Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Просіювання випадкових ітеративних систем

Студентки 4 курсу
Соколової Вікторії Віталіївни

Науковий керівник:
Професор, доктор фіз.-мат. наук
Маринич Олександр Віталійович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ – 2023

Зміст

РЕФЕРАТ

Об’єктом дослідження є новий клас стохастичних процесів, породжених процедурами просіювання послідовностей нескінченних ітерацій випадкових Ліпшицевих функцій. У роботі досліджується побудова інваріантних відносно масштабування стохастичних процесів, використовуючи методи просіювання, які включають часові та просторові компоненти. Вивчаються властивості розподілів та траєкторій таких процесів, зокрема, їх повна варіація, неперервність справа та існування лівосторонніх границь (надалі, càdlàg).

Метою роботи є вивчення поведінки ітераційних процесів, породжених випадковими функціями, встановлення умов збіжності та аналіз їхніх властивостей. Основна увага приділяється аналізу розподілу, траєкторним властивостям і специфічним особливостям різних просіяних ітераційних систем, що дає уявлення про їхню поведінку і потенційне застосування. Окрема увага приділена просіюванню класичних випадкових ітеративних систем, включаючи випадкові ряди, породжені лінійними рекурсіями (англ. perpetuities), нескінченні згортки Бернуллі, ітерації максимуму та випадкові неперервні дроби.

У роботі виконане теоретичне дослідження та огляд алгоритмів та методів просіювання випадкових ітеративних систем, які можуть бути використаними для аналізу та оптимізації продуктивності складних систем.

Вступ

Під просіюванням випадкових ітераційних систем зазвичай розуміють процес фільтрації або вилучення певних даних чи шаблонів з набору випадково згенерованих ітераційних систем. Один з основних фокусів просіювання випадкових ітераційних систем - визначити, коли послідовність просіяних ітерацій збігається до границі, і якщо така границя існує, то які властивості границі можна вивести з ітераційного процесу. Шляхом вивчення моментів і кореляційних функцій ймовірнісних мір, можна отримати інформацію про статистичні властивості границі. Крім того, фрактальні розмірності дозволяють описати геометричну структуру границі ітераційного процесу.

Традиційні методи просіювання випадкових ітеративних систем обмежені у своїй здатності ефективно обробляти великі набори даних і складні системи. Щоб подолати ці обмеження, ми використовуємо рандомізовані підходи до просіювання випадкових ітеративних систем, які передбачають випадковий вибір точок з фрактального простору і використання статистичних методів для виявлення ключових особливостей і закономірностей даних. Цей підхід показав свою перспективність у підвищенні ефективності та точності просіювання випадкових ітеративних систем для широкого спектру застосувань.

Почнемо з того, що ітерація є одним з фундаментальних інструментів математики, що бере свій початок від теореми про нерухому точку для стискаючих відображень. У роботі ми працюємо з ітераціями незалежних однаково розподілених функцій Ліпшиця $((f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, визначених на повному сепарабельному метричному просторі, і вивчаємо збіжність ітерацій назад $f_1(f_2(f_3(\ f_n(\cdot))))$ або вперед $f_n(f_{n-1}(f_{n-2}(\ f_1(\cdot))))$ при $n \to \infty$.

Основна постановка задачі: обмежимось випадком функцій Ліпшиця на дійсній прямій $\mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{G}$ - простір ліпшицевих функцій $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, наділений звичайною нормою Ліпшиця $\|f\|_{Lip} := |f(0)| + L_f$ де

$$L_f := \sup_{x,y\in\mathbb{R},x\neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{|x - y|}$$

є константою Ліпшиця для $f \in \mathcal{G}$. Композиція функцій $f \circ g$, за визначенням $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ для $x \in \mathbb{R}$, наділяє $\mathcal{G}$ структурою напівгрупи і є неперервною по відношенню до $\|\cdot\|_{Lip}$.

Задамо на $\mathcal{G}$ імовірнісну міру ν на борелівській σ-алгебрі множин в $\mathcal{G}$. Оскільки операція композиції неперервна, то композиція двох $\mathcal{G}$-вимірних функцій знову є $\mathcal{G}$-вимірною. Якщо f - випадкова функція з розподілом ν така, що

$$K_f := \mathbf{E}L_f = \int_{\mathcal{G}} L_f \, d\nu(f) < \infty, \qquad \mathbf{E}\log L_f = \int_{\mathcal{G}} \log L_f \, d\nu(f) < 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}\left|f(z_0) - z_0\right| = \int_{\mathcal{G}} \left|f(z_0) - z_0\right| d\nu(f) < \infty \tag{2}$$

для деякого $z_0 \in \mathbb{R}$, то послідовність ітерацій назад

$$Z_n := f_1 \circ \cdots \circ f_n(z_0) \tag{3}$$

збігається майже напевно при $n \to \infty$, а границя Z_∞ не залежить від вибору z_0, див. теорему А.1 та твердження А.2, які розміщено в додатку. Зі згаданих результатів випливає, що послідовність ітерацій вперед $f_n \circ \cdots \circ f_1(z_0)$ збігається за розподілом до Z_∞, див. теорему 5.1.2 [5] в додатку. Крім того, гранична випадкова величина Z_∞ задовольняє стохастичне рівняння нерухомої точки

$$Z_\infty \overset{d}{=} f(Z_\infty), \tag{4}$$

де f та Z_∞ у правій частині незалежні.

Отже, припустимо, що кожна з функцій f_i пов'язана з рівномірно розподіленою випадковою величиною U_i і вилучається з послідовності ітерацій в (3), якщо U_i перевищує задане число x. Границею таких ітерацій є випадкова величина ζ(x), розподіл якої збігається з розподілом Z_∞.

Приклад 1.1. Розглянемо нескінченну послідовність $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ незалежних копій випадкової величини Q, які з однаковою ймовірністю $\frac{1}{2}$ приймають значення 0 або 1. Для $\lambda \in (0,1)$ згортка Бернуллі

$$Z_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} Q_n$$

є результатом ітерації назад незалежних копій функції $f(z)=\lambda z+Q$. Розглянемо послідовність $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ незалежних рівномірно розподілених випадкових величин на [0,1], яка не залежить від $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Покладемо $T_k(x) := \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\{U_j \le x\}}$, $k\in\mathbb{N}$, $x\in(0,1]$, де $\mathbb{1}_{\{x_i\in A\}}$ є індикатором події $\{x_i \in A\}$, і далі $S_n(x):=\inf\{k\in\mathbb{N}, T_k(x)=n\}$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in(0,1]$. Рівність

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} Q_{S_n(x)}, \quad x \in (0, 1].$$

визначає стохастичний процес, який має одновимірні розподіли такі як Z_∞. Покажемо, що для $\lambda\in(0,1/2]$ процес є марківським як у прямому, так і у зворотному часі, і знайдемо його генератор. У випадку якщо $\lambda=1/2$, то $\zeta(x)$ рівномірно розподілена на [0,2] для кожного $x \in(0,1]$.

Приклад 1.2. Узагальнюючи попередній приклад, розглянемо послідовність $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ітерацій назад афінного відображення $f_n(x)=M_nx+Q_n$, $n\in\mathbb{N}$, застосованих до початкової точки $z_0=0$, де $(M_n,Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими випадковими векторами в $\mathbb{R}^2$. Критерій збіжності майже напевно для (Z_n) відомий, див. [10], Теорема 2.1. Згідно з [10, насл. 4.1], збіжність має місце, коли $\mathbf{E}\log|M|\in(-\infty,0)$, $\mathbf{E}\log^+|Q|<\infty$, де $\log^+x :=\log(x \vee 1)$, і виконується додаткова умова невиродженості, див. формулу (6.1) нижче. Нехай $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини на [0,1], які не залежать від $(M_n,Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Розглянемо сімейство процесів

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} M_k^{\mathbb{1}_{\{U_k \le x\}}} \right) Q_n \mathbb{1}_{\{U_n \le x\}}, \quad x \in (0, 1].$$

Встановимо рівномірну збіжність часткових сум наведеного вище ряду до границі $\zeta(x)$ та дослідимо властивості траєкторій граничного процесу.

Приклад 1.3. Розглянемо ланцюговий дріб $W_n = 1 \backslash (W_{n-1}+a_n)$ з (можливо, випадковими незалежними однаково розподіленими) коефіцієнтами $a_n > 0$, $n\in\mathbb{N}$. Якщо $\sum a_n = \infty$ майже напевно, то неперервний дріб збігається за розподілом за теоремою Штерна-Штольца, див. теорему 10 в [12]. Маючи послідовність $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ незалежних рівномірно розподілених випадкових величин на [0,1], які не залежать від $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ми модифікуємо дріб, поклавши

$$W_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{W_{n-1}(x) + a_n}, & \text{if } U_n \le x, \\ W_{n-1}(x), & \text{if } U_n > x, \end{cases} \quad x \in (0,1].$$

Зауважимо, що для кожного фіксованого $x \in (0,1]$, $W_n(x)$ є ітерацією вперед відображень

$$f_{n,x}(z) = \frac{1}{a_n + z} \mathbb{1}_{\{U_n \le x\}} + z \mathbb{1}_{\{U_n > x\}}, \quad z > 0.$$

Точкові границі відповідних ітерацій назад $Z_n(x)$ при $n \to \infty$ являють собою стохастичний процес на (0,1] майже напевно. Ми покажемо, що цей процес має скінченну повну варіацію і є марківським, якщо $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$.

Зауважимо, що в усіх наведених вище прикладах ми вилучаємо деякі ітерації з нескінченної послідовності $Z_\infty = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \circ \cdots$, шляхом узгодженої заміни деяких функцій тотожними відображенням.

Розділ 1. Схема просіювання для ітерованих випадкових функцій

Нехай $\mathcal{X}$ - повний сепарабельний метричний простір зі своєю борелівською σ-алгеброю $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ та σ-скінченною мірою μ. Нагадаємо, що $\mathcal{G}$ - це родина функцій Ліпшиця на дійсній прямій з ймовірнісною мірою ν, яка задовольняє (1) і (2).

Нехай $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ - додатна піввісь з мірою Лебега Leb. Розглянемо пуассонівський процес $\mathcal{P}$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ з мірою інтенсивності $\mathrm{Leb} \otimes \mu \otimes \nu$. Зауважимо, що у трійці $(t,x,f) \in \mathcal{P}$ функцію f можна вважати міткою точки (t,x). Мітки різних точок незалежні, а ν є розподілом ймовірності типової мітки f. Для $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ позначимо через $\mathcal{P}_A$ перетин $\mathcal{P}$ з $\mathbb{R}_+ \times A \times \mathcal{G}$.

Для послідовності $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ незалежних однаково розподілених випадкових функцій Ліпшиця запишемо $f^{k\uparrow n} = f_k \circ \cdots \circ f_n$ та $f^{k\uparrow\infty}$ границі м.н. цих ітерацій при $n \to \infty$ за умови, що вона існує. Для $k > n$ ми вважаємо, що $f^{k\uparrow n}$ є тотожною функцією Id.

Для кожного $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ з $\mu(A) \in (0,\infty)$ пронумеруємо точки $\{(t_{k,A}, x_{k,A}, f_{k,A}) : x_{k,A} \in A, k \ge 1\}$ $\mathcal{P}_A$, в яких перша компонента зростає майже напевно, і визначимо просіяні ітерації назад $(f_{k,A})_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\zeta_t(A) := f_A^{1\uparrow N_A(t)}(z_0) = f_{1,A} \circ \cdots \circ f_{N_A(t),A}(z_0), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

де число $z_0 \in \mathbb{R}$ фіксоване та невипадкове, та

$$N_A(t) := \sup\{k \geq 1 : t_{k,A} \leq t, x_{k,A} \in A\}$$

за умови, що $\sup\emptyset=0$. Таким чином, $\zeta_t(A)$ - це скінченна композиція назад міток f_k для (t_k,x_k) з прямокутника $[0,t]\times A$. Еквівалентно, $\zeta_t(A)$ - це композиція функцій $f_i \mathbb{1}_{\{x_i \in A\}} + \mathrm{Id}\,\mathbb{1}_{\{x_i \notin A\}}$ для $t_i \leq t$, застосованих до початкової точки z_0.

Надалі ми завжди вважатимемо, що умови (1) і (2) виконуються. Тоді $\zeta_t(A)$ в (1.1) збігається майже напевно при $t\to\infty$. Граничний випадковий елемент, отриманий спрямуванням $t \to \infty$, позначимо через $\zeta(A)$. Це випадкова функція, що індексована множиною та яка визначена на $\mathcal{B}_+(\mathcal{X}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : \mu(A) \in (0, \infty)\}$.

Крім того, $\zeta(A)$ не залежить від вибору z_0.

Якщо $\mathcal{X}$ – додатна піввісь $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ та μ - міра Лебега, то ми маємо справу з пуассонівським процесом на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathcal{G}$, і для $A = [0,x]$, де $x > 0$, випадкова величина $\zeta_t(A)$ є результатом ітерації функцій f_i, впорядкованих за $t_i \leq t$ і таких, що $x_i \leq x$. У цьому випадку ми записуємо $\zeta(x)$ як скорочення для $\zeta([0,x])$, $x > 0$, і вважатимемо $(\zeta(x))_{x>0}$ стохастичним процесом на $(0,\infty)$. Зауважимо, що при переході від $\zeta(x)$ до $\zeta(y)$ ми просіюємо деякі ітерації, якщо $y<x$, і вставляємо додаткові, якщо $y>x$.

Отже, запропоновано схему просіювання ітерованих функцій, яка генерується допоміжним пуассонівським точковим процесом. В результаті ми отримуємо стохастичний процес, що індексованою множиною A.

Розділ 2. Властивості розподілу

2.1. Скінченновимірні розподіли та масштабна інваріантність

Нагадаємо, що $\zeta(A)$ визначена для $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$, тобто для борелівських A таких, що $\mu(A) \in (0,\infty)$. Відзначимо наступні факти.

Твердження 2.1. Розподіл $\zeta(A)$ не залежить від $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$ та $\zeta(A) \stackrel{\text{def}}{=} Z_\infty$. Якщо $\mathbf{P}\{Z_\infty = 0\} < 1$, то задана функція ζ не є адитивною, а отже, не є мірою на $\mathcal{X}$. Якщо $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ для $A_1,A_2 \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$, то $\zeta(A_1)$ і $\zeta(A_2)$ незалежні.

Теорема 2.2. Нехай $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ - довільна вимірна бієкція, така, що $\mu(\phi^{-1}(A)) = c\mu(A)$ для деякого $c > 0$ і всіх $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$. Тоді $\zeta(\phi(A))$ та $\zeta(A)$ мають однакові скінченновимірні розподіли як функції від $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$.

Доведення. За теоремою перетворення для процесу Пуассона, процес з мірою інтенсивності $\mu(\phi^{-1}(A))$ можна подати у вигляді $(\phi(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$, де $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ - пуассонівський процес з інтенсивністю μ. Таким чином, $\zeta(\phi(A))$, $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$, збігається з граничним індексованим множиною процесом, отриманим за допомогою точок процесу Пуассона, інтенсивність якого $c\mathrm{Leb} \otimes \mu \otimes \nu$. Цей процес отримується з оригінального шляхом перетворення $t_i \to c^{-1}t_i$, яке не змінює порядок t_is, а отже, і границю в (1.1).

Двовимірні розподіли заданої функції ζ можна описати наступним чином. Нехай A_1, A_2 - дві множини з $\mathcal{B}_+(\mathcal{X})$. Розглянемо триплет (t^*,x^*,f^*) такий, що t^* є найменшим серед усіх з (t_i,x_i,f_i), де $x_i \in A_1 \cup A_2$. Тоді

$$\begin{aligned}\big(\zeta(A_1), \zeta(A_2)\big) \overset{d}{=} \big(f_*(\zeta(A_1)), f_*(\zeta(A_2))\big)\mathbb{1}_{\{x_*\in A_1\cap A_2\}} \\ + \big(\zeta(A_1), f_*(\zeta(A_2))\big)\mathbb{1}_{\{x_*\in A_2\setminus A_1\}} + \big(f_*(\zeta(A_1)), \zeta(A_2)\big)\mathbb{1}_{\{x_*\in A_1\setminus A_2\}}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Аналогічне рівняння можна записати для спільного розподілу $(\zeta(A_1),\zeta(A_2),\ldots,\zeta(A_m))$ для будь-яких $A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$.

В окремому випадку коли $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$, де μ - міра Лебега, теорема 2.2 показує, що скінченновимірні розподіли функції $(\zeta(x))_{x>0}$ не змінюються при масштабуванні її аргументу на будь-яку додатну сталу, тобто $(\zeta(x))_{x>0}$ є масштабно інваріантним. Після експоненційної зміни часу процес $\tilde{\zeta}(s) := \zeta(e^s)$, $s \in \mathbb{R}$, є строго стаціонарним на $\mathbb{R}$.

2.2. Степеневі моменти

Використовуючи відомі результати для випадкових рядів, породжених лінійною рекурсією, легко вивести наступне твердження.

Твердження 2.3. Припустимо, що для деякого $p > 0$ виконуються умови $\mathbf{E}\, L_f^p < 1$ і $\mathbf{E}|f(z_0) - z_0|^p < \infty$. Тоді $\mathbf{E}|\zeta(A)|^p < \infty$ для всіх $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$.

Доведення. Для кожного $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$ випадкова величина $\zeta(A)$ має такий самий розподіл, як і Z_∞. За нерівністю трикутника

$$\left|f_i(z) - z_0\right| \le \left|f_i(z_0) - z_0\right| + L_{f_i}|z - z_0|, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

і, отже,

$$\left|f^{1\uparrow n}(z_0) - z_0\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|f_k(z_0) - z_0\right| \prod_{j=1}^{k-1} L_{f_j}$$

майже напевно, n$\in\mathbb{N}$.

Спрямувавши n → ∞, отримаємо

$$|Z_\infty - z_0|^p \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k(z_0) - z_0\right| \prod_{j=1}^{k-1} L_{f_j}\right)^p$$

майже напевно.

Термін у круглих дужках з правого боку - це випадковий ряд, породжений лінійною рекурсією. Критерій існування степеневих моментів таких рядів наведено в [4, т. 1.4]. За наших припущень математичне сподівання правої частини останньої нерівності скінченне. Доведення завершено.

Зауваження 2.4. Нерівність $\mathbf{E}|Z_\infty|^p < \infty$ сформульована за слабших припущень в теоремі 2.3(d) в [3]. Однак у наведеному там вигляді цей результат не є вірним, його коректна форма, наведена у [2], слабша за твердження 2.3.

Якщо умови твердженні 2.3 виконуються при p = 2, то $\zeta(A)$ є квадратично інтегровною для всіх $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$, і (2.1) приводить до ітераційного рівняння для других моментів ζ у вигляді

$$\begin{aligned} &\mu(A_1 \cup A_2)\mathbf{E}\big(\zeta(A_1)\zeta(A_2)\big) \\ &\quad = \mu(A_1 \cap A_2)\mathbf{E}\Big(f\big(\zeta(A_1)\big)f\big(\zeta(A_2)\big)\Big) \\ &\qquad + \mu(A_1 \setminus A_2)\mathbf{E}\Big(f\big(\zeta(A_1)\big)\big(\zeta(A_2)\big)\Big) + \mu(A_2 \setminus A_1)\mathbf{E}\Big(\zeta(A_1)f\big(\zeta(A_2)\big)\Big), \end{aligned} \tag{2.3}$$

де f - випадковий елемент у $\mathcal{G}$ з розподілом ν, незалежний від $\zeta(A_1)$ та $\zeta(A_2)$. Для процесів на півосі, (2.3) набуває вигляду

$$y\mathbf{E}\big(\zeta(x)\zeta(y)\big) = x\mathbf{E}\Big(f\big(\zeta(x)\big)f\big(\zeta(y)\big)\Big) + (y - x)\mathbf{E}\Big(\zeta(x)f\big(\zeta(y)\big)\Big), \quad 0 < x \le y,$$

де f не залежить від $\zeta(x)$ та $\zeta(y)$.

Розділ 3. Ітерації на просторах скінченної міри

3.1. Ітерації у функціональному просторі

Припустимо, що μ відмінна від нуля і скінченна на $\mathcal{X}$, тобто $\mu(\mathcal{X}) \in (0,\infty)$. Тоді побудову граничного процесу можна здійснити наступним чином. Нехай $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ - послідовність незалежних копій f з $\mathcal{G}$, розподілених згідно ν, і нехай $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкового елементу $U \in \mathcal{X}$ з

$$\mathbf{P}\{U \in A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\mathcal{X})}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{3.1}$$

Далі припустимо, що $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ та $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ є незалежними.

Нехай $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$. Тоді f_i входять до ітерацій, що утворюють ζ(A), якщо $U_i \in A$, інакше f_i замінюється тотожним відображенням. Іншими словами, маємо таку тотожність

$$\zeta(A) = f_A^{1\uparrow\infty}(z_0), \quad A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X}),$$

де границя $f_A^{1\uparrow\infty}(z_0)$ позначає границю послідовності $f_A^{1\uparrow n}(z_0)$ при $n \to \infty$ в сенсі майже напевно, $z_0 \in \mathbb{R}$ та $f_A^{1\uparrow n}$ є ітераціями назад незалежних копій функції

$$f_A(\cdot) := f(\cdot)\mathbb{1}_{\{U\in A\}} + \mathrm{Id}(\cdot)\mathbb{1}_{\{U\notin A\}}. \tag{3.2}$$

Задана функція множини $(\zeta(A))_{A\in\mathcal{B}_+(\mathcal{X})}$ є розв'язком за розподілом рівняння нерухомої точки

$$\big(\zeta(A)\big)_{A\in\mathcal{B}_+(\mathcal{X})} \overset{\text{f.d.}}{=} \big(f\big(\zeta(A)\big)\mathbb{1}_{\{U\in A\}} + \zeta(A)\mathbb{1}_{\{U\notin A\}}\big)_{A\in\mathcal{B}_+(\mathcal{X})}, \tag{3.3}$$

де f , U та ζ у правій частині незалежні. Зауважимо, що стала Ліпшиця f_A дорівнює

$$L_{f_A} = L_f\mathbb{1}_{\{U\in A\}} + \mathbb{1}_{\{U\notin A\}},$$

отже,

$$\log L_{f_A} = (\log L_f)\mathbb{1}_{\{U\in A\}}.$$

Приклад 3.1. Нехай $\mathcal{X}$ = [0, 1] з мірою Лебега. Тоді U має стандартний рівномірний розподіл на [0, 1], і

$$\zeta(x) = f_x^{1\uparrow\infty}(z_0), \quad x \in (0, 1],$$

де границя майже напевно не залежить від $z_0 \in \mathbb{R}$, а $f_x^{1\uparrow\infty}$ - ітерації, що складаються з незалежних однаково розподілених копій функції

$$f_x(\cdot) := f(\cdot)\mathbb{1}_{\{U \le x\}} + \mathrm{Id}(\cdot)\mathbb{1}_{\{U > x\}}.$$

3.2. Рівномірна збіжність просіяних ітерацій

Тепер ми хочемо довести рівномірну збіжність ітерацій функцій борелівської множини A, звівши проблему до рівномірної збіжності емпіричних процесів. Нехай $\mathcal{A}$ - підклас борелівських множин у $\mathcal{X}$.

Скінченна множина I потужності n розбитвається елементами $\mathcal{A}$, якщо кожну з її 2^n підмножин можна подати як I ∩A для деякого A ∈ $\mathcal{A}$. Розмірністю Вапника - Червоненкіса $\mathcal{A}$ називається супремум потужності n, взитий по всіх скінченних множин I в $\mathcal{X}$, розбитих за $\mathcal{A}$. Родина $\mathcal{A}$ називається класом Вапника - Червоненкіса, якщо її розмірність Вапника - Червоненкіса скінченна. Ми посилаємось на [14, 4.9], для отримання деталей теорії Вапника - Червоненкіса.

Теорема 3.2. Нехай $\mathcal{A}$ - набір борелівських підмножин з $\mathcal{X}$, $\mu(\mathcal{X}) < \infty$, такий, що A є класом Вапніка-Червоненкіса та $\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) > 0$. Тоді

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\zeta(A) - f_A^{1\uparrow n}(z_0)\right| \to 0 \qquad (3.4)$$

майже напевно при $n \to \infty$.

Лема 3.3. Припустимо, що сімейство $\mathcal{A}$ задовольняє умовам теореми 3.2. Далі, нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - послідовність незалежних однаково розподілених копій інтегровної випадкової величини ξ такої, що $\mathbf{E}\xi < 0$, і нехай $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - послідовність незалежних копій випадкового елемента U з розподілом (3.1), який не залежить від $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Тоді

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbb{1}_{\{U_k\in A\}}}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{\mu(\mathcal{X})}\mathbf{E}\xi < 0$$

при $n \to \infty$.

Доведення. Визначимо випадкову міру або абстрактний емпіричний процес на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ через

$$S_n(A) := \sum_{k=1}^{n} \phi_{nk}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

де

$$\phi_{nk}(A) := \frac{1}{n}\xi_k \mathbb{1}_{\{U_k \in A\}}, \quad k = 1, \ldots, n, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Зауважимо, що $\mathbf{E}S_n(A) = \mu(A)\mathbf{E}\xi/\mu(\mathcal{X})$ не залежить від n. Для функції $\psi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ позначимо $\|\psi\| := \sup_{A\in \mathcal{A}} |\psi(A)|$.

Припустимо, що $|\xi_i| \leq c$ майже напевно. Тоді

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \|\phi_{nk}\|\right) \leq c, \quad n \geq 1.$$

Для $\delta > 0$,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\|\phi_{nk}\|>\delta\}}\|\phi_{nk}\|\right) \leq \frac{c}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{|\xi_k|>n\delta\}}\right) = c\mathbf{P}\{|\xi_k| > n\delta\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

З результатів теорії емпіричних процесів, наведених у [6, гл. 6],

$$\mathbf{E}\|S_n - \mathbf{E}S_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Послідовність $S_n(A) - \mathbf{E}S_n(A)$ є оберненим мартингалом для кожної A, і тому $S_n - \mathbf{E}S_n$ є обмеженим оберненим субмартингалом, оскільки $|S_n(A) - \mathbf{E}S_n(A)| \leq 2c$ для всіх A та n. Таким чином, $\|S_n - \mathbf{E}s_n\| \to 0$ майже напевно при $n \to \infty$.

Для ξ_k , який може бути необов'язково обмежений, розкладемо випадкову міру у вигляді

$$S_n(A) = S_n'(A) + S_n''(A) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{nk}(A)\mathbb{1}_{\{|\xi_k|\leq c\}} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{nk}(A)\mathbb{1}_{\{|\xi_k|>c\}}.$$

Тоді $\|S'_n - \mathbf{E}S'_n\| \to 0$ майже напевно при $n \to \infty$ за наведеним вище аргументом, застосовним до обмеженого ξ_ks. Крім того,

$$\|S_n'' - \mathbf{E}S_n''\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|\mathbb{1}_{\{|\xi_k|>c\}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\big(|\xi_k|\mathbb{1}_{\{|\xi_k|>c\}}\big).$$

Верхню границю м.н. в правій частині можна зробити як завгодно малою, вибравши с. Тому

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbb{1}_{\{U_k\in A\}}}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sup_{A\in\mathcal{A}} \frac{\mu(A)}{\mu(\mathcal{X})}\mathbf{E}\xi = \frac{\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{\mu(\mathcal{X})}\mathbf{E}\xi$$

при $n \to \infty$ припускаючи, що $\mathbf{E}\xi < 0$.

Зауваження 3.4. Можна накласти слабші умови, які гарантують рівномірну збіжність $S_n(A)$ відносно $A \in \mathcal{A}$. Нехай $N(\varepsilon, \mathcal{A}, \hat{p}_n)$ - потужність найменшої ε-сітки в $\mathcal{A}$ відносно випадкової псевдометрики

$$\hat{\rho}_n(A, A') := \sum_{k=1}^{n} \left|\phi_{nk}(A) - \phi_{nk}(A')\right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \mathbb{1}_{\{U_k\in A\triangle A'\}}.$$

Тоді припущення про клас Вапніка-Червоненкіса можна замінити припущенням, що $N(\varepsilon, \mathcal{A}, \hat{p}_n)$ збігається до нуля за ймовірністю при $n \to \infty$. Доведення рівномірної збіжності емпіричних процесів можна знайти в [14, гл. 3, т. 3.5].

Доведення теореми 3.2. Нехай $(L_{f_{i,A}})_{i\in\mathbb{N}}$ - константи Ліпшиця для незалежних однаково розподілених копій $(f_{i,A})_{i\in\mathbb{N}}$ функції f_A, заданої формулою (3.2). За властивістю Ліпшиця,

$$\left|\zeta(A) - f_A^{1\uparrow n}(z_0)\right| \le L_{f_{1,A}} \cdots L_{f_{n,A}} \left|f_A^{(n+1)\uparrow\infty}(z_0) - z_0\right| \tag{3.5}$$

для довільного $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$. Крім того, для кожного $i \in \mathbb{N}$ та довільного $z \in \mathbb{R}$ маємо, аналогічно до (2.2),

$$\begin{aligned}\left|f_{i,A}(z) - z_0\right| &= \left|z\mathbb{1}_{\{U_i\notin A\}} + f_i(z)\mathbb{1}_{\{U_i\in A\}} - z_0\right| \\ &= \left|(z-z_0)\mathbb{1}_{\{U_i\notin A\}} - z_0\mathbb{1}_{\{U_i\in A\}} + f_i(z_0)\mathbb{1}_{\{U_i\in A\}} + \big(f_i(z) - f_i(z_0)\big)\mathbb{1}_{\{U_i\in A\}}\right| \\ &\le \left|f_i(z_0) - z_0\right| + (L_{f_i}\mathbb{1}_{\{U_i\in A\}} + \mathbb{1}_{\{U_i\notin A\}})|z - z_0| =: Q_i + L_{f_{i,A}}|z - z_0|.\end{aligned}$$

Ітеруємо наведену вище нерівність для $|f_{i,A}(z) - z_0|$, отримуємо

$$\left|f_A^{(n+1)\uparrow\infty}(z_0) - z_0\right| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} Q_i \prod_{k=n+1}^{i-1} L_{f_{k,A}}. \tag{3.6}$$

Підставивши цю оцінку в (3.5), отримаємо

$$\left|\zeta(A) - f_A^{1\uparrow n}(z_0)\right| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} Q_i \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,A}} \le \sum_{i=n+1}^{\infty} Q_i \left(\sup_{A\in\mathcal{A}} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,A}}\right). \tag{3.7}$$

Щоб показати, що права частина наведеної нерівності збігається до нуля майже напевно, достатньо перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \left(\sup_{A\in\mathcal{A}} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,A}}\right) < \infty$$

майже напевно.

Це випливає з радикальної ознаки Коші. Дійсно,

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{1}{i}\left(\log Q_i + \sup_{A\in\mathcal{A}} \sum_{k=1}^{i-1} \log L_{f_{k,A}}\right)$$
$$\le \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{i}\log^+ Q_i + \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{i} \sup_{A\in\mathcal{A}} \sum_{k=1}^{i-1} (\log L_{f_k}) \mathbb{1}_{\{U_k\in A\}} = \frac{\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{\mu(\mathcal{X})} \mathbf{E}\log L_f < 0,$$

де другий lim sup був обчислений в лемі 3.3. Перший lim sup дорівнює нулю за лемою Бореля-Кантеллі та в силу умови $\mathbf{E}\log^+ Q_1 = \mathbf{E}\log^+ |f_1(z_0) - z_0| < \infty$ за припущенням (2). Таким чином,

$$\limsup_{i\to\infty}\left(Q_i\left(\sup_{A\in\mathcal{A}} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,A}}\right)\right)^{1/i} \le \exp\left\{\frac{\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{\mu(\mathcal{X})} \mathbf{E}\log L_f\right\} < 1,$$

доведення завершено.

Оскільки розмірність Вапніка-Червоненкіса монотонного сімейства множин дорівнює 2, то отримаємо наступний результат.

Наслідок 3.5. Нехай $\mathcal{A} = \{A_t, t \ge 0\}$ - неспадна (незростаюча) родина множин $\mathcal{B}_+(\mathcal{X})$ зі скінченною мірою такою, що $\bigcup_t A_t$ ($\bigcap_t A_t$) має скінченну додатню міру. Тоді (3.4) виконується.

3.3. Рівномірна збіжність просіяних ітерацій на півпрямій

Нехай $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ - піввісь з мірою Лебега μ. Розглянемо стохастичний процес $(\zeta(x))_{x>0} = (\zeta([0,x]))_{x>0}$. За наслідком 3.5, ітерації

$$\zeta_n(x) := f_{[0,x]}^{1\uparrow n}(z_0), \quad n \ge 1, \tag{3.8}$$

збігаються майже напевно до ζ рівномірно по $x \in [a,b]$ для довільних $0 < a \le b < \infty$. Наступний результат встановлює їх рівномірну збіжність в L^p.

Позначимо $\Phi(x) := \mathbf{E}L_f^x$, і нехай

$$\mathcal{I} := \{x > 0 : \Phi(x) < 1\}. \tag{3.9}$$

Множина $\mathcal{I}$ не є порожньою за припущенням (1), оскільки містить усі достатньо малі додатні числа.

Це випливає з наступних трьох співвідношень: $\Phi(0)=1$, $\Phi'(0)= \mathbf{E}L_f<0$, $\Phi(1)= \infty$.

Твердження 3.6. Для кожного $a > 0$ та $p \in \mathcal{I} \cap (0, 1]$,

$$\mathbf{E} \sup_{x\in[a,1]} \left|\zeta(x) - \zeta_n(x)\right|^p \to 0 \tag{3.10}$$

при $n \to \infty$

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 3.2, див. (3.7), використовуючи субадитивність функції $t \to t^p$, отримаємо

$$\mathbf{E} \sup_{x\in[a,1]} \left|\zeta(x) - \zeta_n(x)\right|^p \le \sum_{i=n+1}^{\infty} (\mathbf{E}Q_i)^p \mathbf{E}\left(\sup_{x\in[a,1]} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,[0,x]}}\right)^p. \tag{3.11}$$

Покладемо $i \ge 2$. Для обчислення математичного сподівання нагадаємо, що $(t_k,x_k,f_k)_{k=1,\dots,i-1}$ є переліком перших i -1 атомів з $\mathcal{P}_{[0,1]}$, впорядкованих так, що $t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1}$. Нехай $x_{(i-1:1)} < \ldots < x_{(i-1:i-1)}$ впорядкуванням набору $x_1,\dots,x_{i-1}$, і нехай $f_{(i-1:k),[0,x]}$ - відповідні функції-мітки. Зауважимо, що

$$\prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,[0,x]}} = \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{(i-1,k),[0,x]}} = \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{(i-1,k)}}^{\mathbb{1}_{\{a<x_{(i-1,k)}\le x\}}} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{(i-1,k)}}^{\mathbb{1}_{\{x_{(i-1,k)}\le a\}}}, \tag{3.12}$$

Два добутки у правій частині (3.12) є незалежними за властивістю процесу Пуассона, а другий добуток не залежить від x. Таким чином,

$$\mathbf{E}\left(\sup_{x\in[a,1]} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,[0,x]}}\right)^p \le \mathbf{E}\left(\sup_{x\in[a,1]} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{(i-1,k)}}^{\mathbb{1}_{\{a<x_{(i-1,k)}\le x\}}}\right)^p \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{(i-1,k)}}^{\mathbb{1}_{\{x_{(i-1,k)}\le a\}}}\right)^p.$$

Оскільки (f_k) та (x_k) незалежні,

$$\mathbf{E}\left(\sup_{x\in[a,1]}\prod_{k=1}^{i-1}L_{f_{(i-1,k)}}^{\mathbb{1}_{\{a<x_{(i-1,k)}\le x\}}}\right)^p=\mathbf{E}\left(\sup_{x\in[a,1]}\prod_{k=1}^{i-1}L_{f_k}^{\mathbb{1}_{\{a<x_{(i-1,k)}\le x\}}}\right)^p\le\mathbf{E}\left(\sup_{i\ge1}\prod_{k=1}^{i-1}L_{f_k}\right)^p$$
$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{i-1}L_{f_k}\right)^p=\sum_{i=1}^{\infty}(\Phi(p))^{i-1}=\frac{1}{1-\Phi(p)}<\infty.$$

Тому,

$$\mathbf{E}\left(\sup_{x\in[a,1]}\prod_{k=1}^{i-1}L_{f_{k,[0,x]}}\right)^p\le\frac{1}{1-\Phi(p)}\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{i-1}L_{f_{(i-1,k)}}^{\mathbb{1}_{\{x_{(i-1,k)}\le a\}}}\right)^p$$
$$=\frac{1}{1-\Phi(p)}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{i-1}{k}\Phi(p)^k a^k(1-a)^{i-1-k}=\frac{(1-(1-\Phi(p))a)^{i-1}}{1-\Phi(p)},$$

де перша рівність виконується в залежності від кількості точок $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$, які потрапляють в інтервал [0,a]. Ряд у правій частині (3.11) збігається, отже (3.10) виконується.

Розділ 4. Властивості траєкторій

4.1. Функції, що індексовані множинами

Множинна функція ζ не є мірою, але можна показати, що вона майже напевно є неперервною знизу і зверху.

Твердження 4.1. Нехай $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ - неспадна послідовність множин з $\mathcal{B}_+(\mathcal{X})$ таких, що $\mu(A_\infty)<\infty$, де $A_\infty := \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$.

Тоді, $\zeta(A_m)\xrightarrow{\text{a.s.}}\zeta(A_\infty)$ при $m\to\infty$.

Те саме справджується для незростаючої послідовності $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ з $\mathcal{B}_+(\mathcal{X})$ такої, що $0<\mu(A_\infty)$, де $A_\infty := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$.

Доведення. Припустимо, що $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ не спадає. Для фіксованого $t>0$ можна записати

$$\left|\zeta(A_\infty)-\zeta(A_m)\right|\le\left|\zeta(A_\infty)-\zeta_t(A_\infty)\right|+\left|\zeta_t(A_\infty)-\zeta_t(A_m)\right|+\left|\zeta_t(A_m)-\zeta(A_m)\right|$$
$$\le\left|\zeta(A_\infty)-\zeta_t(A_\infty)\right|+\left|\zeta_t(A_\infty)-\zeta_t(A_m)\right|+\sup_{m\ge1}\left|\zeta_t(A_m)-\zeta(A_m)\right|,$$

де ζ_t визначена в (1.1). При спрямуванні $m\to\infty$, отримуємо

$$\limsup_{m\to\infty}\left|\zeta(A_\infty)-\zeta(A_m)\right|\le\left|\zeta(A_\infty)-\zeta_t(A_\infty)\right|+\sup_{m\ge1}\left|\zeta_t(A_m)-\zeta(A_m)\right|,$$

оскільки $N_{A_m}(t) \to N_{A_\infty}(t)$ майже напевно, і тому $N_{A_n}(t) = N_{A_\infty}(t)$ майже напевно для всіх достатньо великих m. Застосовуємо наслідок 3.5 при $t \to \infty$, отримаємо шукане твердження. Доведення для незростаючих послідовностей є аналогічним.

Зауваження 4.2. Твердження 4.1 також виконується в розумінні L^p-збіжності для $p \in \widetilde{\mathbb{I}}$, див. (3.9) для визначення $\widetilde{\mathbb{I}}$.

Рекурсивне рівняння (6) дає змогу отримати співвідношення для приростів ζ.

Нехай $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$, і нехай U розподілено в B згідно з нормалізованою μ, див. формулу (3.1) з $\mathcal{X} = B$. Тоді

$$\begin{aligned}|\zeta(B) - \zeta(A)| &\overset{d}{=} \left|\left(f(\zeta(B)) - f(\zeta(A))\right)\mathbb{1}_{\{U \in A\}} + \left(f(\zeta(A)) - \zeta(A)\right)\mathbb{1}_{\{U \in B \setminus A\}}\right| \\ &\le L_f|\zeta(B) - \zeta(A)| + |f(\zeta(A)) - \zeta(A)|\mathbb{1}_{\{U \in B \setminus A\}},\end{aligned}$$

з незалежними ζ, f та U у правій частині. Якщо $K_f = \mathbf{E}L_f < 1$ і виконується (2), то $\zeta(A)$ буде інтегровною згідно з твердженням 2.3. Оскільки $\zeta(A)$ і $f(\zeta(A))$ мають однаковий розподіл, то має місце

$$\mathbf{E}|\zeta(B) - \zeta(A)| \le \frac{\mu(B) - \mu(A)}{(1 - K_f)\mu(B)}\mathbf{E}|f(\zeta(A)) - \zeta(A)|.$$

Зауважимо, що останнє математичне сподівання не залежить від A, оскільки розподіл $\zeta(A)$ не залежить від A. Аналогічну оцінку можна записати для p-их моментів, $p > 0$, припускаючи $\Phi(p) < 1$ та $\mathbf{E}|f(z_0) - z_0|^p < \infty$.

4.2. Стохастичний процес на півпрямій

Нехай $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ та μ - міра Лебега, отримуємо наступний результат.

Твердження 4.3. Процес $(\zeta(x))_{x>0}$ є майже напевно неперервним при кожному фіксованому $x > 0$; він має неперервні справа траєкторії без розривів другого роду, але вони не є неперервними і не є монотонними.

Доведення. Зафіксуємо довільне $x > 0$. Нехай $(x_n)_{n\ge1}$ і $(x'_n)_{n\ge1}$ є послідовностями, що $x_n \downarrow x$ та $x'_n \uparrow x$ при $n \to \infty$. Із твердження 4.1 отримуємо

$\zeta([0, x_n)) \xrightarrow{\text{a.s.}} \zeta([0, x])$ та $\zeta([0, x'_n)) \xrightarrow{\text{a.s.}} \zeta([0, x))$ при $n \to \infty$.

Оскільки $\zeta(x-) := \zeta([0,x]) = \zeta(x)$ майже напевно, то першу властивість доведено.

Процес $\zeta_n(x)$ з (3.8) є неперервним справа в x та має в цій точці скінченну границю зліва за побудовою тому, що він є композицією функцій $f_{i,[0,x]}$ з такими ознаками. Рівномірна збіжність, встановлена в наслідку 3.5, призводить до того, що $(\zeta(x))_{x>0}$ має càdlàg траєкторії роду на [a,b] для будь-яких $0 < a < b$.

Щоб показати, що траєкторії не є неперервними, розглянемо проекцію $\{(t_i,x_i) : i \geq 1\}$ пуассонівського процесу $\mathcal{P}$ і візьмемо атом (t,x) такий, що прямокутник $[0,t]\times[0,x]$ не містить інших атомів з $\{(t_i,x_i) : i \geq 1\}$. Атомами зазвичай називають (нижчі) рекорди точкового процесу. Тоді ζ не є неперервною зліва в x. Тобто для таких x маємо $\zeta(x) = f(\zeta(x-))$, де f - мітка атома в точці (t,x). Оскільки значення математичного сподівання стрибка $f(\zeta) - \zeta$ нуль, див. (4), то процес не є монотонним майже напевно.

Наш наступний результат стосується повної варіації ζ .

Теорема 4.4. Повна варіація процесу $(\zeta(x))_{x>0}$ скінченна майже напевно на кожному інтервалі [a,b], де $a > 0$.

Доведення. Для фіксованого $a \in (0, 1)$ розглянемо інтервал [a, 1]. Зафіксуємо на ньому довільне розбиття $a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = 1$, і нехай

$$\tau_j = \tau(y_j, y_{j+1}) := \inf\{k \geq 1 : x_k \in (y_j, y_{j+1}]\}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

є індексом першої точки в $\mathcal{P}$, для якої друга координата потрапляє в $(y_j, y_{j+1}]$.

Для кожного фіксованого $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{\tau_j \leq i\}} &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{i} \mathbb{1}_{\{\tau_j = k\}} \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{i} \mathbb{1}_{\{x_k \in (y_j, y_{j+1}]\}} \\ &= \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{x_k \in (y_j, y_{j+1}]\}} = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{1}_{\{x_k \in (a,1]\}} \leq i.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Розглянемо прирости $\zeta(y_{j+1}) - \zeta(y_j)$ для $j = 0,\ldots,m-1$. Запишемо $(f_{i,y})_{i\in\mathbb{N}}$ для незалежних однаково розподілених копій функції $f_y := f_{[0,y]}$ з (3.2). Маємо

$$\begin{aligned}\left|\zeta(y_{j+1}) - \zeta(y_j)\right| &\leq \left|\zeta(y_{j+1}) - f_{y_j}^{1\uparrow(\tau_j-1)}(z_0)\right| + \left|\zeta(y_j) - f_{y_j}^{1\uparrow(\tau_j-1)}(z_0)\right| \\ &= \left|\zeta(y_{j+1}) - f_{y_{j+1}}^{1\uparrow(\tau_j-1)}(z_0)\right| + \left|\zeta(y_j) - f_{y_j}^{1\uparrow(\tau_j-1)}(z_0)\right|,\end{aligned}$$

де друга рівність виконується, оскільки $f_{k,y_{j+1}} = f_{k,y_j}$ для $k<\tau_j$ за означенням τ_j .
З властивості Ліпшиця

$$\left|\zeta(y_{j+1}) - \zeta(y_j)\right| \le L_{f_{1,y_{j+1}}} \cdots L_{f_{\tau_j-1,y_{j+1}}} \left|f_{y_{j+1}}^{\tau_j\uparrow\infty}(z_0) - z_0\right|$$
$$+ L_{f_{1,y_j}} \cdots L_{f_{\tau_j-1,y_j}} \left|f_{y_j}^{\tau_j\uparrow\infty}(z_0) - z_0\right|,$$

і, за допомогою (3.6),

$$\left|\zeta(y_{j+1}) - \zeta(y_j)\right| \le \sum_{i=\tau_j}^{\infty} Q_i \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,y_{j+1}}} + \sum_{i=\tau_j}^{\infty} Q_i \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,y_j}} \le 2 \sum_{i=\tau_j}^{\infty} Q_i \left(\sup_{x\in[a,1]} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,x}} \right),$$

де $Q_i := |f_i(z_0) - z_0|$. Беремо суму по $j = 0,...,m - 1$, а потім беремо супремум по всім розбиттям, отримуємо

$$\sup_P \sum_{j=0}^{m-1} \left|\zeta(y_{j+1}) - \zeta(y_j)\right| \le \sup_P \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \left(\sup_{x\in[a,1]} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,x}} \right) \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{\tau_j \le i\}}$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty} i\, Q_i \left(\sup_{x\in[a,1]} \prod_{k=1}^{i-1} L_{f_{k,x}} \right),$$

де остання умова випливає з (4.1). Зауважимо, що ряд у правій частині збігається майже напевно за радикальною ознакою Коші, використовуючи ті самі міркування, що й при доведенні теореми 3.2 у поєднанні з тривіальним спостереженням що $i^{1/i} \to 1$ при $i \to \infty$. Доведення завершено.
Позначимо через $V_p(\zeta\,;[a,b])$ p-варіацію ζ на інтервалі [a,b]. Наступний результат демонструє що p-варіація ζ має скінченне математичне сподівання.
Твердження 4.5. Для кожного $p \in \widetilde{\mathcal{I}} \cap (0, 1]$ та $0 < a \le b$ маємо

$$\mathbf{E} V_p\big(\zeta\,; [a, b]\big) \le \big(\log(b/a)\big) \frac{2\mathbf{E}|Z_\infty|^p}{1 - \Phi(p)}. \tag{4.2}$$

Доведення. Зауважимо, що $\mathbf{E}|Z_\infty|^p$ скінченне згідно з твердженням 2.3.
Достатньо довести твердження для інтервалу [a/b, 1], де $0 <a<b$. Тоді властивість масштабної інваріантності дає бажаний результат для інтервалу [a,b]. Таким чином, припустимо, що $b = 1$ та $a \in (0, 1)$.
Процес $(\zeta(x))_{x\in(0,1]}$ має зліченну всюди щільну множину стрибків, що відбуваються в точках $(x_k)_{k\ge1}$, де індексація $(t_k,x_k,f_k)_{k\ge1}$ атомів $\mathcal{P}$ таке, що $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ та $x_k \in [0, 1]$ майже напевно.

Величина стрибка у точці $x_k \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, залежить від кількості ітерацій, застосованих перед f_k . Більш точніше,

$$\zeta(x_k) - \zeta(x_k-) \stackrel{d}{=} f^{1\uparrow(\theta_k+1)}(Z_\infty) - f^{1\uparrow\theta_k}(Z_\infty), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\theta_k := \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{x_j < x_k\}}$ і Z_∞ не залежить від $(f_j)_{j\leq k}$ та розподілена як $\zeta(x)$ для будь-якого x. Взявши математичне сподівання та використавши незалежність, отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\right|^p \mathbb{1}_{\{x_k>a\}} &\leq \mathbf{E}\big((\Phi(p))^{\theta_k}\mathbb{1}_{\{x_k>a\}}\big)\mathbf{E}\left|f(Z_\infty) - Z_\infty\right|^p \\ &\leq \mathbf{E}\big((\Phi(p))^{\theta_k}\mathbb{1}_{\{x_k>a\}}\big)2\mathbf{E}|Z_\infty|^p,\end{aligned}$$

де (4) було використано на останньому кроці. Оскільки x_k мають рівномірний розподіл на [0, 1],

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big((\Phi(p))^{\theta_k}\mathbb{1}_{\{x_k>a\}}\big) &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}(\Phi(p))^j\int_a^1 y^j(1-y)^{k-1-j}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^1 \big(1-y+y(\Phi(p))\big)^{k-1}\mathrm{d}y = \frac{(1-(1-(\Phi(p)))a)^k - (\Phi(p))^k}{k(1-(\Phi(p)))}.\end{aligned}$$

Звернемо увагу, що

$$\mathbf{E}\sum_{x_k\in[a,1]}\left|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\right|^p = (-\log a)\frac{2\mathbf{E}|Z_\infty|^p}{1-\Phi(p)}.$$

З огляду на субадитивність функції $t \to t^p$, з твердження 4.5 випливає, що повна варіація ζ на інтервалі [a,b] є p-інтегрованою з обмеженням на її p-ий момент, що задається правою частиною (4.2).

Для кожного $\varepsilon > 0$ множина $J := \{x > 0 : |\zeta(x) - \zeta(x-)| \geq \varepsilon\}$ стрибків розміром не менше ε є масштабно інваріантним точковим процесом на $(0,\infty)$. В дійсності, оскільки p-варіація ζ скінченна на будь-якому інтервалі [a,b], де $0 < a < b < \infty$, та достатньо малому $p > 0$, кількість точок в $J \cap [a,b]$ є скінченною майже напевно. Для $c > 0$, cJ – функціонал від $(\zeta(c^{-1}x))_{x>0}$, який збігається за розподілом з $(\zeta(x))_{x>0}$, таким чином, J є масштабно інваріантним.

4.3. Інтегрування за ζ

Оскільки процес ζ має скінченну повну варіацію, можна інтегрувати неперервні функції відносно ζ на проміжках, які не містять 0, в сенсі інтеграла Рімана-Стілтьєса. Для довільного $0 < a < b < \infty$ та неперервної $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ маємо

$$\int_{(a,b]} h(x)\,\mathrm{d}\zeta(x) = \sum_{x_k \in (a,b]} h(x_k)\big(\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big), \tag{4.3}$$

і ряд у правій частині збігається абсолютно майже напевно.

Наступне твердження показує, що можна також інтегрувати на інтервалі (0,b] за умови, що h задовольняє додаткову умову інтегрованості.

Твердження 4.6. Нехай $h : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ - неперервна функція, така, що $\int_0^1 |h(t)|^p t^{-1}\,\mathrm{d}t < \infty$ для деякого $p \in \widetilde{I} \cap (0, 1]$. Тоді границя $\int_{(0,1]} h(x)\,\mathrm{d}\zeta(x)$ з (4.3) при $a \downarrow 0$ існує майже напевно і в L^p.

Доведення. Достатньо показати, що

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{x_k \in (0,1]} \big|h(x_k)\big|\big|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big|\Big)^p < \infty. \tag{4.4}$$

Звідси одразу випливає, що

$$\sum_{x_k \in (0,1]} \big|h(x_k)\big|\big|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big| < \infty$$

майже напевно і, таким чином, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\sum_{x_k \in (a,1]} h(x_k)\big(\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big) \xrightarrow{\text{a.s.}} \sum_{x_k \in (0,1]} h(x_k)\big(\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big)$$

оскільки $a \downarrow 0$.

Більше того, з (4.4) випливає, що

$$\Big\|\int_{(a,1]} h(x)\,\mathrm{d}\zeta(x) - \int_{(0,1]} h(x)\,\mathrm{d}\zeta(x)\Big\|_p \le \mathbf{E}\Big(\sum_{x_k \in (0,a]} \big|h(x_k)\big|\big|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big|\Big)^p \to 0$$

при $a \downarrow 0$. Щоб довести (4.4), зауважимо, що субадитивність $t \to t^p$ дає таку нерівність:

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{x_k \in (0,1]} \big|h(x_k)\big|\big|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big|\Big)^p \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\big(\big|\zeta(x_k) - \zeta(x_k-)\big|^p \cdot \big|h(x_k)\big|^p\big).$$

Переконаємося, що ряд у правій частині збігається. Використовуючи ті ж обчислення, що і в (4.2), отримаємо

$$\mathbf{E}\big(\left|\zeta(x_k)-\zeta(x_k-)\right|^p\cdot\left|h(x_k)\right|^p\big)\le 2\mathbf{E}|Z_\infty|^p\mathbf{E}\big((\Phi(p))^{\theta_k}\left|h(x_k)\right|^p\big)$$
$$=2\mathbf{E}|Z_\infty|^p\int_0^1\big(1-y+y\Phi(p)\big)^{k-1}\left|h(y)\right|^p\,\mathrm{d}y.$$

Права частина виразу сумується до $\frac{2\mathbf{E}|Z_\infty|^p}{1-\Phi(p)}\int_0^1|h(y)|^p y^{-1}\,\mathrm{d}y$, що є скінченним за припущеннями. Зауважимо, що **E**$|Z_\infty|^p$ скінченне за твердженням 2.3, оскільки $\Phi(p)<1$ і **E**$|f(z_0)-z_0|^p<\infty$ зважаючи на (2).

Тепер перейдемо до інтегрування ζ відносно неперервних детермінованих функцій h. Найпростіший спосіб визначити такі інтеграли - це інтегрування частинами, тобто для $0<a<b$ і неперервної $h:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$,

$$\int_{(a,b]}\zeta(x)\,\mathrm{d}h(x):=\zeta(b)h(b)-\zeta(a)h(a)-\int_{(a,b]}h(x)\,\mathrm{d}\zeta(x)$$
$$=\zeta(b)h(b)-\zeta(a)h(a)-\sum h(x_k)\big(\zeta(x_k)-\zeta(x_k-)\big).\tag{4.5}$$

Теорема 4.7. За припущень твердження 4.6 і припущенні, що h неперервна, інтеграл $\int_{(a,b]}\zeta(x)\,\mathrm{d}h(x)$ збігається в L^p при $a\downarrow 0$ до границі, позначеної через $\int_{(0,1]}h(x)\,\mathrm{d}\zeta(x)$.

Доведення. Зважаючи на твердження 4.6 та означення (4.5), достатньо перевірити, що

$$\lim_{a\downarrow 0}\left|h(a)\right|^p\mathbf{E}\left|\zeta(a)\right|^p=0.$$

Це випливає з $\lim_{a\downarrow 0}|h(a)|=|h(0)|=0$ і **E**$|\zeta(a)|^p=$ **E**$|\zeta(1)|^p<\infty$, де скінченність забезпечується твердженням 2.3.

Зокрема, якщо $\Phi(p)<1$ для деякого $p\in(0,1]$, то $\int_0^1\zeta(x)\,\mathrm{d}x$ визначений в L^p.

Звідси випливає, що $\int_0^1\zeta(x)\,\mathrm{d}x$ конкретно визначений в L^p для всіх достатньо малих $p>0$.

Розділ 5. Марківська властивість

Припустимо, що знаючи $y=f(x)$, можна відновити значення аргументу $x\in\mathbb{R}$, а також реалізацію випадкової функції $f(\cdot)$ з розподілом ν. Припустимо, що ν має скінченний набір строго монотонних та неперервних функцій $h_1,...,h_m \in \mathcal{G}$, які задовольняють умову відокремлюваності. Це означає, що існує єдиний атрактор ітераційної системи функцій $\{h_1,h_2,...,h_m\}$, тобто непорожня компактна множина $\mathcal{K}$ така, що

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{m} h_i(\mathcal{K}),$$

і задовольняє додатково $h_i(\mathcal{K}) \cap h_j(\mathcal{K}) = \emptyset$ при $i \neq j$. Таким чином, для кожної точки $y \in \mathcal{K}$ можна знайти єдиний індекс i такий, що $y \in h_i(\mathcal{K})$, а отже, однозначно відновити детерміновану функцію h_i, яка є реалізацією f . Оскільки $h_1,...,h_m$ строго монотонні за припущенням, можна знайти єдине значення $x \in \mathcal{K}$ для якого $y = h_i(x) = f(x)$. Оскільки носій Z_∞, тобто границя ітерацій (3), рівний $\mathcal{K}$, то з події $\{Z_\infty = z\}$ можна однозначно визначити всю (детерміновану) послідовність $(g_n^z)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$, таку, що

$$z = \left(g^z\right)^{1\uparrow\infty}(z_0).$$

Типовим прикладом випадкового ліпшицевого відображення, що задовольняє наведену вище властивість, є згортки Бернуллі з $\lambda < 1/2$, див. приклад 1.1 та розділ 6.3 нижче, для яких

$$m = 2,\ h_1(x) = \lambda x,\ h_2(x) = \lambda x + 1,\ \nu(\{h_1\}) = \nu(\{h_2\}) = 1/2.$$

Мета цього розділу - показати, що процес $(\zeta(x))_{x>0}$, породжений випадковими функціями Ліпшиця f, які задовольняють властивість відновлення, є марківським, і обчислити відповідні генератори.

Позначимо через $\mathfrak{F}_{[a,b]}$ σ-алгебру, породжену $\zeta(x)$, $x \in [a,b]$, де $0 < a \le b \le \infty$. Через $\mathfrak{F}_a$ позначимо $\mathfrak{F}_{\{a\}}$. З властивості відновлення випливає, що $\mathfrak{F}_a$ дорівнює σ-алгебрі, породженій проекцією $\mathcal{P}_{[0,a]}$ на останню компоненту $\mathcal{G}$.

Теорема 5.1. Нехай кожному $z \in \operatorname{supp} Z_\infty$ (носій функції - замикання підмножини області визначення функції, де функція має ненульові значення) поставлено у відповідність унікальну послідовність $(g_n^z)_{n\in\mathbb{N}}$ з $\mathcal{G}$ така, що

$$z = \left(g^z\right)^{1\uparrow\infty}(z_0), \tag{5.1}$$

і для всіх $n \in \mathbb{N}$ відображення $z \mapsto g_n^z$ є вимірним як функція з $\mathbb{R}$ в $\mathcal{G}$. Тоді процес $(\zeta(x))_{x>0}$ є марківським як у прямому, так і у зворотному часі, тобто відносно фільтрації $(\mathfrak{F}_{(0,x]})_{x>0}$ або $(\mathfrak{F}_{[x,\infty)})_{x>0}$, відповідно.

Доведення. Покладемо x,u>0. На події $\{\zeta(x) = z\}$ ми знаємо проекцію $\mathcal{P}_{[0,x]}$ на $\mathcal{G}$, яка є послідовністю $(g_n^z)_{n\epsilon\mathbb{N}}$. σ-алгебра $\mathfrak{F}_{(0,x]}$ породжується сімейством послідовностей $(g_n^{\zeta(y)})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ з $y \leq x$. Зауважимо, що $(g_n^{\zeta(y)})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ є підпослідовністю $(g_n^{\zeta(y')})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ за умови, що $y \leq y'$.

Нехай $\kappa_0 := 0$ і покладемо

$$\kappa_{k+1} := \min\{i > \kappa_k : x_i \leq x\}, \quad k \geq 0,$$

де $(t_k,x_k,f_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ - нумерація атомів з $\mathcal{P}_{[0,x+u]}$ така, що $(t_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ є зростає майже напевно. Маємо

$$\zeta(x+u) = \lim_{n\to\infty} f^{(1)} \circ f_{\kappa_1} \circ \cdots \circ f^{(n)} \circ f_{\kappa_n}(z_0), \tag{5.2}$$

$f_{\kappa k} = g_k^{\zeta(y)}$ та

$$f^{(k)}(z) := f_{(x,x+u]}^{(\kappa_{k-1}+1)\uparrow(\kappa_k-1)}(z), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що $\mathcal{P}_{(x,x+u]}$ не залежить від $\mathcal{P}_{[0,x]}$ за пуассонівською властивістю і $(\kappa_k - \kappa_{k-1})_{k\epsilon\mathbb{N}}$ є незалежними випадковими величинами з геометричним розподілом, які також не залежать від $\mathfrak{F}_{(0,x]}$. Таким чином, $\zeta(x + u)$ визначається за $\zeta(x)$ та $\mathcal{P}_{(x,x+u]}$, тому умовний розподіл $\zeta(x + u)$ при фіксованій $\mathfrak{F}_{(0,x]}$, збігається з умовним розподілом при фіксованій $\mathfrak{F}_x$.

Доведемо тепер марківську властивість у зворотному часі. На події $\{\zeta(x) = z\}$ і при $y \leq x$ маємо $\zeta(y) = (g_y^z)^{1\uparrow\infty}(z_0)$, де $g_{i,y}^z$ та g_j^z мають однакові розподіли з ймовірністю y/x, або є тотожною функцією з ймовірністю 1 - y/x. Іншими словами, $\zeta(y)$ є функцією від $(g_n^z)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ та $\mathcal{P}_{[0,x]}$. Ми отримуємо марківську властивість у зворотному часі через те, що $\zeta(x)$ визначає послідовність $(g_n^z)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ і з властивостей незалежності пуассонівського процесу.

Умовний розподіл $\zeta(x +u)$ на події $\{\zeta(x) = z\}$ можна визначити так. Нехай $(g_n^z)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ - послідовність, відновлена зі значення $\{\zeta(x) = z\}$. З огляду на (5.2), $\zeta(x + u)$ для $u > 0$ можна отримати, вставляючи між кожною послідовною парою функцій у нескінченній ітерації $z = \zeta(x) = g_1^z \circ g_2(z) \circ\cdots\circ g_n^z \circ\cdots$, незалежну копію відображення $f^{(k)}$, що складається з геометричного числа незалежних копій f. Вищезгадані геометричні випадкові величини набувають значень з $\{0, 1, 2,...\}$, є незалежними і мають однаковий параметр $u/(x + u)$. Аналогічно можна визначити умовний розподіл $\zeta(y)$ при умові $\{\zeta(x) = z\}$, де $x \ge y$, видаливши кожну з функцій g_n^z незалежно від інших з ймовірністю $1 - y/x$.

Дотримуючись припущення теореми 5.1, знаходимо генератор однорідного в часі марківського процесу $\tilde{\zeta}(t) := \zeta(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Цей генератор в прямому та зворотньому часі визначається границею

$$(\mathsf{A}_{\uparrow}h)(z) := \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\left[\mathbf{E}\left(h\left(\zeta\left(e^{t+\delta}\right)\right)|\zeta\left(e^{t}\right) = z\right) - h(z)\right],$$

$$(\mathsf{A}_{\downarrow}h)(z) := \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\left[\mathbf{E}\left(h\left(\zeta\left(e^{t-\delta}\right)\right)|\zeta\left(e^{t}\right) = z\right) - h(z)\right]$$

для всіх функцій h з їхніх областей визначення.

Обчислюємо наведені вище генератори за додаткових припущень:

$$L_f \le c_f \text{ для деякої невипадкової сталої } c_f < 1 \text{ і } Z_\infty \text{ має компактний носій.} \quad (5.3)$$

Наведене вище припущення виконується, наприклад, для згорток Бернуллі.

Твердження 5.2. Нехай f має властивість відновлення і виконується (5.3). Тоді для $h \in C^1(\mathrm{supp}\, Z_\infty)$ має місце

$$(\mathsf{A}_{\uparrow}h)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathbf{E}h\left(\left(g^z\right)^{1\uparrow k} \circ f \circ \left(\left(g^z\right)^{1\uparrow k}\right)^{-1}(z)\right) - h(z)\right], \quad z \in \mathrm{supp}\, Z_\infty, \tag{5.4}$$

і також

$$(\mathsf{A}_{\downarrow}h)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[h\left(\left(g^z\right)^{1\uparrow(k-1)} \circ \left(g_k^z\right)^{-1} \circ \left(\left(g^z\right)^{1\uparrow(k-1)}\right)^{-1}(z)\right) - h(z)\right], \quad z \in \mathrm{supp}\, Z_\infty, \tag{5.5}$$

де $(g_j^z)_{i\in\mathbb{N}}$ - послідовність детермінованих функцій, яка визначається у єдиний спосіб за допомогою $z \in \mathrm{supp}\, Z_\infty$.

Доведення твердження 5.2 наведено в Додатку.

Розділ 6. Випадкові ряди, породжені лінійним рекурсіями та нескінченні згортки Бернуллі.

6.1. Моменти та коваріація

Нехай $f(z) = Mz + Q$, де (M,Q) - випадковий вектор в $\mathbb{R}^2$, таким чином $L_f = M$. Ітерації незалежних однаково розподілених копій афінних відображенн $z \mapsto Mz + Q$ називаються випадковими рядами, породженими лінійними рекурсіями (англ. perpetuities). Ми припускаємо, що

$$\mathbf{P}\{Mx + Q = x\} < 1 \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Припустимо, що $\mathbf{E}|M| < 1$ і $\mathbf{E}Q < \infty$. Тоді $\zeta(A)$ є інтегровною і

$$\mathbf{E}\zeta(A) = \frac{\mathbf{E}Q}{1 - \mathbf{E}M}.$$

Якщо $\mathbf{E}M^2 < 1$ і $\mathbf{E}Q^2 < \infty$, то $\zeta(A)$ є квадратично інтегровною для всіх $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$, див. [4, т. 1.4] і твердження 3.3, а загальний вираз коваріації можна знайти використовуючи (2.3). Додатково припускаючи, що $\mathbf{E}Q = 0$ та незалежність M і Q, отримаємо

$$\mathbf{E}\big(\zeta(A_1)\zeta(A_2)\big) = \frac{\mathbf{E}Q^2\mu(A_1 \cap A_2)}{(1 - \mathbf{E}M)\mu(A_2 \cup A_1) + (\mathbf{E}M - \mathbf{E}M^2)\mu(A_1 \cap A_2)}.$$

З цього ми робимо висновки, що

$$\mathbf{E}\zeta(A)^2 = \frac{\mathbf{E}Q^2}{1 - \mathbf{E}M^2},$$

та

$$\mathbf{E}\big(\zeta(A_1) - \zeta(A_2)\big)^2 = \frac{2\mathbf{E}Q^2(1 - \mathbf{E}M)\mu(A_1 \triangle A_2)}{(1 - \mathbf{E}M^2)((\mathbf{E}M - \mathbf{E}M^2)\mu(A_1 \cap A_2) + (1 - \mathbf{E}M)\mu(A_1 \cup A_2))}.$$

Таким чином, ζ неперервна в L^2 відносно збіжності аргументу за мірою. Відтепер вважатимемо, що $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$, а $\zeta(x) = \zeta([0,x])$. Тоді

$$\mathbf{E}\big(\zeta(x)\zeta(y)\big) = \frac{x\mathbf{E}Q^2}{(1 - \mathbf{E}M)y + (\mathbf{E}M - \mathbf{E}M^2)x}, \quad x \le y.$$

При експоненціальній зміні часу отримуємо стаціонарний процесу $\tilde{\zeta}(s) = \zeta(e^s)$, $s \in \mathbb{R}$, з коваріацією

$$\mathbf{E}\big(\tilde{\zeta}(0)\tilde{\zeta}(s)\big) = \frac{a}{ce^{|s|}+1},$$

де a > 0 та c > 1. Зауважимо, що коваріація не диференційована в нулі, тому процес не є L^2-диференційованим.

Якщо M та Q є незалежними, але Q не є центрованим, то

$$\mathbf{E}\big(\zeta(x)\zeta(y)\big) = \frac{1}{1-\mathbf{E}M}\cdot\frac{\mathbf{E}Q^2(1-\mathbf{E}M)+(2\mathbf{E}M-1)(\mathbf{E}Q)^2+(\mathbf{E}Q)^2(y/x)}{(1-\mathbf{E}M)(y/x)+\mathbf{E}M-\mathbf{E}M^2}. \tag{6.2}$$

Вираз прямує до $(\mathbf{E}Q)^2/(1 - \mathbf{E}M)^2$ при $y/x \to \infty$, це також означає, що кореляція між ζ(x) та ζ(y) прямує до 0, у випадку якщо $y/x \to \infty$.

6.2. Випадок скінченного інтервалу

Розглянемо тепер ітерації f(z) = Mz + Q на скінченному інтервалі (0, 1], як описано в розділі 3.

Рівняння (3.3) можна записати у вигляді

$$\big(\zeta(x)\big)_{x\in(0,1]} \overset{\text{f.d.}}{=} \big((M\mathbb{1}_{\{U\le x\}}+\mathbb{1}_{\{U>x\}})\zeta(x)+Q\mathbb{1}_{\{U\le x\}}\big)_{x\in(0,1]}.$$

Процес ζ(x) можна також подати у вигляді збіжного майже напевно функціонального ряду

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty} M'_{1,x}\cdots M'_{n-1,x}Q'_{n,x},\quad x\in(0,1],$$

де

$$M'_{n,x} := M_n\mathbb{1}_{\{U_n\le x\}}+\mathbb{1}_{\{U_n>x\}} = M_n^{\mathbb{1}_{\{U_n\le x\}}},\qquad Q'_{n,x} := Q_n\mathbb{1}_{\{U_n\le x\}},\quad n\ge 1, x\in(0,1].$$

Якщо M = λ ∈ (0, 1) фіксоване, то

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{\mathbb{1}_{\{U_1\le x\}}+\cdots+\mathbb{1}_{\{U_{n-1}\le x\}}}Q_n\mathbb{1}_{\{U_n\le x\}} =: \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{T_{n-1}(x)}Q_n\mathbb{1}_{\{U_n\le x\}},$$

де $T_n(x) := n\widehat{F}_n(x)$, with $\widehat{F}_n(x)$ - стандартна емпірична функція розподілу для вибірки $\{U_1,\ldots,U_n\}$. Якщо Q_1 є гаусівським, то сума також має гаусівський розподіл. Нагадаємо, що розподіл ζ(x) не залежить від x > 0.

Отримаємо альтернативне представлення для ζ(x). Покладемо

$$S_n(x) := \inf\left\{k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\{U_j \le x\}} = n\right\} = \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k(x) = n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і зауважимо, що $\{T_{k-1}(x) = j, U_k \le x\} = \{S_{j+1}(x) = k\}$ для всіх $j \ge 0$ та $k \in \mathbb{N}$. Таким чином,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{T_{n-1}(x)} Q_n \mathbb{1}_{\{U_n \le x\}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \mathbb{1}_{\{T_{n-1}(x)=j\}} Q_n \mathbb{1}_{\{U_n \le x\}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \mathbb{1}\{S_{j+1}(x) = n\} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j Q_{S_{j+1}(x)}.$$

Підсумовуючи, отримуємо

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} Q_{S_j(x)}, \quad x \in (0,1]. \tag{6.3}$$

Зауважимо, що $S_n(x)$ розподілена як суму n незалежних геометрично розподілених випадкових величин на $\{1, 2,...\}$ з ймовірністю успіху x.

6.3. Згортки Бернуллі

Якщо $M = \lambda \in (0, 1)$ і Q набуває значень 0 і 1 з однаковою ймовірністю, то $\zeta(x) = \zeta([0,x])$ є згорткою Бернуллі для всіх $x > 0$, див. [7]. За (6.2),

$$\mathbf{E}\big(\zeta(x)\zeta(y)\big) = \frac{x+y}{4(1-\lambda)^2(y+\lambda x)}, \quad x \le y.$$

Якщо $\lambda < 1/2$, то розподіл $\zeta(x)$ і скінченновимірні розподіли процесу ζ є сингулярними.

Якщо $\lambda = 1/2$, то $\zeta(x)$ має рівномірний розподіл на [0, 2] для всіх x. Позначимо через $\mu_{BC,1/2}^{(x)}$ сумісний розподіл $(\zeta(x),\zeta(1))$ для $\lambda = 1/2$. Симуляція розподілу $\mu_{BC,1/2}^{(0.8)}$ показана на рис. 1, на якому продемонстровано, що $\mu_{BC,1/2}^{(x)}$ є сингулярним для $x \in (0, 1)$.

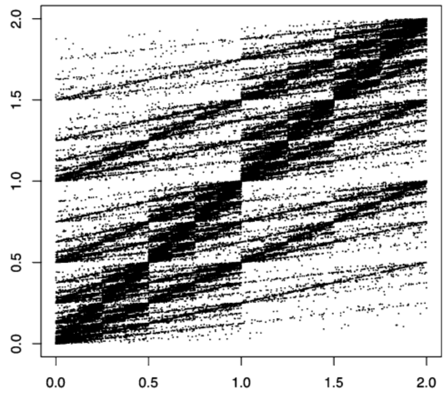

Рисунок 1. Змодельована вибірка значень для $(\zeta(0.8),\zeta(1))$ для згорток Бернуллі.

Ймовірнісна міра $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ є інваріантною мірою для ітерацій системи афінних на $\mathbb{R}^2$ функцій

$$g_i(z) := \widehat{\mathbf{M}}_i z + \widehat{\mathbf{Q}}_i,\ i = 1, \ldots, 4,$$

де

$$\widehat{\mathbf{M}}_1 = \widehat{\mathbf{M}}_2 := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\mathbf{M}}_3 = \widehat{\mathbf{M}}_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

та

$$\widehat{\mathbf{Q}}_1 := (1,1), \qquad \widehat{\mathbf{Q}}_2 := (0,0), \qquad \widehat{\mathbf{Q}}_3 := (0,1), \qquad \widehat{\mathbf{Q}}_4 := (0,0).$$

Відповідні ймовірності $p_1 = p_2 := x/2$, $p_3 = p_4 := (1 - x)/2$ (6.4)

визначають ймовірнісну міру на $\{1,\ldots, 4\}$, а потім добуток мір m на $\{1,\ldots, 4\}^{Z}$.

Тоді $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ є образом m під дією відображення

$$\{1,\ldots,4\}^{\mathbb{Z}_+} \ni (i_0, i_1, \ldots) \mapsto \lim_{n\to\infty} (\widehat{\mathbf{Q}}_{i_0} + \widehat{\mathbf{M}}_{i_0}\widehat{\mathbf{Q}}_{i_1} + \cdots + \widehat{\mathbf{M}}_{i_0} \cdots \widehat{\mathbf{M}}_{i_{n-1}}\widehat{\mathbf{Q}}_{i_n}).$$

Наведена вище система афінних відображень g_1, g_2, g_3, g_4 має самоперетини, наприклад, $g_1 \circ g_3 \circ g_3 \circ g_1 = g_3 \circ g_1 \circ g_1 \circ g_3$.

Верхня експонента Ляпунова рівна

$$\lambda_1(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{\mathbf{M}}_{i_1} \cdots \widehat{\mathbf{M}}_{i_n}\| = -x \log 2,$$

де збіжність виконується для m майже всіх послідовностей $(i_1,i_2,\ldots)$ за посиленим законом великих чисел. Оскільки верхня експонента Ляпунова від'ємна, то ітераційна система функцій є стискаючою в середньому. За означенням, це границя

$$\dim_{\mathrm{loc}}\left(\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}, z\right) := \lim_{r\downarrow 0}\frac{\log \mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}(B_r(z))}{\log r}, \tag{6.5}$$

яка визначає локальну розмірність $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ в точці z, існує і приймає те саме значення для $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ майже всіх z. Більше того, це спільне значення збігається з розмірністю Хаусдорфа $\dim_H \mu^{(x)}_{BC,1/2}$.

Тут $B_r(z)$ - евклідова куля радіуса r з центром у точці z. Формула розмірності Фенга [8, т. 1.3], застосовується у цьому випадку і дає

$$\dim_{\mathrm{H}}\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2} = \frac{h_1 - h_0}{\lambda_1(x)} + \frac{h_2 - h_1}{\lambda_2}, \tag{6.6}$$

де $\lambda_2 = -\log 2$ – друга експонента Ляпунова, а h_0, h_1, h_2 - (умовні) ентропії системи.

$$h_0 = -x \log x - (1 - x)\log(1 - x) + \log 2 := I(x) + \log 2$$

є безумовною ентропією розподілу (6.4). Хоча точне обчислення h_2 є складною комбінаторною задачею, h_1 можна визначити, помітивши, що перший доданок у (6.6) дорівнює розмірності інваріантної міри ітерацій одновимірної системи функцій x/2+1, x/2, x, x з ймовірностями (6.4). Ця інваріантна міра має рівномірний розподіл на [0, 2], тоді $h_1 = h_0 - x \log 2$. Так як $h_2 \geq 0$, отримаємо

$$1 \leq \dim_{\mathrm{H}}\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2} \leq \min\left(2, 2 - x + I(x)/\log 2\right). \tag{6.7}$$

Верхня границя випливає з обчислення розмірності Ляпунова ітеративної системи функцій, див. [11]. Зауважимо, що права частина (6.7) менша ніж 2 тоді і тільки тоді, коли $x \in (x^*, 1)$, де $x^* \approx 0.772908$ - найменший додатний корінь рівняння $I(x) = x \log 2$. Таким чином, $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ є сингулярним при $x>x^*$. Якщо x = 0.8, то верхня границя дорівнює ≈ 1.92, що підтверджує сингулярність розподілу, що відповідає рисунку 1. Ми припускаємо, що $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ є сингулярною для всіх $x \in (0, 1)$.

Теорема 6.1. Локальна розмірність $\mu^{(x)}_{BC,1/2}$ розподілу (ζ(x),ζ(1)) у схемі згорток Бернуллі з λ = 1/2 дорівнює

$$\dim_{\mathrm{loc}}\left(\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}, z\right) = 2 - \frac{\log(1+x)}{\log 2} \tag{6.8}$$

для довільного двійково-раціонального $z := (z_1,z_2) \in [0, 2]^2$ такого, що розклад z_1 є підрядком бінарного розкладу z_2.

Доведення перенесено у Додаток.

Оскільки множина двійково-раціональних точок в $[0, 2]^2$ має $\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}$ -міру нуль, теорема 6.1 не дозволяє зробити висновок, що розмірність μ задається (6.8). Ми залишимо сильніший варіант цього твердження як гіпотезу.

Припущення 6.2. $\dim_{\mathrm{H}}\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2} = 2 - (\log(1+x)) /\log 2$.

Теорема 6.3. Розмірність $\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}$ розподілу $(\zeta(x),\zeta(1))$ у схемі згорток Бернуллі з $\lambda = 1/2$ задовольняє

$$\dim_{\mathrm{H}}\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2} \geq 2 - \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Доведення перенесено у Додаток.

Розділ 7. Приклади

Приклад 7.1. Нехай $f(x) \equiv Q$ для деякої випадкової величини Q, розподіл якої позначимо через $\mathbf{P}_Q$. Зауважимо, що цей випадок відноситься до вироджених випадкових рядів, породжених лінійною рекурсією, в якому M = 0 майже напевно. Припустимо, що $\mathcal{X}$ лежить на проміжку $[0,\infty)$ з мірою Лебега μ.

Процес $\mathcal{P}$ можна розглядати як маркований пуассонівський процес на $[0,\infty)^2$ з одиничною інтенсивністю і мітками, які є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами (Q_k) з розподілом P_Q, які також не залежать від положення точок у $\mathcal{P}$. Нехай $(t_k,x_k)_{k\in Z}$ - множина нижніх лівих рекордів $\mathcal{P}$ така, що (t_0,x_0) і (t_1,x_1) розділені бісектрисою x = t.

$(\zeta(x))_{x>0}$ можна записати наступним чином

$$\zeta(x) = Q_{\inf\{n\in\mathbb{Z}: x_n \leq x\}}, \quad x > 0.$$

Тобто, $\zeta(x) = Q_i$, якщо $x \in (x_{i-1},x_i]$, $i \in \mathbb{Z}$. Точки стрибків $(x_k)_{k\in Z}$ утворюють мастабно інваріантний пуассонівський точковий процес, див., наприклад, [9, тв. 2]. Після експоненційної зміни часу отримаємо процес $(\tilde{\zeta}(s))_{s\in\mathbb{R}} = (\zeta(e^s))_{s\in\mathbb{R}}$, який приймає незалежні однаково розподілені значення з розподілом P_Q між точками стандартного двостороннього пуассонівського процесу на $\mathbb{R}$ з одиничною інтенсивністю.

Приклад 7.2. Припустимо, що $f(z) = \max(1, e^{\xi} z)$, де $\mathbf{E}\xi < 0$. Тоді $L_f = \min(1, e^{\xi})$. Ітерації назад збігаються майже напевно до випадкової величини e^Y, яка задовольняє рівнянню Ліндлі $Y \overset{\text{def}}{=} \max(0, \xi + Y)$ з теорії масового обслуговування. Добре відомо, що Y має розподіл

$$\sup_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j} \xi_i ,$$

де $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ - незалежні однаково розподілені копії ξ . Іншими словами, $\zeta(x)$ є супремумом випадкового блукання з від'ємним зносом (тенденція процесу рухатися в певному напрямку або до певного значення з плином часу через систематичне зміщення або дисбаланс в основній динаміці процесу). Для відповідного процесу $(\zeta(x))_{x \in (0,1]}$ маємо

$$\zeta(x) = \sup_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j} \xi_i \mathbb{1}_{\{U_i \geq x\}}, \quad x \in (0, 1],$$

де $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ - незалежні однаково розподілені на [0, 1] випадкові величини, незалежні від $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Приклад 7.3. Нехай $f(z) = 1/(z + \xi)$, де ξ - додатна випадкова величина і $z \geq 0$. Ітерації породжують випадкові ланцюгові дроби, див. [13]. Константа Ліпшиця f дорівнює $L_f = \xi^{-2}$, тому (1) і (2) виконуються, якщо $\mathbf{E}\xi^{-2} < \infty$ і $\mathbf{E}\log \xi > 0$. Якщо ξ мають гамма-розподіл, то ітерації назад збігаються майже напевно, а границя $\zeta(x)$ має обернений нормальний розподіл. Таким чином, отримуємо стохастичний процес, всі одновимірні граничні значення мають обернений гаусівський розподіл. Якщо ξ набуває значень в $\mathbb{N}$, то можна в єдиний спосіб відновити послідовність ітерацій, знаючи її границі, тому з теореми 6.1 випливає марківська властивість процесу $(\zeta(x))_{x>0}$.

На останок можна додати що, більшість наведених результатів є справедливими для функцій Ліпшиця, які набувають значень у довільному повному сепарабельному метричному просторі. Тоді отримуємо індексовані множинами функції, які приймають значеннями в цьому просторі.

Модифікувати схему просіювання можна різними способами. Наприклад, нехай $\mathcal{P}$ - пуассонівський процес $\{(x_i,f_i)\}$ в $\mathbb{R}^d$, маркований незалежними однаковими розподіленими випадковими функціями Ліпшиця, що задовольняють (1) і (2). Для кожної точки $x \in \mathbb{R}^d$ впорядкуємо точки процесу $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ згідно з їх відстанню до x та застосуємо ітерації назад відповідних функцій. В результаті отримуємо випадкове поле, індексоване $\mathbb{R}^d$, одновимірні розподіли якого є ідентичними і який є масштабно інваріантним.

Для ще однієї альтернативної конструкції, нехай $\mathcal{P}$ - пуассонівський процес $\{(s_i,t_i,f_i)\}$ у $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{G}$. Покладемо $a > 0$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$ розглянемо точки (s_i,t_i) такі, що $|x - s_i| \leq at_i$. Впорядкуємо ці точки за збільшенням другої координати t_i і нехай $\zeta(x)$ є границею ітерацій назад відповідних функцій.

Висновок

Під час виконання роботи був проведений аналіз наукової та навчальної літератури з теми просіювання випадкових ітеративних систем. В рамках даної теми були розглянуті ключові проблеми, а також проведено дослідження, що привели до формулювання і підтвердження вагомих результатів в даній теорії.

Було досліджено схему просіювання ітераційних функцій, яка генерується допоміжним пуассонівським точковим процесом. В результаті ми отримали стохастичний процес, індексований множинами. Було проаналізовано властивості розподілів цього процесу, а саме показано, що граничний процес ζ є càdlàg і має скінченну повну варіацію на будь-якому обмеженому інтервалі, відділеному від нуля. У роботі багато уваги приділено властивостям окремих просіяних систем, зокрема, досліджено випадкові ряди, породжені лінійними рекурсіями, нескінченні згортки Бернуллі, ітерації максимуму та випадкові неперервні дроби.

Список використаних джерел:

[1] Alexander Marynych. Ilya Molchanov. "Sieving random iterative function systems." Bernoulli 27 (1) 34 - 65, February 2021. https://doi.org/10.3150/20-BEJ1221

[2] Alsmeyer, G. and Fuh, C. (2002). Corrigendum to: “Limit theorems for iterated random functions by regenerative methods”. Stochastic Process. Appl. 97 341–345. MR1875338

[3] Alsmeyer, G. and Fuh, C.-D. (2001). Limit theorems for iterated random functions by regenerative methods. Stochastic Process. Appl. 96 123–142. MR1856683 https://doi.org/10.1016/S0304-4149(01)00104-1

[4] Alsmeyer, G., Iksanov, A. and Rösler, U. (2009). On distributional properties of perpetuities. J. Theoret. Probab. 22 666–682. MR2530108 https://doi.org/10.1007/s10959-008-0156-8

[5] Diaconis, P. and Freedman, D. (1999). Iterated random functions. SIAM Rev. 41 45–76. MR1669737 https://doi.org/10.1137/S0036144598338446

[6] Dümbgen, L. (2017). Empirische Prozesse. Lecture Notes. Available at https://ilias.unibe.ch/goto_ilias3__unibe_cat_915738.html.

[7] Erdös, P. (1940). On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions. Amer. J. Math. 62 180–186. MR0000858 https://doi.org/10.2307/2371446

[8] Feng, D.-J. (2019). Dimension of invariant measures for affine iterated function systems. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1901.01691. Sieving random iterative function systems 65

[9] Gnedin, A.V. (2008). Corners and records of the Poisson process in quadrant. Electron. Commun. Probab. 13 187–193. MR2399280 https://doi.org/10.1214/ECP.v13-1351

[10] Goldie, C.M. and Maller, R.A. (2000). Stability of perpetuities. Ann. Probab. 28 1195–1218. MR1797309 https://doi.org/10.1214/aop/1019160331

[11] Hochman, M. and Rapaport, A. (2019). Hausdorff dimension of planar self-affine sets and measures with overlaps. Preprint avialable at https://arxiv.org/abs/1904.09812.

[12] Khinchin, A.Ya. (1997). Continued Fractions, Russian ed. Mineola, NY: Dover. With a preface by B. V. Gnedenko, Reprint of the 1964 translation. MR1451873

[13] Letac, G. and Seshadri, V. (1983). A characterization of the generalized inverse Gaussian distribution by continued fractions. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 62 485–489. MR0690573 https://doi.org/10.1007/BF00534200

[14] Vapnik, V.N. (1998). Statistical Learning Theory. Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control. New York: Wiley. A Wiley-Interscience Publication. MR1641250

Додаток

У Додатку ми збираємо доведення та приклади, пропущені в основному тексті.

Наведені нижче Теорема А.1 та Твердження А.2 доведені в роботі [5], див.

твердження 5.1 та теорему 5.1.

Теорема А.1. Нехай (S,ρ) - повний сепарабельний метричний простір. Нехай $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ - сімейство ліпшицевих функцій на S, а μ - розподіл ймовірностей на Θ. Припустимо, що $\int K_\theta\, \mu(d\theta) < \infty$, $\int \rho[f_\theta(x_0), x_0]\mu(d\theta) < \infty$ для деякого $x_0 \in S$, і $\int \log K_\theta \mu(d\theta) < 0$. Тоді

1) Індукований ланцюг Маркова має єдиний стаціонарний розподіл π;
2) $\rho[P_n(x,\cdot),\pi] \leq A_x r^n$ для сталих A_x та r $(0 < A_x < \infty$ та $0 < r < 1)$;
3) Стала r не залежить від n або x; стала A_x не залежить від n; $A_x < a + b\rho(x,x_0)$, де $0 < a, b < \infty$.

Ключовим кроком у доведенні теореми А.1 є доведення збіжності ітерацій назад $Y_{n+1} = (f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} \circ \cdots \circ f_{\theta_{n+1}})(x_0)$.

Твердження А.1. За умов регулярності теореми 1.1 ітерації назад майже напевно збігаються до границі з експоненціальною швидкістю. Границя має єдиний стаціонарний розподіл π.

Доведення:

Теорема 5.1 [5] Нехай μ - ймовірність на функціях Ліпшиця. Зафіксуємо ймовірнісну міру μ на X та опорну точку $x_0 \in S$. Нехай виконуються умови:

$f \to K_f$ та $f \to \zeta(f) = \rho[f(x_0), x_0]$ мають алгебраїчний хвіст (кінцеву частину розподілу) відносно μ. (7.1)

Припустимо також, що

$$\int_{\mathcal{X}} \log K_f \, \mu(df) < 0; \tag{7.2}$$

інтеграл може бути рівним -∞. Розглянемо марківський ланцюг на S, який рухається згідно з μ. Нехай виконується $P_n(x,dy)$ (після n кроків починаючи з x).

1. Існує унікальна інваріантна ймовірність π.
2. Існує додатна, скінченна стала A_x та $r \in (0,1)$ така, що $\rho[P_n(x,\cdot),\pi] \leq A_x r^n$ для всіх n =1,2,...та $x \in S$.
3. Стала r не залежить від n або x; стала A_x не залежить від n, та $A_x < a + b\rho(x,x_0)$, де $0 < a, b < \infty$.

Твердження 5.1 [5] Припустимо виконуються (7.1) та (7.2). Визначимо зворотний процес $\{Y_n(x)\}$ через $Y_n(x) = (f1 \circ f2 \circ \text{---} \circ f_n)(x)$. Тоді $Y_n(x)$ збігається з геометричною швидкістю до випадкової границі при n →∞, яка не залежить від початкової точки x.

Суть полягає в тому, що зворотні ітерації збігаються з геометричною швидкістю до границі, яка залежить від функції, а не від початкової точки.

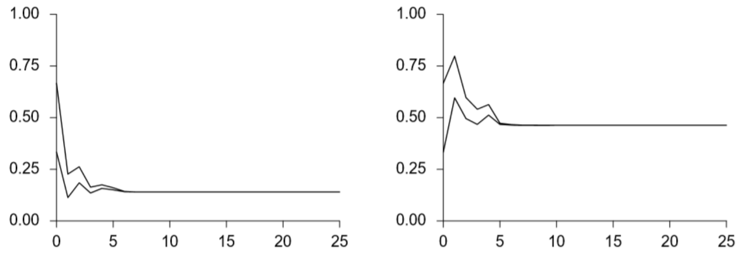

Рис. 2 Зворотні ітерації швидко збігаються до границі, яка є випадковою, та не залежить від початкового стану.

Ліва панель Рисунка 2 показує ітерацію назад, що починається з x_0 =1 /3 або x_0 =2 /3. Для генерації обох шляхів використовуються абсолютно однакові функції, єдиною відмінністю є початкова точка. Шляхи збігаються при n = 7. На правій панелі показано те ж саме, але з новим набором випадкових функцій, де показано, що збіжність ще швидша. Натомість ітерація вперед не сходиться, а ергодично блукає у просторі станів, це зображено на рис. 3.

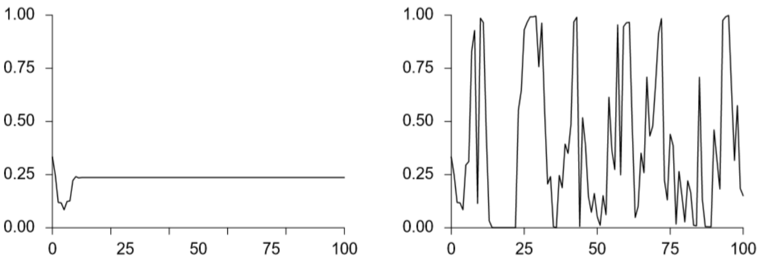

Рис.3 Ліва панель показує збіжність зворотного процесу; права панель показує ергодичну поведінку процесу.

На рис. 4 зображено логарифм абсолютної різниці між траєкторіями на відповідних панелях рисунка 2. Лінійний спад на логарифмічній шкалі відповідає експоненціальному спаду на вихідній шкалі. Різниця в нахилах між двома панелями пояснюється випадковістю у виборі функцій; ця різниця зменшується зі збільшенням кількості ітерацій.

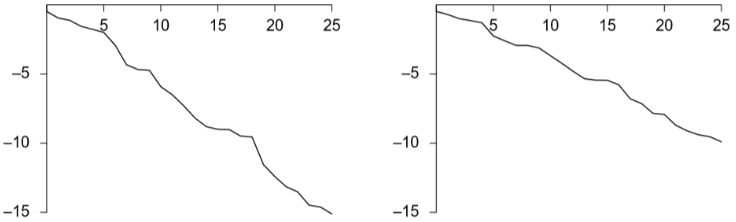

Рис. 4. Логарифм за основою 10 абсолютної різниці між траєкторіями у ітерації назад.

Доведення твердження 5.2

Доведемо (5.4), доведення (5.5) відбувається аналогічно. Впорядкуємо всі точки $\mathcal{P}_{[0,x+\delta]}$ за часом їх появи t_i. З формули (5.1) випливає, що умовно на $\{\zeta(e^t) = z\}$ випадкова величина $\zeta(e^{t+\delta})$ розподілена наступним чином

$$\lim_{n\to\infty}\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f_1\circ\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow(\tau_2-1)}\circ f_2\circ\cdots\circ\left(g^z\right)^{\tau_{n-1}\uparrow(\tau_n-1)}\circ f_n(z_0),$$

де

$$\tau_0 := 0, \qquad \tau_n := \min\left\{i > \tau_{n-1} : x_i \in (e^t, e^{t+\delta}]\right\}, \quad n\in\mathbb{N},$$

та $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими копіями f. Зауважимо, що $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими і $P\{\tau_1 = j\} = e^{-\delta(j-1)}(1 - e^{-\delta})$, $j \in \mathbb{N}$. На першому кроці ми покажемо, що можна знехтувати $f_2, f_3, \ldots$, які були вставлені після $g^z_{\tau_1}$, тобто

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}\Big(h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f_1\circ\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow(\tau_2-1)}\circ f_2\circ\cdots\circ\left(g^z\right)^{\tau_{n-1}\uparrow(\tau_n-1)}\circ f_n\circ\cdots(z_0)\Big)$$
$$-h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f_1\circ\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow\infty}(z_0)\Big)\Big)=0.$$

Використовуючи той факт, що h' неперервна, а отже, обмежена на компактній множині supp Z_∞, отримуємо за допомогою теореми про середнє значення для диференційовних функцій

$$\Big|h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f_1\circ\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow(\tau_2-1)}\circ f_2\circ\cdots\circ\left(g^z\right)^{\tau_{n-1}\uparrow(\tau_n-1)}\circ f_n\circ\cdots(z_0)\Big)$$
$$-h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f_1\circ\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow\infty}(z_0)\Big|\le \mathrm{const}\cdot c_f^{\tau_2}.$$

Оскільки $\delta^{-1}\,\mathbf{E}c_{\boldsymbol{f}}^{\tau_2} = \delta^{-1}(\mathbf{E}c_{\boldsymbol{f}}^{\tau_1})^2 \to 0$ при $\delta\downarrow 0$, то генератор має вигляд

$$\begin{aligned}(\mathsf{A}_\uparrow h)(z) &= \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\Big[\mathbf{E}h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f_1\circ\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow\infty}(z_0)\Big)-h(z)\Big]\\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\Big[\mathbf{E}h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\circ f\circ\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\Big)^{-1}(z)\Big)-h(z)\Big]\\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\mathbf{E}h\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow k}\circ f\circ\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow k}\Big)^{-1}(z)\Big)-h(z)\Big]e^{-\delta k}(1-e^{-\delta}),\end{aligned} \tag{7.3}$$

де для другої рівності ми використали

$$\left(g^z\right)^{\tau_1\uparrow\infty}(z_0)=\Big(\left(g^z\right)^{1\uparrow(\tau_1-1)}\Big)^{-1}(z).$$

Використовуючи нерівність

$$\mathbf{E}h\left(\left(g^{z}\right)^{1\uparrow k}\circ f\circ\left(\left(g^{z}\right)^{1\uparrow k}\right)^{-1}(z)\right)-h(z)\le\mathrm{const}\cdot c_{f}^{k},\quad k\ge 0,$$

за теоремою про мажоровану збіжність ми можемо поміняти місцями суму та границю у правій частині (7.3). На цьому доведення (5.4) завершено.

Марковські процеси, породжені згортками Бернуллі

Процес $(\zeta(x))_{x>0}$, породжений відображенням $f(x) = \lambda x + Q$ де $\lambda \in (0, 1/2)$ і Q з однаковою ймовірністю набуває значень 0 і 1, є марківським як у прямому, так і у зворотному часі.

Для того, щоб обчислити його генератор, зауважимо, що кожному $z \in \operatorname{supp} Z_\infty \subset [0,(1-\lambda)^{-1}]$ відповідає послідовність $(q_n^z)_{n\in\mathbb{N}}$ з $\{0, 1\}^N$ така, що $g_n^z(x) = \lambda x + q_n^z$ та

$$z=\left(g^{z}\right)^{1\uparrow\infty}(z_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}q_k^z.$$

Після розрахунків маємо

$$g_1^z\circ\cdots\circ g_k^z\circ f\circ\left(g_k^z\right)^{-1}\cdots\left(g_1^z\right)^{-1}(x)=(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}q_i^z+\lambda^k Q+\lambda x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

За допомогою (5.4),

$$(\mathsf{A}_{\uparrow}h)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathbf{E}h\left(-(1-\lambda)\hat{z}_k+\lambda^k Q+z\right)-h(z)\right],$$

де Q з однаковою ймовірністю приймає значення 0, 1 та

$$\hat{z}_k:=\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda^{i-1}q_i^z,\quad k\ge 0.$$

Якщо h(z) = z, то

$$(\mathsf{A}_{\uparrow}h)(z)=-(1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\hat{z}_k+\frac{\mathbf{E}Q}{1-\lambda}=-(1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}i\lambda^{i-1}q_i^z+\frac{\mathbf{E}Q}{1-\lambda}.$$

У зворотному часі має вигляд

$$(\mathsf{A}_{\downarrow}h)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[h\left(-\left(1-\lambda^{-1}\right)\hat{z}_{k-1}-\lambda^{k-2}q_k^z+z\right)-h(z)\right].$$

Доведення теореми 6.1. Перш за все, зазначимо, що ми можемо замінити евклідову кулю в (6.5) на ℓ_∞-кулю. Для довільної послідовності $r_n \downarrow 0$ існує послідовність цілих чисел $(k_n) \uparrow \infty$ така, що $2^{-k_n}\le r_n<2^{-k_n+1}$.

Впорядкуємо точки $(t_i,x_i,f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ процесу $\mathcal{P}_{[0,1]}$ так, щоб $t_1 \le t_2 \le \cdots$

Нагадаємо позначення:

$$T_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_j \le x\}}$$

та

$$S_n(x) = \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k(x) = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки x є фіксованим, надалі аргумент x опускається.

Нехай $z_1 = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k / 2^{k-1}$, $\gamma_m = 1$, та $z_2 = \sum_{k=1}^{n} \gamma'_k / 2^{k-1}$, $\gamma'_n = 1$, двійкові розклади z_1 та z_2 відповідно. За припущенням, $\gamma_1\gamma_2 \ldots\gamma_m$ є підпослідовністю $\gamma'_1\gamma'_2 \ldots\gamma'_n$ та $m \le n$. Пригадуючи представлення (6.3) для ζ, можемо записати

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{S_n}}{2^{n-1}} \quad \text{та} \quad \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{2^{n-1}}.$$

Для $k > \max(n,m)$ маємо

$$\begin{aligned}\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\big(z + [0, 2^{-k}]^2\big) &= \mathbf{P}\{\zeta(x) \in [z_1, z_1 + 2^{-k}], \zeta(1) \in [z_2, z_2 + 2^{-k}]\} \\ &= \mathbf{P}\{Q_1 = \gamma'_1, \ldots, Q_n = \gamma'_n, Q_{n+1} = \cdots = Q_{k+1} = 0, \\ &\quad Q_{S_1} = \gamma_1, \ldots, Q_{S_m} = \gamma_m, Q_{S_{m+1}} = \cdots = Q_{S_{k+1}} = 0\}.\end{aligned}$$

Позначимо подію під останнім знаком ймовірності через A. Вважаємо, що $\gamma_m = 1$, то подія A може відбутися тільки якщо $\{S_m \le n\} \cup \{S_m > k + 1\}$. Накладемо обмеження на $\mathbf{P}\{A, S_m > k + 1\}$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{A, S_m > k+1\} \\ &\quad \le \mathbf{P}\{S_m > k+1, Q_{n+1} = \cdots = Q_{k+1} = 0, Q_{S_{m+1}} = \cdots = Q_{S_{k+1}} = 0\} \\ &\quad = \mathbf{P}\{S_m > k+1\}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m+1} \le m\mathbf{P}\left\{S_1 > \frac{k+1}{m}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m+1} \\ &\quad = m(1-x)^{(k+1)/m}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m+1} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{(1-x)^{1/m}}{4}\right)^k\right) \quad \text{as } k \to \infty.\end{aligned}$$

Для обчислення $\mathbf{P}\{A, S_m \le n\}$ зауважимо, що $\{S_m \le n\} = \{T_n \ge m\}$, $S_{T_n} \le n$ і $S_{T_{n+1}} > n$. Отже,

$$\mathbf{P}\{A, S_m \le n\} = \sum_{l=m}^{n} \sum_{j=l}^{n} \mathbf{P}\{S_m \le n, T_n = l, S_l = j, S_{l+1} > n, B_{m,n}, C_{n,k}\}$$

де

$$B_{m,n} = \{Q_1 = \gamma_1', \ldots, Q_n = \gamma_n', Q_{S_1} = \gamma_1, \ldots, Q_{S_m} = \gamma_m, Q_{S_{m+1}} = \cdots = Q_{S_{T_n}} = 0\},$$
$$C_{n,k} = \{Q_{n+1} = \cdots = Q_{k+1} = 0, Q_{S_{T_n+1}} = \cdots = Q_{S_{k+1}} = 0\}.$$

Зауважимо, що $S_{\ell+i} = S_\ell + S'_i$, $i \ge 1$, де $(S'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ - розподільча копія випадкового блукання $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Тоді

$$\mathbf{P}\{S_m \le n, T_n = l, S_l = j, S_{l+1} > n, B_{m,n}, C_{n,k}\}$$
$$= \mathbf{P}\{C_{n,k}, S_{l+1} > n | T_n = l, S_l = j, B_{m,n}\} \mathbf{P}\{S_m \le n, T_n = l, S_l = j, B_{m,n}\},$$

і далі

$$\mathbf{P}\{C_{n,k}, S_{l+1} > n | T_n = l, S_l = j, B_{m,n}\}$$
$$= \mathbf{P}\{Q_{n+1} = \cdots = Q_{k+1} = 0, Q_{j+S_1'} = \cdots = Q_{j+S_{k-l+1}'} = 0, j + S_1' > n\}$$
$$= \mathbf{P}\{Q_{n+1} = \cdots = Q_{k+1} = 0, Q_{n+S_1'} = \cdots = Q_{n+S_{k-l+1}'} = 0\} \mathbf{P}\{j + S_1' > n\},$$

де остання рівність спирається на властивість відсутності пам’яті у геометричного розподілу величини S'_1. Нехай N є біноміально розподілена величина Bin(k - n + 1,x). Тоді

$$\mathbf{P}\{Q_{n+1} = \cdots = Q_{k+1} = Q_{n+S_1'} = \cdots = Q_{n+S_{k-l+1}'} = 0\}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1} \mathbf{E}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-l+1-N} = \sum_{i=0}^{k-n+1} \binom{k-n+1}{i} x^i (1-x)^{k-n+1-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n-l+2-i}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-l+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{k-n+1}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{P}\{A, S_m \le n\}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{k}$$
$$\times \sum_{l=m}^{n} \sum_{j=l}^{n} (1-x)^{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{-l+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{-n+1} \mathbf{P}\{S_m \le n, T_n = l, S_l = j, S_{l+1} > n, B_{m,n}\}.$$

Зверніть увагу, що подвійна сума не залежить від k. Отже,

$$\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\big(z+[0,2^{-k}]^2\big)=\mathrm{const}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^k+\mathcal{O}\Big(\frac{(1-x)^{1/m}}{4}\Big)^k,$$

де константа не залежить від k. Той самий вираз має місце для $\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}$ $(z+[-2^{-k}, 0]^2)$.

Крім того,

$$\begin{aligned}&\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\big(z+[-2^{-k},0]\times[0,2^{-k}]\big)\\&\quad=\mathbf{P}\{Q_1=\gamma'_1,\dots,Q_n=\gamma'_n,Q_{n+1}=\dots=Q_{k+1}=0,\\&\qquad Q_{S_1}=\gamma_1,\dots,Q_{S_m-1}=\gamma_{m-1},Q_{S_m}=0,Q_{S_{m+1}}=\dots=Q_{S_{k+1}}=1\}.\end{aligned}$$

Подія під знаком ймовірності відбувається лише тоді, коли $S_{m+1}\le n$ або $S_{m+1}>k+1$. Взявши подвійну суму $T_n=\ell$ та $S_\ell=j$ для $m+1\le\ell\le n$ та $1\le j\le n$, як описано вище, отримаємо

$$\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\big(z+[-2^{-k},0]\times[0,2^{-k}]\big)\le\mathrm{const}\cdot\Big(\frac{1-x}{4}\Big)^k,$$

де константа не залежить від k. Крім того, $\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}$ $(z+[0,-2^{-k}]\times[-2^{-k},0])$ обмежений тим самим виразом. Отже,

$$\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\big(z+[-2^{-k},2^{-k}]^2\big)=c\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^k+\mathcal{O}\Big(\frac{(1-x)^{1/m}}{4}\Big)^k.$$

Нарешті, (6.5) дає (6.8).

Доведення теореми 6.3. Всі точки $z:=(z_1,z_2)$ в околі $\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}$ можна подати у вигляді двійкових розкладів $z_1=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k/2^{k-1}$ та $z_2=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma'_k/2^{k-1}$, де послідовності $\gamma:=(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ та $\gamma'=(\gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ є такими, що γ є підпослідовністю γ'. Для майже всіх z існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ така, що $\gamma_{\tau_k+1}=\gamma'_{\tau_k+1}$ та $\gamma_{\tau_k+2}=\gamma'_{\tau_k+2}$ для всіх $k\ge1$.

Це випливає з леми Бореля-Кантеллі, застосованої до послідовності незалежних подій

$$B_n:=\{Q_{Y_n}=0,\ Q_{Y_n+1}=1,\ Q_{S_{Y_n}}=0,\ Q_{S_{Y_n+1}}=1\},\quad n\ge1,$$

де $Y_1 = 1$, а $Y_{n+1} = S_{Y_n+1} + 1$, $n \geq 1$. Зауважимо, що послідовність $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ не є випадковою, вона визначається послідовностями γ та γ'. Враховуючи, що $\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}$ є точною розмірністю і границя в (6.5) існує, то можна взяти границю по $r_k = 2^{-\tau_k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Розглянемо $\tilde{z}:=(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ з

$$\tilde{z}_1 := \sum_{j=1}^{\tau_k} 2^{-(j-1)}\gamma_j \quad \text{та} \quad \tilde{z}_2 := \sum_{j=1}^{\tau_k} 2^{-(j-1)}\gamma'_j.$$

Тоді

$$z + \left[-2^{-(\tau_k+1)}, 2^{-(\tau_k+1)}\right] \subset \tilde{z} + \left[0, 2^{-\tau_k}\right] \subset z + \left[-2^{-\tau_k}, 2^{-\tau_k}\right],$$

де ми використали, що $\gamma_{\tau_k+2}=\gamma'_{\tau_k+2}=1$. Отже, достатньо врахувати

$$\begin{aligned}&\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\left(\tilde{z} + \left[0, 2^{-\tau_k}\right]\right)\\ &\quad = \mathbf{P}\left\{Q_i = \gamma'_i, i = 1, \ldots, \tau_k, \gamma'_{S_j} = \gamma_j, j = 1, \ldots, T_{\tau_k}, Q_{S_l} = \gamma_{S_l}, l = T_{\tau_k} + 1, \ldots, \tau_k\right\}.\end{aligned}$$

Зауважимо, що $T_{\tau_k} := \sum_{j=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_{\{x_j \leq x\}}$ має біноміальний розподіл Bin(τ_k,x), при цьому

$$\begin{aligned}\mu^{(x)}_{\mathrm{BC},1/2}\left(\tilde{z} + \left[0, 2^{-\tau_k}\right]\right) &\leq \mathbf{P}\left\{Q_i = \gamma'_i, i = 1, \ldots, \tau_k, Q_{S_l} = \gamma_{S_l}, l = T_{\tau_k} + 1, \ldots, \tau_k\right\}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau_k} \mathbf{E}\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau_k - T_{\tau_k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau_k}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\tau_k}.\end{aligned}$$

Висновок випливає з (6.5).