

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.11>

Маковійчук М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.², д.ф.-м.н., проф.,
Щербій А. Б.³

Про розподіл напружень біля тріщини у тороїдальній оболонці з гнучким покриттям

Івано-Франківський відділ Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002,
м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com
³ e-mail: shch_andrew@ukr.net

M. V. Makoviichuk¹, Cand. Phys. & Math. Sc.,
I. P. Shatskyi², Dr. Phys. & Math. Sc.,
A. B. Shcherbii³

On the distribution of stresses near the crack in a toroidal shell with a flexible coating

Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach-Institute for
Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk,
Mykytynetska str., 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com
³ e-mail: shch_andrew@ukr.net

У рамках двовимірної теорії досліджується вплив одnobічного гнучкого покриття на напружений стан навантаженої внутрішнім тиском погої тороїдальної оболонки з наскрізною тріщиною, яка розташована вздовж екватора або вздовж горла. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь оболонки. Для розглянутої задачі побудовано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомого стрибка переміщень на тріщині. На основі асимптотичного розв'язку, отриманого методом малого параметра, побудовано аналітичні залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин тріщини від параметрів форми та максимальної кривини поверхні тора. Встановлено, що підкріплення оболонки призводить до зменшення коефіцієнта інтенсивності зусиль та до появи ненульового коефіцієнта інтенсивності моментів.

Ключові слова: тороїдальна оболонка, тріщина, гнучке покриття, пружна рівновага.

Elastic equilibrium of shallow toroidal shell loaded by internal pressure and containing the cross-cutting crack located along equator or throat of the shell has been studied in the two-dimensional formulation. The shell is reinforced by coating on one of the face surfaces. The crack in the shell with a flexible coating is simulated by a cuts with eccentrically hinge joint edges. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions of tension and bending along the cutting line is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal displacement on the crack edges has been elaborated. Based on asymptotical solutions of integral equation obtained using the small parameter method forces and moments intensity factors in the vicinity of the defect tips are defined. Their dependences of on the parameters of shell curvature and form parameter are investigated. It is established that the reinforcement of the shell leads to a decrease in the force intensity factor and to the appearance of a non-zero moment intensity factor.

Key words: toroidal shell, crack, flexible coating, elastic equilibrium.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

На сьогодні ефективним засобом подовження експлуатаційного ресурсу пошкоджених тонкостінних конструкцій вважається нанесення

на їхню поверхню тонких покриттів, латок, підкріплень, які знижують концентрацію напружень в околі дефектів.

Мета цього дослідження – вивчити вплив одnobічного гнучкого покриття на напружено-

деформований стан пологої тороїдальної оболонки, послабленої наскрізною тріщиною.

Постановка задачі

Розглянемо ізотропну тороїдальну оболонку завтовшки $2h$, з наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, яка може бути розташована вздовж екватора або вздовж горла тора. Середина поверхня оболонки утворена рухом центра кола з радіусом r по колу з радіусом R . Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає розтягу мембранними зусиллями унаслідок дії внутрішнього тиску $p = \text{const}$. У рамках класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява досліджуємо напружений стан композиції.

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему декартових координат $Oxuz$ з центром посередині розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, то тріщину в оболонці з гнучким покриттям доцільно моделювати математичним розрізом, береги якого з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = sh$ ($s = +1$ для зовнішнього чи $s = -1$ для внутрішнього підкріплення). Із урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами розтяг-згини на розрізах [1–3]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{r}\Delta_r w = 0,$$

$$\Delta\Delta w + \frac{1}{Dr}\Delta_r\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] - sh[\mathcal{G}_y] = 0,$$

$$M_y - shN_y = 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = pr/2, \quad N_{xy} = 0, \quad N_y = p_0r,$$

$$M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут x, y – декартові координати з центром посередині розрізу; φ – функція напружень, w – прогин оболонки, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $\Delta_r = \partial^2 / \partial x^2 + \beta \partial^2 / \partial y^2$, $\beta = \pm r / (R \pm r)$; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\mathcal{G}_y]$ – розрив кута повороту нормалі;

N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля, M_x, M_{xy}, M_y – моменти; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $p_0 = p(R \pm 0.5r) / (R \pm r)$; $s = 1$ визначає варіант зовнішнього, а $s = -1$ – внутрішнього покриття; L – розріз.

Перша з крайових умов (2) означає неперервність переміщень на з'єднаних берегах розрізу, друга описує реактивний момент, викликаний переносом шарнірної реакції у базову поверхню оболонки.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Зусилля та моменти на лінії тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [4]:

$$N_y(x, 0) = p_0r +$$

$$+ \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \{ K_{11}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)a[\mathcal{G}_y]'(\xi) \} d\xi,$$

$$M_y(x, 0) =$$

$$= \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \{ K_{31}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)a[\mathcal{G}_y]'(\xi) \} d\xi.$$

Ядра цих зображень виражаються через фундаментальний розв'язок рівнянь (1) і подаються інтегралами Фур'є:

$$K_{jk}(z) = [\delta_{jk} \text{Re} + (1 - \delta_{jk}) \text{Im}] \int_0^\infty g_{jk} \left(\frac{\gamma\sqrt{-i}}{s} \right) \sin zs ds;$$

$$g_{11}(\tau) = q(\tau) / \omega(\tau),$$

$$g_{13}(\tau) = g_{31}(\tau) = -q(\tau)(1 + \nu / \omega(\tau)),$$

$$g_{33}(\tau) = q(\tau)(2 - 2\nu + \beta\tau^2 + \omega(\tau) - \nu^2 / \omega(\tau)),$$

$$q(\tau) = 2 / \sqrt{2 + \beta\tau^2 + 2\omega(\tau)}, \quad \omega(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2},$$

$$\tau = \gamma\sqrt{-i} / s; \quad a = h / \sqrt{3(1 - \nu^2)},$$

$$\gamma = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} / \sqrt{rh}; \quad \delta_{jk} - \text{символ Кронекера.}$$

Підставимо інтегральні вирази в крайову умову (2). Виключаючи функцію $[\mathcal{G}_y]$, дістаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження розриву переміщень з додатковою умовою на кінцях розрізу:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi - x)[u_y]'(\xi) d\xi = -p_0r, \quad x \in (-l, l);$$

$$[u_y](\pm l) = 0. \quad (4)$$

Тут

$$K(z) = K_{11}(z) - 2sK_{13}(z) / \sqrt{3(1-v^2)} + K_{33}(z) / (3(1-v^2)).$$

За функціями стрибків переміщення і кута повороту нормалі обчислювали коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин тріщини:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [u_y]'(x),$$

$$K_M^\pm = \pm (3+v)(1-v) \frac{D}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [\vartheta_y]'(x).$$

Аналіз результатів

Асимптотичний розв'язок задачі (4) побудували методом малого параметра [4]. За малий параметр обрали безрозмірний комплекс $\lambda = \gamma l = (3(1-v^2))^{1/4} l / \sqrt{rh}$ – відносну максимальну кривину оболонки. У першому оболонковому наближенні коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів обчислюються за формулами:

$$K_N = \frac{3p_0 r \sqrt{l}(1+v)}{2(3+2v)} F(\lambda),$$

$$K_M = -\frac{sp_0 rh \sqrt{l}(3+v)}{2(3+2v)} F(\lambda);$$

$$F(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2a_0} \left[a_1 + b_1 \left(1 + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda).$$

Тут позначено:

$$a_0 = a_{110} + a_{330} / (3(1-v^2)),$$

$$a_1 = a_{111} - 2sa_{131} / \sqrt{3(1-v^2)} + a_{331} / (3(1-v^2)),$$

$$b_1 = -2sb_{131} / \sqrt{3(1-v^2)},$$

де

$$a_{110} = 1, \quad a_{330} = 3 - 2v - v^2,$$

$$a_{111} = -(\beta + 5)\pi\Psi / 32 - \sqrt{-\beta}(3\beta^2 - 22\beta + 15)H(-\beta) / (24(\beta - 1)^2),$$

$$a_{131} = [(3(1+v)\beta^2 + 4(1+11v)\sqrt{\beta} + 5 + 37v) / (48(\sqrt{\beta} + 1)^2) + b_{131}(\ln(\gamma_0(\sqrt{\beta} + 1)/4) - 1)]H(\beta) + [(1+v)(\beta + 3)/16 + (3(1-3v)\beta - 1 - 7v) / (12(\beta - 1)^2) + b_{131}(\ln(\gamma_0\sqrt{|\beta - 1|}/4) - 1)]H(-\beta),$$

$$a_{331} = ((5 + 2v + v^2)\beta + 1 + 2v + 5v^2)\pi\Psi / 32 +$$

$$+ \sqrt{-\beta}[3(5 + 2v + v^2)\beta^2 - 2(11 + 2v + 11v^2)\beta + 3(1 + 2v + 5v^2)] / (24(\beta - 1)^2)H(-\beta),$$

$b_{131} = ((1+v)\beta + 1 + 5v) / 8$ – коефіцієнти розкладу ядер $K_{jk}(z)$ у степеневі-логічні ряди за параметром λ ; $\ln \gamma_0 = 0.5772\dots$ – стала Ейлера, $\Psi = 1 - (2/\pi) \arctg(2\sqrt{-\beta}/(\beta + 1))H(-\beta)$, $H(\dots)$ – функція Гевісайда.

Для тріщини, що орієнтована вздовж екватора, $\beta = 1/(\rho + 1)$, $p_0 = p(\rho + 0,5)/(\rho + 1)$, $\rho \in [1, \infty)$, а для тріщини вздовж горла – $\beta = -1/(\rho - 1)$, $p_0 = p(\rho - 0,5)/(\rho - 1)$, $\rho \in [2, \infty)$, де $\rho = R/r$ – параметр форми тора.

При $\rho \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \pm 0$) отримуємо частковий випадок рівноваги пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною [5].

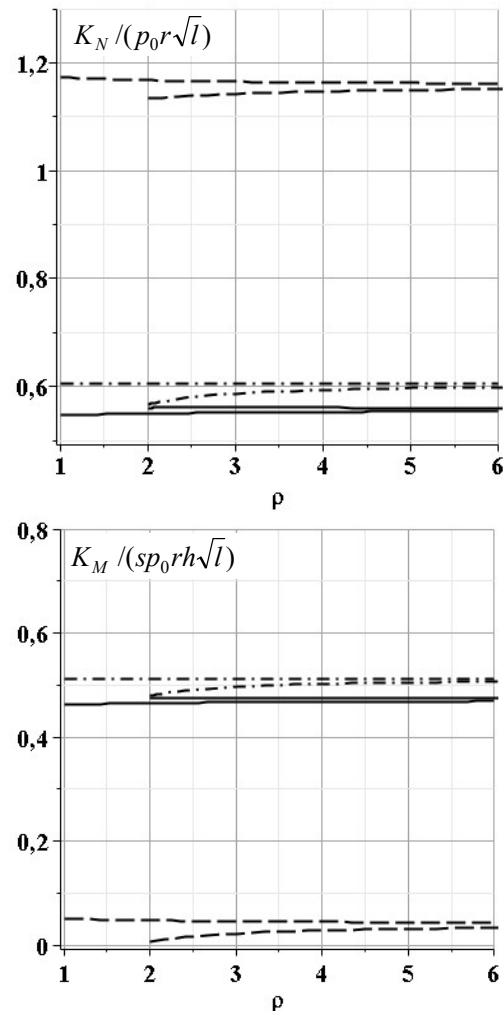


Рис. 1. Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів для тороїдальної оболонки з тріщиною вздовж екватора ($\rho \geq 1$) або горла ($\rho \geq 2$) тора.

На рис. 1 зображено залежності знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра форми оболонки, отримані при $\nu = 0.3$ та $\lambda = 0.8$. Суцільні та штрихпунктирні лінії побудовано для оболонки із зовнішнім та внутрішнім покриттям відповідно, а штрихові – для оболонки без покриття [4, 6].

Висновки

Запропонована модель тріщини в оболонці з однобічним гнучким покриттям дає змогу в аналітичній формі дослідити розподіл напружень в околі вістря тріщини, орієнтованої у головному напрямку поверхні додатної або від'ємної гаусової кривини.

Список використаних джерел

1. Шацький І. П. Інтегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям / І. П. Шацький // Доп. АН України. – 1992. – № 1. – С. 46–48.
2. Шацький І. П. Задача о трещине в пологой оболочке с гибким покрытием / И. П. Шацкий // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 131–138.
3. Шацький І. П. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини / І. П. Шацький, А. Б. Щербій // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. – Львів : Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 333–335.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Шацький І. П., Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною / І. П. Шацький, М. В. Маковійчук, А. Б. Щербій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т. 59, № 4. – С. 135–141.
6. Механика композитов. В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – (Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с.)

Шарнірне з'єднання берегів тріщини у лицьовій поверхні тороїдальної оболонки призводить до істотного зменшення коефіцієнта інтенсивності зусиль та до появи такого ж за порядком коефіцієнта інтенсивності моментів. У підсумку потік енергії у вершину тріщини зменшується.

Подальше дослідження міцності вкритої оболонки з тріщиною доцільно проводити з урахуванням двох критеріїв граничної рівноваги: розтріскування оболонки та втрати цілісності покриття [3].

References

1. SHATSKYI, I. P. (1992) Integral equation of problem about a crack in shallow shell with flexible covering. *Dop. AN Ukrainy*. (1). pp. 46–48.
2. SHATSKII, I. P. (1996) Crack problem for a shallow shell with a flexible coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 37 (2), pp. 259–265.
3. SHATSKYI, I. P. & SHCHERBII, A. B. (1999) *Mehanika ruynuvannia materialiv i mitsnist konstruktssii*, 2 (2). pp. 333–335. (In 3 V. ed. by Panasyuk V. V., Lviv: Kameniar).
4. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumernye zadachi upravosti dlia tel s treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
5. SHATS'KY, I. P. MAKOVICHUK, M. V. & SHCHERBII, A. B. (2019) Influence of a flexible coating on the strength of a shallow cylindrical shell with longitudinal crack. *Journal of Mathematical Sciences*, 238 (2), pp. 165–173.
6. *Mekhanika kompozitov*, in 12 V. (1993) Ed. Guz A. N., Kiev: Naukova dumka (Vol. 7: Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S., Shevchenko, V. P. et al. (1998) *Koncentratsiia napriazhenii*, Kiev: A. S. K.).

Надійшла до редколегії 29.08.21