

or periodicity. Equation of such a form in the case of finite number of coefficients was investigated in the papers [1], [2]. In general case the equation was investigated in the paper of M. Gorodnii and O. Lahoda [3]. The main result was such a theorem:

Theorem 1.1. *Let function*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k \quad (2)$$

be analytical in the disk $K_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < d\}$, where $d > 1$ is fixed. Then difference equation (1) has bounded solution for any given bounded sequences $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$, $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$ if and only if for any $z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1$, operator

$$f(z) = I - g(z) \quad (3)$$

has continuous inverse operator $(f(z))^{-1}$.

In the paper conditions would be obtained, which are sufficient for solution belong to another class of sequences, which is wider than the class of bounded sequences.

2 Slowly growing solutions

Definition 2.1. A sequence $\{y_n : n \geq 1\}$ of elements of Banach space B is called slowly growing in B , if

$$\forall r > 1 : \sup_{n \geq 1} r^{-n} \|y_n\| < +\infty.$$

Let's note that any bounded sequence is slowly growing, but reverse one is not true. We can see it from the example of sequence $\{n^\gamma b : n \geq 1\}$, where $b \in B, b \neq \vec{0}, \gamma > 0$.

Let's consider the problem of slow growth of solution of equation (1). The main result of the article is the following theorem:

Theorem 2.1. *Let*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < +\infty \quad (4)$$

and function $f(z)$ is analytical in the region $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Then difference equation (1) has slowly growing solution for any given bounded sequence $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$ and any given slowly growing sequence $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$ if and only if for any $z \in \mathbf{C}, |z| < 1$, operator $f(z)$ has continuous inverse operator $(f(z))^{-1}$.

For the proof of the theorem let's set several lemmas.

3 Auxiliary results

Lemma 3.1. *Let difference equation (1) has slowly growing solution for any given bounded sequence $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$ and any given slowly growing sequence $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$. Then*

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 : \text{Ker } f(z) = \vec{0}.$$

Proof. Assume from the contrary that $\exists z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \exists u \in B, u \neq \vec{0} : f(z)u = \vec{0}$. Let's denote $x_0 = zu, x_{-1} = z^2u, \dots, x_{-m+1} = z^m u, \dots; y_n = \vec{0}, n \geq 1$.

We will prove by the method of mathematical induction that $x_n = z^{-n+1}u, n \geq 0$.

We get base and step of induction as a corollary of (1)-(3):

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_0 + A_2 x_{-1} + A_3 x_{-2} + \dots = \\ &= A_1 zu + A_2 z^2 u + \dots = g(z)u = f(z)u + u = u; \\ x_{k+1} &= A_1 x_k + A_2 x_{k-1} + A_3 x_{k-2} + \dots = \\ &= A_1 z^{-k+1}u + A_2 z^{-k+2}u + A_3 z^{-k+3}u + \dots = \\ &= z^{-k}g(z)u = z^{-k}u, k \geq 1. \end{aligned}$$

So for $r \in (1, |z|^{-1})$ we have

$$r^{-n} \|x_n\| = |z|^{-n+1} r^{-n} \|u\| \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty.$$

It contradicts the condition of slow growth. Lemma is proved.

Lemma 3.2. *Let's denote $\varphi_0 = I$,*

$$\varphi_n = A_1 \varphi_{n-1} + A_2 \varphi_{n-2} + \dots + A_n \varphi_0, n \geq 1. \quad (5)$$

Let difference equation (1) has slowly growing solution for any given bounded sequence $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$ and any given slowly growing sequence $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$. Then

$$\forall r > 1 : \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} \|\varphi_k\| < +\infty. \quad (6)$$

Proof. Let $x_0 = b, x_n = \vec{0}, n \leq -1, y_n = b, n \geq 1$, where b – arbitrary element from B . We will prove by the method of mathematical induction that

$$x_n = \left(\sum_{k=0}^n \varphi_k \right) b, n \geq 0. \quad (7)$$

As a corollary of (1), (5) we get base and step of induction:

$$x_0 = \varphi_0 b, x_n = \sum_{k=1}^n A_k x_{n-k} + b =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x_{n-k-1} + \varphi_{n-k})b + A_nb + b = \\ &= x_{n-1} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k\varphi_{n-k} + A_n\varphi_0 \right) b = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \right) b + \varphi_nb = \left(\sum_{k=0}^n \varphi_k \right) b, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Using equality (7) and condition of slow growth by uniform boundedness principle we have: $\{ \left\| \sum_{k=0}^n \varphi_k \right\| r^{-n} : n \geq 0 \}$ – bounded sequence for any $r > 1$. Since for $r > 1$

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\| r^{-n} &= \left\| \sum_{k=0}^n \varphi_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \right\| r^{-n} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \varphi_k \right\| r^{-n} + \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \right\| r^{-n+1}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

– bounded sequence, so by Dirichlet theorem series $\sum_{k=0}^{\infty} r_1^{-k} \|\varphi_k\|$ is convergent for $r_1 > r$. As a consequence of arbitrariness of $r > 1$ we get what we need. Lemma is proved.

Lemma 3.3. *If condition (6) is true for a sequence (5) then for any $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$, and for any $y \in B$ equation $f(z)x = y$ has a solution of the form*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k y. \quad (8)$$

Proof. Indeed, if (6) is true, then series (8) is convergent by norm, and

$$\begin{aligned} f(z)x &= x - A_1zx - A_2z^2x - \dots - A_mz^mx - \\ &\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k y - A_1 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{k+1} y - \dots \\ &- A_m \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{k+m} y - \dots \end{aligned}$$

As a consequence of (4) and (6) this series is absolutely convergent and it is allowed to group summands. Let's group elements by powers of z :

$$\begin{aligned} f(z)x &= \varphi_0 y + (\varphi_1 - A_1\varphi_0)zy + \\ &+ (\varphi_2 - A_1\varphi_1 - A_2\varphi_0)z^2y + \dots + \\ &+ (\varphi_m - A_1\varphi_{m-1} - A_2\varphi_{m-2} - \dots - A_m\varphi_0)z^my + \dots = \\ &= \varphi_0 y = y. \end{aligned}$$

Lemma is proved.

Lemma 3.4. *If operator-valued function f is analytical in some open region $U \subset \mathbf{C}$, and for all $z \in U$ bounded inverse operator $(f(z))^{-1}$ exists, then function $(f(z))^{-1}$ is analytical in the region U .*

Proof. Using usual speculations about operator, which is close to identity, we can obtain for any $z_0 \in U$ and small enough $\delta > 0$

$$(f(z))^{-1} = (f(z_0))^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} ((f(z) - f(z_0))(f(z_0))^{-1})^k,$$

for $|z - z_0| < \delta$. Then we get boundedness of function $(f(z))^{-1}$, $|z - z_0| < \delta$, continuity of the function and finally, that function is differentiable in arbitrary point of region U , and so is analytical in the region. Lemma is proved.

Lemma 3.5. *If operator-valued function f is analytical for $|z| < 1$, and for any $|z| < 1$ exists $(f(z))^{-1} \in L(B)$, then*

$$(f(z))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k, \quad |z| < 1,$$

where φ_k , $k \geq 0$, are defined by formula (5).

Proof. By lemma 3.4 there exists a sequence of operators $\{C_k : k \geq 1\} \subset L(B)$ such that $(f(z))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$, $|z| < 1$.

For $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$ we have equality $(I - \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k) (\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k) = I$.

Series are absolutely convergent, so we can multiply it by Cauchy and obtain equalities

$$C_0 = I; \quad C_n = A_1 C_{n-1} + \dots + A_n C_0, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

By comparing formulas (5) and (9), we obtain $\forall n \geq 0 : \varphi_n = C_n$. Lemma is proved.

Lemma 3.6. *Let condition (4) is satisfied, $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$ is bounded sequence, $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$ is slowly growing sequence. Then the solution of a problem (1) can be obtained by formula*

$$x_n = \varphi_n u_0 + \varphi_{n-1} u_1 + \varphi_{n-2} u_2 + \dots + \varphi_0 u_n, \quad n \geq 0, \quad (10)$$

where $u_0 := \alpha_0$, $u_k := y_k + (A_{k+1}\alpha_{-1} + A_{k+2}\alpha_{-2} + A_{k+3}\alpha_{-3} + \dots)$, $k \geq 1$, φ_k , $k \geq 0$, are defined by formula (5).

Proof. Let's use the method of mathematical induction. For $n = 0$ we have $x_0 = \alpha_0$. Let's check the step of induction, using (1) and (5):

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + y_n = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \left(\varphi_{n-k} \alpha_0 + \sum_{p=1}^{n-k} \varphi_{n-k-p} u_p \right) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \alpha_{n-k} + y_n = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \varphi_{n-k} \alpha_0 + \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^{n-p} A_k \varphi_{n-k-p} u_p + \\ &+ u_n = \varphi_n \alpha_0 + \sum_{p=1}^{n-1} \varphi_{n-p} u_p + u_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Lemma is proved.

4 Proof of the main result

Proof. Necessity. Let difference equation (1) has slowly growing solution for any given slowly growing sequence $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$, and any given bounded sequence $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$. Let $z \in \mathbf{C}, |z| < 1$ be fixed. Let's assume from the contrary that the operator $f(z)$ has no bounded inverse. Then by Banach theorem about inverse operator one of two conditions is true:

- a) $\exists u \neq \vec{0} : f(z)u = \vec{0}$;
- b) $\exists y \in B : \text{equation } f(z)u = y \text{ has no solution.}$

If, from the contrary, condition a) is true, we use lemma 3.1 and have contradiction with condition of slow growth. So a) is false.

Condition b) is false also as a consequence of lemmas 3.2, 3.3. Necessity is proved.

Sufficiency. Let for any $z \in \mathbf{C}, |z| < 1$, continuous inverse operator $(f(z))^{-1}$ exists. Let's fix slowly growing sequence $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$ and bounded sequence $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$. Then

solution of difference equation (1) could be got by lemma 3.6 in the form (10).

As a consequence of condition (4), boundedness of sequence $\{\alpha_n : n \leq 0\}$ and slow growth of $\{y_n : n \geq 1\}$, sequence $\{x_n : n \geq 1\}$ is slowly growing.

Indeed, let's fix $r > 1$. Then such constants exist $L_u > 0, L_c > 0$, that

$$\forall n \geq 1 : \|u_n\| \leq L_u r^n, \|C_n\| \leq L_c r^n, \\ \|x_n\| = \|\varphi_n u_0 + \varphi_{n-1} u_1 + \dots + \varphi_0 u_n\| \leq L_u L_c r^n.$$

Theorem is proved.

Let's note that if the theorem conditions are true and sequence $\{y_n : n \geq 1\}$ is bounded, solution $\{x_n : n \geq 1\}$ could be unbounded. The example is $y_n = b, n \geq 0; \alpha_{-n} = \vec{0}, n \geq 1, \alpha_0 = b$, where $b \in B, b \neq \vec{0}$. Indeed, in the case equation

$$x_{n+1} = x_n + y_n, n \geq 0,$$

has solution $x_n = (n+1)b, n \geq 0$.

Список використаних джерел

1. Бенабдаллах М. Применение асимптотических разложений к исследованию бесконечной системы уравнений $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ в банаховом пространстве / Бенабдаллах М., Руткас А.Г., Соловьев А.А. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1985. – № 43. – С.9–17.
2. Томілов Ю. В. Асимптотична поведінка однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі / Томілов Ю. В. // Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь. – К.: Інститут математики АН України. – 1992. – С.146–153.
3. Городній М.Ф. Обмежені розв'язки двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі / М.Ф. Городній, О. А. Лагода // Укр. математ. журнал – 2000. – Т.52, № 12. – С.1610 – 1614.

References

1. ENABDALLAH, M., RUTKAS, A., SOLOVYOV, A. (1985), "Application of asymptotic expansions to investigation of infinite system of equations $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ in Banach space", *Theory of functions, functional analysis it's applications*, No. 43., p. 9 – 17.
2. TOMILOV, YU. (1992) "Asymptotic behaviour of a recurrent sequence in Banach space", *Asymptotic integration of nonlinear equations*, Kiev, Institute of mathematics of Academy of Sciences of Ukraine, p.146–153.
3. GORODNII, M., LAHODA O. (2000) "Bounded solutions of two-parametric difference equation in Banach space", *Ukrainian mathematical journal*, V.52, No 12., p.1610–1614.

Received: 25.05.2017

УДК 517.977

Ловейкін Ю.В., к. ф.-м. н., доцент
Сукретна А.В., к. ф.-м. н., доцент

Аналіз та оптимізація коливних процесів у двомасовій системі

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е
e-mail: yuriyl@ua.fm, sukretna@gmail.com

Loveikin Y.V., Ph.D., Associate Professor
Sukretna A.V. Ph.D., Associate Professor

Analysis and optimization of oscillating processes in two-mass system

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: yuriyl@ua.fm, sukretna@gmail.com

Досліджується задача стабілізації коливних процесів у керованій двомасовій системі. Система складається з двох тіл, перше з них може рухатись уздовж горизонтальної осі під дією зовнішньої сили, друге тіло знаходиться на підвісі до першого і може виконувати коливні рухи як маятник. У розглядуваній двомасовій системі керуючим фактором виступає зовнішня сила, що діє на перше тіло системи. Встановлена форма оптимального керування зовнішньою силою для припинення коливань і стабілізації руху розглядуваної двомасової системи за найкоротший час при розгоні зі стану спокою до певної додатної швидкості.

Ключові слова: двомасова система, коливний процес, оптимізація, керування, стабілізація.

Stabilization problem of oscillation processes for two-mass controlling system is considered. The system consists of two bodies, the first one can move along the horizontal axis under the influence of an external force, the second body is on the suspension to the first and can perform vibrational movements as a pendulum. In the considered two-mass system, the controlling factor is an external force influencing on the first body of the system. The aim of controlling the external force is to vanish oscillating processes in the system in the shortest time and transfer the system during this time from the state of rest to uniform motion with a given speed without oscillations. The form of optimal control of external force for vanishing of oscillations and stabilization of the considered two-mass system in the shortest time when overlocking from rest state to the motion with certain positive speed is established. Program optimal control of external force with one switching point is constructed.

Key Words: two-mass system, oscillating process, optimization, controlling, stabilization.

Статтю представив д.ф.-м.н., академік НАН України, проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Вивчення коливних процесів є дуже важливим і має суттєве значення для найрізноманітніших розділів природознавства таких як механіка, фізика, техніки та ін. Вібраційні процеси у спорудах і машинах, електромагнітні коливання в радіотехніці та оптиці, автоколивання в системах регулювання та слідкуючих системах, звукові та ультразвукові коливання – всі ці явища описуються схожим математичними моделями. Розробці математичного апарату для опису таких моделей присвячена низка робіт. Найрозповсюдженішими, як правило, цілями процесів керування є або гасіння коливних процесів, або підтримка автоколивного режиму протягом, що найменше, довгого періоду часу [1, 2].

Коливання взаємодіючих систем з зосередженими та розподіленими параметрами є предметом чисельних досліджень. Зокрема, розглядалися пружні коливання стрижнів з підвішеним вантажем [3, 4]. Багато досліджень присвячено задачам про різноманітні динамічні гасителі пружних коливань [5].

У цій роботі продовжуються дослідження коливних процесів розпочаті у [6, 7]. Розглядається задача про мінімізацію коливань, які виникають у системі, що складається з двох тіл, перше тіло може рухатись уздовж горизонтальної осі під дією зовнішньої сили, друге тіло знаходиться на підвісі до першого і може виконувати коливні рухи внаслідок руху першого тіла. При цьому керуючим параметром у цій системі виступає зовнішня сила, що спричиняє рух першого тіла.