

УДК 539.3

Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Харитонova Л. В.², к. ф.-м. н., доц.

**Аналітична модель деформування фланця з
приєднаною обичайкою під дією
внутрішнього тиску**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

² Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-
Павленка, 1

O. G. Kutsenko¹, Ph.D (Phys.-Math.),
O. M. Kharytonov¹, Ph.D (Phys.-Math.),
L. V. Kharytonova², Ph.D (Phys.-Math.)

**Analytical model of deformation of flange with
concatenated shell under internal pressure**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

² National Transport University, 01010, Kyiv,
M. Omelianovycha-Pavlenka str., 12

Розглянута задача про спільну деформацію фланця з приєднаною до нього циліндричною обичайкою під дією внутрішнього тиску. За допомогою метода уявних перерізів систему було умовно розділено на дві складові. Деформація фланця визначалася на основі теорії осесиметричного кручення кілець. Деформація обичайки визначалася на основі теорії згину циліндричної оболонки. Невідомі зусилля в перерізі приєднання визначалися з умови неперервності кута нахилу радіальних волокон та радіального зміщення. За допомогою метода скінченних елементів було перевірено адекватність запропонованої моделі.

Ключові слова: аналітична модель, фланець, обичайка, внутрішній тиск, теорія кручення кілець.

The rings torsion theory that is based on the assumption about flat rigid cross-section was suggested by the authors in the previous papers. The analytical expressions of torsional stiffness have been derived for different kind of loads: pure moment, shear force and surface pressure. In the present paper the analytical model of flange with attached cylindrical shell deforming under internal pressure is suggested. The mechanical system is split into two parts (flange and shell) with the help of imaginary section method. An unknown shear force and bending moments are applied to both parts according to this method. Therefore flange is loaded under internal pressure, shear force and bending moments. As mentioned above, for all these loads the angle of flange cross-section rotation can be presented in analytical form based on the rings torsion theory. Full rotation angle is presented as a sum of these angles. The radial displacement of imaginary section was determined on the basis of the assumption about flat rigid cross-section. On another hand, the rotation angle and radial displacement of imaginary section are determined on the base of the cylindrical shell bending theory too. Two linear equations in the unknown shear force and bending moment were derived by equating corresponding expressions. In such a way the analytical model of flange with attached shell deforming was built. The comparison calculations by finite element methods confirmed the adequacy of proposed model.

Key Words: Analytical model, flange, shell, internal pressure, rings torsion theory.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

У попередніх роботах авторів [1, 2] наведено основи теорії осесиметричного кручення тонких кілець, тобто кілець, радіус осі яких значно більший за розміри його поперечного перерізу. В

основу теорії покладено гіпотезу плоских абсолютно жорстких поперечних перерізів. Відповідно до цієї гіпотези вважається, що при осесиметричному крученні поперечні перерізи кільця повертаються на деякий кут у власній

площині розташування не деформуючись, тобто відстані між точками перерізів не змінюються, а самі точки не виходять з площини. Схожа гіпотеза має місце при крученні прямолінійних валів круглого поперечного перерізу. Проте на відміну від прямолінійних стержнів, де основними діючими напруженнями є дотичні напруження, у випадку кільця основними напруженнями виявилися колові напруження σ_φ . Причому в силу осьової симетрії депланація не виникає незалежно від конфігурації поперечного перерізу.

В [1] викладено основи теорії та наведені співвідношення для випадку чистого кручення, тобто кручення під дією лише осьового моменту. В [2] співвідношення поширені на випадок кручення під дією зосередженої сили та тиску, розподіленого по частині поверхні. Оскільки деформація окремо взятого кільця не представляє значного практичного інтересу, в [2] наведена також ідея дослідження спільної деформації кільця з обичайкою, яка реалізована в даній роботі.

Постановка задачі

Розглядається задача про осесиметричну деформацію фланця та приєднаної до нього циліндричної обичайки (1) під дією внутрішнього тиску p_0 . До складу фланця входить перехідний конус (2), тарілка (3) та підп'ятник (4). На рисунку 1 зображено поздовжній переріз такої системи. Слід відразу зауважити, що даний переріз є поздовжнім для всієї системи, проте є поперечним для фланця як кільця, бо є ортогональним до його вісі — кола. Крім поперечного перерізу фланця в роботі розглядається переріз приварки обичайки до фланця, який є поперечним перерізом всієї системи, бо площина його розташування перпендикулярна вісі симетрії.

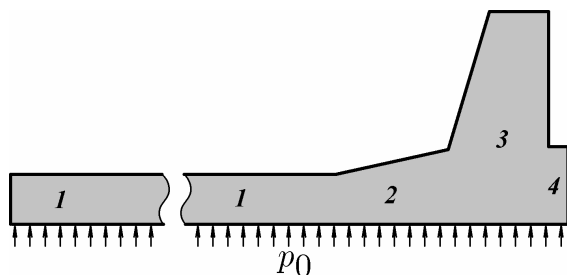


Рис. °1 Поздовжній переріз системи

Циліндрична система координат $r \varphi z$ вибирається таким чином, що вісь z є віссю

симетрії кільця. Оскільки в осесиметричному випадку від кутової координати φ нічого не залежить, подальший розгляд будемо проводити в площині поздовжнього перерізу системи (поперечного перерізу фланця) $r z$. Будемо вважати, що на рисунку 1 вісь z напрямлена вліво, а вісь r — вгору.

Потрібно побудувати аналітичну модель деформування системи фланець-обичайка, здатну відтворити напружено-деформівний стан системи, викликаний прикладанням внутрішнього тиску p_0 .

Побудова моделі

При побудові аналітичної моделі методом уявного перерізу система була розділена на дві складові: фланець та обичайку. Для статичної еквівалентності вихідній системі в перерізі приєднання обичайки до фланця до обох складових системи прикладені перерізувача сила інтенсивності Q_0 та згинаючий момент інтенсивності M_0 (див. рис. 2). Зусилля Q_0 та M_0 є зусиллями, розподіленими по колу — лінії перетину серединної поверхні обичайки з перерізом приварки. Будемо вважати, що в силу умов закріплення на іншому кінці обичайки поздовжня сила в перерізі приварки відсутня. Інші зусилля в перерізі приварки будуть відсутні в силу осьової симетрії.

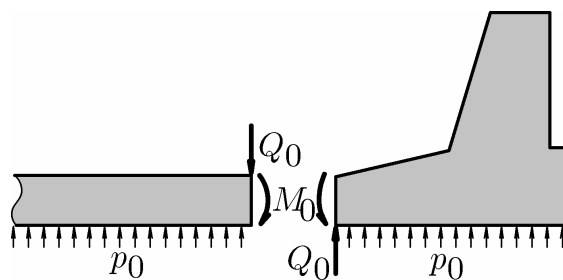


Рис. °2 Внутрішні зусилля в перерізі приєднання обичайки до фланця

Для визначення Q_0 та M_0 відносно кінематичних характеристик в перерізі приєднання можуть бути записані умови сумісності деформацій. В даному випадку такими умовами є умови неперервності радіальних зміщень u_r та кута нахилу твірної серединної поверхні відносно осі ϑ , так звані, умови зшивки. Позначимо відповідні характеристики в перерізі приєднання через u_{r_0} та ϑ_0 (див. рис. 3).

Значення кінематичних характеристик в перерізі приєднання з боку циліндричної

обичайки визначимо на основі теорії згину циліндричних оболонки [3]. У відповідності до неї маємо

$$u_{r0} = \frac{p_0 - 2\beta^2 M_0 - 2\beta Q_0}{4\beta^4 D}, \quad \vartheta_0 = -\frac{2\beta M_0 + Q_0}{2\beta^2 D}, \quad (1)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість

обичайки, $\beta^4 = \frac{Eh}{(2r_0 + h)^2 D}$, r_0 — внутрішній

радіус обичайки, h — товщина обичайки, E — модуль пружності матеріалу обичайки, ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу обичайки. Зауважимо, що у порівнянні з [3] нами вибрано протилежні напрямки відліку додатних значень для Q_0 , M_0 та u_{r0} в той час, як напрямки для ϑ_0 — співпадають.

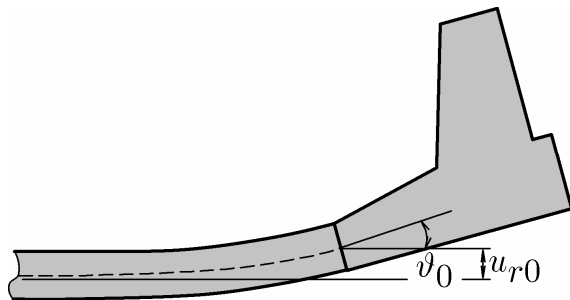


Рис. 3 Радіальне зміщення u_{r0} та кут нахилу ϑ_0 перерізу приєднання обичайки до фланця

Зі сторони фланця відповідні кінематичні характеристики знаходяться на основі теорії кручення тонких кілець і складаються з трьох складових: повороту на кут ϑ_{01} , викликаного моментом M_0 , повороту на кут ϑ_{02} , викликаного силою Q_0 , та повороту на кут ϑ_{03} , викликаного тиском p_0 . Відповідні кути задаються співвідношеннями

$$\vartheta_{01} = \frac{M_0}{E} \frac{r_R}{\widehat{J}_r}, \quad \vartheta_{02} = -\frac{Q_0}{E} \frac{r_Q}{\Delta z_2 \widehat{A}},$$

$$\vartheta_{03} = -\frac{p_0}{E} \frac{z_{p2} - z_{p1}}{\Delta z_3 \widehat{A}} r_p, \quad (2)$$

де $\widehat{A} = \int_A \frac{dA}{r}$, $\widehat{S}_r = \int_A \frac{z}{r} dA$, $\widehat{J}_r = \int_A \frac{z^2}{r} dA$, r_R — радіальна координата всіх трьох центрів обертання, що співпадає з радіальною координатою точки фланця, в якій фіксується осьове зміщення, $r_Q = r_0 + h/2$ — радіальна

координата точки прикладання сили Q_0 , $r_p = r_0$ — радіальна координата відрізка, вздовж якого прикладений внутрішній тиск p_0 , z_{p1} , z_{p2} — осьові координати початку і кінця відрізка, вздовж якого прикладений внутрішній тиск p_0 ,

$\Delta z_2 = \frac{\widehat{J}_r - z_c^2 \widehat{A}}{\widehat{A}(z_Q - z_c)}$ — різниця між осьовими

координатами центра обертання на кут ϑ_{02} та “осесиметричного” центра площ,

$\Delta z_3 = 2 \frac{\widehat{J}_r - z_c^2 \widehat{A}}{\widehat{A}(z_{p1} + z_{p2} - 2z_c)}$ — різниця між

осьовими координатами центра обертання на кут ϑ_{03} та “осесиметричного” центра площ,

$z_c = \widehat{S}_r / \widehat{A}$ — осьова координата “осесиметричного” центра площ. Зауважимо, що $\Delta z_1 = 0$, тобто центр обертання на кут ϑ_{01} лежить на одній радіальній вісі з “осесиметричним” центром площ.

Таким чином, умови зшивки можемо подати у вигляді

$$\vartheta_0 = \sum_{i=1}^3 \vartheta_{0i}, \quad u_{r0} = \sum_{i=1}^3 u_{r0i} = \sum_{i=1}^3 \vartheta_{0i} (z_c + \Delta z_i - z_0), \quad (3)$$

де z_0 — осьова координата перерізу приєднання обичайки до фланця. Друге співвідношення в (3) є наслідком теорії кручення тонких кілець, відповідно до якої вважається, що поперечний переріз фланця обертається як абсолютно твердий.

Умови (3) представляють собою лінійну алгебраїчну систему відносно невідомих значень Q_0 та M_0 . Після її розв’язання кут повороту поперечного перерізу фланця ϑ_0 можна знайти з другого співвідношення (1). Так само на основі наведеного в [3] виразу для згинаючого моменту як функції осьової координати оболонки можна визначити значення та переріз розташування максимальних напружень σ_z .

Чисельна апробація

Для перевірки адекватності моделі були проведені порівняльні розрахунки на основі запропонованої аналітичної моделі та за допомогою скінченно-елементного пакету CalculiX [4]. Розрахунки проводилися для фланця Д2130, основні розміри якого в мм показані на рисунку 4. Довжина обичайки вибиралася рівною 1 м, що дозволяє нехтувати взаємним впливом

граничних умов на її торцях і при аналітичному описі вважати обичайку напівнескінченною. Матеріали фланця та обичайки вважалися однаковими з наступними значеннями фізичних сталей: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$. Внутрішній тиск задавався рівним 1 МПа.

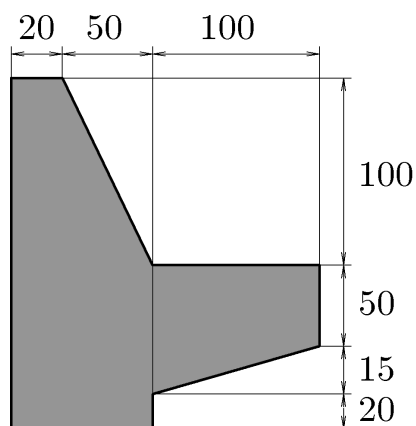


Рис. 5 Основні розміри фланця Д2130

В таблиці 1 наведені значення ключових характеристик НДС у порівнянні. Бачимо, що значення всіх характеристик окрім моменту M_0 знаходяться в межах практичної точності. Значна похибка M_0 пояснюється самим малим значенням M_0 у порівнянні з відношенням Q_0/β . Останнє говорить про визначальний вплив на згин обичайки перерізуючої сили

Список використаних джерел

1. Куценко О.Г. Осесиметричне кручення тонких кілець довільного профілю / О. Г. Куценко, Г. В. Куценко, О. М. Харитонов, І. Ю. Васильєв // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки – 2016. – №3. – С. 49–54.
2. Куценко О.Г. Осесиметричне кручення тонких кілець під дією різних силових факторів / О. Г. Куценко, О. М. Харитонов, А. Г. Куценко, П. В. Дикий // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки – 2017. – №3. – С. 107–110.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физматгиз, 1966. – 635 с.
4. Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications / G. Dhondt. – Hoboken: Wiley, 2004. – 362 p.

Q_0 . Саме цим пояснюється той факт, що максимальні напруження $\max(\sigma_z)$ знаходяться не в перерізі приєднання обичайки до фланця, а на деякій відстані d від нього.

Таблиця 1. Результати порівняльного розрахунку

	Аналітика	CalculiX	Похибка, %
$\vartheta_0, 10^{-4}$ рад	-7,748	-7,379	4,99
$M_0, \text{Н}$	440,3	364,6	20,75
$Q_0, \text{кН/м}$	12,29	12,72	3,31
$\max(\sigma_z), \text{МПа}$	95,67	103,9	7,91
$d, \text{мм}$	56,12	60,17	6,73

Висновки

На основі теорії кручення тонких кілець та теорії згину циліндричної оболонки в роботі побудована аналітична модель деформування фланця з приєднаною обичайкою під дією внутрішнього тиску. Порівняльні розрахунки засвідчили адекватність та практичну цінність розробленої моделі.

References

1. KUTSENKO, O.G. et al (2016) Osesyymetrichne kruchennia tonkykh kilets dovilnoho profilu. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* (3). p. 49–54.
2. KUTSENKO, O.G. et al (2017) Osesyymetrichne kruchennia tonkykh kilets pid diieiu ryznykh sylovykh faktoriv. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* (3). p. 107–110.
3. TIMOSHENKO, S.P. (1966) *Plastinki i obolochki*. Moskva: Fizmatgiz.
4. DHONDT, G. (2004) *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermo-mechanical Applications*. Hoboken: Wiley.

Надійшла до редколегії 2.05.19