b>	1,022	<b>0,220</b>
1	0,1	0,02	1,2	1,087	<b>0,349</b>	1,021	<b>0,338</b>
0,25	0,5	0,02	1,2	1,133	<b>0,145</b>	1,025	<b>0,135</b>
0,5	0,5	0,02	1,2	1,128	<b>0,233</b>	1,023	<b>0,220</b>
1	0,5	0,02	1,2	1,115	<b>0,352</b>	1,021	<b>0,338</b>
0,25	1	0,02	1,2	1,162	<b>0,147</b>	1,027	<b>0,135</b>
0,5	1	0,02	1,2	1,201	<b>0,239</b>	1,025	<b>0,220</b>
1	1	0,02	1,2	1,255	<b>0,367</b>	1,023	<b>0,338</b>

Відмітимо той факт, що при швидшому поверненні до середнього процесу Орнштейна–Уленбека середня волатильність  $\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$  і, як наслідок, ціна опціону нижчі, як і варто було очікувати від розглядуваної моделі.

Таблиці 4.3, 4.4 ілюструють зміну ціни опціону із зменшенням кроку у дискретній моделі.

Таблиця 4.3

$$\sigma^2(Y_s) = |Y_s| + 0.2, K = 1, r = 0.02, k = 0.1, T = 1$$

$\Delta t$	$\alpha$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\bar{d}_1^{(m)}$	$\bar{d}_2^{(m)}$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
$10^{-2}$	1	0,272367	0,299043	-0,222056	0,213552
$10^{-3}$	1	0,271043	0,298506	-0,221338	0,213073

Таблиця 4.3 – Продовження таблиці

$\Delta t$	$\alpha$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\bar{d}_1^{(m)}$	$\bar{d}_2^{(m)}$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
$10^{-4}$	1	0,272534	0,299123	-0,222179	0,213631
$10^{-5}$	1	0,271837	0,298822	-0,221753	0,213351
$10^{-6}$	1	0,271421	0,298667	-0,221560	0,213220
$10^{-2}$	100	0,208910	0,272291	-0,184776	0,189047
$10^{-3}$	100	0,206599	0,271267	-0,183264	0,188073
$10^{-4}$	100	0,206439	0,271196	-0,183159	0,188005
$10^{-5}$	100	0,206413	0,271184	-0,183142	0,187994
$10^{-6}$	100	0,206443	0,271198	-0,183162	0,188007

Таблиця 4.4

$$\sigma^2(Y_s) = e^{Y_s} + 0.2, \quad K = 1, \quad r = 0.02, \quad k = 0.1, \quad T = 1$$

$\Delta t$	$\alpha$	$\hat{\mathbb{E}}\bar{\sigma}_m^2$	$\bar{d}_1^{(m)}$	$\bar{d}_2^{(m)}$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$
$10^{-2}$	1	1,265414	0,556279	-0,519082	0,431865
$10^{-3}$	1	1,269504	0,579243	-0,543620	0,432472
$10^{-4}$	1	1,266274	0,584925	-0,549670	0,431990
$10^{-5}$	1	1,266030	0,566934	-0,530485	0,431948
$10^{-6}$	1	1,265635	0,576169	-0,540343	0,431892
$10^{-2}$	100	1,201083	0,566092	-0,529585	0,422128
$10^{-3}$	100	1,201047	0,566500	-0,530021	0,422123
$10^{-4}$	100	1,201026	0,566203	-0,529703	0,422120
$10^{-5}$	100	1,201036	0,566693	-0,530228	0,422121
$10^{-6}$	100	1,201023	0,566052	-0,529542	0,422119

З огляду на викладене у попередньому параграфі викликає інтерес порівняння результатів розрахунків, отриманих за єдиною траєкторією процесу Орнштейна–Уленбека при різних дискретизаційних інтервалах. Було побу-

довано 2000 траєкторій з кроком  $10^{-6}$ : 1000 для випадку  $\alpha = 1$  і 1000 для випадку  $\alpha = 100$ .

Таблиця 4.5

$$\sigma^2(Y_s) = |Y_s| + 0.2, K = 1, r = 0.02, k = 0.1, T = 1$$

	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$\alpha = 1$				
Average	0,08710%	0,00834%	0,00081%	0,00008%
St. error	0,0000427	0,0000042	0,0000004	0
Median	0,0009575	0,0000834	0,000008	0,0000007
St. deviation	0,0013517	0,0001334	0,0000137	0,0000013
Excess	-0,217306	-0,191189	-0,143295	-0,021156
Skewness	0,0492335	-0,002248	0,023124	0,0577173
Min	-0,29706%	-0,03669%	-0,00303%	-0,00036%
Max	0,52352%	0,04766%	0,00502%	0,00044%
Count	1000	1000	1000	1000
$\alpha = 100$				
Average	0,07790%	0,00742%	0,00083%	0,00007%
St. error	0,000043	0,0000044	0,0000004	0
Median	0,0008379	0,0000728	0,0000083	0,0000007
St. deviation	0,0013602	0,0001379	0,0000136	0,0000014
Excess	-0,234452	-0,302723	-0,352995	-0,054568
Skewness	-0,024765	0,0922374	0,0055451	0,0229423
Min	-0,30504%	-0,03231%	-0,00323%	-0,00037%
Max	0,46265%	0,04974%	0,00454%	0,00050%
Count	1000	1000	1000	1000

Ці траєкторії вважаються “істинними” траєкторіями процесу Орнштейна–Уленбека  $Y_t$  у неперервному часі. Відповідні значення  $\bar{\sigma}_m^2$  вважаються “істин-

ними” значеннями випадкової величини  $\bar{\sigma}^2$  у неперервному часі.

Таблиця 4.6

$$\sigma^2(Y_s) = e^{Y_s} + 0.2, K = 1, r = 0.02, k = 0.1, T = 1$$

	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$\alpha = 1$				
Average	0,02496%	0,00268%	0,00026%	0,00002%
St. error	0,0000113	0,0000011	0,0000001	0,00000001
Median	0,0002559	0,0000266	0,0000027	0,0000002
St. deviation	0,0003584	0,0000354	0,0000035	0,0000003
Excess	0,1947561	0,1687356	-0,0576859	0,0700827
Skewness	-0,1691937	-0,0097185	-0,1643507	-0,0522007
Min	-0,09961%	-0,00861%	-0,00088%	-0,00011%
Max	0,12871%	0,01464%	0,00126%	0,00013%
Count	1000	1000	1000	1000
$\alpha = 100$				
Average	0,02692%	0,00268%	0,00025%	0,00002%
St. error	0,0000118	0,0000012	0,0000001	0
Median	0,0002712	0,0000265	0,0000027	0,0000002
St. deviation	0,0003735	0,0000377	0,0000036	0,0000003
Excess	0,17242	0,070383	0,3383414	0,0853763
Skewness	-0,0299531	-0,0195205	-0,1914745	-0,0371876
Min	-0,09174%	-0,01068%	-0,00112%	-0,00011%
Max	0,16291%	0,01411%	0,00139%	0,00014%
Count	1000	1000	1000	1000

Після цього було проведено обчислення для більш широких дискретизаційних інтервалів із використанням точок побудованих траєкторій. Таким чином, ми отримали вибірки похибок дискретизації для  $\bar{\sigma}_m^2$ . Може скластися

враження, що оцінка величини  $\bar{\sigma}_m^2$  є більш цінною у цьому контексті, оскільки зазвичай ціна опціону не розраховується на основі єдиної змодельованої траєкторії. Проте припущення відносно майбутньої волатильності (наприклад, параметри процесу, що керує волатильністю, або у детермінованому випадку – саме значення волатильності) майже завжди отримуються на основі історичних даних, які за своєю сутністю є однією реалізацією з простору усіх можливих сценаріїв. Тому аналіз похибок дискретизації може дати відповідь на питання про об'єм даних, необхідний для формування припущень щодо параметрів моделі.

Таблиці 4.5, 4.6 представляють характеристики виборок похибок дискретизації. Похибки вимірюються у відсотках від “істинного” значення.

З таблиць 4.5, 4.6 можна побачити, що результати апроксимацій не змінюються суттєво при різних кроках дискретизації. Навіть дискретна модель із найширшим з розглядуваних інтервалом дискретизації надає точність, прийнятну для більшої частини застосувань.

#### **4.4. Перевірка точності апроксимації у випадку не випадкової волатильності**

У цьому розділі порівнюються ціни опціонів, обчислені для апроксимаційних схем Ейлера (4.2), із істинними цінами європейського опціону купівлі для різних наборів параметрів у випадку не випадкової волатильності, що є функцією від часу.

Моделі з не випадковою залежною від часу волатильністю є природнім розширенням класичної моделі Блека–Шоулса. Вираз для ціни опціону той самий, що і у класичній моделі, проте замість сталої волатильності формула оперує середньою волатильністю протягом інтервалу часу до виконання опціону (див., наприклад, [90], [34]). Таким чином, формула лишається подібною до (3.13) і (4.4).

Встановлено, що не випадкова волатильність не відображає коректно сто-

хастичну поведінку волатильності у реальному світі ([91], [92]), тому такі моделі почали користуватися меншим інтересом, починаючи з середини 1980-х. Перехід до моделей зі стохастичною волатильністю стимулювався стрімким розвитком обчислювальних інструментів.

Проте не випадкова волатильність є доречною в цілях даного аналізу, оскільки для таких моделей можна легко обчислити ціну опціону у неперервному часі.

Для того, щоб досліджувати випадок з не випадковою, залежною від часу волатильністю, природно відкинути стохастичну складову диференціального рівняння для  $Y_t$ . Тобто, отримуємо:

$$dY_t = -\alpha Y_t dt, \quad (4.10)$$

що є лінійним диференціальним рівнянням відносно  $Y_t$ , розв'язок якого описується виразом

$$Y_t = Y_0 e^{-\alpha t}. \quad (4.11)$$

Для тих же функцій  $\sigma$  і множин параметрів, які розглядалися в попередньому параграфі, обчислимо ціни європейського опціону купівлі у неперервному часі за допомогою (3.13) і порівняємо їх із цінами такого ж опціону, обчисленими згідно з (4.4)-(4.7) для

$$Y_{l+1}^{(m)} = (1 - \alpha \Delta t) Y_l^{(m)}. \quad (4.12)$$

Використовуватимемо інтервал дискретизації 0.01 і для кожної комбінації входних параметрів виконуватимемо 10 симуляцій. Як і раніше, усі обчислення виконано у Matlab 7.9.0.

Таблиця 4.7 представляє результати розрахунків. Порівняння двох підходів виявило, що схема Ейлера–Маруями надає прийнятне наближення точної ціни опціону. У випадку швидкого повернення до середнього результату, округлені до шостого знаку після коми, взагалі співпадають.

Таблиця 4.7

**Наближені ціни опціонів проти істинних цін у випадку  
невипадкової волатильності**

$T$	$\alpha$	$r$	$K$	$a$	$b$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$	$\mathbb{E}V$	$\hat{\mathbb{E}}\hat{P}_m$	$\mathbb{E}V$
						$\sigma^2(Y_s) = a\ Y_s\  + b$	$\sigma^2(Y_s) = e^{Y_s} + 0.2$		
0,25	1	0	0,8	1	0	0,203891	<b>0,203888</b>	0,316223	<b>0,316220</b>
0,5	1	0	0,8	1	0	0,211556	<b>0,211549</b>	0,390150	<b>0,390147</b>
1	1	0	0,8	1	0	0,223003	<b>0,222994</b>	0,490305	<b>0,490302</b>
0,25	1	0,01	1	1	0,2	0,107942	<b>0,107935</b>	0,224736	<b>0,224733</b>
0,5	1	0,01	1	1	0,2	0,150207	<b>0,150199</b>	0,312794	<b>0,312791</b>
1	1	0,01	1	1	0,2	0,206464	<b>0,206457</b>	0,429067	<b>0,429064</b>
0,25	1	0,02	1,2	1	1	0,141317	<b>0,141313</b>	0,159958	<b>0,159954</b>
0,5	1	0,02	1,2	1	1	0,227633	<b>0,227629</b>	0,253710	<b>0,253706</b>
1	1	0,02	1,2	1	1	0,345261	<b>0,345257</b>	0,379955	<b>0,379952</b>
0,25	100	0	0,8	1	0	0,200000	<b>0,200000</b>	0,309950	<b>0,309950</b>
0,5	100	0	0,8	1	0	0,200000	<b>0,200000</b>	0,382107	<b>0,382106</b>
1	100	0	0,8	1	0	0,200000	<b>0,200000</b>	0,481610	<b>0,481610</b>
0,25	100	0,01	1	1	0,2	0,091044	<b>0,091044</b>	0,217149	<b>0,217149</b>
0,5	100	0,01	1	1	0,2	0,128449	<b>0,128449</b>	0,303457	<b>0,303457</b>
1	100	0,01	1	1	0,2	0,181507	<b>0,181507</b>	0,419198	<b>0,419198</b>
0,25	100	0,02	1,2	1	1	0,133108	<b>0,133108</b>	0,152065	<b>0,152065</b>
0,5	100	0,02	1,2	1	1	0,217100	<b>0,217100</b>	0,243748	<b>0,243748</b>
1	100	0,02	1,2	1	1	0,333759	<b>0,333759</b>	0,369312	<b>0,369312</b>

*Зауваження 4.1.* Ми розглядаємо ціну опціону у початковий момент часу, проте всі підходи залишаються без змін при виборі будь-якого іншого моменту часу  $t$  між початковою датою та датою виконання опціону. Необхідно лише

внести деякі очевидні зміни, – наприклад, потрібно ввести функцію  $\bar{\sigma}_t := \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(Y_s) ds} \geq 0$  замість  $\bar{\sigma}$ , а  $T$  слід замінити на  $T - t$  у (3.13), (4.7).

#### 4.5. Апроксимаційна схема Ейлера – визначення і допоміжні результати

Пропонуємо зацікавленому читачу звернутися до [63], де детально вивчаються апроксимації стохастичних диференціальних рівнянь.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad t \in [t_0, T], \quad (4.13)$$

і вважатимемо, що існує єдиний сильний розв'язок  $X(t)$  з  $X(t_0) = X_0$ . Для того, щоб це виконувалося необхідно зробити певні припущення щодо функцій  $a$  і  $b$ . А саме, вважатимемо виконаними наступні умови (див. припущення (A1)-(A4), ст. 128–129, [63]):

A1)  $a = a(t, x)$  і  $b = b(t, x)$  борелеві функції за сукупністю змінних на  $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$ ;

A2) функції  $a$  і  $b$  задовольняють умову Ліпшиця відносно  $x$ , тобто існує стала  $K > 0$  така, що

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|$$

і

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

для всіх  $t \in [t_0, T]$  and  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

A3) існує стала  $K > 0$  така, що

$$|a(t, x)|^2 \leq K|1 + |x|^2|$$

і

$$|b(t, x)|^2 \leq K|1 + |x|^2|$$

для всіх  $t \in [t_0, T]$  and  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

A4)  $X_{t_0} \in \mathcal{F}_{t_0}$ -вимірною з  $\mathbb{E}(|X_{t_0}|^2) < \infty$ .

Нехай  $X_t^{(m)}$  є дискретизаційною схемою процесу  $X_t$ .

**Означення 4.1.** (див. [63]) Будемо говорити, що апроксимуючий процес  $X_t^{(m)}$  збігається у сильному сенсі з порядком  $\gamma \in (0, \infty]$  до істинного процесу  $X_t$ , якщо існує скінченна стала  $K$  така, що

$$\mathbb{E} \left( |X_t - X_t^{(m)}| \right) < Km^{-\gamma}.$$

Аналогічна термінологія застосовується і до функцій від апроксимуючих процесів.

**Означення 4.2.** (див. [63]) Будемо говорити, що апроксимаційна схема у дискретному часі  $X_t^{(m)}$  є сильно конзистентною, якщо існує невід'ємна функція  $c = c(m)$  з

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c(m) = 0$$

така, що

$$\mathbb{E} \left( \left| \mathbb{E} \left( \frac{X_{i+1}^{(m)} - X_i^{(m)}}{T/m} \middle| \mathcal{F}_{iT/m} \right) - a \left( \frac{iT}{m}, X_i^{(m)} \right) \right|^2 \right) \leq c(m)$$

і

$$\mathbb{E} \left( \frac{m}{T} |X_{i+1}^{(m)} - X_i^{(m)} - \mathbb{E}(X_{i+1}^{(m)} - X_i^{(m)} | \mathcal{F}_{iT/m}) - b \left( \frac{iT}{m}, X_i^{(m)} \right) \Delta W_i|^2 \right) \leq c(m)$$

для всіх фіксованих значень  $X_i^{(m)} = y$  і  $i = 0, 1, \dots, m$ .

**Теорема 4.2.** (9.6.2, ст. 324, [63]) Нехай для (4.13) виконуються припущення (A1)-(A4). Тоді сильно конзистентна апроксимація у дискретному часі із рівними інтервалами  $X^{(m)}$  процесу  $X$  на  $[t_0, T]$  з  $X_{t_0}^{(m)} = X_{t_0}$  сильно прямує до  $X$ .

Очевидно, що схема Ейлера  $Y^{(m)}$ , представлена з метою апроксимації  $Y$  у розділі 4.1, задовольняє усі описані вище вимоги, а тому сильно збігається. Крім того, відомо, що в загальному випадку порядок збіжності апроксимаційної схеми Ейлера дорівнює 0.5. Це легко перевірити, використовуючи оцінки

швидкості збіжності, отримані у теоремі 9.6.2, ст. 324, [63], і вправі 9.6.3, ст. 326, [63].

Однак наш випадок не загальний, оскільки  $Y^{(m)}$  апроксимує дифузійний процес із адитивним шумом, тобто  $b(t, x) = k$  стала. Тому має місце наступне твердження.

**Твердження 4.1.**  $Y^{(m)}$  є схемою Мільштейна, а тому збігається сильно із порядком 1 до істинного значення.

Дійсно, єдина різниця у зображенні  $Y^{(m)}$  як схеми Мільштейна у порівнянні із зображенням її як схеми Ейлера полягає у доданку вигляду

$$\frac{1}{2}bb'((\Delta Z^{\mathbb{Q}})^2 - T/m),$$

який тотожно рівний нулю при сталій функції  $b$ . Відомо, що схема Мільштейна має порядок збіжності 1 (див., наприклад, теорему 10.6.3, ст. 361, [63]).

#### 4.6. Висновки до розділу 4

У даному розділі розглянуто дискретні апроксимації моделі ринку зі стохастичною волатильністю, описаної у розділі 3. З метою отримання наближення для ціни європейського опціону купівлі застосовано апроксимаційну схему Ейлера–Маруями. Для заданих наборів параметрів визначено наближення ціни опціону. Визначено швидкість збіжності до точного значення ціни і точного значення середньої волатильності при спрямуванні величини дискретизаційного інтервалу до нуля. Досліджено точність апроксимації для випадку, коли точне значення ціни опціону можливо обчислити. Було встановлено, що навіть дискретизація за допомогою порівняно широких інтервалів надає прийнятну точність наближення ціни опціону. Цей факт дозволяє значно скоротити час моделювання у подальших дослідженнях і розрахунках.

## РОЗДІЛ 5

### ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛЕННЯ МАЛЛЯВЕНА ДО ТОЧНОГО І НАБЛИЖЕНОГО ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ НА АКЦІЇ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

У розділі 5 досліджується питання точного обчислення ціни Європейського опціону купівлі. Із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціону. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціону за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними.

Розділ побудовано наступним чином: у першому підрозділі визначено розглядувану модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека та сформульовано припущення щодо ринку. Базові поняття числення Маллявена та деякі попередні результати наводяться у другому підрозділі перед основним результатом розділу – теоремою про вигляд щільності розподілу середньої волатильності. Після цього записано ціну опціону через знайдену щільність. Третій підрозділ містить допоміжні факти та доведення допоміжних результатів, зокрема, стохастичні похідні від функціоналів, пов’язаних зі стохастичною волатильністю.

#### 5.1. Модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека

Нехай  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(B,Z)}, t \geq 0\}, \mathbb{P}\}$  – повний ймовірнісний простір з фільтрацією, породженою процесами Вінера  $\{B_t, Z_t, 0 \leq t \leq T\}$ . Розглядається

модель ринку, на якому відбувається торгівля одним ризиковим активом, еволюція ціни якого задається геометричним броунівським рухом  $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ , а волатильність ціни визначається стохастичним процесом Орнштейна–Уленбека. Таким чином, ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь (3.1)-(3.2).

Використовуватимемо введені у пункті 3.1 позначення та вважатимемо виконаними наступні припущення:

- (C1) вінерівські процеси  $W$  і  $\widetilde{W}$  є некорельованими, а отже, незалежними;
- (C2) функція волатильності  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  вимірна, віддалена від нуля і має не більш ніж поліноміальне зростання, тобто  $c \leq \sigma(x) \leq q(1 + |x|^l)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  та деяких додатних сталих  $c, q$  і деякого  $l \in \mathbb{N}$ .
- (C3) коефіцієнти  $\alpha$  і  $k$  є додатними.

Зауважимо, що умови (C1) та (C3) еквівалентні умовам (B1) та (B3) відповідно, встановленим у пункті 3.4. Умова ж (C2) містить певні особливості, мету введення яких буде розкрито далі у цьому розділі.

## 5.2. Стохастична похідна і ціна опціону

Тепер застосуємо числення Маллявена, зокрема, поняття стохастичної похідної, за допомогою якої запишемо щільності розподілів випадкових величин  $\bar{\sigma}$  та  $\tilde{\sigma}$ .

Спочатку дамо необхідні означення і сформулюємо твердження щодо щільності розподілу як функціонала від стохастичної похідної. Більш детально основи та застосування числення Маллявена викладено у [52].

Нехай  $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ , – вінерівський процес на імовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^W, t \in [0, T], \mathbb{P}\}$ , де  $\Omega = C([0, T], \mathbb{R})$ .

Позначимо  $\widehat{C}^\infty(\mathbb{R})$  множину всіх нескінченно диференційовних функцій із похідними не вище поліноміального зростання на нескінченності.

**Означення 5.1.** Назвемо гладкими випадкові величини  $F$  вигляду  $F = f(W(t_1), \dots, W(t_n))$ ,  $f = f(x^1, \dots, x^n) \in \widehat{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ . Клас

гладких величин позначимо через  $\mathcal{S}$ .

**Означення 5.2.** Нехай  $F \in \mathcal{S}$ . Стохастичною похідною випадкової величини  $F$  в точці  $t$  назвемо випадкову величину

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(W(t_1), \dots, W(t_n)) 1_{[0, t_i]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Областю визначення оператора похідної  $D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2([0, T], \mathbb{R})$  є гільбертів простір випадкових величин  $\mathbb{D}^{1,2}$ , на якому скалярний добуток задається наступним чином:

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = \mathbb{E}(FG) + \mathbb{E}(\langle DF, DG \rangle_H), \quad H = L^2[0, T].$$

Простір  $\mathbb{D}^{1,2}$  є щільною підмножиною  $L^2(\Omega)$  і замиканням класу гладких випадкових процесів  $\mathcal{S}$  відносно норми

$$\|F\|_{1,2} = [\mathbb{E}(|F|^2) + \mathbb{E}(\|DF\|_H^2)]^{1/2}.$$

Отже, оператор похідної  $D$  є замкненим, необмеженим і визначеним на щільній підмножині простору  $L^2(\Omega)$  (див. [52]).

**Означення 5.3.** Позначимо через  $\delta$  спряжений до  $D$  оператор, який є необмеженим оператором в  $L^2([0, T], \mathbb{R})$  зі значеннями в  $L^2(\Omega)$ , таким що:

- (i) область визначення  $\delta$  є множиною квадратично інтегровних випадкових величин  $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ , для яких

$$|\mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H)| \leq C(\mathbb{E}(F^2))^{1/2},$$

для всіх  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ , де  $C$  деяка стала, що залежить від  $u$ ;

- (ii) якщо  $u$  належить до області визначення  $\delta$ , то  $\delta(u)$  є елементом  $L^2(\Omega)$

і

$$\mathbb{E}(F\delta(u)) = \mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H)$$

для всіх  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ .

Оператор  $\delta$  є замкненим як спряжений до необмеженого і щільно визначеного оператора. Позначимо його область визначення  $\text{Dom } \delta$ .

Розглянемо простір  $L^{1,2} = L^2([0, T], \mathbb{D}^{1,2})$  з нормою  $\|\cdot\|_{L^{1,2}}$ , де

$$\|u\|_{L^{1,2}}^2 = \mathbb{E} \left( \int_0^T u_t^2 dt + \int_0^T \int_0^T (D_s u_t)^2 dt ds \right).$$

*Зауваження 5.1.* Якщо  $u \in L^{1,2}$ , то інтеграл  $\delta(u)$  коректно означено, і має місце оцінка

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T u_t dW_t \right)^2 \leq \|u\|_{L^{1,2}}^2$$

(див. [93], [94]). У цьому випадку оператор  $\delta(u)$  називається інтегралом Скорохода процесу  $u$ , і позначається через

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

Наступне твердження є фундаментальним для доведення основного результату цієї роботи.

**Лема 5.1. (твердження 2.1.1 з [52])** *Нехай  $F$  – випадкова величина з простору  $\mathbb{D}^{1,2}$ . Припустимо, що  $\frac{DF}{\|DF\|_H^2}$  належить області визначення оператора  $\delta$ . Тоді щільність випадкової величини  $F$  є неперервною, обмеженою і має вигляд*

$$p(x) = \mathbb{E} \left[ 1_{\{F > x\}} \delta \left( \frac{DF}{\|DF\|_H^2} \right) \right].$$

Також далі застосовуватиметься наступний аналог теореми Фубіні для інтегралу Скорохода.

**Лема 5.2. (лема 2.10 з [95])** *Нехай виконуються наступні умови:*

- 1) Функція  $u(t, h, \omega) \in L^2([0, T]^2 \times \Omega)$ , і майже для всіх  $t \in [0, T]$  випадковий процес  $u(t, \cdot) \in \text{Dom } \delta$ ;
- 2)  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\delta(u(t, \cdot))|^2 dt \right] < \infty$ .

Тоді  $\left\{ \int_0^T u(t, h) dt, h \in [0, T] \right\} \in \text{Dom } \delta$ , і

$$\int_0^T \int_0^T u(t, h) dt dW_h = \int_0^T \int_0^T u(t, h) dW_h dt.$$

Перед тим як сформулювати і довести основний результат цієї роботи, нагадаємо, що, як відмічалось вище, випадкова величина  $\bar{\sigma} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(Y_s) ds \right)^{\frac{1}{2}}$  повністю визначає ціну опціону у моделі (3.10).

Введемо позначення  $\nu(x) = \sigma(x)\sigma'(x)$ .

**Теорема 5.1.** *Нехай функція  $\sigma$  задовольняє припущення (C2), є двічі неперервно диференційовною, похідна  $\sigma'$  є строго додатною та має не більше, ніж поліноміальний зростання на нескінченності. Тоді для процесу Орнштейна–Уленбека  $Y$ , визначеного стохастичним диференціальним рівнянням (3.2), випадкова величина  $\bar{\sigma}^2$  має неперервну обмежену щільність розподілу виду*

$$p_{\bar{\sigma}^2}(x) = \mathbb{E} \left[ 1_{\{\bar{\sigma} > \sqrt{x}\}} \left( \int_0^T \eta_t \int_0^t e^{\alpha s} dW_s dt - \int_0^T \int_0^t e^{\alpha h} D_h \eta_t dh dt \right) \right], \quad (5.1)$$

де

$$\eta_t = \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1}, \quad (5.2)$$

значення стохастичної похідної  $D_h \eta_t$  наведено у лемі 5.4, і всі величини у правих частинах рівностей (5.1) і (5.2) коректно означені.

*Доведення.* Стохастична похідна від процесу ОУ має вид

$$D_h Y_t = \left( -\alpha \int_h^t D_h Y_s ds + k \right) 1_{\{h < t\}}.$$

Розв'язуючи дане рівняння відносно  $t$  при фіксованому  $h$ , отримаємо

$$D_h Y_t = k e^{-\alpha(t-h)} 1_{\{h < t\}}.$$

Тоді для обмеженої неперервно диференційовної функції  $\sigma$ , такої що  $\sigma'$  має не більше, ніж поліноміальне зростання на нескінченності, стохастична похідна обчислюється за ланцюговим правилом:

$$D_h \sigma^2(Y_t) = 2\sigma(Y_t)\sigma'(Y_t)D_h Y_t = 2k e^{-\alpha(t-h)} \nu(Y_t) 1_{\{h < t\}},$$

і стохастична похідна інтегрального функціоналу

$$I_T(\sigma^2) = \int_0^T \sigma^2(Y_t) dt$$

дорівнює

$$D_h I_T(\sigma^2) = \int_0^T D_h \sigma^2(Y_t) dt = 2k \int_h^T e^{-\alpha(t-h)} \nu(Y_t) dt, \quad h \leq T. \quad (5.3)$$

Тепер потрібно визначити, чи існує інтеграл Скорохода

$$\bar{\delta} := \delta \left( \frac{D\bar{\sigma}^2}{\|D\bar{\sigma}^2\|_H^2} \right),$$

де  $\bar{\sigma}^2 = \frac{I_T(\sigma^2)}{T}$ .

Для цього спочатку подамо підінтегральний процес у явному вигляді. Згідно з (5.3),

$$D_h \bar{\sigma}^2 = \frac{2k}{T} \int_h^T e^{-\alpha(t-h)} \nu(Y_t) dt,$$

тому

$$\begin{aligned} \|D\bar{\sigma}^2\|_H^2 &= \int_0^T (D_h \bar{\sigma}^2)^2 dh = \frac{4k^2}{T^2} \int_0^T \left( \int_h^T e^{-\alpha(t-h)} \nu(Y_t) dt \right)^2 dh \\ &= \frac{4k^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^{t_1 \wedge t_2} e^{-\alpha(t_1-h)} \nu(Y_{t_1}) e^{-\alpha(t_2-h)} \nu(Y_{t_2}) dh dt_1 dt_2 \\ &= \frac{2k^2}{\alpha T^2} \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Таким чином, випадковий процес

$$\bar{\zeta}_h := \frac{D_h \bar{\sigma}^2}{\|D\bar{\sigma}^2\|^2}$$

дорівнює

$$\bar{\zeta}_h = e^{\alpha h} \int_h^T \eta_t dt = \int_0^T u(t, h) dt, \quad u(t, h) := \eta_t e^{\alpha h} \mathbf{1}_{\{h < t\}}.$$

Згідно з лемою 5.6,  $\bar{\zeta}_h \in L^{1,2}$ , отже, процес  $\bar{\zeta}_h$  інтегровний за Скороходом, або, що те саме, інтеграл  $\bar{\delta}$  існує. Перевіримо виконання умов леми 5.2 для  $u(t, h)$ . Спочатку використаємо нерівності (5.8) та (5.9) з леми 5.5 і одержимо, що

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_0^T u^2(t, h) dh dt \right] \leq \frac{e^{2\alpha T} - 1}{2\alpha} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt \right] < \infty,$$

а значить  $u(t, h, \omega) \in L^2([0, T]^2 \times \Omega)$ . Тепер при кожному  $t \in [0, T]$ , з урахуванням (5.8)–(5.11)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \int_0^T u^2(t, h) dh + \int_0^T \int_0^T (D_s u(t, h))^2 ds dh \right] \\ = & \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\eta_t e^{\alpha h} \mathbf{1}_{\{h < t\}})^2 dh + \int_0^T \int_0^T (e^{\alpha h} \mathbf{1}_{\{h < t\}} D_s \eta_t)^2 ds dh \right] \\ & \leq \frac{e^{2\alpha T} - 1}{2\alpha} \left( \mathbb{E} \eta_t^2 + \int_0^T \mathbb{E} [(D_s \eta_t)^2] ds \right) \leq C. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Звідси випливає інтегровність за Скороходом  $u(t, \cdot)$  при кожному  $t \in [0, T]$ .

Отже, першу умову леми 5.2 виконано. Друга умова випливає з оцінок

$$\mathbb{E}[(\delta(u(t, \cdot)))^2] \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T u^2(t, h) dh + \int_0^T \int_0^T (D_s u(t, h))^2 ds dh \right] \leq C,$$

а тому  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (\delta(u(t, h)))^2 dt \right] < \infty$ . Отже, застосуємо теорему Фубіні до інтегралу

$$\bar{\delta} = \int_0^T \int_0^T e^{\alpha h} \eta_t \mathbf{1}_{\{h < t\}} dt dW_h$$

і змінимо порядок інтегрування:

$$\bar{\delta} = \int_0^T \int_0^T e^{\alpha h} \eta_t \mathbf{1}_{\{h < t\}} dW_h dt.$$

З останньої рівності, а також з теореми 3.2 [93] випливає, що

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \int_0^T \left( \eta_t \int_0^t e^{\alpha h} \mathbf{1}_{\{h < t\}} dW_h - \int_0^t e^{\alpha h} D_h \eta_t \mathbf{1}_{\{h < t\}} dh \right) dt \\ &= \int_0^T \eta_t \left( \int_0^t e^{\alpha h} dW_h \right) dt - \int_0^T \int_0^t e^{\alpha h} D_h \eta_t dh dt.\end{aligned}$$

□

**Наслідок 5.1.** *Нехай виконуються умови теореми 5.1. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі  $C = (S_T - K)^+$  зі страйковою ціною  $K \geq 0$  задається виразом*

$$\begin{aligned}V_C &= \int_0^\infty \left( S_0 \Phi \left( \frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}} \right) \right. \\ &\quad \left. - K e^{-rT} \Phi \left( \frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}} \right) \right) p_{\sigma^2}(x) dx,\end{aligned}$$

де  $p_{\sigma^2}(x)$  визначено у (5.1).

### 5.3. Допоміжні результати

Першим доведемо результат стосовно обмеженості моментів від'ємного порядку для випадкових моментів виходу процесу Орнштейна–Уленбека  $Y$  з деякого інтервалу. Для будь-якого фіксованого  $Y_0 \in \mathbb{R}$  розглянемо довільний інтервал такий, що для кожного  $x \in [Y_0 - a, Y_0 + a]$  має місце нерівність  $|\sigma'(x) - \sigma'(Y_0)| \leq \frac{\sigma'(Y_0)}{2}$ . Позначимо  $\tau = \inf\{t > 0 : |Y_t - Y_0| \geq a\}$ ,  $\tau_1 = \tau \wedge T$ .

**Лема 5.3.** *Будь-які від'ємні моменти вказаних моментів виходу скінченні, а саме,  $\mathbb{E}(\tau_1)^{-p} < \infty$  для всіх  $p > 0$ .*

*Доведення.* Згідно з лемою 10.5 [97], якщо  $K > 0$  і  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  – одновимірний неперервний напівмартингал вигляду

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

де  $\langle M \rangle_t = \int_0^t \alpha(s) ds$  і  $A_t = \int_0^t \beta(s) ds$ , причому  $|\alpha(s)| \leq K$  і  $|\beta(s)| \leq K$ , то для будь-якого  $a > 0$ , для моменту  $\tau_a$  виходу цього напівмартингалу з інтервалу  $[X_0 - a, X_0 + a]$  і для всіх  $\lambda \in (0, \frac{a}{2K}]$

$$\mathbb{P}\{\tau_a < \lambda\} \leq \frac{4}{\sqrt{\pi a}} \exp\left\{-\frac{a^2}{8K\lambda}\right\}.$$

Розглянемо процес Орнштейна–Уленбека  $Y_t = Y_0 - \alpha \int_0^t Y_s ds + kW_t$  з вінерівським процесом  $W$ , виберемо будь-яке  $N > a + |Y_0|$  і позначимо  $\tau^N = \inf\{t > 0 : |Y_t| \geq N\}$ . Тоді  $\tau_N > \tau_a$ . Далі,

$$\widehat{Y}_t := Y_{t \wedge \tau_N} = Y_0 - \alpha \int_0^t Y_{s \wedge \tau_N} \mathbf{1}_{s \leq \tau_N} ds + k \int_0^t \mathbf{1}_{s \leq \tau_N} dW_s,$$

і напівмартингал  $\widehat{Y}_t$  задовольняє умови леми 10.5 [97] при  $K = N \cdot (\alpha \vee k)$ . Крім того, якщо позначити  $\tau_a^N = \inf\{t > 0 : |\widehat{Y}_t - Y_0| \geq a\}$  то  $\tau_a^N = \tau_a$ . Тому в околі нуля розподіл моменту виходу  $\tau$  допускає експоненційну оцінку: існують такі сталі  $C_1, C_2, C_3$ , що

$$\mathbb{P}\{\tau_a < \lambda\} \leq C_1 \exp\left\{-\frac{C_2}{\lambda}\right\}, 0 < \lambda < C_3,$$

і те саме вірне для  $\tau_1$ . Звідси випливає твердження леми.  $\square$

Тепер доведемо технічні результати стосовно вигляду і оцінок для стохастичних похідних.

**Лема 5.4.** *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 5.1. Тоді стохастична похідна  $D_h \eta_t$  має вигляд*

$$\begin{aligned}
D_h \eta_t &= \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \left( e^{-\alpha(t-h)} \mathbf{1}_{\{h < t\}} \nu'(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \right. \right. \\
&\quad \times \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \left. \right]^{-1} - \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \right. \\
&\quad \times \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \left. \right]^{-2} \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \\
&\quad \times \left( \nu(Y_{t_1}) e^{-\alpha(t_2-h)} \mathbf{1}_{\{h < t_2\}} \nu'(Y_{t_2}) \right. \\
&\quad \left. + \nu(Y_{t_2}) e^{-\alpha(t_1-h)} \mathbf{1}_{\{h < t_1\}} \nu'(Y_{t_1}) \right) dt_1 dt_2 \left. \right). \tag{5.5}
\end{aligned}$$

*Доведення.* Відзначимо, що для коректного означення необхідно показати, що подвійний інтеграл у знаменнику  $\eta_t$  і стохастичної похідної від цієї функції м.н. додатний. Це буде зроблено у лемі 5.5, де буде доведено інтегровність стохастичної похідної, а у цій лемі ми обмежимося формальним визначенням її вигляду.

Отже, за правилом ланцюга

$$\begin{aligned}
D_h \eta_t &= \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \\
&\quad \times D_h \left( \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1} \right) \\
&= \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \left\{ D_h \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \nu(Y_t) D_h \left( \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \left\{ D_h Y_t \nu'(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1} \right. \\
&- \nu(Y_t) \left[ \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-2} \int_0^T \int_0^T \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - \right. \\
&\quad \left. \left. e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \left[ (\nu(Y_{t_1}) D_h Y_{t_2} \nu'(Y_{t_2}) + \nu(Y_{t_2}) D_h Y_{t_1} \nu'(Y_{t_1})) \right] dt_1 dt_2 \right\}.
\end{aligned}$$

Оскільки  $D_h Y_t = e^{-\alpha(t-h)} \mathbf{1}_{\{h < t\}}$ , то лему доведено.  $\square$

**Лема 5.5.** *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 5.1. Тоді  $\eta_t \in L^{1,2}$ , а значить і для будь-якого  $h \in [0, T]$ :  $\eta_t \mathbf{1}_{\{h < t\}} \in L^{1,2}$ .*

*Доведення.* Доведення леми зводиться до перевірки нерівності

$$\|\eta_t\|_{L^{1,2}}^2 = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt + \int_0^T \int_0^T (D_h \eta_t)^2 dt dh \right] < \infty.$$

Доведемо обмеженість першого доданку з правої частини попереднього виразу.

Введемо множину  $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sigma'(x) - \sigma'(Y_0)| \geq \sigma'(Y_0)/2\}$ . Нагадаємо, що  $\tau = \inf \{t : Y_t \in A\}$ ,  $\tau_1 = \tau \wedge T$ . Зауважимо, що оскільки вираз

$$\left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2})$$

за умов теореми є невід'ємним, і за припущенням (A2)  $\sigma(x) \geq c > 0$ , для всіх  $x \in \mathbb{R}$  і деякої сталої  $c > 0$ , то  $\nu(Y_t) \geq \frac{c}{2} \sigma'(Y_0)$  для  $t \in (0, \tau)$ . Тоді

$$\begin{aligned}
& \eta_t = \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \nu(Y_t) \\
& \times \left( \int_0^T \int_0^T \left( e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right) \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right)^{-1} \\
& \leq \frac{\alpha T}{k} e^{-\alpha t} \nu(Y_t) \\
& \times \left[ \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right] \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \right]^{-1} \\
& \leq \frac{4\alpha T}{k(c\sigma'(Y_0))^2} e^{-\alpha t} \nu(Y_t) \left[ \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \left( e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Далі позначимо  $C$  або  $C$  з індексами сталі, значення яких не є важливим. Розглянемо подвійний інтеграл, що знаходиться в знаменнику, та обчислимо його в будь-якій точці  $x > 0$ :

$$\begin{aligned}
\psi(x) & := \int_0^x \int_0^x \left( e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right) dt_1 dt_2 \\
& = \frac{\alpha}{2} \int_0^x \left( \int_h^x e^{-\alpha(s-h)} ds \right)^2 dh \\
& = \frac{1}{2\alpha} \int_0^x \left( e^{2\alpha(h-x)} - 2e^{\alpha(h-x)} + 1 \right) dh \\
& = \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{-e^{-2\alpha x} + 1}{2\alpha} + 2 \frac{e^{-\alpha x} - 1}{\alpha} + x \right) \\
& = C(4e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x} + 2\alpha x - 3).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що  $\psi(0) = 0$ , і функція  $\psi(x) = C(4e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x} + 2\alpha x - 3)/(4\alpha^2)$  зростає на  $\mathbb{R}$ . Використаємо елементарну нерівність  $1 - e^{-\alpha x} \geq \alpha x e^{-\alpha x}$ ,  $x \geq 0$ , для того, щоб оцінити знизу похідну від функції  $\psi$ :

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha x})^2 \geq Cx^2 e^{-2\alpha x}.$$

Тоді

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(s) ds \geq C \int_0^x e^{-2\alpha s} s^2 ds > C_1 x^3.$$

Отже, з імовірністю 1 має місце оцінка:

$$\int_0^T \int_0^T \left( e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right) \nu(Y_{t_1}) \nu(Y_{t_2}) dt_1 dt_2 \geq C \tau_1^3 \quad (5.7)$$

Зауважимо також, що  $\nu^2(x) \leq C(1+|x|^m)$  для деяких  $C > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , оскільки  $\sigma(x)$  і  $\sigma'(x)$  мають не більш ніж поліноміальне зростання. Тому, а також з урахуванням (5.6), має місце оцінка

$$\eta_t \leq C e^{-\alpha t} \nu(Y_t) \tau_1^{-3} \leq C(1 + |Y_t|^m) \tau_1^{-3}.$$

Далі, моменти будь-якого порядку процесу Орнштейна–Уленбека рівномірно обмежені на будь-якому інтервалі, тому з урахуванням леми 5.3

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E} \eta_t^2 \leq C \sup_{t \in T} (\mathbb{E}(1 + |Y_t|^{2m})(\mathbb{E} \tau_1^{-6}))^{\frac{1}{2}} \leq C. \quad (5.8)$$

Звідси з очевидністю

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \eta_t^2 dt \right] < \infty. \quad (5.9)$$

Розглянемо тепер другий доданок норми. Спочатку, з урахуванням (5.5) та (5.7) оцінимо стохастичну похідну:

$$\begin{aligned} |(D_h \eta_t)| &\leq C \left( \tau_1^{-3} \nu'(Y_t) + \tau_1^{-6} \nu'(Y_t) \int_0^T \nu(Y_s) ds \int_0^T \nu'(Y_u) du \right) \\ &\leq C(1 + |Y_t|^{m_1})(\tau_1^{-3} + \tau_1^{-6}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

для деякого  $m_1 \in \mathbb{N}$ . Тепер, цілком аналогічно до міркувань при доведенні (5.8), одержимо, що існує стала  $C > 0$ , для якої

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E} (D_h \eta_t)^2 \leq C \text{ і } \int_0^T \int_0^T (D_h \eta_t)^2 dt dh < \infty, \quad (5.11)$$

а тому за означенням  $\eta_t \in L^{1,2}$ , і лему доведено.  $\square$

**Лема 5.6.** *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 5.1. Тоді  $\bar{\zeta}_h \in L^{1,2}$ .*

*Доведення.* Необхідно показати, що

$$\begin{aligned} \|\bar{\zeta}_h\|_{L^{1,2}}^2 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( e^{\alpha h} \int_h^T \eta_s ds \right)^2 dh \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_0^T \left( D_h \left( e^{\alpha t} \int_t^T \eta_s ds \right) \right)^2 dt dh \right] < \infty. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Перший доданок з правої частини рівності у (5.12) обмежимо згори наступним чином:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( e^{\alpha h} \int_h^T \eta_s ds \right)^2 dh \right] \leq T \int_0^T e^{2\alpha h} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \eta_s^2 ds \right] dh. \quad (5.13)$$

В силу (5.9) математичне сподівання у підінтегральному виразі у правій частині (5.13) обмежене, і тому

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( e^{\alpha h} \int_h^T \eta_s ds \right)^2 dh \right] < \infty.$$

Для другого доданку з правої частини рівності у (5.12), в силу (5.11),

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_0^T \left( D_h \left( e^{\alpha t} \int_t^T \eta_s ds \right) \right)^2 dt dh \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T e^{2\alpha t} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T D_h(\eta_s \mathbf{1}_{\{t < s\}}) ds \right)^2 \right] dt dh \\ &\leq T \int_0^T \int_0^T e^{2\alpha t} \mathbb{E} \left[ \int_0^T (D_h \eta_s)^2 ds \right] dt dh < \infty. \end{aligned}$$

□

## Висновки до розділу 5

У даному розділі із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціону. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціону за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними. Отримано відповідну формулу для обчислення ціни опціону.

## РОЗДІЛ 6

### ВІДСУТНІСТЬ АРБІТРАЖУ В ДИНАМІЧНИХ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗАДАНИМИ ДОХОДАМИ

У розділі 6 у моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено необхідні та достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

Розділ побудовано наступним чином: у першому підрозділі описується розглядувана економічна модель обміну, наводяться деякі попередні результати. У другому підрозділі сформульовано та доведено теорему про необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. У третьому підрозділі означено розглядувану економічну динаміку, сформульовано поняття безарбітражності економічної динаміки та отримано достатні умови безарбітражності для розглядуваної моделі.

#### 6.1. Модель ринку та попередні відомості

В цьому розділі розглядаємо економічну модель обміну з пропорційним споживанням і заданими доходами. Основною задачею є встановлення умов, за яких рівноважний ціновий вектор є строго додатним.

Розглядатимемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^l C_{ki} \frac{\langle b_i, p \rangle + D_i}{\langle C_i, p \rangle} = \psi_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.1)$$

розв'язки якої описують стан рівноваги в таких економічних системах, де  $C = |C_{ki}|_{k=1, i=1}^{n, l}$ ,  $B = |b_{ki}|_{k=1, i=1}^{n, l}$  є невід'ємними матрицями,  $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$  і  $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , - невід'ємні вектори, побудовані за цими матрицями

відповідно,  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  строго додатний вектор,  $D_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Припустимо також, що мають місце нерівності

$$\sum_{k=1}^n C_{ki} > 0, \quad \sum_{k=1}^n b_{ki} > 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \sum_{i=1}^l C_{ki} > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.2)$$

Використовуватимемо наступні позначення

$$\langle b_i, p \rangle = \sum_{k=1}^n p_k b_{ki}, \quad \langle C_i, p \rangle = \sum_{k=1}^n p_k C_{ki}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Нижче наведено формулювання теореми 5.2.8 з [98], [99], яка встановлює необхідні та достатні умови існування строго додатного розв'язку системи рівнянь (6.1).

**Теорема 6.1.** *Нехай  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  - строго додатний вектор, а  $i$ -й споживач має невід'ємний вектор запасу товарів  $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$  та кошти  $D_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Необхідними та достатніми умовами існування строго додатного розв'язку системи рівнянь (6.1) стосовно вектора  $p \in R_+^n$  є умови:*

1) вектор  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  належить внутрішності невід'ємного конуса, утвореного векторами  $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , тобто

$$\psi = \sum_{i=1}^l y_i C_i, \quad y_i > 0, \quad i = \overline{1, l}; \quad (6.3)$$

2) вектор  $D = \{D_i\}_{i=1}^l$  належить внутрішності невід'ємного конуса, утвореного векторами  $d_k = \{-b_{ki} + y_i C_{ki}\}_{i=1}^l$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Надалі вважатимемо, що достатні умови теореми 6.1 виконуються. Оцінку знизу для компонент цінового вектора отримаємо, застосувавши теореми 6.1.1, 6.1.2 з [98], [99]. Однак, як буде показано нижче, спершу необхідно відшукати оцінки для компонент вектора  $y_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Сформулюємо теореми 6.1.1. та 6.1.2 з [98], [99].

**Теорема 6.2.** *Нехай  $a_1, \dots, a_m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , - множина лінійно незалежних векторів з  $R_+^n$ . Необхідними та достатніми умовами того, що*

вектор  $b$  належить внутрішності невід'ємного конуса  $K_a^+$ , утвореного векторами  $a_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , є умови

$$\langle f_i, b \rangle > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \langle f_i, b \rangle = 0, \quad i = \overline{m+1, n},$$

де  $f_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , - біортогональна система векторів до системи лінійно незалежних векторів  $\bar{a}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а  $\bar{a}_i = a_i$   $i = \overline{1, m}$ .

**Теорема 6.3.** Якщо деякий вектор  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  належить внутрішності невід'ємного  $r$ -вимірного багатогранного конуса, утвореного векторами  $\{C_i = \{c_{ki}\}_{k=1}^n, i = \overline{1, l}\}$ , і такий, що існує підсистема  $r$  лінійно незалежних векторів множини векторів  $\{C_i, i = \overline{1, l}\}$ , що вектор  $\psi$  належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів, то існує  $l - r + 1$  лінійно незалежних невід'ємних розв'язків  $z_m$  системи рівнянь 6.3 таких, що множину строго додатних розв'язків системи рівнянь 6.3 задає формула  $y = \sum_{m=r}^l \gamma_m z_m$ , де

$$z_m = \{\langle \psi, f_1 \rangle - \langle C_m, f_1 \rangle y_m^*, \dots, \langle \psi, f_r \rangle - \langle C_m, f_r \rangle y_m^*, 0, \dots, y_m^*, 0, \dots, 0\},$$

$$m = \overline{r+1, l},$$

$$z_r = \{\langle \psi, f_1 \rangle, \dots, \langle \psi, f_r \rangle, 0, \dots, 0\},$$

$$y_m^* = \begin{cases} \min_{s \in K_m} \frac{\langle \psi, f_s \rangle}{\langle C_m, f_s \rangle}, & K_m = \{s, \langle C_m, f_s \rangle > 0\}, \\ 1, & \langle C_m, f_s \rangle \leq 0, \quad \forall s = \overline{1, r}, \end{cases}$$

а компоненти вектора  $\{\gamma_m\}_{m=r}^l$  задовольняють систему нерівностей

$$\sum_{m=r}^l \gamma_m = 1, \quad \gamma_m > 0, \quad m = \overline{r+1, l},$$

$$\sum_{m=r+1}^l \langle C_m, f_k \rangle y_m^* \gamma_m < \langle \psi, f_k \rangle, \quad k = \overline{1, r}.$$

Перед тим як сформулювати і довести основний результат цієї частини, повернемося до теореми 6.1 та наведемо коротке доведення необхідності. Нехай існує строго додатний вектор  $p_0$ , який є розв'язком системи рівнянь (6.1). Введемо позначення

$$y_i = \frac{\langle b_i, p \rangle + D_i}{\langle C_i, p \rangle}, \quad i = \overline{1, l}. \quad (6.4)$$

Внаслідок виконання нерівностей (6.2) і строгої додатності компонент вектора  $D$  маємо  $y_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ , та справедлива рівність (6.3). З рівностей (6.4) отримуємо систему рівностей

$$\langle -b_i + y_i C_i, p_0 \rangle = D_i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (6.5)$$

з якої і випливає умова 2) теореми 6.1 через строгу додатність вектора  $p_0$ .

## 6.2. Теорема про необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги

Припускаємо, що виконуються умови (6.2).

**Теорема 6.4.** *Нехай  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  - строго додатний вектор, а  $i$ -й споживач має невід'ємний вектор запасу товарів  $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$  та кошти  $D_i > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ , і виконуються наступні умови:*

- вектор  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$  належить внутрішності  $r$ -вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами  $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , тобто

$$\psi = \sum_{i=1}^l y_i C_i, \quad y_i > 0, \quad i = \overline{1, l};$$

- вектор  $D = \{D_i\}_{i=1}^l$  належить внутрішності  $r_1$ -вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами  $d_k = \{-b_{ki} + y_i C_{ki}\}_{i=1}^l$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;
- існує підсистема  $r$  лінійно незалежних векторів множини векторів  $\{C_i, i = \overline{1, l}\}$ , таких, що вектор  $\psi$  належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів;

- існує підсистема  $r_1$  лінійно незалежних векторів множини векторів  $\{d_k = -b_k + yC_k, k = \overline{1, n}\}$ , таких, що вектор  $D = \{D_i\}, i = \overline{1, l}$ , належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів.

Тоді існує такий набір векторів  $f_k^1, k = \overline{1, l}$ , що справедливі наступні твердження:

- існує  $n - r_1 + 1$  лінійно незалежних невід'ємних розв'язків системи рівнянь (6.5)  $z_k^1$  таких, що множину строго додатних розв'язків системи рівнянь (6.5) задає формула  $p = \sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 z_m^1$ , де

$$\begin{aligned} z_m^1 &= \{\langle D, f_1^1 \rangle - \langle d_m, f_1^1 \rangle p_m^*, \dots, \langle D, f_{r_1}^1 \rangle \\ &- \langle d_m, f_{r_1}^1 \rangle p_m^*, 0, \dots, p_m^*, 0, \dots, 0\}, \quad m = \overline{r_1 + 1, n}, \\ z_{r_1}^1 &= \{\langle D, f_1^1 \rangle, \dots, \langle D, f_{r_1}^1 \rangle, 0, \dots, 0\}, \end{aligned}$$

$$p_m^* = \begin{cases} \min_{s \in K_m} \frac{\langle D, f_s^1 \rangle}{\langle d_m, f_s^1 \rangle}, & K_m = \{s, \langle d_m, f_s^1 \rangle > 0\}, \\ 1, & \langle d_m, f_s^1 \rangle \leq 0, \quad \forall s = \overline{1, r_1}, \end{cases}$$

а компоненти вектора  $\{\gamma_m^1\}_{m=r_1}^n$  задовольняють систему нерівностей

$$\sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 = 1, \quad \gamma_m^1 > 0, \quad m = \overline{r_1, n},$$

$$\sum_{m=r_1+1}^n \langle d_m, f_i^1 \rangle p_m^* \gamma_m^1 < \langle D, f_i^1 \rangle, \quad i = \overline{1, r_1};$$

- існує строго додатний вектор  $p$ , який є розв'язком системи рівнянь (6.1), і для компонент якого виконуються нерівності:

$$\begin{cases} p_i \geq \gamma_{r_1}^1 \langle D, f_i^1 \rangle, & i = \overline{1, r_1}, \\ p_i \geq \gamma_i^1 p_i^*, & i = \overline{r_1 + 1, n}. \end{cases} \quad (6.6)$$

*Доведення.* Існування строго додатного розв'язку системи рівнянь (6.1) забезпечується теоремою 6.1, достатні умови якої виконуються. З умов 2) і 4) випливає, що вектор  $D$  задовольняє умовам теореми 6.3. Тому твердження 1) даної теореми виконується. Знайдемо оцінку знизу для компонент вектора  $p$  з твердження 1) даної теореми.

$$\begin{cases} p_i = \sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 \langle D, f_i^1 \rangle - \sum_{m=r_1+1}^n \gamma_m^1 \langle d_m, f_i^1 \rangle p_m^*, & i = \overline{1, r_1}, \\ p_i = \gamma_i^1 p_i^*, & i = \overline{r_1 + 1, n}. \end{cases}$$

Розглянемо детальніше оцінку для компонент з порядковими номерами  $i = \overline{1, r_1}$ . Оскільки  $\sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 = 1$ , то

$$p_i = \langle D, f_i^1 \rangle - \sum_{m=r_1+1}^n \gamma_m^1 \frac{\langle d_m, f_i^1 \rangle}{\langle D, f_i^1 \rangle} p_m^* \langle D, f_i^1 \rangle.$$

Для того, щоб отримати оцінку знизу, максимізуємо елементи суми, що входить у вищенаведену рівність. Якщо  $K_m = \{s, \langle d_m, f_s^1 \rangle > 0\} \neq \{\emptyset\}$ , то

$$\frac{\langle d_m, f_i^1 \rangle}{\langle D, f_i^1 \rangle} \min_{s \in K_m} \frac{\langle D, f_s^1 \rangle}{\langle d_m, f_s^1 \rangle} \langle D, f_i^1 \rangle \leq \begin{cases} \langle D, f_i^1 \rangle, & \langle d_m, f_i^1 \rangle > 0, \\ 0, & \langle d_m, f_i^1 \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Якщо  $\langle d_m, f_s^1 \rangle \leq 0, \forall s = \overline{1, r_1}$  то

$$\frac{\langle d_m, f_i^1 \rangle}{\langle D, f_i^1 \rangle} \min_{s \in K_m} \frac{\langle D, f_s^1 \rangle}{\langle d_m, f_s^1 \rangle} \langle D, f_i^1 \rangle \leq 0$$

Отже

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{m=r_1}^n \gamma_m^1 \langle D, f_i^1 \rangle - \sum_{m=r_1+1}^n \gamma_m^1 \langle d_m, f_i^1 \rangle p_m^* \geq \\ &\langle D, f_i^1 \rangle - \sum_{m=r_1+1}^n \gamma_m^1 \langle D, f_i^1 \rangle = -(1 - \gamma_{r_1}^1) \langle D, f_i^1 \rangle + \langle D, f_i^1 \rangle = \\ &\gamma_{r_1}^1 \langle D, f_i^1 \rangle, \quad i = \overline{1, r_1}. \end{aligned}$$

Аналогічні оцінки отримуються завдяки умові 3) цієї теореми та теоремі 6.3 і для вектора  $y_i$ , за допомогою якого задається  $d_{ki}$ . Таким чином, отримано оцінку знизу для компонент вектора  $p$ , який є розв'язком системи рівнянь (6.1). Теорему доведено.  $\square$

### 6.3. Постановка задачі

Припустимо, що економічна система функціонує протягом  $N$  періодів,  $N < \infty$ . У  $t$ -му періоді функціонування економіки вектори попиту  $C_i^t(\omega) = \{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , задаються на ймовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}\}$ . Також припустимо, що рівні споживання у  $t$ -му періоді задано деяким випадковим вектором

$$y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l,$$

всі компоненти якого є строго додатними, тобто  $y_i^t(\omega) > 0$ . Цей вектор називатимемо вектором ступенів задоволення потреб споживача (див. [98], [99]).

Таким чином, вектор пропозиції в  $t$ -му періоді задається формулою

$$\psi^t(\omega) = \sum_{i=1}^l C_i^t(\omega) y_i^t(\omega).$$

Нижче представлено теорему, що встановлює достатні умови існування економічної динаміки, і яка є наслідком попередніх результатів.

**Теорема 6.5.** *Нехай множина векторів  $C_i^t(\omega)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , які є стовпчиками матриці  $C^t(\omega) = \|C_{ki}^t(\omega)\|_{k=1, i=1}^{n, l}$ , задовольняє нерівності*

$$\sum_{k=1}^n C_{ki}^t(\omega) > 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \sum_{i=1}^l C_{ki}^t(\omega) > 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad t = \overline{1, N},$$

$$C_{ks}^t(\omega) \geq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, l}, \quad t = \overline{1, N}.$$

Нехай  $\psi^t = \{\psi_k^t(\omega)\}_{k=1}^n$ ,  $t = \overline{1, N}$  – строго додатний вектор, а  $i$ -й споживач має невід’ємний вектор запасу товарів  $b_i^t = \{b_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$  та кошти  $D_i^t(\omega) > 0$ ,  $i = \overline{1, l}$ ,  $t = \overline{1, N}$ . Необхідними та достатніми умовами існування з ймовірністю 1 строго додатного розв’язку системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^l C_{ki}^t(\omega) \frac{\langle b_i^t, p^t \rangle + D_i^t}{\langle C_i^t(\omega), p \rangle} = \psi_k^t(\omega), \quad k = \overline{1, n}, \quad t = \overline{1, N}, \quad (6.7)$$

стосовно цінового вектора  $p^t \in R_+^n$  є умови:

— вектор  $\psi^t = \{\psi_k^t(\omega)\}_{k=1}^n$  належить внутрішності  $r$ -вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами  $C_i^t = \{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$ ,  $i = \overline{1, l}$ , тобто

$$\psi^t = \sum_{i=1}^l y_i^t(\omega) C_i^t(\omega), \quad y_i^t > 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad t = \overline{1, N}; \quad (6.8)$$

— вектор  $D^t = \{D_i^t\}_{i=1}^l$  належить внутрішності  $r_1$ -вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами  $d_k^t = \{-b_{ki}^t + y_i^t(\omega) C_{ki}^t(\omega)\}_{i=1}^l$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $t = \overline{1, N}$ .

Припустимо, що в  $t$ -му періоді функціонування економічної системи  $k$ -та компонента  $\bar{p}_k^t$  випадкового рівноважного цінового вектора  $\bar{p}^t$  визначає ціну  $k$ -го товару,  $k = \overline{1, n_t}$ . Вважатимемо, що перша компонента  $\bar{p}_1^t$  цього вектора визначає рівноважну ціну грошей, а  $\psi_1^t(\bar{p}^t)$  визначає пропозицію грошей в  $t$ -му періоді функціонування економічної системи. Припустимо також, що короткий продаж товарів можливий тільки в межах кожного періоду функціонування економічної системи.

На ймовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}\}$ , де еволюція цін на товари задається теоремою 6.5, визначимо еволюцію цін підмножини  $n_0 \leq n_t$ ,  $N_0 \leq t \leq N_1$ , товарів за правилом

$$S_t = \{\bar{p}_{i_1}^t, \dots, \bar{p}_{i_{n_0}}^t\}, \quad N_0 \leq t \leq N_1, \quad i_k < i_{k+1}, \quad k = \overline{1, n_0 - 1}. \quad (6.9)$$

Введемо еволюцію безризикового активу правилом

$$B_t = \prod_{i=N_0}^t (1 + p_1^i), \quad t = \overline{N_0, N_1}, \quad (6.10)$$

де  $p_1^t$  - рівноважна ціна грошей в  $t$ -му періоді функціонування економічної системи.

**Означення 6.1.** Економічну динаміку, означену у теоремі 6.5, називатимемо безарбітражною, якщо для будь-якої підмножини множини товарів, визначеної індексами  $i_1, \dots, i_{n_0}$  і довільними числами  $1 \leq N_0 < N_1 \leq N$ , для еволюції цін активів, заданої законом (6.9), та еволюції неризикового активу,

заданої законом (6.10), множина самофінансованих арбітражних стратегій без коротких продажів між періодами функціонування економічної системи є порожньою.

Сформулюємо тепер загальні умови відсутності арбітражу в динамічних системах без коротких продажів.

**Теорема 6.6.** *Нехай на ймовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}\}$  з фільтрацією  $\mathfrak{F}_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , задано випадкову еволюцію неризикового активу законом  $B_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , так, що виконуються умови: існує невід'ємна константа  $D < \infty$  така, що  $1 \leq B_n \leq D$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $\omega \in \Omega$ , і нехай еволюція цін  $p_0 \geq 1$  ризикових активів задається правилом  $S_n = \{S_n^i\}_{i=1}^{n_0}$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Якщо*

$$\left\{ \frac{S_n}{B_n}, \mathfrak{F}_n \right\}, \quad n = \overline{1, N},$$

*є супермартингалом, то множина самофінансованих арбітражних стратегій без коротких продажів порожня.*

*Доведення.* Від супротивного. Припустимо, що існує самофінансована арбітражна стратегія  $\pi = \{\pi_n = \{\beta_n, \gamma_n\}\}_{n=1}^N$  така, що

$$X_1^\pi = 0, \quad X_n^\pi = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^{n_0} \gamma_n^i S_n^i \geq 0, \quad n = \overline{1, N},$$

і  $X_N^\pi > 0$  на множині додатної ймовірності, де

$$-\infty < \beta_n < \infty, \quad \gamma_n = \{\gamma_n^i\}_{i=1}^{n_0}, \quad \gamma_n^i \geq 0, \quad i = \overline{1, n_0}, \quad n = \overline{1, N}.$$

З рівності

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n_0} \gamma_n^i \left( \frac{S_n^i}{B_n} - \frac{S_{n-1}^i}{B_{n-1}} \right)$$

і того, що  $\pi$  самофінансована стратегія без коротких продажів, а також з припущення теореми, маємо

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{X_n^\pi}{B_n} \middle| \mathfrak{F}_n \right\} \leq \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}},$$

або

$$\mathbb{E} \frac{X_n^\pi}{B_n} \leq \mathbb{E} \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}}.$$

З останньої нерівності маємо

$$0 < \mathbb{E} \frac{X_n^\pi}{B_n} \leq \mathbb{E} \frac{X_1^\pi}{B_1} = 0, \quad n = \overline{1, N}.$$

Таким чином,  $\mathbb{E} X_n^\pi = 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Це протиріччя доводить теорему.  $\square$

Як і раніше, припускаємо, що перша компонента цінового вектора  $p^t = \{p_i^t\}_{i=1}^{n_t}$  визначає вартість грошей в  $t$ -му періоді функціонування економічної системи.

**Теорема 6.7.** *Економічна динаміка, означена в теоремі 6.5, є безарбітражною, якщо зі ймовірністю 1 виконуються нерівності*

$$\bar{p}_k^{t+1} \leq \bar{p}_k^t (1 + f^{t+1}(\bar{p}_1^{t+1})), \quad k = \overline{2, n_t}, \quad t = \overline{1, N},$$

де  $\bar{p}^t = \{\bar{p}_k^t\}_{k=1}^{n_t}$  - рівноважний ціновий вектор в  $t$ -му періоді функціонування економічної системи,  $f^t(x)$ ,  $t = \overline{1, N}$ , - множина невід'ємних функцій, що задовольняють умові  $0 \leq f^t(x) \leq x$ ,  $t = \overline{1, N}$ .

*Доведення.* Якщо вибрати

$$S_t = \{\bar{p}_{i_1}^t, \dots, \bar{p}_{i_{n_0}}^t\}, \quad n_0 \leq n_t, \quad N_0 \leq t \leq N_1, \quad i_k < i_{k+1}, \quad k = \overline{1, n_0 - 1},$$

$$B_t = \prod_{i=N_0}^t (1 + \bar{p}_1^i), \quad t = \overline{N_0, N_1},$$

то  $S_t/B_t$ ,  $t = \overline{N_0, N_1}$ , задовольняє умовам теореми 6.6 з фільтрацією  $\mathfrak{F}_t$ , порожденою випадковими величинами  $S_1, \dots, S_t$ ,  $B_1, \dots, B_t$ . Теорему доведено.  $\square$

Позначимо

$$r_0^t = r_0^t(\omega) = \min_i \psi_i^t(\omega), \quad R_0^t = R_0^t(\omega) = \max_i \psi_i^t(\omega),$$

$$A^t = A^t(\omega) = \sum_{i=1}^n p_i^t(\omega) \psi_i^t(\omega),$$

$$l_0^t = l_0^t(\omega) = \min_{i=\overline{1}, r_1^t} \{\gamma_{r_1^t}^{1,t} \langle D^t, f_i^{1,t}(\omega) \rangle\}, \quad l_1^t = l_1^t(\omega) = \min_{i=r_1^t+1, n} \{\gamma_i^{1,t} p_i^{*,t}\},$$

де  $f_i^{1,t}$  і  $\gamma_i^{1,t}$  визначені теоремою 6.4 у періоді  $t$ . Вважається, що умови теореми 6.4 виконуються у кожному періоді  $t = \overline{1, N}$ . Виконуються нерівності

$$p_i^t(\omega) \leq \frac{A^t(\omega)}{r_0^t(\omega)}, \quad p_i^t(\omega) \geq \min_{j=1,2} \{l_j^t(\omega)\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

**Теорема 6.8.** *Нехай множина векторів  $C_i^t(\omega)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , що є стовпчиками матриці  $C^t(\omega) = \|C_{ki}^t(\omega)\|_{k=1, i=1}^{n, l}$ , задовольняє нерівності*

$$\sum_{s=1}^l C_{ks}^t(\omega) > 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^n C_{ki}^t(\omega) > 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad t = \overline{1, N},$$

і нехай вектори

$$y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l, \quad b_i(\omega) = \{b_{ki}(\omega)\}_{k=1}^n, \quad D_i(\omega) > 0, \quad i = \overline{1, l},$$

є строго додатними для всіх  $\omega \in \Omega$ . Нехай у кожному періоді  $t$  виконуються умови теореми 6.4 з ймовірністю 1. Економічна динаміка, означена в теоремі 6.5, безарбітражна, якщо нерівності

$$\frac{A^{t+1}}{r_0^{t+1}} \leq \min_{j=1,2} \{l_j^t(\omega)\} (1 + \delta \min_{j=1,2} \{l_j^{t+1}(\omega)\}), \quad t = \overline{1, N}, \quad (6.11)$$

виконуються зі ймовірністю 1 для деякого  $0 < \delta < 1$ .

*Доведення.* Якщо виконуються нерівності (6.11), то нерівності

$$p_i^{t+1} \leq p_i^t (1 + \delta p_1^{t+1}), \quad i = \overline{2, n}, \quad (6.12)$$

виконуються з ймовірністю 1 згідно з теоремою 6.4. Застосовуючи теорему 6.7, з  $f^t(x) = \delta x$ ,  $0 < \delta < 1$ , отримуємо доведення теореми.  $\square$

## Висновки до розділу 6

У даному розділі знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці методів точного та наближеного оцінювання деривативів та дослідженню питань відсутності арбітражу у різних моделях фінансових ринків, зокрема, у моделях ринків зі стохастичною волатильністю, моделях із дискретним часом та моделях економіки обміну.

У роботі доведено, що дельта-хедж у біноміальній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна є аналогом грецького символу дельта у моделі Блека–Шоулса у тому сенсі, що має місце слабка збіжність дельта-хеджу до дельти при спрямуванні кількості періодів у дискретній моделі до нескінченності. Цей результат встановлює зв'язок між величинами, які характеризують опціони у неперервному часі та у дискретному.

Для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, доведено відсутність на ринку арбітражу у сенсі  $\overline{NA}_+$  та  $\overline{NA}_g$ . Для випадку, коли процеси Вінера, що керують еволюцією ціни активу та його волатильністю, є некорельованими, відшукано точні та наближені формули розрахунку справедливої вартості Європейського опціону. Встановлено швидкість збіжності ціни опціону Європейського типу у дискретизованій за схемою Ейлера–Маруяма моделі ринку до ціни опціону у неперервній моделі при спрямуванні кроку дискретизації до нуля. Отримані результати дозволяють оцінювати деривативи у моделях фінансових ринків, ближчих до реальності, ніж класична модель Блека–Шоулса.

У моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги, встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів, представлено достатні умови відсутності арбітражу. Отриманий результат дозволяє досліджувати арбітражність ринків, на яких відсутні мартингальні міри.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах із заданими доходами / С.В. Кучук-Яценко // Доповіді Національної академії наук України. — 2013. — No. 2 — P. 19–24.
2. Кучук-Яценко С.В. Слабка збіжність грецьких символів для цін опціонів Європейського типу: від дискретного часу до неперервного / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура // Теорія ймовір. та матем. статист.. — 2014. — No. 91 — P. 87–98.
3. Kuchuk-Iatsenko S. Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Exact formulas / S. Kuchuk-Iatsenko, Yu. Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2015 — Vol. 2, No. 3 — P. 233–249.
4. Kuchuk-Iatsenko S. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / S. Kuchuk-Iatsenko, Yu. Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2015 — Vol. 2, No. 4 — P. 355–369.
5. Кучук-Яценко С.В. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного обчислення цін опціонів на акції зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовір. та матем. статист.. — 2016. — No. 94 — P. 93–115.
6. Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в економічних динамічних системах / М.С. Гончар, С.В. Кучук-Яценко // Матеріали Четвертої Міжнародної конференції імені академіка І.І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика” (Київ, Україна). — 2011. — P. 63.
7. Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах / С.В. Кучук-Яценко // Матеріали Міжнародної наукової кон-

- ференції “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Київ, Україна). — 2011. — Р. 62.
8. Кучук-Яценко С.В. Аналітична формула для ціни опціона у моделі ринку зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура // Матеріали Міжнародної міждисциплінарної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2016” (Київ, Україна). — 2016. — Р. 42–46.
  9. Кучук-Яценко С.В. Ціна опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, яка задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (сmt. Ворохта, Івано-Франківська обл., Україна). — 2016. — Р. 35.
  10. Кучук-Яценко С.В. Обчислення цін опціонів у моделях фінансових ринків, заданих лінійними стохастичними диференціальними рівняннями зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Тези доповідей Міжнародної літньої математичної школи пам’яті В.О. Плотнікова (Одеса, Україна). — 2016. — Р. 40.
  11. Кучук-Яценко С.В. Модель фінансового ринку, задана лінійним стохастичним диференціальним рівнянням зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, Україна). — 2016. — Р. 86.
  12. Kuchuk-Iatsenko S.V. Arbitrage absence in economy dynamical systems with fixed gains/ S.V. Kuchuk-Iatsenko // Матеріали міжнародної наукової конференції “Modern Stochastics: Theory and Applications III” (Київ, Україна). — 2012. — Р. 57–58.
  13. Bachelier L. Theorie de la speculation / L. Bachelier // Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Superieure — 1900. — Vol. 3, No. 17— Р. 21–86.

14. Wiener N. Differential space / N. Wiener // J. Math. Phys. — 1923. — Vol. 2 — P. 131–174.
15. Doob J.L. Stochastic Processes / J.L. Doob // Wiley, New York — 1953 — 664 P.
16. Wiener N. Stochastic integral / K. Ito // Proc. Imperial Acad. Tokyo. — 1944. — Vol. 20 — P. 519–524.
17. Samuelson P. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly / P. Samuelson // Industrial Management Review. — 1965. — Vol. 6 — P. 41–50.
18. Black F. The Pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81 — P. 637–659.
19. Merton R.C. Theory of rational option pricing / R.C. Merton // Econom. Manage. Sci. — 1973. — Vol. 4. — P. 141–183.
20. Merton R.C. Option Pricing When Underlying Asset Returns are Discontinuous / R.C. Merton // Journal of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 125–144.
21. Cox J.C. Option pricing: A simplified approach / J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7, No. 3. — P. 229–263.
22. Hsia C.-C. On binomial option pricing / C.-C. Hsia // Journal of Financial Research. — 1983. — Vol. 6, No. 1. — P. 41–46.
23. Mishura Yu. Diffusion approximation of recurrent schemes for financial markets, with application to the Ornstein-Uhlenbeck process / Yu. Mishura // Opuscula Mathematica. — 2015. — Vol. 35, No. 1. — P. 99–116.
24. Heston S. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims / S. Heston, G. Zhou // Mathematical Finance. — 2000. — Vol. 10, No. 1. — P. 53–75.
25. Chang L.-B. Smooth convergence in the Binomial model / L.-B. Chang, K. Palmer // Finance And Stochastics. — 2007. — No. 11. — P. 91–105.

26. Jackwerth J. Recovering probability distributions from contemporaneous security prices / J. Jackwerth, M. Rubinstein // *J. Finance*. — 1996. — Vol. 51, No. 5 — P. 1611–1631.
27. Rubinstein M. Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models / M. Rubinstein // *J. Finance*. — 1985. — Vol. 2— P. 455–480.
28. Hull J. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities / J. Hull and A. White // *J. Finance*. — 1987. — Vol. 42, No. 2 — P. 281–300.
29. Stein E.M. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach / E.M. Stein and J.C. Stein // *The Review of Financial Studies*. — 1991. — Vol. 4, No. 4. — P. 727–752.
30. Wiggins J. Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates / J. Wiggins // *Journal of Financial Economics*. — 1987. — Vol. 19, No. 2 — P. 351–372.
31. Heston S. *The Review of Financial Studies* / S. Heston // *J. Finance*. — 1993. — Vol. 6, No. 2. — P. 327–343.
32. Garman M. A general theory of asset valuation under diffusion state processes / M. Garman // *Center for Research in Management Science*. — Working Paper No. 50 — 1976.
33. Fouque J.-P. Mean-Reverting stochastic volatility / J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R. Sircar // *International J. Theoretical and Appl. Finance* — 2000 — Vol. 3, No. 1. — P. 101–42.
34. Fouque J.-P. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility* / J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R. Sircar // *Cambridge University Press*. — 2000 — 218 P.
35. Scott L. Option Pricing when the Variance changes randomly: Theory, Estimation, and an Application / L. Scott // *J. Financial and Quantitative Analysis*. — 1987. — Vol. 22. — P. 419–438.
36. Shephard N. *Stochastic volatility: origins and overview* / N. Shephard, T.G. Andersen // *Handbook of financial time series*. — Springer, Berlin — 2009. — P. 233–254.

37. Schmelzle M. Option pricing formulae using Fourier transform: theory and application / M. Schmelzle // <http://pfadintegral.com/docs/Schmelzle2010> — 2010.
38. Nicolato E. Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein-Uhlenbeck type / E. Nicolato and E. Venardos // *Mathematical Finance*. — 2003. — Vol. 13, No. 4. — P. 445–466. — doi: 10.1111/1467-9965.t01-1-00175.
39. Barndorff-Nielsen O.E. Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics / O.E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*. — 2001. — Vol. 63 — P. 167–241 — doi: 10.1111/1467-9868.00282.
40. D’Ippoliti F. From discrete- to continuous- time finance: weak convergence of the financial gain process / F. D’Ippoliti, E. Moretto, S. Pasquali and B. Trivellato // Springer Milan. — 2010. — P. 133–142— doi: 10.1007/978-88-470-1481-7\_14.
41. Goard J. Exact and approximate solutions for options with time-dependent stochastic volatility / J. Goard // *Applied Mathematical Modelling*. — 2014. — Vol. 38, No. 11-12 — P. 2771–2780.
42. Perelló J. Option Pricing under stochastic volatility: the exponential Ornstein-Uhlenbeck model / J. Perelló, R. Sircar, J. Masoliver // *J. Stat. Mech.* — 2008. — No. P06010.
43. Kou S. A jump-diffusion model with three properties: leptokurtic feature, volatility smile, and analytical tractabilitys / S. Kou // Columbia University working paper. — 1999.
44. Bates D. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutschemark Options. / D. Bates // *Review of Financial Studies*. — 1996. — Vol. 9 — P. 69–108.
45. Bates D. Post-’87 Crash fears in S&P 500 Futures Options. / D. Bates // *Journal of Econometrics*. — 2000. — Vol. 94 — P. 181–238.

46. Duffie D. Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions / D. Duffie, J. Pan, and K. Singleton // *Econometrica*. — 2000. — Vol. 68. — P. 1343–1376.
47. Frey R. Derivative asset analysis in models with level-dependent and stochastic volatility / R. Frey // *CWI Quart.* — 1997. — Vol. 10. — P. 39–52.
48. Kallianpur G. Introduction to Option Pricing Theory / G. Kallianpur, R.L. Karandikar // *Handbook of financial time series*. — Springer, New York — 2000. — 269 P..
49. Wong B. On changes of measure in stochastic volatility models / B. Wong, C.C. Heyde // *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* — 2006. — Vol. 13. —
50. Ocone D.L. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios / D.L. Ocone and I. Karatzas // *Stochastics and Stochastics Reports*. — 1991. — Vol. 34, No. 3-4 — P. 187–220.
51. Fournie E. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance / E. Fournie, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions P.-L, and N. Touzi // *Fin. and Stoch.* — 1999. — Vol. 3, No. 4 — P. 391–412.
52. Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics / D. Nualart // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2006. — 382 P.
53. Sanz-Sole M. Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations / M. Sanz-Sole // EPFL Press, Lausanne — 2005 — 162 P.
54. Di Nunno G. Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance / G. Di Nunno, B. Øksendal and F. Proske // Springer-Verlag Berlin Heidelberg — 2009. — 418 P.
55. Giles M.B. Multilevel Monte Carlo path simulation / M.B. Giles // *Operations Research*. — 2008. — Vol. 56, No. 3. — P. 607–617.
56. Andersen L. Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model / L. Andersen // *Journal of Computational Finance*. — 2008. — Vol. 11, No. 3.

57. Broadie M. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. / M. Broadie, O. Kaya // *Operations Research*. — 2006. — Vol. 54, No. 2. — P. 217–231.
58. Jourdain B. High order discretization schemes for stochastic volatility models. / B. Jourdain, M. Sbai // *Preprint arXiv:0908.1926*. — 2009.
59. Haastrecht A. Efficient, almost exact simulation of the Heston stochastic volatility model. / A. van Haastrecht, A. Pelsser // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. — 2010. — Vol. 31, No. 1. — P. 1–42.
60. Willard G. Calculating prices and sensitivities for path-independent derivative securities in multifactor models. / G. Willard // *The Journal of Derivatives*. — 1997. — Vol. 5, No. 1. — P. 45–61.
61. Мішура Ю. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів / Ю. Мішура, Є. Мунчак // *Теорія ймовірностей і математична статистика*. — 2015. — Vol. 92 — P. 110-124.
62. Мішура Ю. Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна–Уленбека бернуллівськими стрибками цін акцій / Ю. Мішура, Є. Мунчак // *Теорія ймовірностей і математична статистика*. — 2015. — Vol. 93 — P. 127-141.
63. Kloeden P. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. Kloeden and E. Platen // Springer New York. — 1992. — 636 P.
64. Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance / E. Platen and N. Bruti-Liberati // Springer New York. — 2010. — 856 P.
65. Wang H. Monte Carlo Simulation with Applications to Finance / H. Wang // Hall/CRC, Boca Raton, FL. — 2012. — 292 P.
66. Millstein G. Approximate integration of stochastic differential equations. / G. Millstein // *Theory of Probability & Its Applications*. — 1975. — Vol. 19, No. 3. — P. 557–562.
67. Harrison J.M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. / J.M. Harrison, D.M. Kreps // *Journal of Economic Theory*. — 1979. —

- Vol. 20. — P. 381–408.
68. Harrison J.M. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. / J.M. Harrison, S.R. Pliska // Stochastic Processes and their Applications. — 1981. — Vol. 11. — P. 215–260.
  69. Harrison J.M. Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities. / D.M. Kreps // Journal of Mathematical Economics. — 1981. — Vol. 8. — P. 15–35.
  70. Dybvig Ph. Arbitrage. / Ph. Dybvig, S. Ross // The new Palgrave dictionary of economics. — Macmillan, London. — 1987. — Vol. 1. — P. 100–106.
  71. Dalang R.C. Equivalent Martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market model. / R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger // Stochastics and Stochastic Reports. — 1990. — Vol. 29. — P. 185–201.
  72. Delbaen F. A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. / W. Schachermayer // Insurance: Mathematics and Economics. — 1992. — Vol. 11. — no. 4. — P. 249–257.
  73. Rogers L.C.G. Equivalent Martingale measures and no-arbitrage. / R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger // Stochastics and Stochastic Reports. — 1994. — Vol. 51. — P. 41–49.
  74. Kabanov Yu.M. Large financial markets: asymptotic arbitrage and contiguity. / Yu.M. Kabanov, D.O. Kramkov // Theory Probab. Appl. — 1994. — Vol. 39. — No. 1. — P. 182–187.
  75. Delbaen F. The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. / F. Delbaen, W. Schachermayer // Mathematische Annalen. — 1998. — Vol. 312. — P. 215–250.
  76. Shiryaev A.N. Essentials of stochastic finance: facts, models, theory / A.N. Shiryaev // World scientific Pub Co Inc — 1999 — 834 P.
  77. Pham H. The fundamental theorem of asset pricing with cone constraints. / H. Pham, N. Touzi // Journal of Mathematical Economics. — 1999. — Vol. 31. — P. 265–279.

78. Napp C. The Dalang–Morton–Willinger theorem under cone constraints. / C. Napp // *Journal of Mathematical Economics*. — 2003. — Vol. 39. — P. 111–126.
79. Rokhlin D.B. An Extended Version of the Dalang–Morton–Willinger Theorem under Portfolio Constraints. / D.B. Rokhlin // *Theory Probab. Appl.* — 2005. — Vol. 49. — No. 3. — P. 429–443.
80. Kabanov Yu. Multiparameter Generalizations of the Dalang–Morton–Willinger Theorem. / Yu. Kabanov, Yu. Mishura, L. Sakhno // *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*. — Springer Berlin Heidelberg. — 2006. — P. 333–341.
81. Kabanov Yu. The Dalang–Morton–Willinger Theorem Under Delayed and Restricted Information. / Yu. Kabanov, C. Stricker // *In Memoriam Paul-Andre Meyer*. — Springer Berlin Heidelberg. — 2006. — P. 209–213.
82. Delbaen F. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. / F. Delbaen, W. Schachermayer // *Mathematische Annalen*. — 1994. — Vol. 300. — P. 463–520.
83. Elliott R.J. *Stochastic Calculus and Applications* / R.J. Elliott // Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. — 1982. — 302 P.
84. Föllmer H. *Stochastic finance. An introduction in discrete time* / H. Föllmer and A. Schied // Walter de Gruyter. *de Gruyter Studies in Mathematics* (Book 27). — Berlin — 2004 — 459 P.
85. Petrov V.V. *Sums of independent random variables* / V.V. Petrov // New York - Heidelberg - Berlin. — 1975. — 348 P.
86. Чистяков В.П. *Курс теории вероятностей* / В.П. Чистяков // 1982 — 256 P.
87. Delbaen F. *The Mathematics of Arbitrage* / F. Delbaen and W. Schachermayer // Springer-Verlag Berlin Heidelberg — 2006 — 371 P.
88. Föllmer H. *Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information*. / H. Föllmer, M. Schweizer // *Applied Stochastic Analysis*. — 1991. — Vol. 5. — P. 389–414.

89. Mishura Yu. European call option issued on a bond governed by a geometric or a fractional geometric Ornstein-Uhlenbeck process / Yu. Mishura, G. Rizhniak and V. Zubchenko // *Modern Stoch. Theory Appl.* — 2014. — Vol. 1, No. 1. — P. 95–108.
90. Lewis A. *Option Valuation Under Stochastic Volatility: With Mathematica Code* / A. Lewis // Finance Press — 2000 — 350 P.
91. Brockman P. Deterministic versus stochastic volatility: implications for option pricing models / P. Brockman, M. Chowdhury // *Applied Financial Economics*. — 1997. — Vol. 7. — P. 499–505.
92. Sheikh A.M. Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing / A.M. Sheikh // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. — 1991. — Vol. 26. — P. 459–475.
93. Nualart D. *Stochastic Calculus with Anticipating Integrands* / D. Nualart, E. Pardoux // *Probab. Th. Rel. Fields*. — 1988. — Vol. 78, No. 4 — P. 535–581.
94. Ouknine Y. Fubini-type theorem for anticipating integrals / Y. Ouknine // *Random Oper. Stoch. Equ.* — 1996. — Vol. 4, No. 4 — P. 351–354.
95. Leon J.A. Stochastic evolution equations with random generators / J.A. Leon, D. Nualart // *The Annals of Probability*. — 1998. — Vol. 26, No. 1. — P. 149–186.
96. Ikeda N. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Second Edition / N. Ikeda and S. Watanabe // Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, 24. — 1989 — 568 P.
97. Ikeda N. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Second Edition / N. Ikeda and S. Watanabe // Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, 24. — 1989 — 568 P.
98. Гончар М.С. *Математичні основи інформаційної економіки* / М.С. Гончар // Київ, Інститут теоретичної фізики ім. М. Боголюбова. — 2007 — 464 P.

99. Gonchar N.S. Mathematical Foundations of information economics / N.S Gonchar // Kyiv, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics. — 2008 — 468 P.