УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.8

Р.В. Кривошия[1], *аспірант*

Про одне узагальнення поняття нормальних чисел

[1] Інститут математики НАН України, 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: mostik19@gmail.com

R.V. Kryvoshyia[1], *PhD student*

On a generalization of the concept of normal numbers

[1]Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, 01024, Kyiv-4, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: mostik19@gmail.com

В роботі розглядається узагальнення поняття нормальних чисел, в контексті класичного s-го представлення дійсних чисел, по відношенню до Q_s-представлення, вперше розглянутого М. Працьовитим. Поглиблюється результат І. Нівена та Г. Цукермана, по відношенню до метричної теорії нормальних чисел Е. Бореля. Показано, що множина всіх Q_s-нормальних чисел має міру Лебега 1. *Встановлюється зв'язок між властивістю нормальності та рівномірною розподіленістю послідовності чисел, породжених оператором зсуву по відношенню до відповідного числа. Було встановлено, що множина всіх чисел відрізку $[0;1]$ для яких відповідна послідовність породжена оператором лівостороннього зсуву Q_s-цифр є рівномірно розподіленою, має повну міру Лебега. Відповідні теореми поглиблюють результати метричної теорії Q_s-розкладів дійсних чисел відрізку $[0;1]$ отриманих М. Працьовитим та Г. Торбіним.*

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Q_s-нормальне число, рівномірно розподілена послідовність, ергодичне перетворення, Q_s-циліндр.

The paper considers the generalization of the concept of normal numbers in the context of the classical s-th representation of real numbers, in relation to the Q_s-representation, first considered by M. Pratsiovytyi. The result of I. Nivena and H. Zukerman is deepened in relation to the metric theory of normal E. Borel numbers. It is shown that the set of all Q_s-normal numbers has a Lebesgue measure 1. *The connection between the property of normality and the uniform distribution of the sequence of numbers generated by the shift operator in relation to the corresponding number is established. It was found that the set of all numbers of the segment $[0;1]$ for which the corresponding sequence generated by the operator of left-hand shift Q_s-digits is uniformly distributed has a full Lebesgue measure. The corresponding theorems deepen the results of the metric theory Q_s-decompositions of real numbers of the segment $[0;1]$ obtained by M. Pratsiovytyi and G. Torbin.*

Key Words: Q_s-normal number, uniformly distributed sequence, ergodic transformation, Q_s-cylinder.

1 Вступ

Нехай $(q_0; q_1; ...; q_{s-1})$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [1, ?], що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність чисел (в подальшому цифр) $\alpha_n \in \{0;1;...;s-1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ така, що

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{\alpha_n} \cdot q_{\alpha_{n-1}} \cdot q_{\alpha_{n-2}} \cdot \cdots \cdot q_{\alpha_1}, \qquad (1)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \ldots, \beta_{s-1} = q_0 + q_1 + ... + q_{s-2}$.

Представлення 1 називається Q_s-представленням числа x. Число x у цьому випадку має зображення:

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...}.$$

Існує зчислена множина чисел, які мають два представлення і відповідно зображення:

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...(\alpha_n+1)(0)}.$$

Відповідні числа називаються Q_s-раціональними.

Число x будемо називати Q_s-слабонормальним, якщо для кожної цифри $\gamma \in \{0; 1; ...; s-1\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;\gamma)}{n} = q_\gamma,$$

де $N_n(x;\gamma)$ — кількість цифр γ серед чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Число x будемо називати Q_s-нормальним, якщо довільного набору цифр $(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k))$ — кількість блоків $(\gamma_1; \ldots; \gamma_k)$ серед чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Якщо бути точним $N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_k))$ — це кількість номерів $j \in \{1; \ldots; n-k-1\}$, таких що $\alpha_{j+i-1} = \gamma_i$ для кожного $i \in \{1; \ldots; k\}$.

Якщо $q_0 = q_1 = \ldots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, ми маємо класичне означення нормального та слабонормального числа для s-го представлення дійсних чисел [3].

Послідовність x_n називається рівномірно розподіленою за модулем 1, якщо для довільних дійсних $0 \leqslant a < b \leqslant 1$:

$$\frac{N_n([a; b])}{n} \to b - a \ \ (n \to \infty),$$

де $N_n([a; b])$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$, які належать відрізку $[a; b]$.

Добре відомо [4], що число x є нормальним в класичній s-ковій системі числення, тоді і тільки тоді коли послідовність $s^n x$ є рівномірно розподіленою.

2 Про структуру множини Q_s-нормальних чисел

Розглянемо наступний оператор зсуву

$$T(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

у випадку коли число є Q_s-раціональним домовимось використовувати його зображення з періодом (0).

Лема 1. *Перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега.*

Доведення. Покажемо, що відповідне перетворення зберігає міру на борельовій сигма-алгебрі.

Зрозуміло, що

$$T^{-1}\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{s-1} \left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right].$$

$$\lambda\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) = \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j},$$

$$\lambda\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right] = q_k \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}.$$

Таким чином, маємо:

$$\lambda\left(\bigcup_{k=0}^{s-1} \left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) =$$

$$= \lambda\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right).$$

Оскільки сукупність відрізків

$$[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}]$$

породжує $B(R) \cap [0; 1]$, то для кожної множини $E \in B(R)$, маємо:

$$\lambda(T^{-1}(E)) = \lambda(E).$$

Покажемо, що перетворення $T(x)$ метрично транзитивне відносно міри Лебега. Припустимо, що існують множини U, W такі, що

$$U \cup W = [0; 1];$$

$$U \cap W = \varnothing;$$

$$T^{-1}(U) = U;$$

$$T^{-1}(W) = W.$$

Нехай $u = \lambda(U) \in (0; 1)$ та $X(t)$ — характеристична функція множини U:

$$X(t) = \begin{cases} 1, t \in U \\ 0, t \notin U. \end{cases}$$

Зрозуміло, що кожного

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \in U$$

і кожного натурального l число

$$x^{(l)} = \Delta^{Q_s}_{q_1q_2\ldots q_l\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

є прообразом x порядку l для перетворення $T(x)$.

Маємо:

$$X(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = X(x^{(l)}).$$

Позначимо

$$B_l = [\Delta^{Q_s}_{a_1a_2\ldots a_l(0)}; \Delta^{Q_s}_{a_1a_2\ldots a_l(1)}],$$

маємо:

$$\lambda(U \cap B_l) = \int\limits_{B_l} X(t)d\lambda =$$

$$= q_{a_1}q_{a_2}\ldots q_{a_l}\int\limits_{R} X(t)d\lambda = uq_{a_1}q_{a_2}\ldots q_{a_l}.$$

Розглянемо число $\varepsilon > 0$ таке, що $1 - u > \varepsilon$. Оскільки множина U і її доповнення W до множини $[0;1]$ мають додатні міри Лебега, то за теоремою про точки щільності, існує точка щільності z. Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\frac{\lambda(U \cap \Delta)}{\lambda(\Delta)} > 1 - \varepsilon$$

для довільного відрізка Δ який містить точку z і міра Лебега якого строго менша δ.

Розглянемо число n_0 таке, що

$$(\max(q_0; q_1; ...; q_{s-1}))^{n_0} < \delta.$$

Позначимо:

$$z = \Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots}$$

і розглянемо відрізок

$$\Delta = B_{n_0} = [\Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_{n_0},(0)}; \Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_{n_0},(s-1)}].$$

Маємо:

$$\lambda(U \cap \Delta) = uq_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}},$$

$$\lambda(U \cap \Delta) > (1-\varepsilon)\lambda(\Delta) = (1-\varepsilon)q_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}},$$

$$uq_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}} > (1-\varepsilon)q_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}}$$

та

$$1 - u < \varepsilon.$$

Маємо суперечність.

Лема 2. *Для майже всіх чисел* $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *послідовність*

$$x, T(x), T^2(x), \ldots, T^k(x), \ldots$$

є рівномірно розподіленою на $[0;1]$.

Доведення. Оскільки перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега, то для заданого $h \in N$ за теоремою Біргкофа-Хінчина

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} cos(2\pi hT^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 cos(2\pi hx)dx = 0 \qquad (2)$$

для майже всіх $x \in [0;1]$.

Позначимо через A_h множину тих чисел $x \in [0;1]$, для яких виконується умова (2), тоді $\lambda(A_h) = 1$. Зрозуміло, що $\lambda(A^*) = 1$, де

$$A^* = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Отже, для кожного натурального h та для довільного $x \in A^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2\pi hT^k(x))}{n} = 0.$$

Аналогічно показуємо, що існує множина B^* така, що $\lambda(B^*) = 1$ і для довільного натурального $h \in N$ та $x \in B^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2\pi hT^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 \sin 2\pi hx dx = 0.$$

Отже, для кожного $x \in A^* \cap B^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{2\pi ihT^k(x)}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2\pi hT^k(x)) + i\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2\pi hT^k(x))}{n} = 0$$

тобто послідовність $T^n(x)$ є рівномірно розподіленою на $[0;1]$. Оскільки $\lambda(A^* \cap B^*) = 1$, маємо потрібне.

Відрізок

$$\Delta(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_l) = \left[\Delta^{Q_s}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(0)}; \Delta^{Q_s}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(s-1)}\right]$$

будемо називати Q_s-циліндром l-го рангу.

Лема 3. *Нехай* M *— множина всіх* Q_s*-циліндрів* l*-го рангу для кожного натурального* l*. Послідовність* x_n *є рівномірно розподіленою тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(x_n; A)}{n} = \lambda(A),$$

для кожної множини $A \in M$, де $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега.

Доведення. Якщо x_n рівномірно розподілена, то очевидно рівність виконується. Розглянемо проміжок $[a;b]$, де $a > 0$ і $b < 1$ (випадок $a = 0$ або $b = 1$ розглядаються аналогічним чином).

Нехай

$$a = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}\ b = \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots}$$

Розглянемо послідовність відрізків

$$C_n = \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(s-1)}\right],$$

$$\tilde{C}_n = \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}; \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)}\right].$$

Зрозуміло, що знайдеться набір Q_s-циліндрів n-го рангу

$$\Delta\left(\eta_1^{(1)};\eta_2^{(1)};\ldots;\eta_n^{(1)}\right), \ldots, \Delta\left(\eta_1^{(j)};\eta_2^{(j)};\ldots;\eta_n^{(j)}\right),$$

такі, що

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{j} \Delta\left(\eta_1^{(i)};\eta_2^{(i)};\ldots;\eta_n^{(i)}\right).$$

Маємо:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_l(x_k;C_n)}{l} =$$

$$= \sum_{r=1}^{j} \lim_{l\to\infty} \frac{N_l\left(x_k;\Delta\left(\eta_1^{(r)};\ldots;\eta_n^{(r)}\right)\right)}{l} =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \lambda\left(\Delta\left(\eta_1^{(r)};\ldots;\eta_n^{(r)}\right)\right) = \lambda(C_n).$$

Аналогічно доводиться, що

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_l(x_k;\tilde{C}_n)}{l} = \lambda(\tilde{C}_n).$$

Оскільки для кожного натурального n:

$$\frac{N_l(x_k;\tilde{C}_n)}{l} \leqslant \frac{N_l(x_k;(a;b))}{l} \leqslant \frac{N_l(x_k;C_n)}{l}$$

то перейшовши до границі $l \to +\infty$ і врахувавши, що

$$\lim_{l\to\infty} \lambda(C_l) = b - a = \lim_{l\to\infty} \lambda(\tilde{C}_l),$$

маємо:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{N_l(x_k;(a;b))}{l} = b - a.$$

Лема 4. *Число*

$$z = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}$$

є Q_s-нормальним тоді і тільки тоді, коли послідовність $T^n(z)$ є рівномірно розподіленою.
Доведення. Нехай послідовність $T^n(z)$ рівномірно розподілена.

Зрозуміло, що $N_n(T^k(z);\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l))$ дорівнює кількості блоків $(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)$ серед цифр $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Дійсно число $\Delta^{Q_2}_{\eta_1\eta_2\ldots}$ належить відрізку $\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)$ лише тоді, коли $\eta_r = \gamma_r$ для кожного $r \in \{1;\ldots;l\}$. Маємо:

$$\frac{N_n(z;(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} = \frac{N_n(T_k(z);\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} \to$$

$$\lambda(\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l)) = \prod_{j=1}^{l} q_{\gamma_j}(n\to+\infty)$$

тобто z є Q_s-нормальним.

Нехай z є Q_s-нормальним, тоді для кожного Q_s-циліндра $\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l)$ маємо:

$$\frac{N_n(T^n(z);\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} = \frac{N_n(z;(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} \to$$

$$\prod_{j=1}^{l} q_{\gamma_j} = \lambda(\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))(n\to+\infty),$$

звідки враховуючи лему 3 отримаємо потрібне.

Таким чином, враховуючи леми 1-4 приходимо до висновку, що множина всіх Q_s-нормальних чисел має міру Лебега 1.

Теорема 1. *Нехай a_n послідовність додатних чисел така, що*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

тоді число

$$x = \Delta^{Q_s}_{\underbrace{0\ldots0}_{[q_0a_1]}\underbrace{1\ldots1}_{[q_1a_1]}\ldots\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{[q_{s-1}a_1]}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{[q_0a_n]}\underbrace{1\ldots1}_{[q_1a_n]}\ldots}$$

є слабонормальним.

Доведення. Нехай $k-$ достатньо велике натуральне число, тоді існує натуральне число n таке, що

$$\sum_{j=1}^{n}\Big([q_0a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big) \leqslant k < \sum_{j=1}^{n+1}\Big([q_0a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big).$$

Зрозуміло, що

$$\frac{N_i(x;k)}{k} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}[q_i a_j]}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big)}.$$

Позначимо

$$x_n = \sum_{j=1}^{n}[q_i a_j],$$

та

$$y_n = \sum_{j=1}^{n+1}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big).$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{[q_i a_{n+1}]}{[q_0 a_{n+2}]+\ldots+[q_{s-1}a_{n+2}]}.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \geqslant \frac{q_i a_{n+1}-1}{q_0 a_{n+2}+\ldots+q_{s-1}a_{n+2}} =$$

$$= q_i\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+2}} \to q_i \quad (n\to\infty).$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leqslant \frac{q_i a_{n+1}}{q_0 a_{n+2}+\ldots+q_{s-1}a_{n+2}-(s-1)} =$$

$$= \frac{q_i}{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{s-1}{a_{n+1}}} \to q_i \quad (n\to\infty).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = q_i$$

і за теоремою Штольця

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = q_i.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{N_i(x;k)}{k} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1}[q_i a_j]}{\sum\limits_{j=1}^{n}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big)}.$$

Позначимо

$$z_n = \sum_{j=1}^{n+1}[q_i a_j]$$

та

$$t_n = \sum_{j=1}^{n}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big).$$

Зрозуміло, що

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{t_{n+1}-t_n} \geqslant \frac{q_i a_{n+2}-1}{q_0 a_{n+1}+\ldots+q_{s-1}a_{n+1}} =$$

$$= q_i\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \to q_i(n\to\infty).$$

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{t_{n+1}-t_n} \leqslant \frac{q_i a_{n+2}}{q_0 a_{n+1}+\ldots+q_{s-1}a_{n+1}-(s-1)} =$$

$$\frac{q_i}{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{s-1}{a_{n+2}}} \to q_i(n\to\infty),$$

звідки випливає потрібне.

Список використаних джерел

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий — Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. — 296с.

2. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.

3. *Borel E.* Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques /E Borel //Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909. — P. 247-271.

4. *Niven I., Zuckerman H.S.* On the definition of normal numbers /I. Niven, H.S. Zuckerman // Pacific J. Math., 1951, 1. — P. 103-109.

References

1. PRATSIOVYTYI, M. (1998) *Fractal approach in singular studies distributions.* Ed. Kyiv: M.P. Drahomanov National Pedagogical University Publishing House.

2. TURBIN, A.F., PRATSIOVYTYI, M.V. (1992) *Fractal sets, functions, distribution.* Ed. Kyiv: Naukova dumka.

3. BOREL E.(1909) Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. Rend. Circ. Mat. Palermo, p. 247-271.

4. NIVEN I, ZUCKERMAN H.S. (1951) On the definition of normal numbers. – Pacific J. Math., 1, p. 103-109.

Надійшла до редколегії 29.08.2021