

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Степук Віталій Васильович

УДК 512.544

**Централізатори елементів і абелеві
підалгебри в алгебрах Лі диференціювань**

01.01.06 — алгебра і теорія чисел

Дисертація
на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фіз.-мат наук, професор,
ПЕТРАВЧУК А. П.

Київ – 2016

Зміст

Перелік умовних позначень	2
Вступ	3
1 Огляд літератури	19
2 Означення та допоміжні результати	25
3 Централізатори елементів	34
3.1 Централізатори елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$	34
3.2 Централізатори елементів в алгебрах Лі диференціювань полів	46
Висновки до розділу 3	59
4 Слабко напівпрості диференціювання кільця многочленів від двох змінних	62
4.1 Слабко напівпрості многочлени вигляду $f_1(x)f_2(y)$	65
Висновки до розділу 4	73
5 Базиси та анулятори	75
5.1 Комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань	76
5.2 Про вираз дивергенції в різних базисах	81
5.3 Анулятори множин раціональних функцій	86
5.4 Анулятори раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(K)$	91
Висновки до розділу 5	95
Висновки	99
Список використаних джерел	101

Перелік умовних позначень

$\text{Der}(L)$	алгебра Лі диференціювань алгебри Лі L
$\text{Ker } D$	ядро лінійного відображення D
$\text{Im } D$	образ лінійного відображення D
$\text{deg } f$	ступінь многочлена f
$\text{char } K$	характеристика поля K
K	алгебраїчне замикання поля K
K^*	мультиплікативна група поля K
$\text{div} D$	дивергенція диференціювання D
$\text{tr. deg}_K(L)$	ступінь трансцендентності поля L над полем K
$K[x_1, \dots, x_n]$	алгебра многочленів від n змінних над полем K
$K(x_1, \dots, x_n)$	поле раціональних функцій від n змінних над полем K
$K[f_1, \dots, f_k]$	підалгебра алгебри многочленів, яка породжена многочленами f_1, \dots, f_k
$J(f, g)$	матриця Якобі многочленів $f, g \in K[x, y]$
$\text{gcd}(f, g)$	найбільший спільний дільник елементів f, g деякого евклідового кільця
$\text{Ann}_L(S)$	анулятор множини S в алгебрі Лі L
$C_L(x)$	централізатор елемента x в алгебрі Лі L

Вступ

Актуальність теми. Дослідження алгебр Лі диференціювань асоціативних комутативних кілець, зокрема, кілець многочленів від кількох змінних утворюють великий розділ сучасної диференціальної алгебри, який тісно пов'язаний з теорією диференціальних рівнянь, з математичним аналізом, а саме теорією лінійних диференціальних операторів, з геометрією та математичною фізикою. Наприклад, з кожною групою Лі пов'язується відповідна їй алгебра Лі, яка є алгеброю Лі лівоінваріантних векторних полів, або, що теж саме, диференціювань асоціативно-комутативного кільця гладких функцій на групі. Після вивчення цієї алгебри Лі, (що, як правило, є набагато простішою задачею, ніж вивчення груп у зв'язку з лінійністю операцій на алгебрі Лі) отримані результати застосовуються до груп Лі. Цей метод теорії Лі виявився потужним інструментом для вивчення груп симетрій диференціальних рівнянь і побудови їх точних розв'язків, що є однією з найважливіших задач сучасної математичної фізики. Зауважимо, що кожне диференціювання D кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$, де K будь-яке поле, має вигляд:

✘	Описание:	n
		$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$

де коефіцієнти $P_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ є многочленами із $K[x_1, \dots, x_n]$, тобто D є лінійним диференціальним оператором з поліноміальними коефіцієнтами. Ядро цього оператора складають розв'язки відповідного диференціального рівняння в частинних похідних з поліноміальними коефіцієнтами. Це

пов'язує алгебраїчну частину теорії Лі з відповідними розділами теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. Оскільки комутатор двох диференціювань $D_1 = \sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ та $D_2 = \sum_{i=1}^n Q_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ також є диференціюванням кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$, то векторний простір $\text{Der}(K[x_1, \dots, x_n])$ з операцією комутування утворює алгебру Лі. В цій алгебрі Лі $W_n = \text{Der}(K[x_1, \dots, x_n])$ виділено цілий ряд підалгебр, які пов'язані з дією диференціювань на певні диференціальні форми. Аналогічно визначається алгебра Лі $W_n(K)$ всіх K -диференціювань поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$.

Основними об'єктами дослідження в дисертаційній роботі є алгебра Лі диференціювань $W_2(K)$ кільця многочленів від 2 змінних, алгебра Лі $W_2(K)$ диференціювань поля раціональних функцій від 2 змінних і алгебра Лі диференціювань поля алгебраїчних функцій від кількох змінних. В таких алгебрах Лі важливим є опис двовимірних неабелевих підалгебр (як алгебр Лі диференціювань). У зв'язку з цим досліджуються властивості слабко напівпростих многочленів із $K[x, y]$, які породжують двовимірні неабелеві підалгебри із $W_2(K)$. Встановлено також зв'язки між комутативними базисами в алгебрах Лі диференціювань поліноміальних кілець і полів раціональних функцій.

Одним з основних результатів дисертаційної роботи є опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(K)$. Відзначимо, що дана тематика вивчалась багатьма авторами (І. Клеп, Г. Бенкарт та інші) і тісно пов'язана з деякими проблемами комутативної алгебри, теорії динамічних систем та теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних (А. Новіцкі, Ж. Олланьєр, А. Боден та інші). Далі природньо виникло питання про опис централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань полів. У загальному випадку навіть для вузьких класів скінченновимірних алгебр Лі ці питання виявилися непротими. При певних обмеженнях на степінь трансцендентності поля констант над основним підполем було описано їх структуру, такий опис

наведено у третьому розділі. Слід зазначити також, що схожі питання, але для простішої за будовою алгебри Лі $sa_2(\mathbb{K})$ розглядалися в роботі А. Петравчука та О. Єни [53]. Зокрема, в термінах замкнених многочленів у ній описана структура максимальних абелевих підалгебр та централізаторів.

Найпростішими після абелевих алгебр Лі є метабелеві, тобто такі, які є розширеннями абелевих алгебр Лі за допомогою абелевих, найпростішою тут є двовимірна неабелева алгебра Лі. У роботах Ю. Стейна (див., наприклад, [69]) у зв'язку з деякими питаннями, пов'язаними зі знаменитою проблемою якобіана, було введено поняття слабо напівпростого многочлена. Такі многочлени визначають двовимірні неабелеві підалгебри із алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$. Будова двовимірних (абелевих і неабелевих) підалгебр алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ дуже важлива для кращого розуміння будови підалгебр $W_2(\mathbb{K})$. В дисертаційній роботі дано опис слабо напівпростих многочленів із відокремленими змінними та встановлено їх основні властивості. При вивченні таких многочленів корисними виявилися різні достатні умови незвідності та замкненості многочленів від двох змінних, які отримані методами алгебраїчної геометрії, зокрема результати Д. Лоренціні [40].

У зв'язку з вивченням алгебр Лі диференціовань полів раціональних функцій у дисертаційній роботі досліджуються анулятори раціональних функцій у відповідних алгебрах Лі диференціовань. Анулятор підмножини $S \subseteq \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ в алгебрі Лі $\boxed{\times}_n(\mathbb{K})$, який позначається $\text{Ann}_{\boxed{\times}_n(\mathbb{K})}(S)$ і є множиною всіх \mathbb{K} -диференціовань поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, які анулюють множину $S \subseteq \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, тісно пов'язаний з будовою підалгебр алгебри Лі $\boxed{\times}_n(\mathbb{K})$. З цієї точки зору анулятори вивчались в роботах Є. Єни, А. П. Петравчука, С. Аяда, Г. Фройденбурга та інших.

Окрім централізаторів, ануляторів та слабо напівпростих многочленів у дисертаційній роботі розглядаються комутативні базиси алгебр Лі диференціо-

вань (над відповідним кільцем або полем). Зауважимо, що кожен комутативний базис визначає скінченновимірну абелеву підалгебру в алгебрі Лі диференціювань кільця або поля. В роботі описано метод побудови деяких комутативних базисів в алгебрі Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від двох змінних, тобто алгебраїчних розширень поля $K(x,y)$. Для таких полів також знайдено закон зміни дивергенції при переході від одного базису трансцендентності поля до іншого базису (у випадку кільця многочленів від двох змінних і переходу до інших координатних многочленів дивергенція не змінюється і цей інваріант може бути корисним в подальших дослідженнях). В деяких випадках такі питання розглядав А. Новіцкі і в дисертаційній роботі використовуються його підходи до вивчення комутативних базисів.

З усього вищезазначеного можна зробити висновок, що тематика дисертаційної роботи є актуальною.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках держбюджетної дослідницької теми 06БФ038 "Розробка алгебраїчних і геометричних методів дослідження з використанням комбінаторних та категорних підходів що виконується на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0106U005862).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(K)$ та в алгебрах Лі диференціювань полів, дослідження структури ануляторів у $W_n(K)$, детальне вивчення комутативних базисів в алгебрах Лі диференціювань кільця і полів та дослідження слабо напівпростих многочленів із відокремленими змінними у кільці $K[x, y]$, які визначають двовимірні неабелеві підалгебри в алгебрі Лі $W_2(K)$.

Об'єктом дослідження є алгебра Лі $W_n(K)$, зокрема окремо розглядається алгебра Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних, замкнені многочлени і раціональні функції від кількох змінних.

Предмет дослідження - централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $W_2(K)$, централізатори елементів та анулятори елементів в алгебрі Лі $W_n(K)$, слабко напівпрості многочлени кільця $K[x,y]$ та комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань комутативних кілець та полів.

Методи дослідження. Основними методами, що використовуються у дослідженні є методи теорії алгебр Лі, методи комутативної алгебри, які пов'язані з розширеннями комутативних кілець і полів та методи лінійної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

1. описано будову централізаторів елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$ та залежно від степеня трансцендентності поля констант диференціювання D описано централізатор D в алгебрі Лі $Der_K(R)$ диференціювань поля R алгебраїчних функцій від кількох змінних;
2. дано опис максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(K)$ у випадку основного поля нульової характеристики;
3. отримано критерій слабкої напівпростоти многочленів кільця $K[x,y]$ із відокремленими змінними, тобто таких, що $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, встановлено основні властивості таких многочленів;
4. вказано зв'язок між деякими класами комутативних базисів алгебр Лі всіх K -диференціювань поля алгебраїчних функцій від n змінних, вказано метод їх побудови;
5. знайдено закон зміни дивергенції диференціювання поля алгебраїчних функцій від двох змінних при переході від одного базису трансцендентності

цього поля до іншого базису;

6. досліджено структуру ануляторів множин раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(\mathbb{K})$ та встановлено їх основні властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії алгебр Лі, комутативній алгебрі, теорії трансцендентних розширень полів раціональних функцій та суміжних розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Визначення напрямку досліджень, постановка задач, ідеї відносно вибору методів розв'язання належать науковому керівнику. У всіх роботах, опублікованих у співавторстві, внески авторів є рівними і нероздільними.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися

- на Міжнародній математичній конференції, присвяченій 70-річчю В. В. Кириченка (Миколаїв, червень 2012 р.);
- на Третій міжуніверситетській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики (Київ, квітень 2013 р.);
- на Дев'ятій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, липень 2013 р.);
- на Четвертій школі-конференції з теорії алгебр Лі, алгебраїчних груп та теорії інваріантів (Москва, Росія, січень-лютий 2014 р.);
- на Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (Київ, липень 2014 р.);

- на Дев'ятій літній школі: Алгебра, топологія і аналіз (с. Поляниця, Івано-Франківська область, липень 2014 р.);
- на Міжнародній школі-конференції "Перспективи в теорії Лі"(Піза, Італія, січень-лютий 2015 р.);
- на Десятій Міжнародній алгебраїчній конференції присвяченій 70-річчю від дня народження Ю.А. Дрозда (Одеса, серпень 2015 р.);
- на засіданні Алгебраїчного семінару Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, грудень 2015 р.);

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 наукових роботах. З них 5 — це статті [8, 61, 62, 63, 64] у фахових виданнях та 7 — публікації у матеріалах та тезах конференцій [9, 10, 11, 65, 66, 67, 68].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 108 сторінок, з них список використаних джерел займає місце з 101 по 108 сторінку і містить 72 найменування.

Основний зміст роботи. Дисертаційна робота складається із п'яти розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст його підрозділів.

У **вступі** розкривається актуальність теми дисертації, мета та завдання. Обговорюється наукова новизна та практичне значення отриманих результатів. Вказується особистий внесок здобувача у дослідження, розкривається зміст роботи та наводиться список публікацій.

У **першому розділі** проводиться огляд літератури, пов'язаної з тематикою досліджень, що проводилася здобувачем. Вказуються досягнення за темою дисертації, які вже були отримані іншими авторами.

У **другому розділі** подано необхідні означення та деякі допоміжні результати, які використовуються в подальшому викладі результатів роботи.

У **третьому розділі** досліджуються централізатори елементів і максимальні абелеві підалгебри в алгебрах Лі диференціювань. В підрозділі 3.1 розглядаються централізатори елементів в алгебрі Лі $W_2(\mathbb{K})$ всіх диференціювань кільця многочленів від двох змінних над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Структура централізатора елемента $D \in W_2(\mathbb{K})$ в цій алгебрі Лі суттєво залежить від будови ядра диференціювання D в полі раціональних функцій (диференціювання D природнім чином продовжується з кільця многочленів на поле раціональних функцій), деякі результати про ядра таких диференціювань були отримані раніше в роботах А. Петравчука, О. Єни і А. Регети. Встановлено основні властивості таких централізаторів і доведено основну теорему, яка їх описує:

Теорема 3.1.6. *Нехай D довільний ненульовий елемент з $W_2(\mathbb{K})$. Тоді централізатор $C = C_{W_2}(D)$ є підалгеброю одного з наступних типів:*

1. $C = \mathbb{K}D$, якщо $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ співпадає з \mathbb{K} .
2. $C = \mathbb{K}D + \mathbb{K}D_1$, якщо $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ співпадає з \mathbb{K} та існує диференціювання D_1 таке, що $[D, D_1] = 0$ і D, D_1 є лінійно незалежними над $\mathbb{K}(x, y)$.
3. $C = \mathbb{K}[p]h\delta_p$, якщо $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ містить несталий многочлен, цей многочлен p може бути вибраний незвідним, $D = hf\delta_p$, де f є многочленом від p , многочлен h є p -вільним і δ_p є зведеним диференціюванням для D_p .
4. $C = \mathbb{K}[p, q]_m h\delta_{p,q}$, якщо $\text{Ker } D$ містить несталу раціональну функцію p/q і не містить многочленів, відмінних від константи, $\text{Ker } D = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$, $D = hf\delta_{p,q}$, де f є однорідним многочленом від p, q степеня m , h є $p - q$ -вільним многочленом та $\delta_{p,q}$ є зведеним диференціюванням для диференціювання $qD_p - pD_q$.

5. $C = (K(\square)D + K(\square)D_1) \cap W_2(K)$, де D задовольняє всі умови з попередньої частини теореми, D та D_1 є лінійно незалежними над $K(x,y)$ та $[D_1, D] = 0$. Якщо $D = P \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$, $D_1 = P_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ та $\Delta = PQ_1 - P_1Q$, то $\dim_K C \leq m + s + 2$, де число m таке ж як в пункті 4 даної теореми і $s = \deg_{p-q} \Delta$.

Зауважимо, що централізатори елементів для різних типів алгебр Лі вивчались багатьма авторами і для деяких алгебр їх будова достатньо добре вивчена. Далі розглядаються максимальні абелеві підалгебри в алгебрі Лі $W_2(K)$. Всі типи таких підалгебр описані в наступній теоремі.

Теорема 3.1.8. Нехай L максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $W_2(K)$.

Тоді алгебра Лі L є однією із наступних:

1. Одновимірною вигляду KD , де $D \in W_2(K)$ та $\text{Ker } D$ в $K(x,y)$ співпадає з K .
2. Двовимірною вигляду $KD + KD_1$, де D, D_1 є лінійно незалежними над $K(x,y)$.
3. Скінченно вимірною вигляду $K[p,q]_m h \delta_{p,q}$, де $h \in K[x,y]$, $K[p,q]_m$ є векторним простором всіх однорідних по p, q многочленів степеня m (дивись Теорему 3.1.6).
4. Нескінченно вимірною вигляду $K[p] h \delta_p$, де $h \in K[x,y]$, $K[p]$ є векторним простором многочленів від p (дивись Теорему 3.1.6).

У підрозділі 3.2 розглянуто властивості централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від кількох змінних при деяких обмеженнях на степінь трансцендентності поля констант диференціювання.

Нехай K — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $K(x_1, \dots, x_n)$ — поле раціональних функцій над K і $R \supseteq K(x_1, \dots, x_n)$ — скінченне алгебраїчне

розширення поля $K(x_1, \dots, x_n)$ (тобто поле алгебраїчних функцій від n змінних). Зауважимо, що в випадку $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$ з геометричної точки зору диференціювання можна розглядати як векторні поля на відповідних гладких многовидах. Відомо, що знання структури централізаторів елементів алгебри Лі дає важливу інформацію про саму алгебру Лі.

В наступних лемах вказано ряд властивостей централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від кількох змінних. Для поля алгебраїчних функцій R від n змінних над полем K будемо позначати через $W(R)$ алгебру Лі $Der_K(R)$ всіх K -диференціювань поля R .

Лема 3.2.3 Нехай $D \in Der_K(R)$, $D \neq 0$ і $F = Ker D$ - поле констант для D в R . Тоді централізатор $C = C_{Der_K(R)}(D)$ є векторним простором над F розмірності $\leq n$.

Лема 3.2.5. Нехай D_1, \dots, D_k - лінійно незалежні над R елементи з $W(R) = Der_K(R)$. Тоді підполе констант $S = \bigcap_{i=1}^k Ker D_i$ для системи $\{D_1, \dots, D_k\}$ має степінь трансцендентності над K не вище ніж $n - k$.


Наступні теореми, які є основними результатами цього підрозділу дають характеристику централізаторів елементів при деяких обмеженнях на степінь трансцендентності полів констант.

Теорема 3.2.9. Нехай K — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R - розширення поля K степеня трансцендентності n над K і D - K -диференціювання R з полем констант $F = Ker D$. Якщо $tr.deg_K F \leq 2$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ є або алгеброю Лі над F розмірності $\dim_F C \leq n$, або C містить ідеал $I = \{T \in C \mid T(F) = 0\}$, який є алгеброю Лі над F розмірності $rk_R C - 1$ за умови, що $tr.deg_K F = 1$ або $rk_R C - 2$ за умови, що $tr.deg_K F = 2$ і такий, що:

1. при умові $tr.deg_K F = 1$ фактор-алгебра C/I ізоморфна $Der_K K(x)$;

2. при умові $\text{tr.deg}_K F = 2$ фактор-алгебра CI ізоморфна або підалгебрі ранга 1 з $\text{Der}_K F$, або самій алгебрі $\text{Der}_K F$.

Теорема 3.2.12. Нехай K – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля K , яке має степінь трансцендентності n над K , $D \in W(R)$ таке K -диференціювання поля R , що його поле констант F в R має степінь трансцендентності $n - 1$ над K . Якщо для деякого елемента $z \in R \setminus F$ виконується $D(z) \in F$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ має ранг n над R і складається з диференціювань вигляду

	Описание: $D^2 + (f_0 + D_2(h)z/h) \frac{\partial}{\partial z}$,	$-\partial-$
---	--	--------------

де D_2 – довільне диференціювання поля F , продовжене до диференціювання поля R вздовж елемента z , і при цьому $h = D(z)$, а $f_0 \in F$ – довільний елемент.

Четвертий розділ присвячено дослідженню слабо напівпростих многочленів у кільці $K[x,y]$. Тут дано опис всіх слабо напівпростих многочленів $f \in K[x,y]$ вигляду $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ (многочленів з відокремленими змінними) та їхніх власних функцій $g(x,y) \in K[x,y]$ таких, що $[f,g] = \lambda g, \lambda \in K^*$. Насправді, можна вважати, що $\lambda = 1$, оскільки в іншому випадку ми можемо взяти $\lambda^{-1}f$ замість f . Тому далі розглядається лише випадок $[f,g] = g$. Встановлено основні властивості таких многочленів з відокремленими змінними, при цьому використовуються результати Ю. Стейна, зокрема, такий: нехай $f, g \in K[x,y]$ – такі многочлени, що g незвідний і $[f,g] = hg$ для деякого $h \in K[x,y]$. Тоді існує елемент $c \in K$ такий, що g ділить многочлен $f - c$. Використовуються також результати Ж. Олландера [50], який дослідив замкнені многочлени і замкнені раціональні функції від кількох змінних.

При доведенні основного результату цього розділу використовується наступна лема:

Лема 4.1.1. Нехай многочлен $g = g(x,y)$ задовольняє умову $[f,g] = g$, де $f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \in K[x,y]$. Тоді єдиними незвідними множниками многочлена $g(x,y)$ є або многочлени вигляду $\delta (f(x,y) + c)$, де $\delta, c \in K^*$ або $\beta(x - c_1), \gamma (y - c_2)$, де $\beta, \gamma \in K^*$ та c_1, c_2 задовольняють умову $f_1(c_1) = 0, f_2(c_2) = 0$.

Основним результатом даного розділу є наступний критерій слабкої напівпростоти многочлена з розділеними змінними:

Теорема 4.1.5. Многочлен $f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \in K[x,y]$ є слабо напівпростим тоді і тільки тоді, коли він не має кратних коренів і принаймні один з многочленів $f_1(x), f_2(y)$ є лінійним, і якщо, наприклад, $f_2(y) = ay + b, a, b \in K$ та $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ є коренями $f_1(x)$, тоді $l_i = \begin{matrix} \times & \text{Оп} \\ & \text{иГ} \end{matrix} \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$. Крім того, якщо $g = g(x,y)$ є власною функцією для D_f із власним значенням 1, тоді

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & \text{Пн} \\ & g = F(f)f_2(y)^k & (x - \alpha_i)^{k - l_i}, \\ & & i=1 \end{matrix}$$

де $F(t) \in K[t], k \in \mathbb{N}$ таке, що $k \geq l_i, i = 1, \dots, n$.

Як наслідок, з основної теореми отримано наступне твердження, яке розширює множину слабо напівпростих многочленів:

Наслідок 4.1.6. Нехай $f(x,y)$ слабо напівпростий многочлен і $g(x,y)$ є такий, що $[f, g] = g$. Якщо деякі многочлени від двох змінних p, q задовольняють умову $[p, q] = 1$, то многочлен $f(p, q)$ є слабо напівпростим і $[f(p, q), g(p, q)] = g(p, q)$.

Як відзначено у роботах Ю. Стейна, опис слабо напівпростих многочленів довільного вигляду (а не тільки з розділеними змінними) був би серйозним кроком вперед у розв'язанні відомої проблеми якобіана при $n = 2$.

В останньому, **п'ятому розділі** досліджуються комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від двох змінних та анулятори множин раціональних функцій у алгебрі Лі $\begin{matrix} \times \\ \square \end{matrix} (K)$ диференціювань поля

раціональних функцій від n змінних. У першій частині описано метод побудови деяких комутативних базисів у алгебрі Лі $W_2(K)$ всіх K -диференціювань кільця многочленів $K[x_1, x_2]$. Один із основних результатів цього підрозділу – наступна теорема:

Теорема 5.1.3. *Нехай*

✖	Описание:	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$
		$D_1 = a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2}$	$D_2 = a_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial}{\partial x_2}$		

диференціювання поля $R \cong K(x_1, x_2)$ алгебраїчних функцій такі, що

✖	Описание:	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots$
---	-----------	---

Рівність $[D_1, D_2] = aD_1 + bD_2$, для деяких $a, b \in R$, виконується тоді і тільки тоді, коли

✖	Описание:	$\text{div} D_1 = a$	$\text{div} D_2 = b$
---	-----------	----------------------	----------------------

Наслідок 5.1.4. *Нехай елементи*

✖	Описание:	$D_1 = a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2}$	$D_2 = a_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial}{\partial x_2}$	$\Delta \neq 0$	$W_2(K)$
---	-----------	---	---	-----------------	----------

лінійно незалежні над R . Диференціювання D_1 та D_2 комутують тоді і тільки

тоді, коли $\text{div}(D_1) = 0, \text{div}(D_2) = 0$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

При вивченні алгебри Лі $W_2(R)$ всіх K -диференціювань поля R алгебраїчних функцій від двох змінних виникає питання про такі диференціювання $D_1, D_2 \in W_2(R)$, що $[D_1, D_2] = D_2$ (вони породжують в $W_2(R)$ двовимірну над K неабелеву підалгебру). Така алгебра Лі може також бути охарактеризована в термінах дивергенції:

Наслідок 5.1.5. *Нехай диференціювання $D_1, D_2 \in W_2(R)$ лінійно незалежні над R . Рівність $[D_1, D_2] = D_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли*

✖	Описание:	$\text{div}(D_1) = 0, \text{div}(D_2) = 1$
---	-----------	--

зокрема, якщо $\Delta = 1 \bmod i \operatorname{div} D_2 = 0, \operatorname{div} D_1 = -1$.

Зауважимо, що проблема опису многочленів f, g , які задовольняють рівність $\det J(f, g) = g$, або, що те ж саме про структуру якобіанних диференціювань, які задовольняють вищезгадану умову, була вперше сформульована Ю.Стейном.

У другій частині 5-го розділу розглянуто питання про те, як змінюється дивергенція диференціювання D при переході від одного базису трансцендентності до іншого. Відповідь на це питання дає наступна теорема:

Теорема 5.2.1. Нехай $\{P, Q\}$ – комутативний базис алгебри $L_i \mathbb{C}_2(R) = \operatorname{Der}_K R$, де $R \cong \mathbb{C}(x, y)$ – поле алгебраїчних функцій. Якщо $D = P \cdot R + Q \cdot Q \in \mathbb{C}_2(R)$ виражається як $D = R \cdot R + S \cdot Q$ в базисі $\{P, Q\}$, тоді

Описание:	$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial f} + \frac{\partial S}{\partial g} \cdot D(\Delta) \cdot \frac{1}{\Delta}$
-----------	--

де $\Delta = \det J(f, g)$ – якобіан функцій f, g .

Як наслідок, отримаємо наступний результат:

Наслідок 5.2.2. Якщо $\Delta = \det J(f, g) \in \mathbb{C}^*$, то дивергенція диференціювання $D \in \operatorname{Der} R$ не залежить від вибору комутативного базису $\{P, Q\}$. Зокрема, дивергенція не залежить від вибору координатних многочленів у кільці многочленів $\mathbb{C}[x, y]$.

У підрозділі 5.3 вивчаються анулятори множин раціональних функцій. Позначимо через $\operatorname{Ann}_{\mathbb{C}(K)}(S)$ анулятор множини S із поля раціональних функцій в алгебрі $L_i \mathbb{C}_n(K)$, нагадаємо, що

Описание:	$\operatorname{Ann}_{\mathbb{C}(K)}(S) = \{D \in W^n(K) \mid D(s) = 0 \text{ для всіх } s \in S\}$.
-----------	--

Деякі властивості ануляторів підмножин із поля раціональних функцій наведені в наступній лемі:

Лема 5.3.1. Нехай S – підмножина із поля $K(x_1, \dots, x_n)$ і $K(S)$ підполе породжене K та S в $K(x_1, \dots, x_n)$. Якщо $K(S)$ – алгебраїчне замикання $K(S)$ в $K(x_1, \dots, x_n)$, то справедливі наступні твердження:

1. $\text{Ann}_{n(K)}^{\square}(S) = \text{Ann}_{n(K)}^{\square}(K(S)) = \text{Ann}_{n(K)}^{\square}(K(S))$.
2. $\text{Ann}_{n(K)}^{\square}(S)$ є підалгеброю в $\square_n(K)$ і векторним простором над R розмірності $m = n - \text{tr.deg}_K K(S)$.
3. Якщо $m \geq 1$, то алгебра Лі $\text{Ann}_{n(K)}^{\square}(S)$ є простою.

Нехай S – непорожня підмножина із $K(x_1, \dots, x_n)$, яку без обмеження загальності можна вважати скінченною і алгебраїчно незалежною над полем K , $S = \{y_1, \dots, y_k\}$. Доповнимо множину S до базиса трансцендентності $\{x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k\}$ поля $K(x_1, \dots, x_n)$ над K (це можливо після перенумерації змінних) і позначимо через $J_{S,x}$ якобіанне диференціювання підполя $K(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$, яке визначене за правилом:

$$\square \text{ Описаніе: } J = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & h & x_{i+1} & \dots & x_{n-k} & y_1 & \dots & y_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n - k, \dots$$

де $J(x_1, \dots, x_{i-1}, h, x_{i+1}, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$ – матриця Якобі многочленів $x_1, \dots, x_{i-1}, h, x_{i+1}, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k$. Продовжимо ці диференціювання на все поле $K(x_1, \dots, x_n)$ і збережемо ті ж самі позначення для них. Позначимо через

$$\square \text{ Описаніе: } \Delta = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{n-k} & y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix}.$$

Наступні теореми є основними результатами підрозділів 5.3 та 5.4. В них отримано характеристику ануляторів підмножин із поля раціональних функцій в $\square_n(K)$ і ануляторів раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(K)$.

Теорема 5.3.3. Нехай K поле, S – підмножина поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$ і $\{y_1, \dots, y_k\}$ – максимальна множина алгебраїчно незалежних над K елементів з S . Тоді анулятор $\text{Ann}_{n(K)}^{\square}(S)$ є векторним простором над

$K(x_1, \dots, x_n)$ з базисом $J_{S,x_1}, \dots, J_{S,x_n}$. Множина N_1 всіх елементів з $\square_n(K)$, які відображають підполе $K(S)$ в себе, є напівпрямою сумою

$$\square \text{ Описание: } N = M \square \text{ Ann } (S)$$

де M є підалгеброю в $\square_n(K)$ з базисом $\square J_{S,y_1}, \dots, \square J_{S,y_k}$.

Алгебра Лі $W_n(K)$ міститься в $\square(K)$ і $W_n(K)$ є вільним $K[x_1, \dots, x_n]$ -модулем. Ця алгебра Лі діє природнім чином на $K(x_1, \dots, x_n)$ і якщо $\phi \in K(x_1, \dots, x_n)$, то $\text{Ann}_{W_n(K)}(\phi)$ є під модулем модуля $W_n(K)$ над кільцем $K[x_1, \dots, x_n]$. В наступній теоремі вказано породжуючі елементи $\text{Ann}_{W_n(K)}(\phi)$ для деяких раціональних функцій.

Теорема 5.4.3. Нехай $\phi = \square \in K(x_1, \dots, x_n)$ така раціональна функція із взаємнопростими многочленами u та v , що існують такі многочлени f_1, \dots, f_n що $f_1 \square + \square + f_n \square = \square$. Тоді $\text{Ann}_{W_n(K)}(\phi)$ є підмодулем рангу $n - 1$ над $K[x_1, \dots, x_n]$ з породжуючими

$$\square \text{ Описание: } \sum_{i=1, i \neq j}^n D_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) v^2.$$

Автор висловлює щирю подяку науковому керівнику, професору Петравчуку Анатолію Петровичу за постановку розглянутих в дисертаційній роботі питань, постійну увагу і підтримку в роботі.

Розділ 1

Огляд літератури

Диференціювання асоціативних комутативних кілець є алгебраїчними аналогами векторних полів на гладких многовидах із геометрії, де задача вивчення алгебр Лі векторних полів є надзвичайно важливою (в багатьох випадках така алгебра Лі повністю характеризує сам многовид). Важливість алгебр Лі векторних полів в алгебрі стала особливо зрозумілою після класичних робіт Е. Картана [23], де вивчаються алгебри Лі векторних полів (або, що теж саме, диференціювань) з коефіцієнтами, які є формальними степеневими рядами від кількох змінних. Зокрема, Е. Картан ввів серії алгебр Лі диференціювань, які зараз називаються картанівськими. Нагадаємо, що ці алгебри складаються з неперервних (в m -адичній топології) диференціювань кільця $K[[x_1, \dots, x_n]]$ формальних степеневих рядів над полем K характеристики нуль, тобто з лінійних операторів вигляду

✘ Описание:
$$D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in K[[x_1, \dots, x_n]].$$

Ці серії задаються умовами:

- 1) Всі диференціювання кільця $K[[x_1, \dots, x_n]]$ – загальна алгебра Лі картанівського типу.
- 2) Всі диференціювання D , які задовольняють умову $D\omega = 0$, де $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ – диференціальна форма.

3) Всі диференціювання, які задовольняють при $n = 2k$ умову $D\omega = 0$, де ω – невироджена двовимірна диференціальна форма зі сталими коефіцієнтами, тобто

Описание: $\sum a_i dx_i$, $a_i = -a_i$, $\det(a_{ij}) \neq 0 \dots$

4) Всі диференціювання, які задовольняють при $n = 2k + 1$ умову $D\omega = f\omega$, де f - функція із $K[[x_1, \dots, x_n]]$, яка залежить від D , а ω – одновимірна диференціальна форма з поліноміальними коефіцієнтами степеня ≤ 1 і невиродженим диференціалом $d\omega$.

Нагадаємо, що ці алгебри Лі в характеристиці 0 є простими, але в характеристиці $p > 0$ вони вже не є простими, бо в кожній з таких алгебр Лі диференціювання $D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ з $f_i \in K[[x_1^p, \dots, x_n^p]]$ утворюють ідеал скінченної ковимірності. Відповідні фактор-алгебри цих типів є p -алгебрами і вичерпують всі неklasичні прості p -алгебри Лі в характеристиці $p > 5$. В роботі [5] А. І. Кострікін та І. Р. Шафаревич детально вивчили властивості таких алгебр Лі, показали їх простоту (при деяких природніх обмеженнях) і висунули гіпотезу, що при достатньо великому простому числі p модулярні алгебри Лі є або класичними, або належать до таких картанівських серій. Ця гіпотеза була підтверджена в роботах Г. Штраде, Р. Вільсона та інших математиків (див., наприклад, [71]). Алгебри Лі із серій 1) - 4) є одними з найбільш популярних об'єктів для дослідження в останні роки, оскільки багато питань не тільки з алгебри, але й з інших розділів математики пов'язані з алгебрами Лі картанівських серій.

При дослідженні алгебр Лі диференціювань кілець многочленів і полів раціональних функцій використовуються такі підходи:

1) вивчення централізаторів елементів в алгебрах Лі, використовуючи специфіку її елементів, як диференціювань кілець (перестановочність диференціювань часто дозволяє вивчити їх достатньо глибоко);

2) вивчення максимальних абелевих підалгебр алгебри Лі диференціювань,

зрозуміло, що ця задача тісно пов'язана з попередньою;

3) дослідження ануляторів елементів кільця чи поля в заданій алгебрі Лі диференціовань цього кільця чи поля. Анулятори елементів є підалгебрами алгебри Лі і їх будова дозволяє більш детально дослідити структуру самої алгебри Лі;

4) перехід від алгебри Лі диференціовань кільця без дільників нуля до алгебри Лі диференціовань поля часток цього кільця. Остання алгебра Лі часто має більш прозору будову, що дозволяє в багатьох випадках зробити висновки про будову алгебри Лі диференціовань початкового кільця.

Вивчення централізаторів елементів і максимальних абелевих підалгебр в алгебрах Лі тісно пов'язане в ідейному плані з аналогічними задачами в теорії груп і теорії асоціативних алгебр. В теорії груп цією задачею займалися багато спеціалістів, зупинимося лише на деяких з них. В роботі Аміцура [13] вивчено будову централізатора $C[f]$ для лінійного диференціального оператора $f(D)$ в кільці лінійних диференціальних операторів (тут D – диференціовання поля характеристики нуль). Централізатори елементів у полях раціональних функцій вивчалися в роботі А. Бодена [22], а у випадку позитивної характеристики основного поля в роботі С. Скрябіна [59]. Зауважимо, що ще раніше централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри в алгебрах Вейля досліджувалися в роботах багатьох авторів (див., наприклад, [13], [24]). Аналогічно можна поставити питання про централізатори елементів у вільній асоціативній алгебрі над полем. Це питання розглядалося в роботі Г. Бергмана [21], де було доведено, що централізатор довільного елемента із такої алгебри (який не лежить в основному полі) має вигляд $K[f]$, де f - деякий елемент із цієї алгебри.

В роботі А. П. Петравчука і О. Г. Єни [53] дано опис централізаторів елементів в алгебрі Лі $sa_2(K)$ всіх диференціовань кільця многочленів $K[x,y]$ з нульо-

вою дивергенцією у випадку основного поля нульової характеристики, описано всі максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $sa_2(\mathbb{K})$ у випадку основного поля нульової характеристики. Також описано структуру просторів поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь $D(g) = ag$, $D \in sa_2(\mathbb{K})$ і отримано опис будови алгебри Лі $sa_2(\mathbb{K})$ у випадку основного поля простої характеристики $p > 0$, а також отримано аналогічні результати для алгебр Лі формальних степеневих рядів. Результати цієї роботи суттєво використовуються в останньому розділі дисертаційної роботи.

Зауважимо, що при вивченні централізаторів елементів в алгебрі Лі $sa_2(\mathbb{K})$ використовуються замкнені многочлени і раціональні функції, які вивчалися в роботах Бодена [22], Ф. Закса [72] та багатьох інших авторів. Відзначимо, що систематичне вивчення замкнених многочленів розпочалося в роботі М. Нагати і А. Новіцкі [46], де досліджувалися кільця констант диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. В цій роботі, зокрема, було доведено наступне твердження, яке буде використовуватися при вивченні диференціювань: якщо $\text{char } \mathbb{K} = 0$ і D – ненульове диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x, y]$, то кільце констант цього диференціювання має вигляд $\mathbb{K}[x, y]^D = \mathbb{K}[f]$ для деякого многочлена $f \in \mathbb{K}[x, y]$. Легко показати, що кожен незвідний многочлен із $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ є замкненим і тому природнім є питання, наскільки близькі замкнені многочлени до незвідних. Одними із перших у цьому напрямі була робота Ю. Стейна [70], який використовуючи методи алгебраїчної геометрії вказав верхню оцінку для кількості звідних елементів вигляду $f + c$, де f – незвідний у випадку многочленів від двох змінних і поля характеристики 0. Пізніше в роботах французьких математиків М. Аяда [15], [16] М. Наджиба [43], [44], [45] та інших була уточнена верхня оцінка для кількості елементів поля c , для яких сума $f + c$ є звідним многочленом. Замкнені многочлени та замкнені раціональні функції вивчались також у роботі В. Бавули [19], присвяченій в основному де-

яким узагальненням теореми Люрота для підполя степеня трансцендентності 1 поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$. У цій роботі були перенесені на поля раціональних функцій також деякі результати М. Нагати і А. Новіцкі про кільця констант диференціювань кільця многочленів від кількох змінних. Зокрема, В. Бавула довів, що для довільного ненульового диференціювання δ поля раціональних функцій $K(x, y)$ підполе констант також має вигляд $K(x, y)^\delta = K(f)$ для деякої раціональної функції $f \in K(x, y)$.

Важливим класом замкнених многочленів є слабо напівпрості многочлени. Хоча ці многочлени виникли в роботах Ю. Стейна [69] при розгляді питань, близьких до проблеми якобіана, вони тісно пов'язані із теорією алгебр Лі. При вивченні скінченновимірних алгебр Лі над алгебраїчно замкненими полями важливу роль відіграють двовимірні підалгебри. Якщо всі такі підалгебри в алгебрі Лі L абелеві, то L нільпотентна (це можна довести, використовуючи теорему Енгеля). Тому для дослідження алгебр Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних важливо мати інформацію про многочлени $f, g \in K[x, y]$ такі, що $[f, g] = \det J(f, g) = f$ (легко бачити, що такі многочлени утворюють базис двовимірної неабелевої підалгебри із алгебри Лі $P(x, y)$ над полем K , яка утворена із $K[x, y]$ заміною операції множення многочленів на операцію взяття якобіана цих многочленів. Ці многочлени були названі в роботі [69] слабо напівпростими і використовувались для дослідження деяких класів многочленів, пов'язаних із відомою проблемою якобіана. В цій роботі були вказані деякі властивості слабо напівпростих многочленів і поставлено загальне питання про їх опис. В дисертаційній роботі дано опис слабо напівпростих многочленів при умові, що змінні у них розділені. При цьому були використані результати роботи Лоренціні [40] про будову в'язок многочленів.

При вивченні алгебр Лі диференціювань кілець многочленів від кількох змінних важливою є інформація про анулятори многочленів із кільця в даній алге-

брі Лі. Це допомагає пов'язати будову алгебри Лі з будовою підалгебр і ідеалів кільця многочленів, на якому діє алгебра Лі диференціовань. Анулятори многочленів в алгебрі диференціовань кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$ вивчали Є. Єна, А. Петравчук, С. Аяд, Г. Фройденбург та інші.

Відзначимо також важливий клас диференціовань кілець многочленів, який складається із локально нільпотентних диференціовань. Нагадаємо, що диференціовання D називається локально нільпотентним, якщо для кожного елемента f кільця $K[x_1, \dots, x_n]$ існує таке натуральне число m_f , що $D^{m_f}(f) = 0$. Локально нільпотентні диференціовання визначають автоморфізми кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$, тому що експонента від такого диференціовання і є автоморфізмом кільця многочленів. В загальному випадку опис локально нільпотентних диференціовань є дуже важкою задачею, якою займалися багато відомих математиків, і де отримано результати лише в часткових випадках. Відзначимо зокрема, що в роботах Х. Дерксена [26] та Е. Фройденбурга [30] та [25] локально нільпотентні диференціовання досліджувалися з точки зору їх кілець констант. У випадку кільця многочленів $K[x, y]$ вони були описані Р. Ренчлером. Ним було доведено, що з точністю до спряження деяким автоморфізмом кільця многочленів вони мають вигляд

✘ Описание:
 ∂
 $D = f(y) \dots$

Сучасний стан теорії локально нільпотентних диференціовань викладено в монографії Г. Фройденбурга.

Розділ 2

Означення та допоміжні результати

Означення 2.0.1. Диференціюванням (точніше, K -диференціюванням) асоціативної K -алгебри R називається довільне лінійне відображення $\delta : R \rightarrow R$, яке задовольняє правило Ляйбніца $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$.

Множина усіх диференціювань алгебри R утворює векторний підпростір в $\text{Hom}_K(R, R)$, і позначається через $\text{Der}(R)$ або, точніше, $\text{Der}_K(R)$. Множина диференціювань $\text{Der}(R) \subseteq \text{Hom}_K(R, R)$ є замкненою відносно взяття комутатора

Описание: $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$ і є, таким чином, алгеброю Лі. Якщо $R = K[x_1, \dots, x_n]$ – кільце многочленів від n змінних, то кожне диференціювання кільця R має вигляд

Описание: $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}, f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Кожне диференціювання D кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$ однозначно продовжується до диференціювання поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$ за правилом $D(f/g) = (D(f)g - fD(g))/g^2$ для довільних многочленів $f, g \in K[x_1, \dots, x_n], g \neq 0$. Алгебра Лі всіх K -диференціювань кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$ позначається через $W_n(K)$, алгебра Лі K -диференціювань поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$ – через $W_n(K)$.

Якщо L – алгебра Лі і $x \in L$ – довільний елемент із L , то *централізатор елемента x в L* – це множина $C_L(x) = \{g \in L \mid [g, x] = 0\}$, це підалгебра

алгебри Лі L .

Означення 2.0.2. *Ненульове диференціювання кільця многочленів D називається редукованим, якщо з рівності $D = h D_1$, $h \in K[x_1, \dots, x_n]$, $D_1 \in W_n(K)$ випливає, що $h \in K^*$.*

Очевидно, що кожне диференціювання $D \in W_n(K)$ може бути записане у вигляді $D = h D_0$ де $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ і D_0 редуковане. Кожен многочлен $p \in K[x, y]$ визначає диференціювання $D_p \in W_2(K)$ (воно називається якобіанним диференціюванням) за правилом: $D_p(h) = \det J(p, h)$, де $J(p, h)$ – матриця Якобі многочленів p, h . Якщо p – незвідний многочлен, то ми позначаємо через δ_p редуковане диференціювання, яке відповідає диференціюванню D_p . Аналогічно кожна незвідна раціональна функція $p/q \in K(x, y)$ визначає якобіанне диференціювання $D_{p,q} = qD_p - pD_q \in W_2(K)$, редуковане до нього диференціювання будемо позначати через $\delta_{p,q}$.

Нехай $K(x_1, \dots, x_n)$ – поле раціональних функцій над полем K . Нагадаємо, що полем алгебраїчних функцій від n змінних над полем K називається скінченне алгебраїчне розширення $R \supseteq K(x_1, \dots, x_n)$ поля $K(x_1, \dots, x_n)$. Будова диференціювань поля алгебраїчних функцій схожа в багатьох випадках на будову диференціювань поля $K(x_1, \dots, x_n)$ і це дозволяє використовувати розроблені методи досліджень алгебри Лі $\boxed{\times}_n(K)$ для вивчення алгебри Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій.

Якщо S – деяка підмножина із поля раціональних функцій $R = K(x_1, \dots, x_n)$, то анулятор $\text{Ann}(S)$ підмножини S в $\boxed{\times}_n(K)$ – це підмножина всіх диференціювань поля R , які анулюють всі елементи множини S . Очевидно, $\text{Ann}(S)$ – підалгебра із алгебри Лі $\boxed{\times}_n(K)$ і векторний підпростір векторного простору $\boxed{\times}_n(K)$ над полем R .

Означення 2.0.3. *Многочлен $f \in K[x, y]$ називається слабко напівпростим, якщо існує многочлен $g \in K[x, y]$ такий, що $D_f(g) = \lambda g$ для ненульового $\lambda \in K$,*

многочлен g тут є власною функцією для f з власним числом λ .

Означення 2.0.4. Многочлен g будемо називати *слайсом* для диференціювання $D \in W_n(K)$, якщо $D(g) = 1$.

Нагадаємо, що підполе F поля R називається алгебраїчно замкненим в R , якщо кожний алгебраїчний над F елемент з R лежить в F . Якщо L підалгебра алгебри Лі $W(R)$, то полем констант для L в R називається підполе $F = F(L) = \{r \in R \mid D(r) = 0 \text{ для всіх } D \in L\}$.

Лема 2.0.1. Нехай $A \subseteq R$ ціле розширення кілець, і нехай R нормальна область цілісності. Тоді $Q(A) \subseteq Q(R)$ є також цілим (алгебраїчним) розширенням.

Теорема 2.0.2 (Gordan). Нехай $K = \mathbb{K}$ алгебраїчно замкнене поле і $K \subseteq E \subseteq K(x_1, \dots, x_n)$ – розширення полів степеня трансцендентності $\text{tr. deg}_K E = 1$. Тоді $E = K(e)$ для деякого елемента $e \in K(x_1, \dots, x_n)$.

Нехай δ диференціювання кільця многочленів від n змінних $K[x_1, \dots, x_n]$.

Означення 2.0.5. Многочлен f називається *многочленом Дарбу* (або *власним вектором*) для δ , якщо $\delta(f) = \lambda f$ для деякого многочлена λ (не обов'язково $\lambda \in K$). Многочлен λ називається *комножником диференціювання δ* (або *узагальненим власним значенням*), який відповідає многочлену Дарбу f . Іншими словами, f є поліноміальною власною функцією для δ з (узагальненим) власним значенням λ .

Відзначимо деякі властивості многочленів Дарбу.

Лема 2.0.3. (дивись, наприклад [22]). 1) Якщо f і g є многочленами Дарбу деякого диференціювання $\delta : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, \dots, x_n]$, що відповідають комножникам λ і μ відповідно, то тоді fg є многочленом Дарбу диференціювання δ , який відповідає комножнику $\lambda + \mu$;

2) Нехай h многочлен Дарбу диференціювання $\delta : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Тоді довільний дільник многочлена h теж є многочленом Дарбу для δ .

Теорема 2.0.4 (Ollagnier). Нехай \mathbb{K} поле характеристики нуль і $\delta : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ – диференціювання кільця многочленів від n змінних. Нехай t натуральне число. Тоді число множників, які відповідають многочленам Дарбу степеня не більше t скінченне.

Означення 2.0.6. Нехай $\delta : R \rightarrow R$ диференціювання \mathbb{K} -алгебри R . Тоді елементи ядра диференціювання $R^\delta := \text{Ker } \delta$ називаються константами диференціювання δ . Множина констант диференціювання δ є підкільцем (насправді \mathbb{K} -підалгеброю) у R . Це кільце називається кільцем констант диференціювання δ .

Константи диференціювання кільця многочленів є многочленами Дарбу, що відповідають множнику 0.

Лема 2.0.5. 1) Нехай \mathbb{K} поле характеристики нуль і R – \mathbb{K} -алгебра без дільників нуля. Тоді для довільного диференціювання $D : R \rightarrow R$ алгебри R підалгебра констант R^D цілозамкнена у R .

2) Нехай D диференціювання кільця $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ або поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Тоді множина констант диференціювання D є цілозамкненою підалгеброю в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ або у $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ відповідно.

В роботі А. Новічки і М. Нагати [46] було доведено наступну теорему.

Теорема 2.0.6 (Theorem 2.8, [46]). Нехай D диференціювання кільця $\mathbb{K}[x, y]$. Тоді існує многочлен $f \in \mathbb{K}[x, y]$, такий що $\text{Ker } D = \mathbb{K}[f]$.

Аналогічне твердження має місце для диференціювань поля раціональних функцій від двох змінних:

Теорема 2.0.7 (Corollary 2.6, [19]). *Нехай K алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, нехай D відмінне від нульового диференціювання поля $K(x,y)$. Тоді $\text{Ker } D = K(f)$ для деякого $f \in K(x,y)$.*

Цей факт часто використовується при вивченні диференціовань кільця многочленів від двох змінних.

Лема 2.0.8. *Якщо многочлени $f, g \in K[x_1, \dots, x_n] \setminus K$ алгебраїчно залежні, то існує многочлен $h \in K[x_1, \dots, x_n]$, такий що $f \in K[h]$ і $g \in K[h]$.*

Нагадаємо, що раціональні функції $f_1, \dots, f_k \in K(x_1, \dots, x_n)$ називаються алгебраїчно залежними, якщо існує відмінна від нуля раціональна функція $F(t_1, \dots, t_k) \in K(t_1, \dots, t_k)$ така, що $F(f_1, \dots, f_k) = 0$.

В наступній лемі зібрані, для зручності, еквівалентні умови алгебраїчної залежності двох раціональних функцій від кількох змінних.

Лема 2.0.9. *Для раціональних функцій $\varphi, \psi \in K(x_1, \dots, x_n) \setminus K$ наступні умови є еквівалентними:*

1) φ і ψ алгебраїчно залежні над K ;

2) ранг матриці Якобі $J(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ дорівнює 1;

3) для диференціалів $d\varphi$ і $d\psi$ функцій φ і ψ відповідно має місце $d\varphi \wedge d\psi = 0$;

4) існує функція $h \in K(x_1, \dots, x_n)$, така що $\varphi = F(h)$ і $\psi = G(h)$ для деяких раціональних функцій $F(t), G(t) \in K(t)$.

Розглянемо тепер алгебру многочленів від двох змінних $K[x,y]$ і введемо бінарну операцію на $K[x,y]$, визначену за правилом

$$[f, g] := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Очевидно, що ця операція є білінійною. Визначена так алгебра з введеною додатковою операцією називається алгеброю Пуассона і позначається $P_2(K)$.

Наступні результати отримані в роботах А. П. Петравчука і О. Г. Єни. Частина з них була узагальнена на алгебру Лі $W_2(K)$ всіх диференціювань кільця многочленів від двох змінних.

Означення 2.0.7. Множина усіх диференціювань кільця многочленів від двох змінних, що складається з диференціювань із нульовою дивергенцією, є підалгеброю в алгебрі Лі $Der(K[x, y])$ яка позначається

Описание: $\{ D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} \in Der(K[x, y]) \mid \text{div} D := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \}$

Теорема 2.0.10. Нехай поле $K = K$ алгебраїчно замкнене. Нехай многочлени $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ взаємно прості і алгебраїчно незалежні. Якщо хоча б один з них незвідний, то раціональна функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена.

Теорема 2.0.11. Нехай многочлени $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ взаємно прості і хоча б один з них не є сталим многочленом. Тоді раціональна функція $\varphi = \frac{f}{g}$ замкнена тоді і тільки тоді, коли у пучку гіперповерхонь $af + \beta g$ усі крім, можливо, скінченного числа гіперповерхонь є незвідними.

Теорема 2.0.12. Нехай $D = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ – ненульовий елемент алгебри Лі $sa_2(K)$. Нехай $f(x, y) \in K[x, y]$ такий многочлен, що

Описание: $\frac{\partial f}{\partial x} = Q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} - P(x, y)$

і нехай f породжуючий многочлен многочлена f . Тоді, якщо $f(x, y)$ не многочлен Якобі, то

Описание: $\frac{\partial f}{\partial x} = Q \frac{\partial f}{\partial y} - P$

Покладемо $R[X] = R[x_i; i \in I]$ – поліноміальне кільце над K -алгеброю R . Для кожного $I \in I$ частинна похідна $\frac{\partial}{\partial x_i}$ є R -диференціюванням в $R[X]$. Якщо $f: I \rightarrow R[X]$ є функцією, тоді існує однозначно визначене K -диференціювання

D в $R[X]$, таке що $D|R = d$ і $D(x_i) = f(i), \forall i \in I$.

Диференціювання D визначається наступним чином: якщо $w \in R[X]$, то

Описание: $D(w) = d(w) + \sum_{i=1}^n f(i) \frac{\partial w}{\partial x_i} + f(in) \frac{\partial w}{\partial x}$

для деяких $\{i_1, \dots, i_n\}$ деякої скінченної підмножини I , що $w \in R[x_1, \dots, x_n]$, то отримаємо:

Лема 2.0.13. Нехай $K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$ - поліноміальне кільце. Тоді:

1. Якщо $f_1, \dots, f_n \in K[X]$, тоді існує однозначно визначене K - диференціювання d в $K[X]$, що $d(x_1) = f_1, \dots, d(x_n) = f_n$. Це диференціювання

задається у вигляді $d = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$

2. $Der_K(K[X])$ є вільним $K[X]$ -модулем у базисі $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$

3. $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

4. Якщо $d \in Der_K(K[X])$ і $f \in K[X]$, тоді $d(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d(x_i)$

Лема 2.0.14. Нехай $d \in K$ - диференціювання в K -алгебрі A . Нехай $f \in K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$ і $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Тоді $f(a) \in A$ і виконується

Описание: $d(f(a)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) d(a_i)$

Лема 2.0.15. Нехай дано поля K та L , такі що $K \subseteq L$. Нехай d буде K - диференціюванням L і нехай $a = (a_1, \dots, a_n) \in L^n$. Якщо $F = f/g$ - елемент поля $K(x_1, \dots, x_n)$, такий що $g(a) \neq 0$, тоді $F(a) \in L$ і маємо

Описание: $d(f(a)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) d(a_i)$

Припустимо, що L – поле характеристики нуль і будемо вважати, що $L(t)$ поле раціональних функцій над L від однієї змінної t . Нехай $d = \square$ і $f = a/b$ (де a і b взаємoprості поліноми в $L[t]$) є елементом $L(t)$, такий що $d(f) = 0$. Тоді $d(a)b = ad(b)$ і тому $a|d(a)$ і $b|d(b)$. Тому $\deg d(a) < \deg a$ і $\deg d(b) < \deg b$, $d(a) = d(b) = 0$ і звідси $a, b \in L$, і тому $f \in L$. Таким чином $L(t)^d = L$ і отримаємо:

Лема 2.0.16. Нехай K – поле характеристики нуль і $d = \square$. Тоді $K(t, x_1, \dots, x_n)^d = K(x_1, \dots, x_n)$ і $K(t)[x_1, \dots, x_n]^d = K[x_1, \dots, x_n]$.

Теорема 2.0.17. Нехай дано поля K та L , такі що $K \subseteq L$. Наступні умови є еквівалентними:

1. L є алгебраїчним над K .
2. Для кожного диференціювання d поля K існує єдине диференціювання D над L , що $D|_K = d$.
3. Якщо δ є K -диференціюванням над L , тоді $\delta = 0$.

Лема 2.0.18. (see [40]). Нехай $f(x, y) = \prod_{i=1}^n l_i(x, y)^{r_i}$ добуток лінійних многочленів $l_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$. Припустимо, що $n \geq 2$ та прями $l_1(x, y) = 0$ та $l_2(x, y) = 0$ перетинаються. Якщо $\gcd(r_1, \dots, r_n) = 1$ тоді $f(x, y)$ є замкненим многочленом та многочлен $f(x, y) + c$ є незвідним для будь-якого $c \in K^*$.

Із даної леми випливає наступний наслідок:

Наслідок 2.0.19. Нехай $p(x) \in K[x]$ та $q(y) \in K[y]$ несталі многочлени такі, що $p(x)$ не має кратних коренів. Тоді многочлен $p(x)q(y) + c$ є незвідним для будь-якого $c \in K^*$.

Лема 2.0.20. Нехай D – K -диференціювання поля $K(x_1, \dots, x_n)$ і F – алгебраїчне розширення поля $K(x_1, \dots, x_n)$. Тоді існує єдине продовження D диференціювання D на F , тобто таке диференціювання, що $D|_{K(x_1, \dots, x_n)} = D$.

У розділі використовуються твердження, які можна знайти в [69].

Лема 2.0.21. Нехай $f, g \in K[x, y]$ такі многочлени, що g є незвідним та виконується співвідношення $[f, g] = hg$ для деякого многочлена $h \in K[x, y]$. Тоді існує елемент $c \in K$ такий, що g ділиться на многочлен $f - c$.

Цей розділ носить систематизуючий характер. В ньому наведено ряд основних означень та базових тверджень, які будуть в подальшому використовуватися у роботі.

Розділ 3

Централізатори елементів

В цьому розділі вивчаються централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри алгебр Лі диференціювань полів та кілець многочленів від кількох змінних. Нагадаємо, що централізатор множини S в алгебрі Лі L є наступна множина:

$$C_L(S) = \{x \in L \mid [x, s] = 0 \text{ для всіх } s \in S\}$$

Спочатку розглядаються централізатори в алгебрі Лі $W_2(K)$ над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Вказано основні властивості таких централізаторів та доведено основну теорему розділу, яка описує всі їх можливі види:

3.1 Централізатори елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$

Нехай D – ненульове диференціювання кільця $K[x, y]$. Продовжимо диференціювання D природнім чином на поле часток $K(x, y)$ цього кільця за правилом:

$$D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{aD - (a)D - aD(b)}{b^2}$$

Тоді очевидно, що D задовольняє одну з наступних умов:

- $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ співпадає з K .

- $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ містить многочлен відмінний від константи.
- $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ відрізняється від K і не містить жодного несталого многочлена.

Ми розглянемо ці випадки в лемах 3.1.2, 3.1.4 та 3.1.5.

Лема 3.1.1. Нехай $\varphi(t) = u(t)/v(t) \in K(t)$ нескоротний дріб та $\deg u = m$, $\deg v = n$. Якщо многочлени $p, q \in K[x, y]$ алгебраїчно незалежними над K і незвідними, то раціональна функція $\varphi(p/q) \in K(x, y)$ може бути записана в вигляді $\varphi(p/q) = u/v$, де $u, v \in K[x, y]$ однорідними многочленами від p, q одного й того ж степеня $\max(m, n)$. Ці многочлени можна вибрати взаємно простими.

Доведення. Безпосередня перевірка.

Лема 3.1.2. Нехай $D \in W_2(K)$ таке диференціювання, що $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ збігається з K . Тоді централізатор $C = C_{W_2}(D)$ або збігається з KD , або $C = KD + KD_1$ для деякого диференціювання D_1 такого, що диференціювання D та D_1 лінійно незалежними над $K(x, y)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок коли $C = C_{W_2}(D)$ має ранг 1 над $K(x, y)$. Якщо $\dim_K C = 1$, то $C = KD$ і все виконується.

Нехай тепер $\dim_K C > 1$ і D_1 такий елемент із C , що диференціювання D, D_1 лінійно незалежними над K . Оскільки $\text{rk}_K C = 1$, то існують такі многочлени $f, g \in K[x, y]$, що $fD + gD_1 = 0$ (принаймні один з них не рівний константі). Тоді існує зведене диференціювання D_0 і многочлени $\alpha, \beta \in K[x, y]$ такі, що

$$fD + gD_1 = 0$$

Оскільки D, D_1 лінійно незалежними над K випливає, що принаймні один з многочленів α, β відмінний від константи і α/β – раціональна функція, що не рівна константі і тому маємо:

$$0 = fD + gD_1 = f\alpha D_0 + \beta D_0 = (f\alpha + \beta)D_0 = (f\alpha + \beta)D$$

Тоді отримаємо

$$\alpha D(\beta) - D(\alpha)\beta = 0 \dots$$

Але тоді $D(\alpha) = 0$ і з того, що $\alpha \in K$ ми отримали протиріччя до нашого припущення щодо диференціювання D . Тому маємо

$$\dim K C = 1 \text{ і } C = \mathbb{C}W_2(D) = KD.$$

Припустимо тепер що C має ранг 2 над $R = K(x, y)$. Тоді існує такий елемент $D_1 \in C$, що диференціювання D_1, D є лінійно незалежними над $K(x, y)$. Нехай D_2 – довільний елемент з C , запишемо його у вигляді: $D_2 = uD + vD_1$ для деяких $u, v \in K(x, y)$. Але тоді

$$[D, D_2] = D(u)D + D(v)D_1 = 0 \dots$$

і, беручи до уваги лінійну незалежність D, D_1 над $K(x, y)$, ми отримаємо $D(u) = 0$ і $D(v) = 0$. Оскільки $\text{Ker } D = K$ (в полі $K(x, y)$) ми отримаємо, що $u, v \in K$ та $D_2 \in KD + KD_1$ тобто $C \subseteq KD + KD_1$. Очевидно, має місце $KD + KD_1 \subseteq C$ і тому ми маємо $C = KD + KD_1$.

Наступне твердження може бути легко отримане безпосереднім застосуванням стандартних методів із диференціальної алгебри, див. також [35].

Лема 3.1.3. ([35]) *Нехай $D \in W_2(K)$ таке диференціювання, що його ядро $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ містить многочлен, який не є константою. Тоді $D = h\delta_p$, де $h \in K[x, y], \delta_p$ є зведеним диференціюванням, яке відповідає яacobіанному диференціюванню D_p для незвідного многочлена $p = p(x, y) \in K[x, y]$.*

Означення 3.1.1. (див, також [53]).

1. *Нехай $p = p(x, y)$ – незвідний многочлен. Многочлен $f = f(x, y)$ будемо називати p -вільним, якщо f не ділиться ні на який многочлен від p додатнього степеня. Кожний многочлен $g \in K[x, y]$ може бути записаний*

у вигляді $g = g_0 g_1$, де $g_0 \in p$ -вільним многочленом і $g_1 = g_1(p) \in$ многочленом від p (може бути $g_1 = \text{const}$). Степінь многочлена $g_1(p)$ в p будемо називати p -степенем g і позначати через $\text{deg}_p g$.

- Нехай p і q алгебраїчно незалежні многочлени з кільця $\mathbb{K}[x, y]$. Многочлен $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ будемо називати p - q -вільним, якщо f не ділиться на жоден однорідний многочлен від p та q додатнього степеня. Як і раніше, кожний многочлен $g \in \mathbb{K}[x, y]$ може бути записаний у вигляді $g_0 g_1$, де $g_0 \in p$ - q -вільним многочленом і $g_1 = h(p, q)$ для деякого однорідного многочлена $h(s, t) \in \mathbb{K}[s, t]$. Сумарний степінь h по s, t будемо називати p - q -степенем g і позначати через $\text{deg}_{p,q} g$.

Зауваження 1. Можна легко довести, що обидва розклади $g = g_0 g_1$ в вище написаному Означенні 3.1.1 є однозначними з точністю до ненульових скалярних множників.

Лема 3.1.4. *Нехай $D \in W_2(\mathbb{K})$ таке диференціювання, що $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ містить многочлен відмінний від константи. Тоді $D = hf(p)\delta_p$, де $p \in$ незвідним многочленом із $\text{Ker } D$, $h \in p$ -вільним многочленом і $\delta_p \in$ зведеним диференціюванням для якобіанного диференціювання D_p . Централізатор $C_{W_2}(D)$ є одним з наступних:*

- $C_{W_2}(D) = \mathbb{K}[p]h\delta_p$.
- $C_{W_2}(D) = \mathbb{K}[p]h\delta_p + \mathbb{K}[p]D_1$.

для деякого $D_1 \in C_{W_2}(D)$ такого, що $D_1, D \in$ лінійно незалежними над $\mathbb{K}(x, y)$.

Доведення. Використовуючи Лему 3.1.3, ми можемо записати диференціювання D у вигляді $D = g\delta_p$, де $\delta_p \in$ зведеним диференціюванням для D_p . Многочлен $g = g(x, y)$ може бути записаний, з огляду на Зауваження 1, у вигляді $g = hf(p)$, де $f(p) \in$ многочленом від p (можливо $f(p) = \text{const}$) і $h = h(x, y) \in p$ -вільним

многочленом.

Розглянемо спочатку випадок $rk_R C = 1$. Тоді будь-яке диференціювання $D_1 \in C_{W_2}(D)$ записується у вигляді $D_1 = g_1 \delta_p$, для деякого многочлена $g_1 \in K[x, y]$. З рівності

$$0 = [D, D_1] = [hf(p)\delta_p, g_1 \delta_p] = (f(p)\delta_p(h)g_1 - hf(p)\delta_p(g_1))\delta_p \dots$$

випливає, що

$$\delta_p(h)g_1 - h\delta_p(g_1) = 0$$

і тому $\delta_p(g_1/h) = 0$. Але тоді $g_1/h = \varphi(p)$, для деякої раціональної функції $\varphi(t) \in K(t)$ (оскільки $\text{Ker } \delta_p = K(p)$ в $K(x, y)$). Тому $g_1/h = u(p)/v(p)$ для деяких многочленів $u(t), v(t) \in K[t]$ (ці многочлени можуть бути обрані взаємно простими). З попередньої рівності ми отримали $g_1 v(p) = hu(p)$. Якщо многочлен $v(t)$ є відмінним від константи, тоді, беручи до уваги умову $K = K$ ми бачимо, що кожний дільник $v(p)$ вигляду $p - \lambda_i, \lambda_i \in K$ ділить многочлен h . Але останнє неможливо із-за вибору h і тому $v(p) = \text{const}$. Позначимо $u_1(t) = u(t)/v \in K$. Тоді ми маємо $g_1 = hu_1(p)$ і

$$D_1 = g_1 \delta_p = hu_1(p)\delta_p \in K[p]h\delta_p$$

Оскільки диференціювання D_1 було обрано довільним чином ми отримали $C_{W_2}(D) \subseteq K[p]h\delta_p$. Очевидно, що $K[p]h\delta_p \subseteq C_{W_2}(D)$ і тому ми отримали рівність

$$C_{W_2}(D) = K[p]h\delta_p$$

Таким чином, централізатор $C_{W_2}(D)$ має тип 1.

Нехай тепер $C = C_{W_2}(D)$ має ранг 2 над $R = K(x, y)$. Зауважимо, що для будь-якого диференціювання $D_1 \in C_{W_2}(D)$, яке задовольняє умову

$$D_1^2 = 0$$

впливає, що $D_1(p) \in \text{Ker } D$. Оскільки $\text{Ker } D = K[p]$ (в $K(x, y)$), тоді $D_1(p) = f_1(p)$ для деякого многочлена $f_1(t) \in K[t]$. Візьмемо такий елемент $D_1 \in$

$C_{W_2}(D)$, що многочлен $f_1(t)$ має найменший можливий степінь. Візьмемо тепер довільне диференціювання $D_2 \in C_{W_2}(D)$ і покладемо $D_2(p) = f_2(p)$. Покажемо, що многочлен $f_2(t)$ ділиться на $f_1(t)$.

Від супротивного. Дійсно, нехай це не виконується. Тоді для деякого $f_2(t) \in K[t]$ ми маємо, що $\gcd(f_2, f_1) = g(t)$ є степеня меншого, ніж $\min(\deg f_1, \deg f_2)$. Тоді існують многочлени $a(t), b(t) \in K[t]$ такі, що $g(t) = a(t)f_1(t) + b(t)f_2(t)$. Але тоді диференціювання $D_3 = a(p)D_1 + b(p)D_2$ задовольняє умову

Описание: $[D, D_3] = 0, D_3(p) = g(p)$.

Остання рівність суперечить вибору диференціювання D_1 . Тому $f_2(t)$ ділиться на $f_1(t)$.

Покладемо $\mu(t) = f_2(t)/f_1(t)$. Легко побачити, що

Описание: $(D_2 - \mu(p)D_1)(p) = D_2(p) - \mu(p)D_1(p) = f_2(p) - \mu(p)f_1(p) = 0$.

Остання рівність, зважаючи на попередні леми, означає що

Описание: $D_2 - \mu(p)D_1 = \dots$

для деякого многочлена $g \in K[x, y]$. З того, що $D_2 - \mu(p)D_1 \in C$ і з вище доведеного випливає, що $g = u(p)h$ для деякого $u(p) \in K[p]$. Таким чином,

Описание: $D_2 = K(p)D_1 + K(p)h\delta_p$.

Обернене включення є очевидним. Отже, маємо

Описание: $C_{W_2}(D) = K[p]D_1 + K[p]h\delta_p \dots$

Лема 3.1.5. Нехай $D \in W_2(K)$ таке диференціювання, що $\text{Ker } D \neq K$ в $K(x, y)$ і $\text{Ker } D$ не містить несталих многочленів. Тоді $D = hf(p, q)\delta_{p, q}$ де $p, q \in K$ алгебраїчно незалежними незвідними многочленами над K , такими що

$\text{Ker } D = \mathbb{K}(\square)$, $f(p,q)$ – однорідний від p і q многочлен степеня $m \geq 0$, многочлен $h \in p$ - q -вільним і $\delta_{p,q}$ є зведеним диференціюванням для $qD_p - pD_q$. Тоді централізатор $C = C_{W_2}(D)$ є одним із наступних типів:

1. $C = \mathbb{K}[p,q]_m h \delta_{p,q}$, де $\mathbb{K}[p,q]_m$ – простір всіх однорідних від p,q многочленів степеня $m = \text{deg}_{p,q} f$, зокрема $\dim_{\mathbb{K}} C = m + 1$

2. $C = (\mathbb{K}(\square)D + \mathbb{K}(\square)D_1) \cap W_2(\mathbb{K})$, де $D_1 \in C$ такий, що D, D_1 є лінійно незалежними над $\mathbb{K}(x,y)$. Підалгебра C є скінченно вимірною над \mathbb{K} , і якщо $D = P \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$, $D_1 = P_1 \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$, $\Delta = PQ_1 - P_1Q$ і $\text{deg}_{p,q} \Delta = s$, тоді $\dim_{\mathbb{K}} C \leq m + s + 2$, де $m = \text{deg}_{p,q} f$

Доведення. Оскільки за умовою $\text{Ker } D \neq \mathbb{K}$, то підполе $\text{Ker } D$ містить несталу раціональну функцію. Зауважимо, що підполе $\text{Ker } D$ є алгебраїчно замкненим підполем поля $\mathbb{K}(x,y)$, тому $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} \text{Ker } D = 1$. З теореми Жордана (див., наприклад, [57], теорема 3) випливає, що $\text{Ker } D = \mathbb{K}(\square)$ для несталої раціональної функції p/q . Многочлени p і q можуть бути обрані незвідними (дивись, наприклад, [54]). Можна легко показати, що $D = hf(p,q)\delta_{p,q}$, де $\delta_{p,q}$ є зведеним диференціюванням для диференціювання $qD_p - pD_q$, $h \in p$ - q -вільним і $f(p,q)$ є однорідним многочленом від p,q . Позначимо $m = \text{deg}_{p,q} f$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $C = C_{W_2}(D)$ має ранг 1 над полем $\mathbb{K}(x,y)$. Візьмемо довільний елемент $D_1 \in C$. Тоді $D_1 = d_1 \delta_{p,q}$ для деякого многочлена d_1 . Многочлен d_1 може бути записаний у вигляді $d_1 = f_1 h_1$, де $f_1 = f_1(p,q)$ є однорідним по p,q многочленом і $h_1 \in p$ - q -вільним. Диференціювання D і D_1 задовольняють умову

$$\square \text{ Описание: } [D, D_1] = [hf \delta_{p,q}, h_1 f_1 \delta_{p,q}] = 0$$

Але тоді

$$\square \text{ Описание: } \delta_{p,q}(hf) h_1 f_1 - hf \delta_{p,q}(h_1 f_1) = 0$$

і тому $\delta_{p,q}(hf/h_1f_1) = 0$. Остання рівність означає, що

$$\text{Opisaniye: } -hf - \frac{p}{h_1f_1} \text{ Ker } D = K(\dots)$$

і

$$\text{Opisaniye: } hf/h_1f_1 = u(p, q)/v(p, q)$$

для деяких однорідних (від p, q) многочленів u, v того ж самого степеня (дивись Лему 3.1.1). Ми можемо обрати ці многочлени взаємопростими як многочлени від p, q . Але тоді вони є взаємопростими як многочлени від x, y , тому що $p - \lambda_i q$ та $p - \lambda_j q$ є взаємно простими, це забезпечується тим, що $\lambda_i \neq \lambda_j$.

З даних міркувань випливає, що $hfv = h_1f_1u$, де fv, f_1u – однорідні многочлени від p, q і h, h_1 – $p-q$ -вільні многочлени. Оскільки розклад у добуток $p-q$ -вільного многочлена та однорідного многочлена від p, q є унікальним з точністю до ненульового скалярного множника, то випливає, що $h_1 = hc$ для деякого $c \in K^*$. Оскільки за вибором цих многочленів виконується

$$\text{Opisaniye: } \text{deg } p - q = \text{deg} \dots$$

то ми бачимо, що $\text{deg}_{p,q} f_1 = \text{deg}_{p,q} f = m$. Тоді

$$\text{Opisaniye: } D_1 = f_1 h_1 \delta_{p,q} \in K[p, q]_m \delta_{p,q}$$

де $K[p, q]_m$ є векторним простором всіх однорідних від p, q многочленів степеня m по p, q . Легко бачити, що

$$\text{Opisaniye: } K[p, q]_m \delta_{p,q}$$

і тому $C = K[p, q]_m h \delta_{p,q}$. Тому централізатор є типу 1 із умов леми.

Нехай тепер $C_{w_2}(D)$ є рангу 2 над $K(x, y)$. Запишемо

$$\text{Opisaniye: } D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_1 = P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y}$$

де

$$\text{Описание: } P, Q, P_1, Q_1 \in K[x, \dots]$$

і покладемо

$$\text{Описание: } \Delta_1 = P \Omega_1 - \dots$$

Далі, візьмемо інший елемент $D_2 \in C$, такий що $D, D_2 \in$ також лінійно незалежними над $K(x, y)$. Тоді $D_2 = \alpha D + \beta D_1$ для деяких $\alpha, \beta \in K(x, y)$. З наступної рівності

$$\text{Описание: } 0 = [D, D_2] = [D, \alpha D + \beta D_1] = D(\alpha)D + D(\beta)D_1 \dots$$

отримаємо, що $D(\alpha) = D(\beta) = 0$ (із-за лінійної незалежності D, D_1). Але тоді $\alpha, \beta \in K(\square)$ (пригадаємо, що $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ співпадає з $K(\square)$) і тому

$$\text{Описание: } C \subseteq (K(\square))^D + K(\square)^{D_1} \subseteq W_2(K)$$

Протилежне включення теж вірне, тому маємо

$$\text{Описание: } C = (K(\square))^D + K(\square)^{D_1} \subseteq W_2(K).$$

Тепер запишемо диференціювання D_2 у вигляді:

$$\text{Описание: } D_2 = P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

де $P_2, Q_2 \in K[x, y]$ і позначимо

$$\text{Описание: } \Delta_2 = P \Omega_2 - P_2$$

Оскільки

$$\text{Описание: } P_2 = \alpha P + \beta P_1, \quad \Omega_2 = \alpha \Omega + \beta \Omega_1.$$

то ми маємо $\Delta_2 = \beta \Delta_1$. Рациональна функція $\beta \in K(\square)$ може бути записана у вигляді $\beta = u/v$, де $u, v \in$ однорідними многочленами від x, y і $\deg_{p-q} u = \deg_{p-q} v$ (дивись Лему 3.1.1). Тоді з рівності $\Delta_2 = \beta \Delta_1$ і умови $\Delta_1, \Delta_2 \in K[x, y]$ ми отримаємо, що многочлени Δ_1 та Δ_2 мають однаковий $p-q$ -ступінь. Крім того,

ці многочлени мають однакову $p-q$ -вільну частину аж до ненульових скалярних множників.

Нехай $\deg_{p,q} \Delta_i = s$. Зауважимо, що векторний простір $K[p, q]_s$ всіх однорідних многочленів степеня s від p, q має розмірність $s + 1$ над K . Централізатор $C = C_{W_2(D)}$ має K -підпростір C_0 , який складається із всіх лінійно залежних диференціювань з D . За вище доведеним підпростір C_0 має розмірність m над K , де $m \in p-q$ -степенем многочлена f з розкладу $D = hf\delta_{p,q}$. Візьмемо довільні диференціювання $T_1, \dots, T_{s+2} \in C$, запишемо їх як

$$T_i = P_i \frac{\partial}{\partial x} + Q_i \frac{\partial}{\partial y}, i = 1, \dots, s + 2$$

і позначимо

$$\Delta_i = P_i \frac{\partial}{\partial x} + Q_i \frac{\partial}{\partial y}$$

Оскільки визначники Δ_i мають однакові $p-q$ -вільні частини (з точністю до ненульових скалярних множників) і $\dim_K K[p, q]_s = s + 1$, то існують елементи $c_1, \dots, c_{s+2} \in K$ такі, що $c_1 \Delta_1 + \dots + c_{s+2} \Delta_{s+2} = 0$ і принаймні один з c_i є ненульовим. Розглянемо диференціювання T :

$$T = c_1 T_1 + \dots + c_{s+2} T_{s+2} = U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}$$

з централізатора C , де $U, V \in K[x, y]$. Очевидно, що

$$T = U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}$$

і ця рівність означає те, що D та T є лінійно залежними над $K(x, y)$, тобто $T \in C_0$. Тому $\dim C/C_0 \leq s + 1$. Але тоді розмірність C над K не перевищує $(m + 1) + (s + 1) = m + s + 2$.

Теорема 3.1.6. Нехай D довільний ненульовий елемент з $W_2(K)$. Тоді централізатор $C = C_{W_2(D)}$ є підалгеброю одного з наступних типів:

1. $C = KD$, якщо $\text{Ker } D$ в $K(x, y)$ співпадає з K .

2. $C = KD + KD_1$, якщо $\text{Ker } D$ в $K(x,y)$ співпадає з K та існує диференціювання D_1 таке, що $[D, D_1] = 0$ і D, D_1 є лінійно незалежними над $K(x,y)$.
3. $C = K[p]h\delta_p$, якщо $\text{Ker } D$ в $K(x,y)$ містить несталий многочлен, цей многочлен p може бути вибраний незвідним, $D = hf\delta_p$, де f є многочленом від p , многочлен h є p -вільним і δ_p є зведеним диференціюванням для D_p .
4. $C = K[p,q]_m h\delta_{p,q}$ якщо $\text{Ker } D$ містить несталу раціональну функцію p/q і не містить многочленів, відмінних від константи, $\text{Ker } D = K(\square)$, $D = hf\delta_{p,q}$, де f є однорідним многочленом від p, q степеня m , h є $p - q$ -вільним многочленом та $\delta_{p,q}$ є зведеним диференціюванням для диференціювання $qD_p - pD_q$.
5. $C = (K(\square)D + K(\square)D_1) \cap W_2(K)$, де D задовольняє всі умови з попередньої частини теореми, D та D_1 є лінійно незалежними над $K(x,y)$ та $[D_1, D] = 0$. Якщо $D = P\square + Q\square$, $D_1 = P_1\square + Q_1\square$ та $\Delta = PQ_1 - P_1Q$, то $\dim_K C \leq m + s + 2$, де число m таке ж як в пункті 4 даної теореми і $s = \deg_{p-q} \Delta$.

Доведення. Твердження теореми є наслідком всіх доведених вище лем з даного розділу, тобто лем 3.1.2, 3.1.4 та 3.1.5.

Наслідок 3.1.7. Якщо $D \in W_2(K)$ і $C_{W_2}(D)$ є нескінченновимірним над полем K , тоді $\text{Ker } D$ містить несталий многочлен, який може бути вибраний незвідним.

Теорема 3.1.8. Нехай L максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $W_2(K)$. Тоді алгебра Лі L є однією із наступних:

1. Одновимірної вигляду KD , де $D \in W_2(K)$ та $\text{Ker } D$ в $K(x,y)$ співпадає з K .

2. Двовимірна вигляду $KD + KD_1$, де D, D_1 є лінійно незалежними над $K(x, y)$.
3. Скінченно вимірна вигляду $K[p, q]_m h \delta_{p, q}$, де $h \in K[x, y]$, $K[p, q]_m$ є векторним простором всіх однорідних по p, q многочленів степеня m (дивись Теорему 3.1.6).
4. Нескінченно вимірна вигляду $K[p]h \delta_p$, де $h \in K[x, y]$, $K[p]$ є векторним простором многочленів від p (дивись Теорему 3.1.6).

Доведення. Нехай L максимальна абелева підалгебра в $W_2(K)$. Якщо $rk_{K(x, y)} L = 2$, тоді L містить елементи D_1 та D_2 , які утворюють базис $W_2(K)$ над $K(x, y)$ (як векторний простір). Але тоді кожний елемент D з L може бути записаний у вигляді

$$D = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2$$

для деяких $\alpha_1, \alpha_2 \in K(x, y)$. Оскільки

$$D_1^2 = 0, D_2^2 = 0, D_1 D_2 = 0$$

то ми маємо, що $D_1(\alpha_i) = 0, D_2(\alpha_i) = 0, i = 1, 2$. Останнє означає, що $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ і тому $L = KD_1 + KD_2$. Таким чином, алгебра L є типу 2 із умов даної теореми.

Нехай тепер $rk_{K(x, y)} L = 1$. Візьмемо довільний ненульовий елемент $D \in L$. Якщо $\dim_K L = \infty$, тоді $L \subseteq C_{W_2}(D)$ і $C_{W_2}(D) = K[p]h \delta_p$ за Теоремою 3.1.6. Оскільки централізатор $C_{W_2}(D)$ є абелевим, то впливає, що $L = C_{W_2}(D)$ та L є типу 4. Якщо $\dim_K L < \infty$, тоді повністю аналогічно показується, що L є типу 1 чи 3.

3.2 Централізатори елементів в алгебрах Лі диференціювань полів

В цьому підрозділі ми вивчаємо нескінченновимірні алгебри Лі над полями характеристики 0.

Нехай K — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $K(x_1, \dots, x_n)$ — поле раціональних функцій над K і $R \supseteq K(x_1, \dots, x_n)$ — алгебраїчне розширення поля $K(x_1, \dots, x_n)$ (не обов'язково скінченне). Помітимо, що в випадку $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$, з геометричної точки зору диференціювання можна розглядати як векторні поля на відповідних гладких многовидах. Відомо, що знання структури централізаторів елементів алгебри Лі дає важливу інформацію про саму алгебру Лі (див. наприклад, [20], [37], [53], [62]). Нижче, в наступних лемах наводяться добре відомі комутаторні співвідношення і властивості диференціювань.

Лема 3.2.1. *Нехай R — алгебраїчне розширення поля $K(x_1, \dots, x_n)$. Тоді $\text{Der}_K R$ — векторний простір над полем R розмірності n і диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, отримані продовженням частинних похідних поля $K(x_1, \dots, x_n)$ на R утворюють базис R -простора $\text{Der}_K(R)$.*

Нехай L — довільна підалгебра алгебри Лі $W(R) = \text{Der}_K R$. Позначемо через RL множину всіх K -лінійних комбінацій елементів виду aD , де $a \in R, D \in L$; аналогічно можна визначити підмножину FL , де F — поле констант алгебри Лі L в R .

Лема 3.2.2. *Нехай L — підалгебра із $W(R)$ і FL, RL визначені вище. Тоді FL і RL є підалгебрами алгебри Лі $W(R)$ над полем K . Крім того, FL є алгеброю Лі над полем F .*

Наступна лема показує, що централізатори є векторними просторами над відповідними підполями констант:

Лема 3.2.3. Нехай $D \in \text{Der}_k(R)$, $D \neq 0$ і $F = \text{Ker } D$ - поле констант для D в R . Тоді централізатор $C = C_{\text{Der}_k(R)}(D)$ є векторним простором над F розмірності $\leq n$.

Доведення. Очевидно, що $F = \text{Ker } D$ є підполем поля R . Позначимо через k ранг системи векторів C над R , $k = \text{rk}_R C$ і візьмемо довільний базис $\{D_1, \dots, D_k\}$ системи C над R . Очевидно, що

$$C = F D_1 + \dots + F D_k$$

Візьмемо тепер довільний елемент $D \in C$. Тоді $D = a_1 D_1 + \dots + a_k D_k$ для деяких $a_1, \dots, a_k \in R$. Із рівності

$$D(a_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

випливає, що $D(a_i) = 0$, $i = 1, \dots, k$, тобто $a_i \in F$, $i = 1, \dots, k$. Але тоді $C = F D_1 + \dots + F D_k$ – векторний простір над полем F розмірності $k = \text{rk}_R C \leq n$.

Наслідок 3.2.4. Якщо в умовах Лема 3.2.3 $F = K$, то централізатор $C = C_{\text{Der}_k(R)}(D)$ — скінченновимірна над K підалгебра з алгебри Лі $W(R)$ і для її розмірності виконується нерівність

$$\dim C \leq n - k$$

Зауваження 2. У формулюванні Лема 3.2.3 векторний простір C над полем констант F може не бути алгеброю Лі над F , хоча C , звичайно ж, є алгеброю Лі над полем K .

Наступне твердження, швидше за все, не є новим, але не маючи точного посилання, ми наведемо його з доведенням.

Лема 3.2.5. Нехай D_1, \dots, D_k – лінійно незалежні над R елементи з $W(R) = \text{Der}_k(R)$. Тоді підполе констант $S = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } D_i$ для системи $\{D_1, \dots, D_k\}$ має степінь трансцендентності над K не вище ніж $n - k$.

Доведення. Нехай твердження леми не виконується і

Описание: $m = \text{tr.deg } K^S > n - k.$

Виберемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_m\}$ для S над полем K . Доповнимо його до базиса трансцендентності поля R над K якими-небудь елементами y_{m+1}, \dots, y_n і розглянемо диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}$ підполя $K(y_1, \dots, y_n)$ з R . Продовжимо ці диференціювання на R (таке продовження існує і єдине, оскільки R – алгебраїчне розширення поля $K(y_1, \dots, y_n)$). Збережемо для зручності для продовжень диференціювань ті ж самі позначення. Диференціювання

Описание: $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}, D_1, \dots, D_k$

поля R лінійно залежні над R , оскільки $m + k > n = \dim_R W(R)$ за нашим припущенням. Тому існує нетривіальна лінійна комбінація

Описание: $\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m} + \beta_1 D_1 + \dots + \beta_k D_k = 0,$

Де $\alpha_i, \beta_j \in R, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k$. Оскільки $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}$ — лінійно незалежні над R , то хоча б один з коефіцієнтів $\beta_j, j = 1, \dots, k$ ненульовий. Розглянемо диференціювання наступного вигляду

Описание: $D = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m} - \beta_1 D_1 - \dots - \beta_k D_k.$

Всі елементи y_{m+1}, \dots, y_n , очевидно, лежать в

Описание: $\text{Ker } D = \text{Ker} \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m} \right)$

і тому

Описание: $D = -\beta_1 D_1 - \dots - \beta_k D_k$

містить у своєму ядрі елементи $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$. Останнє означає, що $D = 0$, що суперечить відміченому вище. Отримана суперечність показує що $m \leq n - k$.

Лема 3.2.6. Нехай K — алгебраїчно замкнене поле характеристики 0 , $R \supseteq K(x_1, \dots, x_n)$ — алгебраїчне розширення $K(x_1, \dots, x_n)$ і F — підполе з R , алгебраїчно замкнене в R , яке містить K . Позначимо:

$$N_0 = \{D \in W(R) \mid D(F) = 0\}.$$

$$N_1 = \{D \in W(R) \mid D(F) \subseteq F\}.$$

Тоді $N_0 \subseteq N_1$, N_0, N_1 — підалгебри алгебри Лі $W(R)$ і N_0 — ідеал алгебри Лі N_1 , який є векторним простором над R розмірності $\dim_R N_0 = n - \text{tr.deg}_K F$. Далі, в N_1 існує підалгебра $M, M \simeq \text{Der}_K F$ така, що $N_1 = M \ltimes N_0$ — напівпряма сума.

Доведення. Якщо $D_1 \in N_0, D_2 \in N_1$, то для довільного елемента $f \in F$ маємо

$$D_1(D_2(f)) = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = 0$$

і тому, як неважко перевірити, N_0, N_1 — підалгебри алгебри Лі $W(R)$ і N_0 — ідеал в N_1 . Якщо $D \in N_0$, то для довільного $g \in R$ маємо $gD(F) = 0$ і тому $gD \in N_0$, тобто N_0 — векторний простір над полем R . Нехай $m = \text{tr.deg}_K F$. Покажемо, що $\dim_R N_0 = n - m$. Виберемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_m\}$ поля F над K і доповнимо його якими-небудь елементами y_{m+1}, \dots, y_n до базиса трансцендентності поля R над K . Диференціювання $\partial_i, i = 1, \dots, n$ підполя $K(y_1, \dots, y_n)$ продовжимо (не змінюючи позначень) до диференціювань поля R . За умовою підполе F алгебраїчно замкнене в R і тому для диференціювань

$\partial_1 \circ, \dots, \partial_m$ виконуються рівності

$$\partial_1 \dots \partial_m (F) = \dots = \partial_1 \dots \partial_m (F) = 0, \dots$$

оскільки $\partial_j(y_i) = 0, i = m + 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Тому

$$\partial_1 \dots \partial_m (F) = \dots = \partial_1 \dots \partial_m (F) = 0, \dots \in N_0$$

і, оскільки дані диференціювання лінійно незалежні над R , то $\dim {}_R N_0 \geq n - m$. Але, якби підалгебра N_0 містила більше, ніж $n - m$ лінійно незалежних над R елементів, то степінь трансцендентності F над полем K не перевищував би $n - (n - m + 1) = m - 1$ з огляду на Лему 3.2.5, що неможливо, бо за умовою леми $tr.deg_K F = m$. Тому

Описание: $\dim R N_0 = n - m = n - tr.deg KF.$

Покладемо $M = F \square + \square + F \square$. Легко бачити, що це підалгебра з $W(R)$. Очевидно, що $M(F) \subseteq F$ і тому M – підалгебра з N_1 . Неважко переконатися також, що $M \simeq Der_K F$. Безпосередньо перевіряється, що підалгебра N_0 має вигляд:

Описание: $N_0 = R \frac{\partial}{\partial y_{m+1}} + \square \square \square + R \frac{\partial}{\partial y_n}$

Нехай тепер $D \in N_1$. Тоді D індукує деяке диференціювання поля F . Нехай

Описание: $D(v_1) = f_1, \dots, D(v_m) = f_m$

для деяких $f_1, \dots, f_m \in F$. Але тоді, як неважко переконатися,

Описание: $D - (f \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + f \frac{\partial}{\partial y_m}) \in N_0$

Отже, $N_1 = M \ltimes N_0$, оскільки $M \cap N_0 = 0$.

Зауваження 3. У формулюванні Лема, при додаткових умовах $F \neq K$ та $F \neq R$ обидві підалгебри N_0 і M є простими алгебрами Лі за основним результатом роботи [36] і, таким чином, підалгебра N_1 розкладається в напівпрямую суму двох простих підалгебр.

Лема 3.2.7. Нехай $D \in Der_K(R)$, $D \neq 0$ $C = C_{Der_K(R)}(D)$ – централізатор елемента D і $F = Ker D$ – поле констант диференціювання D в R . Далі, позначимо $I = \{T \in C \mid T(F) = 0\}$. Тоді I – ідеал алгебри Лі C (як алгебри Лі над полем K) і $rk_R C - rk_R I \leq tr.deg_K F$.

Доведення. Легко бачити, що $C(F) \subseteq F$ (тобто для довільного $T \in C$ виконується включення $T(F) \subseteq F$). Тому, як неважко переконатися, I — ідеал алгебри Лі C (яка розглядається як алгебра Лі над полем K). Виберемо який-небудь базис $\{D_1, \dots, D_m\}$, $m = rk_R I$ для системи векторів I над полем R і доповнимо цю систему якими-небудь векторами D_{m+1}, \dots, D_k до базису

☒ Описание: {D1. Dm. Dm+1. Dk }

системи векторів C над R , де $k = rk_R C$. Далі, $Der_K F$ — векторний простір розмірності $s = tr.deg_K F$ над полем F за Лемою 3.2.1. Диференціювання D_{m+1}, \dots, D_k поля R індукують диференціювання поля F (над K) і тому серед них не більше ніж s лінійно незалежних над F елементів. Тому маємо наступні співвідношення

$$rk_R \{D_{m+1}, \dots, D_k\} = rk_R C - rk_R I \leq s = tr.deg_K F$$

Нехай тепер $K[x_1, \dots, x_n]$ — алгебра многочленів над полем K і $W_n(K) = Der_K(K[x_1, \dots, x_n])$ — алгебра Лі всіх її K -диференціювань. Нагадаємо, що диференціювання D алгебри многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$ називається *простим*, якщо $\{0\}$ і $K[x_1, \dots, x_n]$ є єдиними D -допустимими ідеалами алгебри $K[x_1, \dots, x_n]$. Наступне твердження показує, що прості диференціювання мають "невеликі" централізатори.

Твердження 3.2.8. *Нехай $D \in W_n(K)$ — просте диференціювання кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$. Тоді централізатор $C = C_{W_n(K)}(D)$ є скінченновимірною над K підалгеброю розмірності $\leq n$ з $W_n(K)$.*

Доведення. Продовжимо D до диференціювання поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$ і покажемо, що для такого продовження виконується рівність

$\text{Ker}D = \mathbb{K}$. Дійсно, нехай, навпаки, $f = uv \in \text{Ker}D$, $f \neq \text{const}$, f – не-скоротний дріб (тут $u, v \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$).

Із рівності

✖	Описание:	$D(u)v - uD(v)$
	$D(f) = 0 =$	-----
		..

впливає, що $D(u)v - uD(v) = 0$ і, оскільки многочлени u, v взаємно прості, то $u|D(u)v|D(v)$, тобто $D(u) = \lambda_1 u, D(v) = \lambda_2 v$ для деяких многочленів $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Далі, хоча б один із головних ідеалів (u) , (v) кільця $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ власний і, очевидно, інваріантний відносно диференціювання D , і тому диференціювання D кільця $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ непросте, що суперечить його вибору. Отримана суперечність показує, що $\text{Ker}D = \mathbb{K}$. Але тоді за Лемою 3.2.3 централізатор C скінченновимірний над полем \mathbb{K} і має розмірність $\leq n$.

Теорема 3.2.9. Нехай \mathbb{K} — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R — розширення поля \mathbb{K} степеня трансцендентності n над \mathbb{K} і D — \mathbb{K} -диференціювання R з полем констант $F = \text{Ker}D$. Якщо $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2$, то централізатор $C = C_{w(R)}(D)$ є або алгеброю Лі над F розмірності $\dim_F C \leq n$, або C містить ідеал $I = \{T \in C | T(F) = 0\}$, який є алгеброю Лі над F розмірності $\text{rk}_R C - 1$ за умови, що $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 1$ або $\text{rk}_R C - 2$ за умови, що $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 2$ і такий, що:

1. при умові $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 1$ фактор-алгебра C/I ізоморфна $\text{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(x)$;
2. при умові $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 2$ фактор-алгебра C/I ізоморфна або підалгебрі ранга 1 з $\text{Der}_{\mathbb{K}} F$, або самій алгебрі $\text{Der}_{\mathbb{K}} F$.

Доведення. Якщо $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 0$, то $F = \mathbb{K}$ і C є алгеброю Лі над $F = \mathbb{K}$ розмірності $\leq n$ завдяки Лемі 3.2.3. Тому будемо вважати в подальшому, що $1 \leq \text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2$. З урахуванням Леми 3.2.7 для ідеалу I алгебри Лі C виконується нерівність

✖	Описание:	$\text{rk}_R C - \text{rk}_R I \leq \text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2, \dots$
---	-----------	---

Якщо $rk_R C = rk_R I$, то, як неважко переконатися, $C = I$ – алгебра Лі над F розмірності $\leq n$ згідно Лема 3.2.3.

Нехай спочатку $rk_R C - rk_R I = 1$. Виберемо який-небудь базис $\{D_1, \dots, D_{k-1}\}$ для I над R і доповнимо його яким-небудь елементом $D_k \in C$ до базису C над R . Розглянемо два випадки:

Випадок 1. $tr.deg_K F = 1$. Тоді за Теоремою Жордана (див., наприклад, [57], Теорема 3) отримаємо, що $F = K(\theta)$ для деякого елемента $\theta \in R$. За означенням ідеалу I маємо $D_i(\theta) = 0$, $i = 1, \dots, k - 1$. Оскільки $F = K(\theta)$, то $D_k(\theta) = f(\theta)$ для деякої раціональної функції $f(t) \in K(t)$ і $f(\theta) \neq 0$. Замінюючи елемент D_k на $f(\theta)^{-1}D_k$ (нагадаємо, що $f(\theta) \in F$) можна відразу вважати, що $D_k(\theta) = 1$. Але тоді, як неважко переконатися, підалгебра FD_k алгебри Лі $Der_K R$ ізоморфна алгебрі Лі $Der_K K(x)$ всіх K -диференціювань поля раціональних функцій $K(x)$. Оскільки $C = FD_k \ltimes I$ – напівпряма сума, то $C/I \simeq Der_K K(x)$.

Випадок 2. $tr.deg_K F = 2$. В цьому випадку, як і вище, $C = FD_k \ltimes I$ – напівпряма сума двох алгебр Лі, при цьому FD_k – підалгебра, ізоморфна підалгебрі рангу 1 над F із $Der_K F$.

Нехай тепер $rk_R C - rk_R I = 2$. Виберемо довільним чином базисні елементи D_1, \dots, D_{k-2} для I над R і доповнимо їх якими-небудь елементами S_1, S_2 до базису C над полем R . Позначимо через $K(y_1, y_2)$ довільне підполе степеня трансцендентності 2 над K з F і нехай $S_1(y_1) = f_1$, $S_2(y_1) = f_2$ для деяких елементів $f_1, f_2 \in F$. Тоді $(f_2 S_1 - f_1 S_2)(y_1) = 0$ і тому ми можемо відразу вважати, що $S_2(y_1) = 0$. Припустимо, що ще виконується рівність $S_2(y_2) = 0$. Оскільки тоді S_2 містить в своєму ядрі підполе $K(y_1, y_2)$ з F і поле F є алгебраїчним розширенням поля $K(y_1, y_2)$, то $S_2(F) = 0$ і тому $S_2 \in I$, що неможливо, бо за вибором D_1, \dots, D_{k-2}, S_2 лінійно незалежні над R . Тому $S_2(y_2) = h_2 \neq 0$ для деякого елемента $h_2 \in F$. Замінюючи S_2 на $h_2^{-1}S_2$ можна вважати, що $S_2(y_2) = 1$. Припустимо, тепер, що $S_1(y_2) = h_1 \neq 0$ для деякого елемента $h_1 \in F$. Замінюю-

чи S_1 на $S_2 - h_1^{-1}S_1$ можна, не втрачаючи загальності, вважати, що $S_1(y_2) = 0$. Аналогічно можна показати, що S_1 можна вибрати так, щоб $S_1(y_1) = 1$.

Отже, ми можемо вибрати базис C над I із елементів S_1, S_2 таких, що $S_i(y_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера.

Легко бачити, що $[S_1, S_2](F) = 0$ і тому $[S_1, S_2] \in I$. Розглянемо фактор-алгебру CI . Кожний елемент алгебри Лі CI (над полем K) записується у вигляді суми $(f_1S_1+I)+(f_2S_2+I)$ для деяких $f_1, f_2 \in F$ і S_1, S_2 індуковані на F з частинних похідних $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ підполя $K(y_1, y_2)$ (за побудовою елементів S_1, S_2). Тому, як легко бачити, $CI \simeq \text{Der}_K F$.

Лема 3.2.10. Нехай R – розширення поля K степеня трансцендентності n над K і $D \in W(R)$ таке диференціювання поля R , що поле констант $F = \text{Ker}D$ має степінь трансцендентності $n - 1$ над K . Тоді:

1) існує базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_n\}$ для R над K такий, що $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ – базис трансцендентності для F над K і $D = h \frac{\partial}{\partial y_n}$ для деякого $h \in R$;

2) централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ складається з диференціювань поля R вигляду $D_1 = \sum_{i=1}^{n-1} r_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, де $r_i \in R, \frac{\partial}{\partial y_i}(h) = 0, i = 1, \dots, n - 1$ і $D_1(h) = h \frac{\partial}{\partial y_n}$.

Доведення. Виберемо довільний базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ поля F над K і доповнимо його яким-небудь елементом y_n до базиса трансцендентності R над K . Візьмемо диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_i}$ підполя $K(y_1, \dots, y_n)$ з R і продовжимо його до диференціювання поля R (збережемо те ж саме позначення $\frac{\partial}{\partial y_i}$). Тоді $\frac{\partial}{\partial y_i}(y_i) = 0, i = 1, \dots, n - 1$. Але тоді оскільки F є алгебраїчним розширенням підполя $K(y_1, \dots, y_{n-1})$, то, як легко бачити, $\frac{\partial}{\partial y_i}(F) = 0$. Далі, нехай $D(y_n) = h$, для деякого $h \in R$. Тоді $(D - h \frac{\partial}{\partial y_n})(y_n) = 0$ і, оскільки $(D - h \frac{\partial}{\partial y_n})(y_i) = 0$ при $i = 1, \dots, n - 1$, то $D - h \frac{\partial}{\partial y_n} = 0$ на підполі $K(y_1, \dots, y_n)$, а, значить, і на полі R . Останнє означає, що $D = h \frac{\partial}{\partial y_n}$.

Візьмемо тепер довільний елемент $D_1 \in C = C_{W(R)}(D)$. Елемент D_1 запису-

ється в вигляді $D_1 = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $r_i \in R$ за Лемою 3.2.1. Із умови

Описание: $\sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial y_i} = 0$
 $[D, D_1] = [h, \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial y_i}] = 0$

отримаємо, що

Описание: $0 = \sum_{i=1}^n h \frac{\partial r_i}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial h}{\partial y_i} + h \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial h}{\partial y_i} = 0$

Звідси випливає, що $r_i = 0, i = 1, \dots, n - 1$ і $\sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial y_i} = h \frac{\partial}{\partial y_n}$. Останнє означає,

що $D_1(h) = h \frac{\partial h}{\partial y_n}$.

Навпаки, нехай

Описание: $D = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, де $r_i = 0, i = 1, \dots, n - 1$
 $1 \frac{\partial}{\partial y_n}$

і $D_1(h) = h \frac{\partial h}{\partial y_n}$. Тоді

Описание: $[h, D_1] = h \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial h}{\partial y_i} = 0$

і $D_1 \in C_{W(R)}(D)$.

Лема 3.2.11. Нехай K – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля K , яке має степінь трансцендентності n над K і F підполе із R , алгебраїчно замкнене в R , яке містить K , степіня трансцендентності $n - 1$ над K . Якщо D – K -диференціювання підполя F і $z \in R \setminus F$, то існує і єдине K -диференціювання D_1 поля R таке, що $D_1(z) = 1$, $D_1(F) \subseteq F$ і $D_1|_F = D$.

Доведення. Візьмемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ поля F над K . Оскільки елемент z трансцендентний над F завдяки алгебраїчній замкненості F в R , то $\{y_1, \dots, y_{n-1}, z\}$ – базис трансцендентності поля R над K .

Продовжимо K -диференціювання $\left[\begin{smallmatrix} \times \\ \vdots \end{smallmatrix} \right], \dots, \left[\begin{smallmatrix} \times \\ \circ \\ n \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix} \right]$ підполя $K(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ на поле R (помітимо, що R алгебраїчне над $K(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ і тому такі продовження існують і єдині), зберігши ті ж самі позначення. Тоді $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} \times \\ \vdots \end{smallmatrix} \right], \dots, \left[\begin{smallmatrix} \times \\ \circ \end{smallmatrix} \right] \right\}$, які розглядаються як диференціювання поля F , утворюють базис векторного простору $\text{Der}_K F$ і тому $D = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \left[\begin{smallmatrix} \times \\ \vdots \end{smallmatrix} \right]$ для деяких $f_i \in F$. Розглядаючи D як диференціювання поля R , візьмемо суму $D_1 = D + \left[\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix} \right]$. Тоді $D_1(F) \subseteq F$ і $D_1|_F = D$, оскільки $\left[\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix} \right](F) = 0$. При цьому, очевидно, що $D_1(z) = 1$.

Зауваження 4. Диференціювання D_1 поля R , яке побудоване за диференціюванням D підполя F і елементом $z \in R \setminus F$, будемо називати для зручності продовженням диференціювання D на R вздовж елемента z .

Теорема 3.2.12. *Нехай K – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля K , яке має ступінь трансцендентності n над K , $D \in W(R)$ таке K -диференціювання поля R , що його поле констант F в R має ступінь трансцендентності $n - 1$ над K . Якщо для деякого елемента $z \in R \setminus F$ виконується $D(z) \in F$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ має ранг n над R і складається з диференціювань вигляду*

$$\left[\begin{smallmatrix} \times \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] \text{ Описаніе: } D + (f + D(h)z/h) \partial_z,$$

де D_2 – довільне диференціювання поля F , продовжене до диференціювання поля R вздовж елемента z , і при цьому $h = D(z)$, а $f_0 \in F$ – довільний елемент.

Доведення. Виберемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ підполя F над K . Оскільки $z \in R \setminus F$ і $D(z) \in F$ і підполе F алгебраїчно замкнене в R (як ядро диференціювання, див., наприклад, [46]), то $\{y_1, \dots, y_{n-1}, z\}$ – базис трансцендентності поля R над K . Завдяки Лемі 3.2.10 диференціювання D має вигляд $D = h \left[\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix} \right]$ для деякого $h \in R$. Але тоді, очевидно, $h = D(z) \in F$ за

умовою теореми. Візьмемо довільний елемент $D_1 \in C_{W(R)}(D)$ і запишемо його у вигляді

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & n\Sigma-1 \\ D = & r \frac{\partial}{\partial y_i} + r \frac{\partial}{\partial z} + f_0, & r \in R. \end{matrix}$$

Із умови $[D, D_1] = 0$ отримаємо, використовуючи Лему 3.2.10, що $\frac{\partial}{\partial y_i} = 0$, $i = 1, \dots, n-1$ і за Лемою 3.2.10 $D_1(h) = h \frac{\partial}{\partial z}$. Оскільки, як неважко переконатися, $D_1(F) \subseteq F$, то із останньої рівності випливає, що $\frac{\partial}{\partial z} \in F$. Із співвідношення $\frac{\partial}{\partial z} = 1$ маємо, що $\frac{\partial}{\partial z}(r - \alpha z) = 0$ для деякого $\alpha \in F$. Але тоді $r - \alpha z \in F$ (бо за умовою $\text{Ker } D = \text{Ker } h \frac{\partial}{\partial z} = F$), тобто $r = \alpha z + f_0$ для деяких $\alpha, f_0 \in F$. Звідси отримаємо

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & n\Sigma-1 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_1 = & r \frac{\partial}{\partial y_i} + \alpha z \frac{\partial}{\partial z} + f_0 \frac{\partial}{\partial z}. \end{matrix}$$

Оскільки

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \\ [f_0, D] = [f_0, h] = 0, \end{matrix}$$

то елемент $D_1' = \sum_{i=1}^{n-1} r \frac{\partial}{\partial y_i} + \alpha z \frac{\partial}{\partial z}$ належить централізатору $C = C_{W(R)}(D)$. Тоді із співвідношення $[D, D_1'] = 0$ випливає, що

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & \frac{\partial}{\partial z} & n\Sigma-1 & \frac{\partial}{\partial z} \\ [az, D] = [D, r \frac{\partial}{\partial y_i}], \end{matrix}$$

тобто

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} & n\Sigma-1 & \frac{\partial}{\partial z} \\ [az, h] = [h, r \frac{\partial}{\partial y_i}], \end{matrix}$$

де $\alpha, h \in F$. Зауважимо далі, що

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ [az, h] = -ah \frac{\partial}{\partial z}, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \times & \text{Описание:} & \frac{\partial}{\partial z} & n\Sigma-1 & \frac{\partial}{\partial z} & n\Sigma-1 & \frac{\partial}{\partial z} \\ [h, r \frac{\partial}{\partial y_i}] = - (r \frac{\partial}{\partial y_i}) \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix}$$

Звідси отримаємо, що $\sum_{i=1}^{n-1} r_i \boxed{\times} = \alpha h$. Позначимо $D_2 = \sum_{i=1}^{n-1} r_i \boxed{\times}$. Тоді останнє співвідношення записується у вигляді $D_2(h) = \alpha h$. Оскільки $D \neq 0$, то $h \neq 0$ і звідси $\alpha = D_2(h)/h$. Тоді диференціювання D_1 із централізатора C (нагадаємо, що D_1 вибиралось довільно) має вигляд:

✘ Описание:

$$D_1 = D_2 + (f_0 + D_2(h)z/h) \frac{\partial}{\partial z}$$

де D_2 розглядається як диференціювання поля R (а не тільки F) в базисі трансцендентності $\{y_1, \dots, y_{n-1}, z\}$ поля R над K .

Навпаки, якщо ми візьмемо довільне диференціювання D_2 підполя F і розглянемо продовження диференціювання D_2 на R вздовж z вигляду $D_1 = D_2 + (f_0 + D_2(h)z/h) \boxed{\Gamma}$, де f_0 – довільний елемент із F , то, як неважко переконатися, $[D_1, D] = 0$. Теорема доведена.

Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячений дослідженню централізаторів елементів в алгебрі Лі $W_2(\mathbb{K})$ та в алгебрах Лі диференціювань полів.

Підрозділ 3.1 присвячено вивченню централізаторів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрах Лі $W_2(\mathbb{K})$. В наступній теоремі дано опис таких централізаторів елементів:

Теорема 3.1.6 *Нехай D довільний ненульовий елемент з $W_2(\mathbb{K})$. Тоді централізатор $C = C_{W_2}(D)$ є підалгеброю одного з наступних типів:*

- 1) $C = \mathbb{K}D$, якщо $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ співпадає з \mathbb{K} .
- 2) $C = \mathbb{K}D + \mathbb{K}D_1$, якщо $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ співпадає з \mathbb{K} та існує диференціювання D_1 таке, що $[D, D_1] = 0$ і D, D_1 є лінійно незалежними над $\mathbb{K}(x, y)$.
- 3) $C = \mathbb{K}[p]h\delta_p$, якщо $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x, y)$ містить несталий многочлен, цей многочлен p може бути вибраний незвідним, $D = hf\delta_p$ де f є многочленом від p , многочлен h є p -вільним і δ_p є зведеним диференціюванням для D_p .
- 4) $C = \mathbb{K}[p, q]_m h\delta_{p,q}$ якщо $\text{Ker } D$ містить несталу раціональну функцію p/q і не містить многочленів, відмінних від константи, $\text{Ker } D = \mathbb{K}(\square)$, $D = hf\delta_{p,q}$ де f є однорідним многочленом від p, q степеня m , h є $p - q$ -вільним многочленом та $\delta_{p,q}$ є зведеним диференціюванням для диференціювання $qD_p - pD_q$.
- 5) $C = (\mathbb{K}(\square)D + \mathbb{K}(\square)D_1) \cap W_2(\mathbb{K})$, де D задовольняє всі умови з попередньої частини теореми, D та D_1 є лінійно незалежними над $\mathbb{K}(x, y)$ та $[D_1, D] = 0$. Якщо $D = P \begin{bmatrix} \square \\ \vdots \\ \square \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} \square \\ \vdots \\ \square \end{bmatrix}$, $D_1 = P_1 \begin{bmatrix} \square \\ \vdots \\ \square \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} \square \\ \vdots \\ \square \end{bmatrix}$ та $\Delta = PQ_1 - P_1Q$,

то $\dim_{\mathbb{K}} C \leq m + s + 2$, де число m таке ж як в пункті 4 даної теореми і $s = \deg_{p,q} \Delta$.

Наступна теорема є важливою, оскільки в ній описуються максимальні абелеві підалгебри.

Теорема 3.1.8 *Нехай L максимальна абелева підалгебра алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$. Тоді алгебра Лі L є однією із наступних:*

- 1) *Одновимірною вигляду KD , де $D \in W_2(\mathbb{K})$ та $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}(x,y)$ співпадає з \mathbb{K} .*
- 2) *Двовимірною вигляду $KD + KD_1$, де D, D_1 є лінійно незалежними над $\mathbb{K}(x,y)$.*
- 3) *Скінченно вимірною вигляду $\mathbb{K}[p,q]_m h \delta_{p,q}$, де $h \in \mathbb{K}[x,y]$, $\mathbb{K}[p,q]_m$ є векторним простором всіх однорідних по p, q многочленів степеня m (дивись Теорему 3.1.6).*
- 4) *Нескінченно вимірною вигляду $\mathbb{K}[p] h \delta_p$, де $h \in \mathbb{K}[x,y]$, $\mathbb{K}[p]$ є векторним простором многочленів від p (дивись Теорему 3.1.6).*

В підрозділі 3.2 при деяких умовах на степінь трансцендентності поля констант $F = F(D)$ диференціювання $D \in \text{Der}_{\mathbb{K}} R$ в R отримано характеристику централізатора $C = C_{W(R)}(D)$. Наступні теореми є основними результатами даного підрозділу.

Теорема 3.2.9 *Нехай \mathbb{K} — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R — розширення поля \mathbb{K} степеня трансцендентності n над \mathbb{K} і D — \mathbb{K} -диференціювання R з полем констант $F = \text{Ker } D$. Якщо $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ є або алгеброю Лі над F розмірності $\dim_F C \leq n$, або C містить ідеал $I = \{T \in C \mid T(F) = 0\}$, який є алгеброю Лі над F роз-*

мірності $rk_R C - 1$ за умови, що $tr.deg_K F = 1$ або $rk_R C - 2$ за умови, що $tr.deg_K F = 2$ і такий, що:

- 1) при умові $tr.deg_K F = 1$ фактор-алгебра C/I ізоморфна $Der_K K(x)$;
- 2) при умові $tr.deg_K F = 2$ фактор-алгебра C/I ізоморфна або підалгебрі ранга 1 з $Der_K F$, або самій алгебрі $Der_K F$.

Теорема 3.2.12 Нехай K – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля K , яке має степінь трансцендентності n над K , $D \in W(R)$ таке K -диференціювання поля R , що його поле констант F в R має степінь трансцендентності $n - 1$ над K . Якщо для деякого елемента $z \in R \setminus F$ виконується $D(z) \in F$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ має ранг n над R і складається з диференціювань вигляду

✘ Описание: $-D-$
 $D^2 + (f_0 + D_2(h)z/h)dz$,

де D_2 – довільне диференціювання поля F , продовжене до диференціювання поля R вздовж елемента z , і при цьому $h = D(z)$, а $f_0 \in F$ – довільний елемент.

В наступній лемі знайдено базис трансцендентності для поля констант та описано структуру централізатора $C = C_{W(R)}(D)$.

Лема 3.2.10 Нехай R - розширення поля K степеня трансцендентності n над K і $D \in W(R)$ таке диференціювання поля R , що поле констант $F = Ker D$ має степінь трансцендентності $n - 1$ над K . Тоді:

1) існує базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_n\}$ для R над K такий, що $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ – базис трансцендентності для F над K і $D = h \square$ для деякого $h \in R$;

2) централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ складається з диференціювань поля R вигляду $D_1 = \sum_{i=1}^n r_i \square$, де $r_i \in R, \square = 0, i = 1, \dots, n - 1$ і $D_1(h) = h \square$.

Розділ 4

Слабко напівпрості диференціювання кільця многочленів від двох змінних

Нехай K алгебраїчно замкнене поле характеристики 0 і $K[x,y]$ – кільце многочленів. Кожний елемент $f \in K[x,y]$ визначає диференціювання Якобі D_f кільця многочленів $K[x,y]$, яке діє за правилом $D_f(h) = \det J(f,h)$, де $J(f,h)$ – матриця Якобі многочленів f та h .

Векторний K -простір $K[x,y]$ з операцією $(f,g) \rightarrow [f,g] := \det J(f,g)$ є алгеброю Лі над K . Центр цієї алгебри співпадає з K , фактор-алгебра $K[x,y]/K$ ізоморфна алгебрі Лі $sa_2(K)$ всіх диференціювань з $K[x,y]$, які мають нульову дивергенцію (дивись, наприклад, [53]). Зауважимо також, що кільце многочленів $K[x,y]$ з додатковою операцією $(f,g) \rightarrow [f,g] = \det J(f,g)$ є алгеброю Пуассона, але ми цього в подальшому не будемо використовувати.

В роботі Ю. Стейна [69] дано наступне означення, яке широко використовується в даному розділі:

Означення 4.0.1. *Многочлен $f \in K[x,y]$ будемо називати слабко напівпростим, якщо існує такий многочлен g , що $D_f(g) = \lambda g$, для деякого ненульового $\lambda \in K$ (многочлен g тут є власною функцією для f з власним числом λ).*

Останнє означає, що кожний слабко напівпростий многочлен f індукує ди-

ференціювання Якобі D_f , яке може бути включене в двовимірну неабелеву підалгебру

Описание: $Lf = \langle Df \rangle \square \langle Da \rangle$

алгебри Лі $W_2(K)$. Структура двовимірних (абелевих і неабелевих) підалгебр алгебри Лі $W_2(K)$ є дуже важливою для кращого розуміння структури підалгебр з $W_2(K)$, і ці питання тісно пов'язані з гіпотезою Якобіана для $n = 2$.

Перше твердження наступної леми узагальнює Твердження 2.1 з [69]

Лема 4.0.2. Нехай $f \in K[x, y]$ такий многочлен, що для нього існує многочлен $g \in K[x, y], g \neq 0$ і $\lambda \in K^*$, і виконується рівність $D_f^n(g) = \lambda g$ для деякого $n \geq 1$.

Тоді:

1) f – замкнений многочлен;

2) Многочлен $f - c$ є вільним від квадратів для будь-якого $c \in K$, тобто $f - c$ не ділиться на квадрат жодного незвідного многочлена.

Доведення. 1) Від супротивного, нехай $f = F(h)$ для деякого $F(t) \in K[t], \deg F \geq 2$ і $h \in K[x, y]$. Тоді

Описание: ' ...

Аналогічно, ми отримаємо наступне співвідношення

Описание: $D^2f(g) = Df(F'(h)Dh(g)) = [F''(h), F'(h)Dh(g)] =$

Описание: ' 2 2...

Використовуючи індукцію по k можна легко показати, що

Описание: $D^k f(g) = F^{(k)}(h)kD^k h(g)$.

За умовою цієї леми

Описание: $n \quad ' \quad n \quad n \dots$

Запишемо g як $g = F'(h)^m \cdot u$, де $m \geq n$ з (1) і многочлен u не ділиться на будь-який несталий многочлен h . Тоді

Описание: $D(g) = [h, F'(h)^m u] = F'(h)^m [h, u] + F'(h)^m D(u) \dots$

Використовуючи індукцію по k легко показати, що

Описание: $D_k h(g) = F'(h)^m D_k h(\dots)$

Вставляючи останню рівність в (1) ми одержимо

Описание: $n \dots n \dots n \dots m \dots n \dots$

Але $g = F'(h)^m u$ і тому $F'(h)^{m+n} D_h(u) = \lambda F'(h)^m u$.

Остання рівність показує, що u ділиться на $F'(h)$, що суперечить нашому вибору многочлена u . Отримана суперечність доводить, що $f \in \mathbb{K}$ замкненим многочленом.

2) Знову скористаємось методом від супротивного. Нехай $c \in \mathbb{K}$ такий елемент, для якого ми маємо рівність $f - c = w^k f_1$, де $w, f_1 \in \mathbb{K}[x, y]$, $k \geq 2$ і f_1 не ділиться на w . Запишемо g у вигляді $g = w^m g_1$, де $m \geq 0, g_1 \in \mathbb{K}[x, y]$ і g_1 не ділиться на w . Тоді

Описание: $k \dots m \dots k \dots m \dots k \dots m \dots$

Описание: $k+m \dots k \dots m-1 \dots m \dots k-1 \dots k+m-1 \dots$

для деякого $t_1 \in \mathbb{K}[x, y]$. Тому, $D_f(g) = w^{k+m-1} t_1$.

За індукцією по i легко показати, що $D_f^i(g) = w^{m+ki-1} t_i$ для деякого $t_i \in \mathbb{K}[x, y]$, $i = 2, 3, \dots$. Але тоді для $i = n$ ми отримаємо

Описание: $n \dots m+kn-1 \dots m \dots$

Звідси випливає, що $\lambda g_1 = w^{kn-1} t_n$ що є неможливим, оскільки $k \geq 2$ і g_1 не ділиться на w із-за вибору g_1 . Ця суперечність показує, що $f - c$ не ділиться на квадрат жодного незвідного многочлена.

Наслідок 4.0.3. Якщо $f = f_1(x)f_2(y)$ є слабо напівпростим многочленом, тоді многочлени $f_1(t), f_2(t) \in \mathbb{K}[t]$ не мають кратних коренів.

Доведення. Оскільки $[f, g] = g$, то поклавши в Лемі 4.0.2 $n = 1$ та $c = 0$ отримаємо, що многочлен $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ не ділиться на квадрат жодного незвідного многочлена. Звідси легко випливає, що многочлени $f_1(t)$ та $f_2(t)$ не мають кратних коренів.

4.1 Слабо напівпрості многочлени вигляду $f_1(x)f_2(y)$

У цьому розділі дано опис всіх слабо напівпростих многочленів $f \in \mathbb{K}[x, y]$ вигляду $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ (многочленів із відокремленими змінними) та їх власних функцій $g(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ таких, що $[f, g] = \lambda g, \lambda \in \mathbb{K}^*$. Насправді, ми можемо припустити, що $\lambda = 1$ оскільки в іншому випадку ми завжди можемо покласти $\lambda^{-1}f$ замість f . Тому в подальшому ми будемо розглядати лише випадок $[f, g] = g$.

Лема 4.1.1. Нехай многочлен $g = g(x, y)$ задовольняє умову $[f, g] = g$, де $f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \in \mathbb{K}[x, y]$. Тоді єдиними незвідними множниками многочлена $g(x, y)$ є або многочлени вигляду $\delta(f(x, y) + c)$, де $\delta, c \in \mathbb{K}^*$, або $\beta(x - c_1), \gamma(y - c_2)$, де $\beta, \gamma \in \mathbb{K}^*$ та c_1, c_2 задовольняють умову $f_1(c_1) = 0, f_2(c_2) = 0$.

Доведення. Нехай h незвідний множник многочлена g . За Лемою 2.0.3 h є многочленом Дарбу для D_f , тобто

$$\boxed{\text{Описание: } [f, h] = hu, \quad u \in \mathbb{K}[x, y].}$$

тому за Лемою 2.0.21 існує $c \in \mathbb{K}$ таке, що $f - c$ ділиться на h . Якщо $c \neq 0$, тоді многочлен $f - c$ є незвідним (за Лемою 2.0.18) і тому $h = (f - c)\delta$ для деякого $\delta \in \mathbb{K}^*$. Нехай $c = 0$. У зв'язку з тим, що h є незвідним та ділить

$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, легко бачити, що h – лінійний многочлен вигляду $\beta(x - c_1)$ чи $\gamma(y - c_2)$.

Лема 4.1.2. Нехай $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ і $g = g(x,y)$ многочлени з $K[x,y]$, які задовольняють співвідношення $[f,g] = g$. Тоді $g = F(f)g_1g_2$, де $F(t) \in K[t]$ та $g_1 = g_1(x), g_2 = g_2(y)$ задовольняють рівність $[f,g_1g_2] = g_1g_2$.

Доведення. Запишемо многочлен g як добуток $g = h_1^{k_1} \cdots h_s^{k_s}$, де h_1, \dots, h_s незвідні многочлени. За Лемою 4.1.1 многочлени h_i є або вигляду $h_i = \delta_i(f + c_i)$ для $\delta_i \in K^*, c_i \in K$, або вигляду $h_i = \alpha_i(x - d_i)$, або $h_i = \beta_i(y - r_i)$ для $\alpha_i, \beta_i \in K^*$. Елементи $d_i, r_i \in K$ є такими, що $f_1(d_i) = 0, f_2(r_i) = 0$. Позначимо через $F(f)$ добуток всіх дільників многочлена g , що мають вигляд $\delta_i(f + c_i)$ (це є многочлен від f). Згрупуємо інші незвідні дільники g і запишемо їх добуток у вигляді $g_1(x)g_2(y)$. Тоді

Описание: $[f, F(f)g_1g_2] = F(f)[f, g_1g_2] = F(f)g_1g_2$.

З цього й випливає рівність $[f, g_1g_2] = g_1g_2$.

Таким чином проблема знаходження многочленів f та g , які задовольняють співвідношення $[f,g] = g$, зводиться до пошуку многочленів $f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y)$ з відокремленими змінними, такими що

Описание: $[f_1(x)f_2(y), a_1(x)a_2(y)] = a_1(x)a_2(y)$.

З останнього співвідношення маємо, що

Описание: $[f_1f_2, a_1a_2] = f_1[f_2, a_1a_2] + f_2[f_1, a_1a_2] = f_1a_2[f_2, a_1] + f_2a_1[f_1, a_2]$. (2)

Далі, помітимо, що

Описание:
$$[f, g] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = -f'g'$$

і, аналогічно, $[f_1, g_2] = f_1'g_2'$. Тому з (2) ми отримуємо наступне:

$$[f_1, g_2] = f_1'g_2' - f_1g_2'' + f_1g_2'' - f_1'g_2' = 0$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на g_1g_2 ми отримуємо

$$\frac{f_1'g_2'}{g_1g_2} - \frac{f_1g_2''}{g_1g_2} + \frac{f_1g_2''}{g_1g_2} - \frac{f_1'g_2'}{g_1g_2} = 0 \quad (3)$$

Зауважимо, що кожний лінійний множник g_1 є дільником f_1 за Лемою 4.1.1, тому f_1g_1' ділиться на g_1 і, аналогічно, f_2g_2' ділиться на g_2 . Тому (3) є, насправді, відношенням для многочленів із відокремленими змінними.

Лема 4.1.3. Нехай $a(x), c(x) \in K[x]$ та $b(y), d(y) \in K[y]$ такі многочлени, що

$$a(x)b(y) + c(x)d(y) = 1 \quad (4).$$

Тоді або $a, c \in K$ або $b, d \in K$.

Доведення. Продиференціюємо рівність (4) по змінній x . Тоді ми матимемо наступну рівність:

$$a'(x)b(y) + c'(x)d(y) = 0$$

Якщо $a'(x) = 0$ і $c'(x) = 0$ тоді $a, c \in K$ і все виконано. Якщо ж $c'(x) \neq 0$, тоді

$$\frac{a'(x)}{c'(x)} = -\frac{d(y)}{b(y)}$$

і тому існує $\lambda \in K$ таке, що $d = \lambda b$. Підставляючи цю рівність в (4) ми матимемо $b(y)(a(x) + \lambda c(x)) = 1$. Остання рівність означає, що $b, d \in K$.

Лема 4.1.4. Нехай $f_1(x), g_1(x) \in K[x]$ та $f_2(y), g_2(y) \in K[y]$ – многочлени, які задовольняють рівність (3). Тоді або $f_1(x)$ є лінійним і тоді $g_1(x) = c_1f_1^l(x)$, або $f_2(y)$ є лінійним і тоді $g_2(y) = c_2f_2^k(y)$ для деяких $c_1, c_2 \in K^*, k, l \in \mathbb{N}$.

Доведення. За Лемою 4.1.3 з (3) ми отримали, що або $f_1', \square \in K$, або $f_2', \square \in K$. Наприклад, нехай ми маємо другий випадок. Тоді

$$f_2 = \alpha y + \beta \quad \text{та} \quad \frac{f_2g_2'}{g_2^2} = \gamma \in K,$$

для деяких $\alpha, \gamma \in \mathbb{K}^*, \beta \in \mathbb{K}$. Із співвідношення $f_2 g_2' = \lambda g_2$ ми маємо, що g_2 ділиться на g_2' . Але останнє є можливим лише у випадку $g_2 = \lambda(y + \delta)^k$ для деяких $\lambda \in \mathbb{K}^*, \delta \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N}$.

З рівності

$$\frac{f_2 g_2'}{g_2^2} = \frac{(\alpha y + \beta)^k \lambda (y + \delta)^{k-1}}{\lambda (y + \delta)^k} = \frac{\gamma}{\lambda} \in \mathbb{K}$$

впливає, що $(\alpha y + \beta)^k = \gamma(y + \delta)$. Але тоді $\gamma = k\alpha$ і $\gamma\delta = k\beta$, які дають нам $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$. Остання рівність означає, що $g_2(y) = c_2 f_2^k(y)$ для деякого $c_2 \in \mathbb{K}^*$. У випадку $f_1', \frac{\gamma}{\lambda} \in \mathbb{K}$ аналогічні міркування.

Теорема 4.1.5. (Критерій слабкої напівпростоти) Многочлен $f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \in \mathbb{K}[x, y]$ є слабо напівпростим тоді і тільки тоді, коли він не має кратних коренів і принаймні один з многочленів $f_1(x), f_2(y)$ є лінійним, і якщо, наприклад, $f_2(y) = ay + b, a, b \in \mathbb{K}$ та $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ є коренями $f_1(x)$, тоді $l_i = \frac{\gamma}{\lambda} \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$. Крім того, якщо $g = g(x, y)$ є власною функцією для D_f із власним значенням 1, тоді

$$g = F(f) \frac{f_2^k}{2} \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{k - l_i}$$

де $F(t) \in \mathbb{K}[t], k \in \mathbb{N}$ таке, що $k \geq l_i, i = 1, \dots, n$.

Доведення. \Rightarrow Нехай $f = f(x, y)$ слабо напівпростий многочлен вигляду $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, тобто такий, що для деякого $g \in \mathbb{K}[x, y]$ виконується $[f, g] = \det J(f, g) = g$. За Наслідком 4.0.3 f не має кратних коренів і беручи до уваги Лему 4.1.4 ми бачимо, що принаймні один з многочленів $f_1(x)$ або $f_2(y)$ є лінійним. Нехай, наприклад, $f_2(y) = ay + b$ для деяких $a, b \in \mathbb{K}$. Тоді за Лемою 4.1.2 можемо припустити, що $g = g_1(x)g_2(y)$ і довільний несталий многочлен f не ділить многочлен g . Далі, використовуючи Лему 4.1.4 маємо, що $g_2(y) = df_2(y)^k$ для деяких $d \in \mathbb{K}^*$ і $k \in \mathbb{N}$. Тоді рівність (3) може бути

переписана у вигляді:

$$\frac{g'(x)}{f_1(x)} = \frac{f_1'(x)}{g_1(x)}$$

Переписуючи останнє співвідношення ми отримаємо, що

$$g_1'(x) f_1(x) - f_1'(x) g_1(x) = 0$$

і як наслідок

$$\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \quad (5)$$

Многочлен $f_1(x)$ не має кратних коренів (за Лемою 4.1.2). Нехай $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ це всі корені $f_1(x)$. Тоді

$$f_1(x) = c_1(x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_n)^{m_n}$$

для деякого елемента $c_1 \in \mathbb{K}^*$, і беручи до уваги рівність (5), ми маємо

$$\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x - \alpha_i}$$

для деяких $d_i \in \mathbb{K}$, $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Рівність (5) може бути переписана у вигляді

$$\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{x - \alpha_i}$$

Замінюючи f_1 та g_1 з останніх виразів, ми отримаємо:

$$\frac{g'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{(x - \alpha_i)^{m_i}} \quad (6)$$

(Ми використали розклад раціональної функції

$$\frac{1}{(x - \alpha_i)^{m_i}} = \frac{c_i}{(x - \alpha_i)^{m_i}}$$

в суму елементарних дробів вигляду $\frac{c_i}{(x - \alpha_i)^{m_i}}$, $i = 1, \dots, n$).

Рівність (6) означає, що

$$m_i = k_i - \frac{1}{f_1'(\alpha_i)}$$

і оскільки $m_i \geq 0, k \geq 1$ ми маємо

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{m_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

З того, що $m_i \geq 0$ ми отримаємо $k \geq l_i, i = 1, \dots, n$. Але тоді

$$g_1(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}, \quad g_2(y) = (ay + b)^k, \quad k \geq l_i$$

і тому за Лемою 4.1.2

$$g(x, y) = F(f)(ay + b)^k \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}.$$

⇐ Нехай $f = f_1(x)f_2(y)$, де

$$f_1(x) = c_1(x - a_1) \dots (x - a_n)$$

і $f_2 = (ay + b)^k$, та нехай $g(x, y) = F(f)g_1g_2$, де

$$g_1 = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}$$

і $g_2 = (ay + b)^k$, де $l_i = k$ Оп ис є цілими. Ми покажемо, що

$$[f, (ay + b)^k \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}] = (ay + b)^k \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}$$

Використовуючи рівність

$$f(x, y) = f_1(x)(ay + b)^k$$

ми маємо

$$[f, (ay + b)^k \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}] = [f_1(x)(ay + b)^k, (ay + b)^k \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{k - l_i}] =$$

$$f_1'(ay + b)^k (ay + b)^{k-1} g_1 - af_1g_1'(ay + b)^k = (ay + b)^k (f_1'kg_1 - f_1g_1').$$

Але співвідношення (5) дає результат $af_1'kg_1 - af_1g_1' = g_1$, тому ми отримаємо $[f, g_1g_2] = g_1g_2$ і тому многочлен f є слабо напівпростим.

Наступне твердження дозволяє нам будувати як завгодно багато слабко напівпростих многочленів із даного одного слабко напівпростого многочлена.

Наслідок 4.1.6. Нехай $f(x,y)$ слабко напівпростий многочлен і $g(x,y)$ є такий, що $[f,g] = g$. Якщо деякі многочлени від двох змінних p,q задовольняють умову $[p,q] = 1$, то многочлен $f(p,q)$ є слабко напівпростим і $[f(p,q),g(p,q)] = g(p,q)$.

Приклад 4.1.7. Нехай $f(x,y) = x(x-1)y$,

Описание: $g(x,y) = x^{k+1}(x-1)^{k-1}yk$, $k \square \square$.

Тоді

Описание: $x^{k+1} \quad (x-1)^{k-1} \dots$

Описание: $= [x(x-1)y, yk]x^{k+1}(x-1)^{k-1} + [x(x-1)y, x^{k+1}(x-1)^{k-1}]yk =$

Описание: $k \quad x^{k+1} \quad (x-1)^{k-1} \quad x^{k+1} \quad (x-1)^{k-1} \dots$

Описание: $yk(x^{k+2}(x-1)^{k-1} - x^{k+1}(x-1)^k) = x^{k+1}(x-1)^{k-1}yk$.

Тоді многочлен, $f(x,y) = x(x-1)y$ є слабко напівпростим та $g(x,y)$ є його власною функцією із власним значенням $\lambda = 1$.

Приклад 4.1.8. Многочлен

Описание: $f(x,y) = \frac{y(x-1)(x-1)\dots(x-1)}{n}$, $n \square \square$, $n \geq 2$

є слабко напівпростим. Дійсно, поклавши

Описание: $f_1(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)$

$1 \leq i \leq n$ ми отримаємо:

Описание: $f'(1) = \frac{(-1)^{n-2} 1 \cdot (-1)(2-i)\dots(i-1-i)(i+1-i)\dots(n-i)}{1 \cdot i \cdot i \cdot n!}$

Описание: $\frac{(-1)^{i-1} 1 \cdot (-1)^{n-1-i}}{i \cdot n!} = \frac{(-1)^{i-1} (-1)^{n-1-i}}{i \cdot n!} = \frac{(-1)^{n-i}}{i \cdot n!}$

✘	Описание:	()
		$\binom{n}{i}$
		$= (-1)^i \binom{n-1}{i-1} - 1 \square \square.$

Тому многочлен $f(x,y)$ задовольняє умови теореми 4.1.5 і є слабко напівпротим.

Висновки до розділу 4

Даний розділ присвячений слабко напівпростим многочленам із кільця $K[x,y]$. Тут дано опис всіх слабко напівпростих многочленів $f \in K[x,y]$ вигляду $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ (многочленів із відокремленими змінними) та їхніх власних функцій $g(x,y) \in K[x,y]$ таких, що $[f,g] = \lambda g$, $\lambda \in K^*$. Насправді, можна вважати, що $\lambda = 1$, оскільки в іншому випадку ми можемо взяти $\lambda^{-1}f$ замість f . Тому далі розглядається лише випадок $[f,g] = g$. Встановлено основні властивості таких многочленів з відокремленими змінними, при цьому використовуються результати Ю. Стейна, зокрема, такий: нехай $f, g \in K[x,y]$ – такі многочлени, що g незвідний і $[f,g] = hg$ для деякого $h \in K[x,y]$. Тоді існує елемент $c \in K$ такий, що g ділить многочлен $f - c$. Використовуються також результати Ж. Олландера [50], який дослідив замкнені многочлени і замкнені раціональні функції від кількох змінних.

Лема 4.1.1 *Нехай многочлен $g = g(x,y)$ задовольняє умову $[f,g] = g$, де $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \in K[x,y]$. Тоді лише незвідні множники многочлена $g(x,y)$ є многочленами форми $\delta(f(x,y) + c)$, де $\delta, c \in K^*$ чи $\beta(x - c_1), \gamma(y - c_2)$, де $\beta, \gamma \in K^*$ та c_1, c_2 задовольняють $f_1(c_1) = 0, f_2(c_2) = 0$.*

Використовуючи результат наступної лема можна переформулювати проблему знаходження многочленів f та g .

Лема 4.1.2 *Нехай $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ і $g = g(x,y)$ многочлени з $K[x,y]$, які задовольняють співвідношення $[f,g] = g$. Тоді $g = F(f)g_1g_2$, де $F(t) \in K[t]$ та $g_1 = g_1(x), g_2 = g_2(y)$ задовольняють рівність $[f, g_1g_2] = g_1g_2$.*

Лема 4.1.4 *Нехай $f_1(x), g_1(x) \in K[x]$ та $f_2(y), g_2(y) \in K[y]$ – многочлени, які задовольняють рівність (3). Тоді або $f_1(x)$ є лінійним і тоді $g_1(x) = c_1 f_1^l(x)$, або $f_2(y)$ є лінійним і тоді $g_2(y) = c_2 f_2^k(y)$ для деяких $c_1, c_2 \in K^*, k, l \in \mathbb{N}$.*

Основним результатом даного розділу є наступний критерій слабкої напівпростоти многочлена:

Теорема 4.1.5 *Многочлен $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \in K[x,y]$ є слабо напівпростим тоді і тільки тоді, коли він не має кратних коренів і принаймні один з многочленів $f_1(x)$, $f_2(y)$ є лінійним, і якщо, наприклад, $f_2(y) = ay + b$, $a, b \in K$*

та $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ є коренями $f_1(x)$, тоді $l_i = \begin{matrix} \times & \text{Оп} \\ & \text{ир} \end{matrix} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$. Крім того, якщо $g = g(x,y)$ є власною функцією для D_f із власним значенням 1, тоді

$$g = F \prod_{i=1}^k f_2(y) (x - \alpha_i)^{l_i},$$

де $F(t) \in K[t]$, $k \in \mathbb{N}$ таке, що $k \geq l_i, i = 1, \dots, n$.

Як наслідок, з основної теореми отримано наступне твердження, яке розширяє множину слабо напівпростих многочленів:

Наслідок 4.1.6 *Нехай $f(x,y)$ слабо напівпростий многочлен і $g(x,y)$ є такий, що $[f,g] = g$. Якщо деякі многочлени від двох змінних p,q задовольняють умову $[p,q] = 1$, то многочлен $f(p,q)$ є слабо напівпростим і $[f(p,q), g(p,q)] = g(p,q)$.*

Розділ 5

Базиси та анулятори

Нехай K алгебраїчно замкнене поле характеристики 0 і $R \cong K(x_1, \dots, x_n)$ поле алгебраїчних функцій від n змінних, тобто скінченне алгебраїчне розширення поля $K(x_1, \dots, x_n)$. Множина всіх K -диференціювань поля R є алгеброю Лі (з дужкою Лі $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$), яку будемо позначати через $\boxed{\times}_n(R)$, ця алгебра Лі є також векторним простором розмірності n над R (але не є алгеброю Лі над R). Базис, який складається із частинних похідних $\{\boxed{\times}_1, \dots, \boxed{\times}_n\}$ будемо називати стандартним, його елементи очевидно задовольняють співвідношення $[\boxed{\times}_i, \boxed{\times}_j] = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, тобто цей базис є комутативним. Всі комутативні базиси алгебри Лі $W_n(K)$ (які складаються із всіх K -диференціювань кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$) описані в статті [46], зокрема, диференціювання з такого базису мають нульову дивергенцію. Ця характеристика комутативних базисів не може бути перенесена на алгебри Лі $\boxed{\times}_n(R)$, де $R = K(x_1, \dots, x_n)$, оскільки існують такі комутативні базиси в $\boxed{\times}_n(R)$, в яких не всі їхні елементи мають нульову дивергенцію. Тому, є цікавим питання характеристики комутативних базисів у $\boxed{\times}_n(R)$ в термінах дивергенції її членів.

В цьому розділі ми використовуємо стандартні позначення. Нагадаємо, що кожне диференціювання поля $K(x_1, \dots, x_n)$ може бути однозначно продовжене на поле $R \cong K(x_1, \dots, x_n)$ алгебраїчних функцій від n змінних (дивись, напри-

клад, [46]). Тому стандартні диференціювання \square підполя $K(x_1, \dots, x_n)$ поля R можуть бути однозначно продовжені на поле R і ці диференціювання утворюють базис $\square_n(R)$ (збережемо для продовжень диференціювань ті ж самі позначення). Якщо D – диференціювання поля алгебраїчних функцій R , записане у вигляді

$$D = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, a_i \in R,$$

то дивергенція від D визначається як і для диференціювань полів раціональних функцій, тобто $divD = \sum_{i=1}^n \square$.

5.1 Комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань

Лема 5.1.1. Нехай $D_1, D_2 \in \square_n(R)$ і $a, b \in R$. Тоді

- 1) $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1$;
- 2) Якщо $a, b \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$, тоді $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2]$.

Доведення. 1)

\square Описание: $[aD_1, bD_2] = aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1 =$

\square Описание: $= a(D_1(b)D_2 + bD_1D_2) - b(D_2(a)D_1 + aD_2D_1) =$

\square Описание: $= aD_1(b)D_2 + abD_1D_2 - bD_2(a)D_1 - abD_2D_1 = \dots$

\square Описание: $= ab(D_1D_2 - D_2D_1) + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1 =$

\square Описание: $= ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1 \dots$

2) Якщо $a, b \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$, то $D_1(b) = 0$ та $D_2(a) = 0$. Отже, маємо, що $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2]$.

Лема 5.1.2. Нехай

$$D_1 = a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_2 = a_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \in W_2(R)$$

ненульові диференціювання поля $R \supseteq \mathbb{K}(x_1, x_2)$ такі, що

Описание: $\Delta = \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = 0$.

Рівність $[D_1, D_2] = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $D_2 = aD_1$, для деякого $a \in \text{Ker } D_1$.

Доведення. Оскільки $D_1, D_2 \in$ лінійно залежними над R , то ми маємо $D_2 = aD_1$ для деякого $a \in R$. За Лемою 5.1.1 умова $[D_1, D_2] = 0$ еквівалентна рівності $D_1(a) = 0$, тобто $a \in \text{Ker } D_1$.

Теорема 5.1.3. Нехай

Описание: $D = a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2}, D = a \frac{\partial}{\partial x_1} + a \frac{\partial}{\partial x_2}$

диференціювання поля $R \supseteq \mathbb{K}(x_1, x_2)$ алгебраїчних функцій такі, що

Описание: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Рівність $[D_1, D_2] = aD_1 + bD_2$, для деяких $a, b \in R$, виконується тоді і тільки тоді, коли

Описание: $\text{div} D_1 = \Delta, \text{div} D_2 = \Delta$

Описание: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Доведення. Позначимо через $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ матрицю A^{-1} , де $A =$

Тоді

Описание: $\text{div} D_1 = b_{11}D_1 + b_{12}D_2, \text{div} D_2 = b_{21}D_1 + b_{22}D_2$.

Використовуючи підхід зі статті [46] запишемо

Описание: $0 = \text{div}(b_{11}D_1 + b_{12}D_2) = (b_{21}D_1 + b_{22}D_2)$

Описание: $\text{div}(b_{11}D_1 + b_{12}D_2) = \text{div}(b_{21}D_1 + b_{22}D_2)$

Описание: $\frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} + b_{22} \frac{\partial}{\partial x_1} + b_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} - (\frac{\partial b_{11}}{\partial x_2} + b_{11} \frac{\partial}{\partial x_2})$

Описание: $\frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}$

З останнього співвідношення випливає (після заміни = $b_{i1}D_1 + b_{i2}D_2$):

Описание: $(\frac{\partial b_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2})D_1 + (\frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2})D_2 =$

Описание: $b_{11}(b_{21}D_1 + b_{22}D_2)D_1 + b_{12}(b_{21}D_1 + b_{22}D_2)D_2 -$

Описание: $b_{21}(b_{11}D_1 + b_{12}D_2)D_1 - b_{22}(b_{11}D_1 + b_{12}D_2)D_2.$

Тому маємо наступні рівності:

Описание: $(\frac{\partial b_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2})D_1 + (\frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2})D_2 =$

Описание: $(b_{21} - b_{11})D_1 = \det B (D_1 + D_2) \quad (1)...$

Беручи до уваги відношення

Описание: $\det B = \frac{1}{\Delta}, [D_2, D_1] = -aD_1 - bD_2$

ми з (1) отримаємо, що

Описание: $\frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial b_{21}}{\Delta}, \frac{\partial b_{22}}{\partial x_2} = \frac{b}{\Delta}$

З того, що

Описание: $B = A^{-1} = \Delta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ми маємо

Описание: $\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = \frac{a}{\Delta}$

Описание: $\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = \frac{b}{\Delta} \quad (2)$

Рівність (2) означає, що

$$\boxed{\times} \text{ Описание: } \operatorname{div} D_1 = \frac{D_1(\Delta)}{\Delta} - b, \operatorname{div} D_2 = \frac{D_2(\Delta)}{\Delta} - a \quad (3)$$

Навпаки, нехай рівність (3) виконується для деяких елементів $a, b \in R$. Оскільки $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_2(R)$ лінійно незалежними над R , тоді ми отримаємо, що $[D_1, D_2] = \alpha D_1 + \beta D_2$ для деяких $\alpha, \beta \in R$. Повторюючи міркування з першої частини ми одержимо, що

$$\boxed{\times} \text{ Описание: } \operatorname{div} D_1 = \frac{D_1(\Delta)}{\Delta} - \beta, \operatorname{div} D_2 = \frac{D_2(\Delta)}{\Delta} - \alpha.$$

Але тоді $\alpha = a, \beta = b$.

Наслідок 5.1.4. Нехай елементи

$$\boxed{\times} \text{ Описание: } D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{11} \frac{\partial}{\partial x_2}, D_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{21} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \square \in W_2(K)$$

лінійно незалежні над R . Диференціювання D_1 та D_2 комутують тоді і тільки

тоді, коли $\operatorname{div}(\square D_1) = 0, \operatorname{div}(\square D_2) = 0$, де $\Delta = \boxed{\times} \text{ Описание: } \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

При вивченні алгебри Лі $\mathcal{L}_2(R)$ виникає питання про такі диференціювання $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_2(R)$, що $[D_1, D_2] = D_2$ (вони породжують в $\mathcal{D}_2(R)$ двовимірну над K неабелеву підалгебру). Така алгебра Лі може також бути охарактеризованою в термінах дивергенції:

Наслідок 5.1.5. Нехай диференціювання $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_2(R)$ лінійно незалежні над R . Співвідношення $[D_1, D_2] = D_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\boxed{\times} \text{ Описание: } \operatorname{div}(\Delta D_1) = -\Delta, \operatorname{div}(\Delta D_2) = 0$$

зокрема, якщо $\Delta = 1$, тоді $\operatorname{div} D_2 = 0, \operatorname{div} D_1 = -1$.

Зазначимо, що більш вузьке питання про будову многочленів f, g , які задовольняють рівність $\det J(f, g) = g$, тобто про структуру Якобіанних диференціювань, які задовольняють зазначені вище умови, почало розглядатися після

опублікування статті [69]. Такі многочлени для деяких випадків описані в [61], що складає зміст попереднього розділу дисертації.

Вкажемо простий метод побудови комутативних базисів в алгебрі Лі диференціювань поля раціональних функцій $\mathbb{K}(R)$ від n змінних. Нехай $\{y_1, \dots, y_n\}$ базис трансцендентності поля R над \mathbb{K} . Позначимо через $\partial_1, \dots, \partial_n$ звичайні частинні диференціювання підполя $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$ в R і розширимо їх (однозначно за Лемою 5.1.2) до диференціювань поля R (ми збережемо ті ж самі позначення). Оскільки виконується рівність

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i, \quad i, j = 1, \dots, n$$

в підполі $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$ в R і R є алгебраїчним над $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$, то комутативність зберігається і для диференціювань поля R (за Лемою 5.1.2). Отже, $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ є комутативним базисом для $\mathbb{K}(R)$. Запишемо цей базис в явному вигляді. Позначимо через $\Delta = \det J(y_1, \dots, y_n)$ Якобіан алгебраїчних функцій y_1, \dots, y_n .

Розглянемо диференціювання D_{y_1}, \dots, D_{y_n} поля R , які визначені за правилом:

$$D_{y_i}(h) = \det J(y_1, \dots, y_{i-1}, h, y_{i+1}, \dots, y_n), \dots$$

де

$$J(y_1, \dots, y_{i-1}, h, y_{i+1}, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \partial_{y_1} & \dots & \partial_{y_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{y_{i-1}} & \dots & \partial_{y_{i-1}} \\ \partial_x & \dots & \partial_x \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{y_{i+1}} & \dots & \partial_{y_{i+1}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{y_n} & \dots & \partial_{y_n} \\ 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

є матрицею Якобі функцій y_1, \dots, y_n . Тоді

$$D_{y_i}(y_j) = \delta_{ij}$$

і тому

Описание: 1--
-∂--
Λ ∂i = ∂i Λ

у підполі $K(y_1, \dots, y_n)$. Але тоді за Лемою 5.1.2 $\square = \square_{D_{y_i}}$ по всьому полю R . Тому $\{\square_{D_{y_i}}\}_{i=1}^n$ є комутативним базисом алгебри Лі $\square_n(R)$. Зауважимо, що всі диференціювання $\square_{D_{y_i}}$ мають нульову дивергенцію тоді і тільки тоді, коли $\Delta \in K^*$.

5.2 Про вираз дивергенції в різних базисах

Нехай $R \supseteq K(x, y)$ поле алгебраїчних функцій від двох змінних. Тоді кожне диференціювання $D \in \square_2(R)$ має однозначний запис у вигляді $D = a_1 \square + a_2 \square$ для деяких елементів $a_1, a_2 \in R$ і за означенням покладемо $divD = \square + \square$. Якщо ми візьмемо довільні елементи f та $g \in R$, алгебраїчно незалежні над K , то диференціювання D запишеться також у вигляді $D = b_1 \square + b_2 \square$ для деяких $b_1, b_2 \in R$ і виникає питання як знайти $divD$ в базисі $\{\square, \square\}$ алгебри Лі $\square_2(R)$ (ми можемо розглядати $divD$ як геометричну характеристику D , оскільки кожне диференціювання можна розглядати як деяке векторне поле на деякому многовиді). Відповідь на це питання дає наступна теорема:

Теорема 5.2.1. Нехай $\{\square, \square\}$ — комутативний базис алгебри Лі $\square_2(R) = Der_K R$, де $R \supseteq K(x, y)$ — поле алгебраїчних функцій. Якщо $D = P \square + Q \square \in \square_2(R)$ виражається як $D = R \square + S \square$ в базисі $\{\square, \square\}$, то

Описание: $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - D(\Delta)$, -1-

де $\Delta = detJ(f, g)$ — якобіан функцій f, g .

Доведення. Знайдемо співвідношення між координатами (P, Q) та (R, S) для D . Помітимо, що

Описание: $R = D(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y}$

Описание: $S = D(g) = P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y}$. (4)

Тому

Описание: $R = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} P$
 $S = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} O...$

де

Описание: $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = J(f, g)$
 $\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = J(f, g)$

є матрицею Якобі алгебраїчних функцій f, g . Використовуючи ланцюгове правило для диференціювань, отримаємо, що

Описание: $\frac{\partial R}{\partial f} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}$.

Оскільки f, g алгебраїчно незалежні над K , але f, g, x і f, g, y вже лінійно залежні, то мають місце співвідношення

Описание: $F(x, f, g) = 0, G(y, f, g) = 0$, (5)

для деяких ненульових многочленів $F(u, v, w), G(u, v, w) \in K[u, v, w]$.

Також, очевидно, що $\neq 0$, $\neq 0$. З рівності (5) випливає

Описание: $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial f} + \frac{\partial F}{\partial f} = 0, \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial g} + \frac{\partial F}{\partial g} = 0$

Описание: $\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial f} + \frac{\partial G}{\partial f} = 0, \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial g} + \frac{\partial G}{\partial g} = 0$

і тоді

Описание: $\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{\partial \partial F}{\partial F_x}, \frac{\partial x}{\partial g} = \frac{\partial \partial F}{\partial F_g}$ (6)

Описание: $\frac{\partial y}{\partial f} = \frac{\partial \partial G}{\partial G_f}, \frac{\partial y}{\partial g} = \frac{\partial \partial G}{\partial G_g}$ (7)

Після диференціювання першого рівняння в (5) по x і потім по y ми одержимо

Описание:
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язуючи цю систему лінійних рівнянь, ми отримаємо

Описание:
$$\frac{\partial F}{\partial f} = - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \Delta, \quad \frac{\partial F}{\partial g} = - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \Delta$$

Описание:
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

де $\Delta =$. Аналогічно, з другої рівності в (5) маємо, що

Описание:
$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

і тоді

Описание:
$$\frac{\partial G}{\partial f} = - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \Delta, \quad \frac{\partial G}{\partial g} = - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \Delta$$

Тепер запишемо дивергенцію D в базисі $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \uparrow \end{matrix} \right\}$

Описание:
$$\frac{\partial R}{\partial f} + \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial f} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial f} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial g} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial g} =$$

Описание:
$$\begin{aligned} \text{(за (6),(7))} &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial f \partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial f \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial g \partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial g \partial y} \\ &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial f \partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial f \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial g \partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial g \partial y} \end{aligned}$$

Описание:
$$\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial g} = \text{(за (8),(9))} = \frac{\partial R}{\Delta} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial R}{\Delta} \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Описание:
$$\frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Але використовуючи (4), отримаємо

Описание:
$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + P \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + Q \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Описание: $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Описание: $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Описание: $\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Використовуючи останні рівності, запишемо:

Описание: $\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \frac{\partial Q}{\partial x}$

Описание: $+Q \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)$

Описание: $Q \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \Delta + P \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

Описание: $Q \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right)$

Аналогічно

Описание: $\frac{\partial S}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$

Описание: $+Q \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)$

Описание: $Q \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \Delta + P \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

Описание: $Q \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)$

З останніх рівностей випливає, що

Описание: $\frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial S}{\partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial v} = \frac{\partial \Delta}{\partial v}$

Описание: $\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial \Delta}{\partial x}$

Тому виконується рівність

✘	Описание:	$\operatorname{div} D = \frac{\partial R}{\partial f} + \frac{\partial S}{\partial g} - \frac{D(\Delta)}{\Delta}$	1
---	-----------	---	---

Наслідок 5.2.2. Якщо $\Delta = \det J(f,g) \in K^*$, то дивергенція диференціювання

$D \in \operatorname{Der} R$ не залежить від вибору комутативного базису $\{\boxed{\cdot}, \boxed{\cdot}\}$. Зокрема, дивергенція не залежить від вибору координатних многочленів у кільці многочленів $K[x,y]$.

5.3 Анулятори множин раціональних функцій

Позначимо через $\text{Ann}_{n(K)}(S)$ анулятор множини S із кільця многочленів в алгебрі Лі $\mathbb{L}_n(K)$, нагадаємо, що

Описание: $\text{Ann}_{n(K)}(S) = \{D \in W^n(K) \mid D(s) = 0 \text{ для всіх } s \in S\}$.

Лема 5.3.1. Нехай S – підмножина із поля $K(x_1, \dots, x_n)$ і $K(S)$ підполе порожене K та S в $K(x_1, \dots, x_n)$. Якщо $K(S)$ є алгебраїчним замиканням $K(S)$ в $K(x_1, \dots, x_n)$, то справедливі наступні твердження:

1. $\text{Ann}_{n(K)}(S) = \text{Ann}_{n(K)}(K(S)) = \text{Ann}_{n(K)}(K(S))$;
2. $\text{Ann}_{n(K)}(S)$ є підалгеброю в $\mathbb{L}_n(K)$ і векторним простором над R розмірності $t = n - \text{tr.deg}_K K(S)$;
3. Якщо $t \geq 1$, то алгебра Лі $\text{Ann}_{n(K)}(S)$ є простою.

Доведення. Доведемо пункт 1).

Кожне K -диференціювання $D \in \mathbb{L}_n(K)$, анулюючи множину S анулює, очевидно, й підполе $K(S)$. Оскільки підполе $K(S)$ є алгебраїчним розширенням поля $K(S)$, то кожне диференціювання з R , анулюючи $K(S)$ анулює й $K(S)$ за Лемою 2.0.20. Тому

Описание: -----

Обернене включення є очевидним, тому ми маємо

Описание: $\text{Ann}_{n(K)}(K(S)) = \text{Ann}_{n(K)}(K(S))$.

Доведемо пункт 2).

Нехай $k = \text{tr.deg}_K K(S)$ та $\{y_1, \dots, y_k\}$ – базис трансцендентності для $K(S)$ над K (елементи y_1, \dots, y_k можуть бути вибрані з множини S). Візьмемо доповнення множини $\{y_1, \dots, y_k\}$ до базиса трансцендентності поля $K(x_1, \dots, x_n)$, яке

складається з довільно вибраних елементів y_{k+1}, \dots, y_n і розглянемо диференціювання \square , $i = 1, \dots, n$ підполя $K(y_1, \dots, y_n)$ поля $R = K(x_1, \dots, x_n)$. Розглянемо розширення диференціювання \square , $i = 1, \dots, n$ до диференціювання поля $K(x_1, \dots, x_n)$ використовуючи Лему 2.0.20 і збережемо ті ж самі позначення.

Тоді \square , \square анулюють, очевидно, підполе $K(S)$ (тому що $\square(y_j) = 0$, $i = k + 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$). Тому

\square Описание: $\square \square \square + \square \square \square + R \square \square \square \text{Ann} \wedge W(K)(S)$.

Покажемо, що останнє включення є рівністю. Візьмемо довільне диференціювання $D \in \text{Ann}_{n(K)}(S)$. Тоді D може бути записане у вигляді:

\square Описание: $D = f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \square \square \square + f_k \frac{\partial}{\partial y_k} + f_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} + \square \square \square + f_n \frac{\partial}{\partial y_n}$

для деяких $f_i \in K(x_1, \dots, x_n)$ (тому що диференціювання \square , \square є лінійно незалежними над $K(x_1, \dots, x_n)$). Оскільки

\square Описание: $f_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} + \square \square \square + f_n \frac{\partial}{\partial y_n} \square \square \square \text{Ann} \wedge W_n(K)(S)$,

то ми бачимо, що

\square Описание: $D = f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \square \square \square + f_k \frac{\partial}{\partial y_k} \square \square \square \text{Ann} \wedge W_n(K)(S)$.

Очевидні рівності $D_1(y_i) = 0$, $i = 1, \dots, k$ означають, що $f_i = 0$ (за рівністю $\square(y_j) = \delta_{ij}$). Звідси маємо

\square Описание: $\text{Ann} \wedge W_n(K)(S) = R \frac{\partial}{\partial y_1} + \square \square \square + R \frac{\partial}{\partial y_n}$.

Доведемо пункт 3).

Нехай $m = n - k \geq 1$. За вище доведеним ми маємо

\square Описание: $\text{Ann} \wedge W(K)(S) = R \frac{\partial}{\partial y_1} + \square \square \square + R \frac{\partial}{\partial y_n}$,

тобто підалгебра $\text{Ann}_{\mathfrak{K}(S)}^{\square}(S)$ є векторним простором розмірності $m \geq 1$ над R . Нехай I – ненульовий власний ідеал з $\text{Ann}_{\mathfrak{K}(S)}^{\square}(S)$. Тоді I містить ненульовий ідеал J , який є векторним простором над R . Останнє неможливе, тому що це суперечить основному результату статті [36].

Нехай S – непорожня підмножина із $\mathfrak{K}(x_1, \dots, x_n)$, яку без обмеження загальності можна вважати скінченною і алгебраїчно незалежною над полем \mathfrak{K} , $S = \{y_1, \dots, y_k\}$. Доповнимо множину S до базиса трансцендентності $\{x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k\}$ поля $\mathfrak{K}(x_1, \dots, x_n)$ над \mathfrak{K} (це можливо після перенумерації змінних) і позначимо через $J_{S,x}$ яacobіанне диференціювання підполя $\mathfrak{K}(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$, яке визначене за правилом:

☒ Описание: $J_{S,x_i} = \det J(x_1, \dots, x_{i-1}, h, x_{i+1}, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k), i = 1, \dots, n-k$

де останній визначник є наступним:

☒ Описание:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial h}{\partial y_{k-1}} & \frac{\partial h}{\partial y_k} \\ 1 & 2 & \dots & \dots & k-1 & k \end{vmatrix} \quad (*)$$

Продовжимо ці диференціювання на все поле $\mathfrak{K}(x_1, \dots, x_n)$ (це можливо за Лемою 2.0.20) і збережемо ті ж самі позначення для них. Позначимо через

☒ Описание: $\Delta = \det J(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$.

Лема 5.3.2. Диференціювання $J_{S,x_i}, i = 1, \dots, k$ є лінійно незалежними над $\mathfrak{K}(x_1, \dots, x_n)$ і кожне з них містить у своєму ядрі підполе $\mathfrak{K}(S)$ і диференціювання $J_{S,y}^{\square}$ відображають підполе $\mathfrak{K}(S)$ в себе.

Доведення. Припустимо, що $f_1 J_{S,x^1} + \dots + f_n J_{S,x^n} = 0$ для деяких $f_i \in R$. Оскільки $J_{S,x^i}(x_j) \neq 0$ (тому що це якобіан алгебраїчно незалежних над K раціональних функцій $\{x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k\}$) і $J_{S,x^i}(x_j) = 0, i \neq j$, ми одержимо $f_1 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$ і тому $J_{S,x^1}, \dots, J_{S,x^{n-k}}$ є лінійно незалежними над R . Далі $J_{S,x^i}(y_j) = 0$ для $j = 1, \dots, k$ і $i = 1, \dots, n - k$ і тому $K(S) \subseteq \text{Ker } J_{S,x^i}, i = 1, \dots, n-k$. Але тоді

✖ Описание: -----

за Лемою 2.0.20.

Диференціювання $\prod J_{S,y^i}$ відповідає на $K(y_1, \dots, y_k)$ диференціюванню $\prod J_{S,y^i}$, тому $\prod J_{S,y^i}$ відображає поле $K(y_1, \dots, y_n)$ в себе. За Лемою 2.0.20 диференціювання $\prod J_{S,y^i}$ однозначно продовжується на алгебраїчне замикання $K(S)$ підполя $K(S)$ в R і тому диференціювання $\prod J_{S,y^i}$ відображає підполе $K(S)$ в себе.

Зауваження 5. Диференціювання $\prod J_{S,x^i}$ та $\prod J_{S,y^i}$ можуть бути легко записані у стандартному базисі $\{\prod J_{S,x^i}, \dots, \prod J_{S,y^i}\}$ поля $K(x_1, \dots, x_n)$ у вигляді

✖ Описание: $J_{S,x^i} = f_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x^n}$

де $f_i \in K(x_1, \dots, x_n)$. Коефіцієнти є мінорами порядку $n - 1$ визначника (*).

Теорема 5.3.3. Нехай K поле, S підмножина поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$ і $\{y_1, \dots, y_k\}$ максимальна множина алгебраїчно незалежних над K елементів з S . Тоді анулятор $\text{Ann}_{\prod J_{S,y^i}}(K(S))$ є векторним простором над $K(x_1, \dots, x_n)$ з базисом $J_{S,x^1}, \dots, J_{S,x^{n-k}}$. Множина N_1 всіх елементів з $\prod J_{S,y^i}(K)$, які відображають підполе $K(S)$ в себе, є напівпрямою сумою

✖ Описание: $N = M \oplus \text{Ann}_{\prod J_{S,y^i}}(K(S))$

де M є підалгеброю в $\prod J_{S,y^i}(K)$ з базисом $\prod J_{S,y^1}, \dots, \prod J_{S,y^k}$.

5.4 Анулятори раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(K)$

Позначимо через $W_n(K)$ алгебру Лі всіх K -диференціювань кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$. Всі елементи із $W_n(K)$ можуть бути записані у вигляді:

$$D = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial x_i} + f$$

де $f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$. Алгебра Лі $W_n(K)$ міститься в $W_n(K)$ і $W_n(K)$ є вільним $K[x_1, \dots, x_n]$ -модулем. Ця алгебра Лі діє природнім чином на $K(x_1, \dots, x_n)$ і ми розглянемо анулятори елементів поля $K(x_1, \dots, x_n)$ в підалгебрі $W_n(K)$. Якщо $\phi \in K(x_1, \dots, x_n)$, тоді $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ є підмодулем модуля $W_n(K)$ над кільцем $K[x_1, \dots, x_n]$. Ми вкажемо породжуючі елементи $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ в деяких випадках.

Лема 5.4.1. Нехай $\phi \in K(x_1, \dots, x_n)$ і $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ – анулятор елемента ϕ в алгебрі Лі $W_n(K)$. Тоді

1. $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ є підмодулем рангу $n - 1$ в $W_n(K)$;
2. Якщо $n = 2$, то $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ є вільним підмодулем рангу 1 для $W_2(K)$.

Доведення. 1) дивись Лему 5.3.2;

2) дивись [62].

Лема 5.4.2. Нехай $D = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in W_n(K)$ з $p_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ та $D(\phi) = 0$ для деякого $\phi \in K(x_1, \dots, x_n)$. Тоді диференціювання

$$D_j = \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \phi, \quad i, j = 1, \dots, n, i \neq j$$

задовольняють рівність

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j D_j = \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) D \phi$$

Доведення. Очевидно, що $D_j^{(i)}(\phi) = 0$, для $i, j = 1, \dots, n$. Далі, ми маємо наступне:

Описание: $\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j D_j^{(i)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) =$

Описание: $\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Остання сума може бути переписана у вигляді:

Описание: $\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) D$,

оскільки

Описание: $\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = D(\phi) = 0$.

У наступній теоремі вказано породжуючі елементи $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ для деяких класів раціональних функцій.

Теорема 5.4.3. Нехай $\phi = \square \in K(x_1, \dots, x_n)$ така раціональна функція із взаємнопростими многочленами u та v , що існують такі многочлени f_1, \dots, f_n ,

що $f_1 \square + \dots + f_n \square = \square$. Тоді $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ є підмодулем рангу $n - 1$ над $K[x_1, \dots, x_n]$ з породжуючими

Описание: $D_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n f_i D_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, n$ де $D_j^{(i)} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) v^2$.

Доведення. Візьмемо довільне диференціювання $D \in Ann_{W_n(K)}(\phi)$ і покладемо

Описание: $D = p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + p_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $p_i \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Визначимо диференціювання $D_j^{(i)}$ за правилом:

Описание: $D_j^{(i)} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) v^2$.

Оскільки $D(\phi) = 0$, то з урахуванням Лема 5.4.2 маємо:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j D_j = \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) D, \quad i = 1, \dots, n.$$

Домножимо обидві частини рівності на f_i і візьмемо суму від $i = 1$ до n . Отримаємо наступне співвідношення:

$$\sum_{i=1}^n f_i \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) D = - \sum_{i=1}^n f_i D_i.$$

Ліва частина рівності може бути записана у вигляді

$$\sum_{i=1}^n f_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j D_j \right) = \left(\sum_{j=1}^n p_j D_j \right) \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n f_i \right).$$

Позначимо через $\square = \sum_{i=1, i \neq j}^n f_i D_j^{(i)} v^2$. Тоді ми одержимо

$$- D = \sum_{j=1}^n p_j D_j.$$

З цієї рівності випливає, що $\text{Ann}_{W_n(K)}(\phi)$ має систему породжуючих елементів $\{\square, \dots, \square\}$. Також легко бачити, що всі ці диференціювання мають поліноміальні коефіцієнти, тобто $\square, \dots, \square \in W_n(K)$.

З даної теореми випливають наступні наслідки:

Наслідок 5.4.4. Нехай f многочлен з кільця многочленів $K[x_1, \dots, x_n]$. Якщо ідеал з $K[x_1, \dots, x_n]$, породжений частинними похідними \square, \dots, \square , співпадає з $K[x_1, \dots, x_n]$, то анулятор $\text{Ann}_{W_n(K)}(f)$ може бути породжений n елементами.

Наслідок 5.4.5. Якщо многочлен $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ є слайсом для диференціювання $D \in W_n(K)$ (тобто, $D(f) = 1$) то $\text{Ann}_{W_n(K)}(f)$ може бути породжений n елементами.

Наслідок 5.4.6. Нехай $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ є таким многочленом, що принаймні одна з частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ є ненульовою константною. Тоді $\text{Ann}_{W_n(\mathbb{K})}(f)$ є вільним підмодулем з $W_n(\mathbb{K})$ рангу $n - 1$.

Висновки до розділу 5

В останньому, п'ятому розділі досліджуються комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від двох змінних та анулятори множин раціональних функцій у алгебрі Лі $W_2(K)$ диференціювань поля раціональних функцій від n змінних. У першій частині описано метод побудови деяких комутативних базисів у алгебрі Лі $W_2(K)$ всіх K -диференціювань кільця многочленів $K[x_1, x_2]$. Один із основних результатів цього підрозділу – наступна теорема:

Теорема 5.1.3 Нехай

Описание: $D_1 = a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2}$, $D_2 = a_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial}{\partial x_2}$

диференціювання поля $R \supseteq K(x_1, x_2)$ алгебраїчних функцій такі, що

Описание: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Рівність $[D_1, D_2] = aD_1 + bD_2$, для деяких $a, b \in R$, виконується тоді і тільки тоді, коли

Описание: $\text{div} D_1 = \frac{D_1(\Delta)}{\Delta}$, $\text{div} D_2 = \frac{D_2(\Delta)}{\Delta}$, $b = a$.

З даної теореми випливає наслідок про комутування таких диференціювань:

Наслідок 5.1.4 Нехай елементи

Описание: $D_1 = a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2}$, $D_2 = a_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\Delta \in W_2(K)$

лінійно незалежні над R . Диференціювання D_1 та D_2 комутують тоді і тільки

тоді, коли $\text{div}(D_1) = 0, \text{div}(D_2) = 0$, де $\Delta = \dots$

При вивченні алгебри Лі $W_2(R)$ всіх K -диференціювань поля R алгебраїчних функцій від двох змінних виникає питання про такі диференціювання

$D_1, D_2 \in \mathbb{K}[x, y]_2(R)$, що $[D_1, D_2] = D_2$ (вони породжують в $\mathbb{K}[x, y]_2(R)$ двовимірну над \mathbb{K} неабелеву підалгебру). Така алгебра Лі може також бути охарактеризована в термінах дивергенції:

Наслідок 5.1.5 Нехай диференціювання $D_1, D_2 \in \mathbb{K}[x, y]_2(R)$ лінійно незалежні над R . Співвідношення $[D_1, D_2] = D_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли

Описание: $\frac{1}{\text{div}(\dots D_1)} = \dots, \frac{1}{\text{div}(\dots D_2)} = 0$

зокрема, якщо $\Delta = 1$, тоді $\text{div}D_2 = 0, \text{div}D_1 = -1$.

У другій частині 5-го розділу розглянуто питання про те, як змінюється дивергенція диференціювання D при переході від одного базису трансцендентності до іншого. Відповідь на це питання дає наступна теорема:

Теорема 5.2.1 Нехай $\{P, Q\}$ – комутативний базис алгебри Лі $\mathbb{K}[x, y]_2(R) = \text{Der}_{\mathbb{K}}R$, де $R \cong \mathbb{K}(x, y)$ є полем алгебраїчних функцій. Якщо $D = P + Q \in \mathbb{K}[x, y]_2(R)$ виражається як $D = R + S$ в базисі $\{P, Q\}$, тоді

Описание: $\text{div}D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial f} + \frac{\partial S}{\partial g} - D(\Delta)\Delta^{-1}$

де $\Delta = \det J(f, g)$ – яacobian функцій f, g .

У підрозділах 5.3 та 5.4 розглядаються анулятори множин раціональних функцій.

Деякі властивості ануляторів підмножин із поля раціональних функцій наведені в наступних лемах:

Лема 5.3.1 Нехай S підмножина $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ і $\mathbb{K}(S)$ підполе породжене \mathbb{K} та S в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Якщо $\mathbb{K}(S)$ є алгебраїчним замиканням $\mathbb{K}(S)$ в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, то справедливі наступні твердження:

1. $\text{Ann}_{\mathbb{K}(S)}^{\mathbb{K}} = \text{Ann}_{\mathbb{K}(S)}^{\mathbb{K}(S)} = \text{Ann}_{\mathbb{K}(S)}^{\mathbb{K}(S)}$;
2. $\text{Ann}_{\mathbb{K}(S)}^{\mathbb{K}}(S)$ є підалгеброю в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ і векторним простором над R розмірності $m = n - \text{tr.deg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(S)$;

3. Якщо $t \geq 1$, тоді алгебра Лі $\text{Ann}_{n(K)}(S)$ є простою.

Лема 5.3.2 Диференціювання $J_{S,x^i}, i = 1, \dots, k$ є лінійно незалежними над $K(x_1, \dots, x_n)$ і кожне з них містить у своєму ядрі підполе $K(S)$ і диференціювання J_{S,y^i} відображають підполе $K(S)$ в себе.

Наступна теорема підсумовує попередні леми:

Теорема 5.3.3 Нехай K поле, S підмножина поля раціональних функцій $K(x_1, \dots, x_n)$ і y_1, \dots, y_k максимальна множина алгебраїчно незалежних над K елементів з S . Тоді анулятор $\text{Ann}_{n(K)}(S)$ є векторним простором над $K(x_1, \dots, x_n)$ з базисом $J_{S,x^1}, \dots, J_{S,x^k}$. Множина N_1 всіх елементів з $\mathfrak{A}_n(K)$, яка відображає підполе $K(S)$ в себе є напівпрямою сумою

$$N_1 = M \oplus \text{Ann}^n(K)$$

де M є підалгеброю в $\mathfrak{A}_n(K)$ з базисом $J_{S,y^1}, \dots, J_{S,y^k}$.

Слідуючі результати отримані в алгебрі Лі $W_n(K)$:

Лема 5.4.2 Нехай $D = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in W_n(K)$ з $p_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ та $D(\phi) = 0$ для деякого $\phi \in K(x_1, \dots, x_n)$. Тоді диференціювання

$$D_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$$

задовольняють рівність

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n p_j D_j = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) D$$

Узагальнюючи цей результат, було отримано наступну теорему та наслідки з неї.

Теорема 5.4.3 Нехай $\phi = \frac{u}{v} \in K(x_1, \dots, x_n)$ така раціональна функція із взаємпростими многочленами u та v , що існують такі многочлени

f_1, \dots, f_n , що $f_1 \boxed{\times} + \boxed{} + f_n \boxed{\times} = \boxed{}$. Тоді $\text{Ann}_{W_n(\mathbb{K})}(\phi)$ є підмодулем рангу $n - 1$ над $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ з породжуючими

× Описание: \sum^n

---- (i) $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - 2$

$D_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n f_i D_{ij}, j = 1, \dots, n$ де $D_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) v$.

Наслідок 5.4.4 Нехай f многочлен з кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Якщо ідеал з $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, породжений частинними похідними $\boxed{\times}, \dots, \boxed{\times}$, співпадає з $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, то анулятор $\text{Ann}_{W_n(\mathbb{K})}(f)$ може бути породжений n елементами.

Наслідок 5.4.5 Якщо многочлен $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ є слайсом для диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ (тобто, $D(f) = 1$) то $\text{Ann}_{W_n(\mathbb{K})}(f)$ може бути породжений n елементами.

Наслідок 5.4.6 Нехай $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ є таким многочленом, що принаймні одна з частинних похідних $\boxed{\times}, i = 1, \dots, n$ є ненульовою константною. Тоді $\text{Ann}_{W_n(\mathbb{K})}(f)$ є вільним підмодулем з $W_n(\mathbb{K})$ рангу $n - 1$.

Висновки

У дисертації автором отримано нові теоретичні результати, які пов'язані з описом централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрах Лі диференціювань. Також отримані нові результати пов'язані з описом ануляторів множин раціональних функцій в алгебрах Лі диференціювань полів, слабо напівпростими многочленами та комутативними базисами в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій.

Основними науковими результатами є наступні:

- описано будову централізаторів елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$ та залежно від степеня трансцендентності поля констант диференціювання D описано централізатор D в алгебрі Лі $Der_K(R)$ диференціювань поля R алгебраїчних функцій від кількох змінних;
- дано опис максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(K)$ у випадку основного поля нульової характеристики;
- отримано критерій слабкої напівпростоти многочленів кільця $K[x, y]$ із відокремленими змінними, тобто таких, що $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, встановлено основні властивості таких многочленів;
- вказано зв'язок між деякими класами комутативних базисів алгебр Лі всіх K -диференціювань поля алгебраїчних функцій від n змінних, вказано метод їх побудови;

- знайдено закон зміни дивергенції диференціювання поля алгебраїчних функцій від двох змінних при переході від одного базису трансцендентності до іншого базису трансцендентності цього ж поля;
- досліджено структуру ануляторів множин раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(K)$ та наведено їх властивості.

Список використаних джерел

- [1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. /Бахтурин Ю. А.// М.: Наука. 1985. - 447 с.
- [2] Бейдар К.И. Алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры/ Бейдар К.И., Зайцев М.В., Пихтильков// Вестн. Моск. ун-та. Матем. механ. – 2002. - т.66, № 3. - С.23-48.
- [3] Джекобсон Н. Алгебры Ли. /Джекобсон Н.// М.: Мир, 1964.
- [4] Єна О. Г. Про диференціювання кільця многочленів від двох змінних у простій характеристиці / О. Г. Єна // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2007. — № 4. — С. 23—27.
- [5] Кострикин А.И. Критерий разрешимости конечномерной алгебры Ли /Кострикин А.И.// Вестник Московского университета. Мат., мех. - 1982.- №2 - С.5-8.
- [6] Курош А.Г. Теория групп /Курош А.Г.// М.: "Наука". - 1967.
- [7] Ленг С. Алгебра /Ленг С.// М.: "Мир". - 1968.
- [8] Степух В. В. Централізатори елементів в алгебра Лі диференціювань полів / Світлана В. Лисенко, Анатолій П. Петравчук, Віталій В. Степух // Збірник праць інституту математики - 2015. - вип.12. - С.141-153.

- [9] Степук В. В. Слабко полупростые дифференцирования кольца многочленов от двух переменных Четвёртая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов (27 января – 1 февраля, 2014) / Владимир С. Гавран, Виталий В. Степук // - Москва, Российская Федерация. - 2014. - С.15—16.
- [10] Степук В.В. Централізатори елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$ Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (25-27 квітня, 2013) / Віталій В. Степук // - Київ, Україна. - 2013. - С.138.
- [11] Степук В.В. Централізатори елементів алгебри Лі диференційовань IX-а Літня школа Алгебра, топологія і аналіз (7-18 Липня, 2014) / Віталій В. Степук // - с. Поляниця, Івано-Франківська область, Україна. - 2014. - С.78—79.
- [12] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Издание 3-е / И. Р. Шафаревич. — М. : МНЦМО, 2007. — 588 с.
- [13] Amitsur S. A. Commutative linear differential operators / S. A. Amitsur // Pacific J. Math. — 1958. — Vol. 8. — P. 1—10.
- [14] Arzhantsev I. V. Closed polynomials and saturated subalgebras of polynomial algebras / I. V. Arzhantsev, A. P. Petravchuk // Укр. матем. журн. — 2007. — Т. 59, № 12. — С. 1587—1593.
- [15] Ayad M. Sur les polynômes $f(X, Y)$ tels que $K[f]$ est intÉegralement fermÉe dans $K[X, Y]$ / M. Ayad // Acta Arith. — 2002. — Vol. 105, № 1. — P. 9—28.
- [16] Ayad M. Irreducibility of $f(u(x, v(y)))$ / M. Ayad // J. Algebra. — 2004. — Vol. 279. — P. 302—307.
- [17] Ayad M. On the kernel of some derivations of $K(x_1, \dots, x_n)$ / Mohamed Ayad, Philippe Ruckelshyh // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, № 5. — P. 2505—2510.

- [18] Barberis M.L. Abelian complex structures on solvable Lie algebras / Barberis M.L., Dotti I.G. // Math. RA/0202220, to appear in J. Lie theory.
- [19] Bavula V. Luroth field extensions / V. Bavula // J. Pure Appl. Algebra. — 2005. — Vol. 199, № 1-3. — P. 1—10.
- [20] Benkart G.M. Lie algebras with nilpotent centralizers / G. M. Benkart and I. M. Isaacs // Canad. J. Math. — 1979. — Vol. 31, № 5. — P. 929—941.
- [21] Bergman G. M. Centralizers in free associative algebras / G. M. Bergman // Trans. Math. Soc. — 1969. — Vol. 137. — P. 327—344.
- [22] Bodin A. Reducibility of rational functions in several variables / Arnaud Bodin // Israel J. Math. — 2008, — Vol. 164. — P. 333—347.
- [23] Cartan E. Les groupes de transformations continus, infinis, simples / Elie Cartan // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). — 1909. — Vol. 26. — P. 93—161.
- [24] *J. Dixmier*. Sur les algèbres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — Vol. 96. — P. 209—242.
- [25] Daigle D. Triangular derivations of $k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ / D. Daigle, G. Freudenburg // J. Algebra. — 2001, — Vol. 241, № 1. — P. 328—339.
- [26] Derksen H. The kernel of a derivation / H. Derksen // Journal of pure and applied Algebra. — 1993, — Vol. 84. — P. 13—16.
- [27] Eakin P. A note on finite dimensional subrings of polynomial rings / Paul Eakin // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 31. — P. 75—80.
- [28] van den Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture / Arno van den Essen. — Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, — Vol. 190. — 2000. — 329 p.

- [29] van den Essen A. Rings of constants of the form $k[f]$ / Arno van den Essen, Jean Moulin Ollagnier, Andrzej Nowicki // *Comm. Algebra.* — 2006. — Vol. 34, № 9. — P. 3315—3321.
- [30] Freudenburg G. A note on the kernel of a locally nilpotent derivation / G. Freudenburg // *Proceedings of the AMS.* — 1996, — Vol. 124, № 1. — P. 27—29.
- [31] Freudenburg G. Algebraic theory of locally nilpotent derivations / G. Freudenburg. — Springer Verlag, 2006. — 272 p.
- [32] Gonzalez-Lopez A. Lie algebras of differential operators in two complex variables / Artemio Gonzalez-Lopez, Niky Kamran and Peter J. Olver // *Amer. J. Math.* — 1992. — Vol. 114. — P. 1163—1185.
- [33] Guillemin V. Infinite dimensional primitive Lie algebras / V. Guillemin // *J. Differential Geom.* — 1970, — Vol. 4, № 3. — P. 257—282.
- [34] Hartley B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra /Hartley B.// *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **63** (1967), 257–272.
- [35] Iena O. G. On annihilators of rational functions in the Lie algebra of derivations of $k[x,y]$ / Anatoliy P. Petravchuk, Oleksandr G. Iena and Andriy O. Regeta // submitted, (see arXiv:math.RA:0910.4465).
- [36] Jordan D.A. On the ideals of a Lie algebra of derivations. / David A. Jordan // *J. London Math. Soc.* — 1986. — Vol. 33, № 1. — P. 33—39.
- [37] Klep I. Lie algebras with abelian centralizers / Igor Klep, Primoz Moravec // *Algebra Collquim* — 2010. — Vol. 17, № 4. — P. 629—636.
- [38] Kolchin E.R. Differential algebraic groups / Ellis R. Kolchin // *Academic Press Inc.* — 1985. — P. 194—251.
- [39] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, / Sophus Lie // — 1893. — Vol. 3.

- [40] Lorenzini D. Reducibility of polynomials in two variables / Dino Lorenzini // J. Algebra — 1993. — Vol. 156. — P. 65—75.
- [41] Makar-Limanov L. On the ring of constants for derivations of power series rings in two variables / Leonid Makar-Limanov, Andrzej Nowicki // Colloq. Math. — 2001. — Vol. 87, № 2. — P. 195—200.
- [42] Makedonskyi Ie. O. On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations / Ievgen O.Makedonskiy, Anatoliy P.Petravchuk // Journal of Algebra — 2014. — Vol. 401. — P. 245—257.
- [43] Najib S. Une generalisation de l'inegalite de Stein-Lorenzini / Salah Najib // J. Algebra. — 2005. — Vol. 292, № 2. — P. 566—573.
- [44] Najib S. Factorisation des polynomes $P(X_1, \dots, X_n) - \lambda$ et theoreme de Stein: Thesis, University of Lille / S. Najib. — University of Lille, 2005.
- [45] Najib S. Sur le spectre d'un polynome `a plusieurs variables / S. Najib // Acta Arith. — 2004, — Vol. 114., № 2 — P. 169—181.
- [46] Nowicki A. Rings of constants for k -derivations in $k[x_1, \dots, x_n]$ / Andrzej Nowicki, Masayoshi Nagata // J. Math. Kyoto Univ. — 1988. — Vol. 28, № 1. — P. 111—118.
- [47] Nowicki A. Polynomial derivations and their rings of constants / A. Nowicki. — Torun: N.Copernicus University Press, 1994. — 170 p.
- [48] Nowicki A. Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero / Andrzej Nowicki // J. Pure Appl. Algebra. — 1994. — Vol. 96, № 1. — P. 47—55.
- [49] Nowicki A. Generators of rings of constants for some diagonal derivations in polynomial rings / Andrzej Nowicki, Jean-Marie Strelcyn // J. Pure Appl. Algebra. — 1995. — Vol. 101, № 2. — P. 207—212.

- [50] Ollagnier J. M. Algebraic closure of a rational function / J. M. Ollagnier // Qualitative theory of dynamical systems. — 2004. — Vol. 5, № 2. — P. 285—300.
- [51] Ollagnier J. M. On the non-existence of constants of derivations: the proof of a theorem of Jouanolou and its development / Jean Moulin Ollagnier, Andrzej Nowicki, Jean-Marie Strelcyn // Bull. Sci. Math. — 1995. — Vol. 119, № 3. — P. 195—233.
- [52] Petravchuk A.P. On behavior of solvable ideals of Lie algebras under outer derivations / Petravchuk A.P. // Communications in Algebra, 2010, to appear.
- [53] Petravchuk A. P. On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $SA_2(k)$ / A. P. Petravchuk, O. G. Iena // J. Lie Theory. — 2006. — Vol. 16, № 3. — P. 561—567.
- [54] Petravchuk A. P. On closed rational functions in several variables / Anatoliy P. Petravchuk, Oleksandr G. Iena // Algebra Discrete Math. — 2007. — № 2. — P. 115—124.
- [55] Płoski A. On the Jacobian dependence of power series / A. Płoski // Bull. Acad. Polon. Sci. S \ddot{D} er. Sci. Math. Astronom. Phys.- 1975,- Vol. 23, № 4. —P. 407—410.
- [56] Ritt J. F. Differential algebra / Joseff F. Ritt // Amer. J. Math. Colloquium publications — 1948. — Vol. 33. — P. 168—177.
- [57] Schinzel A. Polynomials with special regard to reducibility, Volume 77 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. With an appendix by Umberto Zannier / A. Schinzel. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 558 p.
- [58] Shestakov I. P. Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials / Ivan P. Shestakov, Ualbai U. Umirbaev // J. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 17, № 1. — P. 181—196 (electronic).

- [59] *Serge Skryabin*, Representations of the Poisson algebra in prime characteristic // *Math. Z.* — 2003, — Vol. 243. — P. 563–597.
- [60] Stewart I. Lie algebras generated by finite dimensional ideals /Stewart I. // *Res. Notes. Math.* - 1972.-2.
- [61] Stepukh V. V. On weakly semisimple derivations of the polynomial ring in two variables / Volodymyr S. Gavran, Vitaliy V. Stepukh // *Algebra and Discrete mathematics* — 2014. — Vol. 18. № 1. — P. 50—58.
- [62] Stepukh V. V. On centralizers of elements in the Lie algebra $W_2(K)$ / Ievgen O. Makedonskiy, Anatoliy P. Petravchuk, Vitaliy V. Stepukh // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова* - 2013. - вип.14. - С.24-30.
- [63] Stepukh V. V. Annihilator subalgebras in Lie algebras of derivations / Vitaliy V. Stepukh // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics* — 2015. — Vol. 33. № 1. — P. 52—56.
- [64] Stepukh V. V. On bases of Lie algebras of derivations. / Anatoliy P. Petravchuk, Vitaliy V. Stepukh// *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv.* – 2015 – Vol. 2 – P. 28—32.
- [65] Stepukh V. V. On annihilators of some polynomials in the Lie algebra $W_n(K)$ International Mathematical Conference on occasion to the 70th year anniversary of Professor Vladimir Kirichenko (June 13-19, 2012) / Anatoliy P. Petravchuk, Vitaliy V. Stepukh // - Mykolaiv, Ukraine. - 2012. - P.112.
- [66] Stepukh V. V. On centralizers of elements in some Lie algebras of derivations 9-th International Algebraic conference in Ukraine (July 8-13, 2013) / Anatoliy P. Petravchuk, Ievgen O. Makedonskiy, Vitaliy V. Stepukh // - L'viv, Ukraine. - 2013. - P.119.

- [67] Stepukh V. V. On centralizers of elements in Lie algebras of derivations
The International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of
L.A.Kaluzhnin (July 7-12, 2014) / Svitlana V. Lysenko, Anatoliy P. Petravchuk,
Vitaliy V. Stepukh // - Kiev, Ukraine. - 2014. - P.59.
- [68] Stepukh V. V. On bases of Lie algebras of derivations X International Algebraic
Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (August
20-27, 2015) / Anatoliy P. Petravchuk, Vitaliy V. Stepukh // - Odesa, Ukraine. -
2015. - P.85.
- [69] Stein Y. Weakly nilpotent and weakly semisimple polynomials on the plane /
Yosef Stein // Int. Math. Research Notices — 2000. — Vol. 13. — P. 681—698.
- [70] Stein Y. The total reducibility order of a polynomial in two variables / Yosef
Stein // Israel J. Math. — 1989. — Vol. 68, № 1. — P. 109—122.
- [71] Strade H. Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of
prime characteristic / H. Strade, R. Wilson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1991. —
Vol. 24, № 2. — P. 357—362.
- [72] Zaks A. Dedekind k -subalgebras of $k(x)$ / Abraham Zaks // Comm. Algebra. —
1977. — Vol. 5, № 4. — P. 347—364.