

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра прикладної статистики

**Кваліфікаційна робота**

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 124 Системний аналіз

на тему:

**МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ ТА СМЕРТНОСТІ  
ПО ДАНИХ ДЛЯ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ**

Виконала студентка 4 курсу

Пашук Ірина Олегівна

(підпис)

Керівник дипломної роботи

Доцент, кандидат фізико-математичних наук

Лівінська Ганна Володимирівна

(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів  
без відповідних посилань.

Студент

(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри  
прикладної статистики

«06» червня 2022 р.,

протокол № 11

Завідувач кафедри

Розора І. В.

(підпис)

Київ - 2022

## Зміст

<b>АНОТАЦІЇ</b> .....	2
<b>ВСТУП</b> .....	4
<b>РОЗДІЛ 1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СТАРІННЯ</b> .....	6
<b>1.1 Перші моделі старіння</b> .....	6
<b>1.2 Модель Стрелера-Мілдвана</b> .....	8
<b>1.2.1 Припущення та основні співвідношення</b> .....	10
<b>1.2.2 Подальші дослідження</b> .....	13
<b>РОЗДІЛ 2. ОТРИМАННЯ ІНФОРМАЦІЇ З ДАНИХ ПРО СМЕРТНІСТЬ НАСЕЛЕННЯ</b> .....	16
<b>2.1 Стохастична модель і пов'язані з нею параметри</b> .....	18
<b>2.2 Функція щільності часу першого виходу</b> .....	19
<b>2.3 Моделювання систем</b> .....	21
<b>2.4 Характерна властивість функції стану здоров'я <math>H(t)</math></b> .....	24
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	39
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	41

## АНОТАЦІЇ

Дипломна робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків та списку використаних джерел (29 найменувань). Загальний обсяг роботи становить 44 сторінки, основний текст роботи викладено на 33 сторінках.

Ключові слова: Функція стану здоров'я, стохастичне моделювання, модель Гомперца, модель Стрелера-Мілдвана, час першого досягнення критичного рівня, інтенсивність смертності.

Реферат. В роботі наведено підхід до моделювання наборів даних таблиці життя. Також досліджуються межі очікуваної тривалості життя на основі стохастичного моделювання смертності та застосування теорії першого досягнення критично низького рівня. Особлива увага приділяється представленню функції стану здоров'я та смертності, а також таблицями життя. Основною частиною цієї роботи є формулювання відповідної моделі. Ця модель, запропонована в 1995 р., тепер розширена і включає уточнення щодо втрати стану здоров'я для вікової групи від 15 до 30 років. Оцінено та проаналізовано параметри моделі за даними демографічних таблиць для населення України.

Key words: The State Health function, stochastic modeling, Gompertz model, Streler-Mildvan model, the first exit time, the Force of Mortality.

Abstract. In the work the approach to modeling of data sets of the life table is given. Life expectancy limits based on stochastic mortality modeling and the application of the critically low first achievement theory are also investigated. Particular attention is paid to the representation of the function of health, together with a well-established theory of the Force of Mortality, as well as life tables. The main part of this work is the formulation of an appropriate model. This model, proposed in 1995, has now been expanded to include clarifications on the loss of health for the 15-30 age

group. The parameters of the model are estimated and analyzed according to the data of demographic tables for the population of Ukraine.

## ВСТУП

Динаміка старіння населення — напрямок у вивченні старіння за допомогою методів популяційної динаміки, тобто вивчення вікової структури старіючих біологічних популяцій і того, як ця залежність змінюється залежно від типу організму та умов середовища. Найбільший інтерес представляє динаміка старіння в різних організмах, включаючи людей, де старіння відбувається та прогресує через тривалий час після статевого дозрівання. Популяційні методи враховують залежність чисельності популяції від біологічного віку. Зміна чисельності популяції з віком називається смертністю, а в стаціонарному стані — числом організмів, які гинуть за одиницю часу. Відносна зміна чисельності населення, або ймовірність смерті за одиницю часу, називається відносною смертністю. Оберненим показником смертності, який також часто використовується для опису динаміки старіння населення, є ймовірність виживання за одиницю часу.

Метою популяційного підходу є виявлення закономірностей у часі на основі чисельності популяції, яка використовується для визначення швидкості процесу старіння. У свою чергу, ці дані можуть бути використані для перевірки моделей старіння, отриманих від фізіологічних і генетичних механізмів або за допомогою загальних системних механізмів.

Також на основі даних про смерть та популяцію можна дослідити стан здоров'я людини. Стан здоров'я людини – це загальноприйнятий термін як вирішальний фактор людського життя і пов'язаний, навіть не підтверджений кількісно, із очікуваною тривалістю життя. Здоров'я людини можна розглядати як стохастичну змінну, оскільки воно тісно пов'язане з невизначеністю, пов'язаною з різними факторами як з навколишнього середовища, так і з внутрішнім механізмом та інформацією, що міститься в ДНК і генах. Ймовірність раптових

змін стану здоров'я людини внаслідок захворювань чи нещасних випадків досить велика, що підтверджує припущення, що стан здоров'я людини можна розглядати як стохастичну змінну. Відомо, що характеристики фізичного стану людини коливаються навколо середніх значень, а відхилення, здається, є наслідком ймовірно-стохастичного характеру процесу. Крім того, ймовірнісний або стохастичний характер стану здоров'я людей є загально визнаним і вимірюється принаймні якісно. Смерть настає, коли траєкторія стохастичного процесу, який описує стан здоров'я, вперше перетинає нульову лінію, що представляє нульовий рівень життєвої сили або нульовий стан здоров'я.

# РОЗДІЛ 1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СТАРІННЯ

## 1.1 Перші моделі старіння

Однією з перших і найпоширеніших математичних моделей, що використовуються для опису старіння багатьох організмів, є так званий закон смерті Гомперца-Мейхама, або скорочено Гомперца, згідно з яким ймовірність смерті з віком зростає експоненційно:

$$p = a + b^x,$$

де  $x$  — вік, а  $p$  — відносна ймовірність смерті за певний проміжок часу,  $a$  і  $b$  — коефіцієнти (Рисунок 1.1).

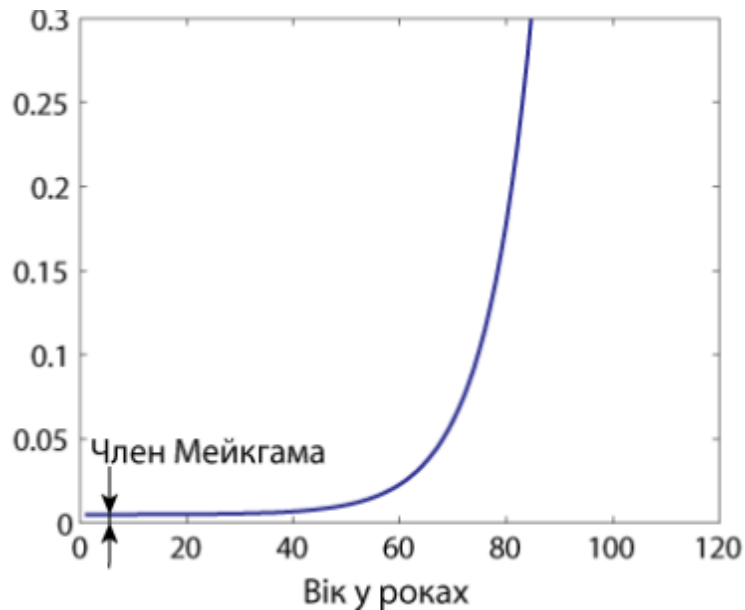


Рисунок 1.1 - Ймовірність смерті протягом року

Таким чином, розмір популяції знижується з віком за подвійною експонентою (Рисунок 1.2):

$$s(x) = \exp[-m(b^x + c)].$$

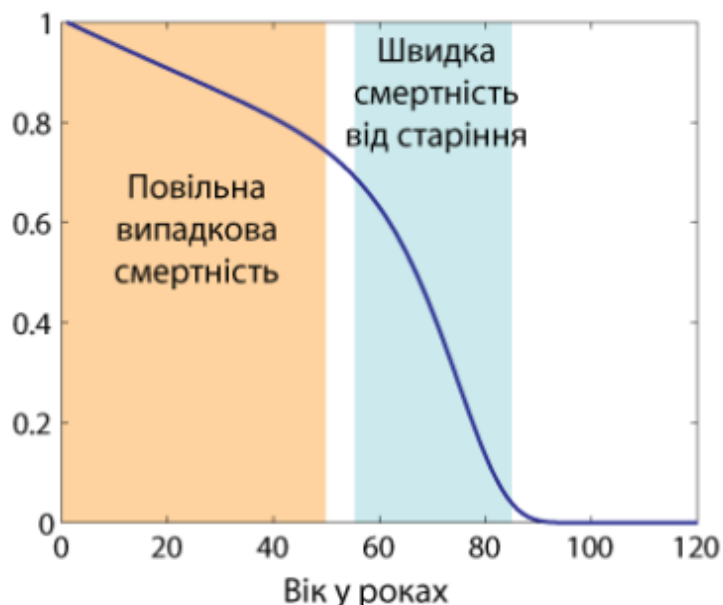


Рисунок 1.2 - Відносний розмір популяції

Закон Гомперца-Макхема найкраще описує динаміку смертності людей у віковому діапазоні 30-80 років. У літніх людей смертність зростає не так швидко, як цей закон смертності, явище, відоме як зниження смертності в більш пізньому віці.

Поширеним підходом до вивчення старіння є математична модель динаміки населення. Усі математичні моделі старіння можна грубо розділити на два основних типи: моделі даних і системні моделі. Модель даних або аналітична модель — це модель, яка не використовує і не намагається пояснити будь-які припущення щодо фізичних процесів у системі, з якої отримані ці дані. Модель даних, зокрема, включає всі математичні та статистичні моделі.

Моделі системи або механізму в першу чергу базуються на фізичних законах і припущеннях про структуру системи, в яких запропонований механізм перевіряється. Наприкінці 20 століття почали з'являтися багато нових моделей смертності населення. Наявність великої кількості нових даних (часто для гетерогенних популяцій) призвело до нових способів аналізу таблиць смертності. Ці

моделі зазвичай використовують аналітичний підхід до випадкових процесів, який може ідентифікувати компоненти смертності та описати вплив хвороб і факторів навколишнього середовища на довголіття. Оскільки лінійне зниження функцій організму відоме давно, необхідно співвідносити цю тенденцію з віком експоненційного зростання та відносною смертністю. Першим поясненням цього явища була модель Стрелера-Мілдвана (SM).

Теорія SM — це біодемографічна модель смертності та віку людей, яку можна використовувати для ранжування країн за ступенем соціального та фізичного середовища, сприятливого для виживання. Однак емпіричні оцінки, використані Стрелером і Мілдваном для перевірки своєї теорії, засновані на вибірці обмеженої кількості країн (32 країни) і даних середини 1950-х років. За чотири десятиліття використання розширених баз даних теорію SM можна додатково вивчати та розвивати шляхом аналізу даних з більшої кількості країн за тривалі періоди часу. Також можна вивчати та ідентифікувати аспекти, які сприяють довголіттю, наприклад: соціальне, економічне та фізичне середовища. У контексті старіючих суспільств, це дослідження сприяє науковому розумінню моделей старіння та їх причин в різних країнах і періодах часу.

## 1.2 Модель Стрелера-Мілдвана

Модель Стрелера-Мілдвана пропонує обґрунтування експоненціального збільшення інтенсивності смертності  $\mu(t)$ , і описує деякі формальні властивості кривої смертності Гомперца (Рисунок 1.3):

$$\mu(t) = ae^{bt} \quad (1)$$

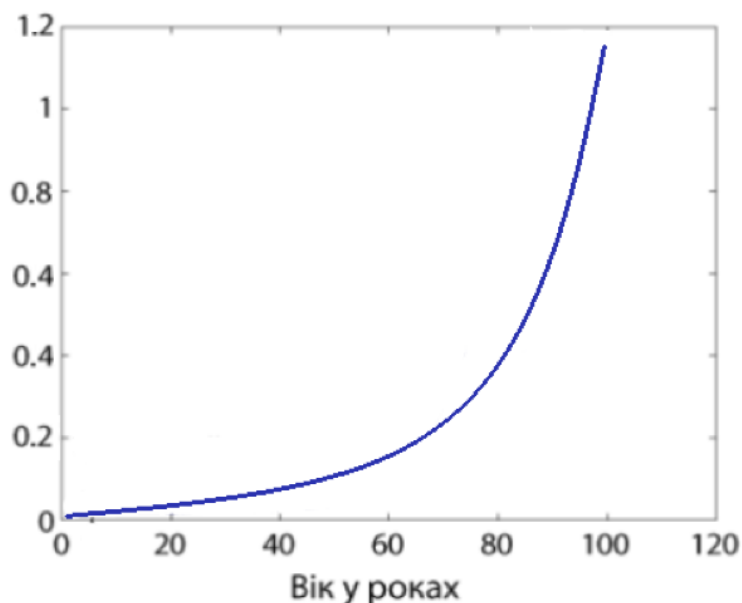


Рисунок 1.3 - Інтенсивність смертності в моделі Стрелера-Мілдвана

Звичайним узагальненням є модель Гомперца-Маккема, яка додає постійний член  $s$  до правої частини (1), щоб врахувати «фонову» смертність. Рівняння (1) зазвичай забезпечує задовільну відповідність даним смертності людей за віком від зрілості до 90-100 років.

Протягом кількох десятиліть кореляція SM вважалася універсальним демографічним законом, дійсним як для даних про період, так і для когортної смертності. Проте деякі відхилення від цієї моделі також спостерігалися.

Модель SM спирається на поняття життєвості (життєвої сили); тобто організм характеризується функцією життєдіяльності  $H(t)$ ,  $H(0) \equiv H_0$ , яка зменшується з віком  $t$ .

### 1.2.1 Припущення та основні співвідношення

Згідно з теорією Стрелера-Мілдвана організм піддається стресу внутрішнього або зовнішнього характеру, які призводять до потреби в енергії. Нехай  $(T_i, Y_i), i = 1, 2, \dots$  – послідовність пар незалежно однаково розподілених випадкових величин (позначення буде  $(T, Y)$ ), що характеризують час, коли відбуваються стресові події (потреби в енергії), і значення потреби організму в енергії, яка необхідна для відновлення після цих стресів відповідно. Нехай  $K(t)$  – інтенсивність відповідного лічильного процесу, який описує моменти настання стресових подій. Розглянемо наступні припущення:

**Припущення 1.**  $Y_i$  експоненціально розподілені:

$$P(Y > y) = e^{-\frac{y}{D}}, \quad (2)$$

де  $D$  — середнє значення потреби в енергії яка необхідна для відновлення після стресів.

Чому експоненціально? В оригінальній статті не наведено жодного реального виправдання, за винятком пояснення, що розподіл енергій молекул Максвелла-Больцмана в ідеальному газі слідує експоненціальному закону (як дуже окремий випадок розподілу  $\chi^2$ -квадрат). Якщо ми хочемо в кінцевому підсумку досягти кривої Гомперца, то ми можемо отримати бажане значення експоненціально, прийнявши це припущення.

**Припущення 2.** Організм характеризується своєю функцією життєвості  $H(t), H(0) \equiv H_0$ , яка зменшується з віком  $t$ . Її також можна назвати функцією максимальної величини енергетичного забезпечення для організму у віці  $t$ . Це також, очевидно, можна інтерпретувати як стресостійкість організму. Смерть настає у віці  $t$ , коли вперше  $Y > H(t)$ .

**Припущення 3.**  $K(t) = K$  є константою, а сила смертності визначається як

$$\mu(t) = KP(Y > H(t)) = Ke^{-\frac{H(t)}{D}} \quad (3)$$

Рівняння (3) називають постулатом в роботі Стрелера-Мілдвана. Проте з теорії точкових процесів випливає, що (3) вірно лише тоді, коли основний точковий процес  $\{T_i\}$  є однорідним процесом Пуассона, а отже, час між приходами подій (стресів) розподіляється експоненціально. Слід також зазначити, що хоч (3) можна узагальнити на випадок неоднорідного процесу Пуассона із залежною від віку інтенсивністю, властивість Пуассона основного процесу є вирішальною для добутку в правій частині (3), як доведено в [1].

Слід також зробити наступне спостереження: оскільки інтенсивність смертності є характеристикою населення, життєвість  $H(t)$  також слід розуміти в цьому сенсі. Проте воно, очевидно, вводиться припущенням 1 як індивідуальна (стохастична) характеристика. Тому ми не можемо просто замінити його очікуванням, оскільки добре відомо, що  $E \left[ e^{-\frac{H(t)}{D}} \right] \neq e^{-\frac{E[H(t)]}{D}}$ .

Таким чином, хоча в початковому формулюванні моделі є кілька важливих недоліків, вона формально призводить до властивостей показників смертності, які є важливими та виправданими на практиці.

Тепер можна прирівняти (1) і (3), оскільки наша мета — перейти від (3) до (1). Покажемо за допомогою елементарних міркувань, що  $H$  лінійно зменшується з віком. Слід зазначити, що така «форма» відповідає сучасному розумінню зниження основних біологічних маркерів та відповідних даних, принаймні для середнього віку людини. Таким чином,

$$\mu(t) = ae^{bt} = Ke^{-\frac{H(t)}{D}} \quad (4)$$

і взявши логарифми обох сторін ( $H(0) \equiv H_0$ ):

$$H(t) = H_0 \left( 1 - \left( \frac{b}{H_0} \right) t \right) = H_0 (1 - Bt) \quad (5)$$

Де, формально,  $B = \frac{b}{\ln\left(\frac{K}{a}\right)} = \frac{Db}{H_0}$ , і цю величину зазвичай називають індивідуальною швидкістю старіння (на відміну від швидкості старіння населення). Підставляючи (5) в (4):

$$\mu(t) = ae^{bt} = Ke^{-\frac{H_0(1-Bt)}{D}} = Ke^{-\frac{H_0}{D}} e^{\frac{H_0 B t}{D}} \quad (6)$$

і, таким чином,

$$a = Ke^{-\frac{H_0}{D}}; b = \frac{H_0 B}{D} \quad (7)$$

Порівнюючи два рівняння для коефіцієнта смертності, ми бачимо залежність між  $a$  та  $b$  (від'ємна кореляція): чим більше  $a$ , тим менше  $b$ . З (7) цю залежність можна записати так:

$$\ln a = \ln K - \frac{1}{B} b \quad (8)$$

Ця залежність відома в літературі як кореляція  $SM$ . Цю кореляцію спостерігали емпірично в різних популяціях людей. З (8) випливає, що

$$\ln \mu(t) = \ln a + bt = \ln K + b \left( t - \frac{1}{B} \right) \quad (9)$$

це означає, що логарифми рівня смертності для різних популяцій (наприклад, з різними  $a$ ) перетинаються в одній точці з координатами  $(\ln K, \frac{1}{B})$ .

На перший погляд здається інтригуючим, що кореляція  $SM$ , яка виводиться з використанням деяких загальних, частково невиправданих припущень, відповідає реальним даним про смертність. Протягом кількох десятиліть кореляція  $SM$  вважалася свого роду універсальним демографічним законом, дійсним як для даних про період, так і для когортної смертності. Однак стверджувалося, що кореляція  $SM$  частково є артефактом нехтування постійним членом у моделі

Гомперца-Макехема; тобто використання чистого закону Гомперца для обробки даних про смертність, отриманих від популяцій, які фактично відповідають закону Гомперца (коли константа  $c$  додається до правої частини (1)). Для сучасних популяцій розвинених країн, коефіцієнт  $c$  зазвичай відносно невеликий і ним можна знехтувати, що не стосується історичних популяцій (наприклад, до 1950 року), для яких була заявлена оригінальна модель.

### 1.2.2 Подальші дослідження

Теорія SM є детермінованою в традиційній таблиці життя та теорії стабільного населення в демографії. Тому для емпіричних застосувань його можна розглядати як очікуване значення спостережуваного розподілу населення. У будь-якому випадку, всі параметри в теорії є оцінками на рівні популяції або середніми популяційними показниками, і, таким чином, не враховують індивідуальні варіації в популяції. Ось чому важливо переглянути теорію SM за допомогою багатолітніх даних для більшої групи країн і дослідити можливу гетерогенність цих параметрів та кореляційних моделей між ними.

Ця теорія стимулювала багато наступних досліджень, деякі з яких припустили, що модель кореляції SM була стабільною для моделей смертності дорослих з 1900 по 1986 рік у Сполучених Штатах [2] та інших розвинених країнах, включаючи загальні тенденції смертності в промислово розвинених країнах [2], [3], і для таких конкретних причин смерті, як інсульт [4], рак товстої кишки [5], злоякісні пухлини мозку [6] і смертність від множинної мієломи [7]. Але інші дослідження виявили, що періодична кореляція SM чи когортна кореляція SM не є стабільною у Франції, Японії, Швеції та Сполучених Штатах, і запропонували подальші розширення теорії SM [8]-[11].

Дискусія про обмеження тривалості людського життя є ще більш інтенсивною та суперечливою. На відміну від прогнозів SM (тобто, закон Гомперца та обмежена тривалість життя), у деяких дослідженнях людей було виявлено, що смертність має тенденцію не прискорюватися в найстаршому віці, а навпаки, сповільнюватися. Більше того, приріст виживання у віці старше 80 і навіть старше 90 років почав прискорюватися після 1960 року [12] і продовжував зростати в деяких країнах до 2004 року [13]. Гіпотеза гетерогенності населення стверджує, що уповільнення смертності в найстаршому віці є статистичним ефектом зміни складу, який є результатом більш високої смертності слабких в ранньому віці, що уповільнює швидкість збільшення вікової траєкторії смертності [14]. Але інші стверджують, що неправдоподібним є те, що все спостережене уповільнення смертності у старшому віці є наслідком фактору гетерогенності. Скоріше, «деяка частина спостережуваного сповільнення пов'язана з поведінковими та фізіологічними змінами, які відбуваються з віком і пов'язані або зі зниженням репродуктивної активності, або з механізмами відновлення, які компенсують пошкодження в молодшому віці» [15]. Крім того, максимальний вік смерті для деяких національних груп населення зріс і продовжує зростати стабільно, майже лінійно; якщо він наблизився до фіксованої верхньої межі, тенденція мала сповільнитися, але таке уповільнення не є очевидним [16].

В теорії SM використовується термін очікуваної нульової життєвої сили для посилання на ймовірний (середній для населення) максимальний вік виживання. Оскільки модель SM є детермінованою, неявний вік нульової життєвої сили, оцінений як  $\frac{1}{B}$ , слід розглядати як математичне сподівання для конкретної людської популяції. Проте в емпіричних застосуваннях для людських популяцій буде існувати дисперсія випадкової величини навколо цього віку, яку слід враховувати. У контексті моделі SM причина цього полягає в тому, що навіть у віці нульової життєвої сили люди повинні стикатися з проблемами молекулярних

зв'язків з навколишнім середовищем, які надходять відповідно до (експоненціального) розподілу частот Максвелла-Больцмана — серйозні відхилення, щоб зруйнувати молекулярні зв'язки та викликати смерть. Теорія SM передбачає ймовірний вік нульової життєвої сили для населення, проте не означає, що індивідум у популяції не може жити далі цього віку.

## РОЗДІЛ 2. ОТРИМАННЯ ІНФОРМАЦІЇ З ДАНИХ ПРО СМЕРТНІСТЬ НАСЕЛЕННЯ

Протягом століть систематичний збір інформації про народжуваність та смертність в країнах дали початок теоретичним і прикладним дослідженням як у якісних, так і в кількісних галузях демографії, ймовірності та статистики, прикладної математики, а останнім часом і комп'ютерних досліджень та моделювання.

Головне завдання полягало в тому, щоб отримати якомога більше інформації з наявних наборів даних, а також розробити та запропонувати структуру для більш ефективного збору, збереження та надання даних про населення та смертність. Для цього сьогодні ми маємо досить достовірні набори даних, засновані на теоретичній базі, розробленій останніми століттями.

Надання достовірних даних, систематично зібраних, є основою якісних і кількісних досліджень. Дані про народжуваність та смертність є досить громіздкими, тому їх включають в основну частину інформації про статус населення конкретної країни за певний час для певної вікової групи. Ці типи наборів даних кількісно описують стан здоров'я населення, включаючи народжуваність і смертність. Оскільки ці дані систематично дають повну інформацію про стан населення за віковими групами чи роками, то розробити математико-статистичні методи для отримання інформації про стан здоров'я чи смертність населення цілком можливо.

Від початку теоретичних підходів Дж. Граута [17], Е. Галлея [18] та інших, чотири століття тому, завдання полягало в тому, щоб розробити теоретичну базу під назвою «Таблиці життя», яка з оптимістичної точки зору дивиться на смертність. Рівень стану здоров'я населення виник опосередковано, шляхом оцінки

тривалості життя та очікуваної тривалості життя при народженні. Галлей високо оцінив термін, пов'язаний з рівнем здоров'я, який називається «життєздатність», щоб описати поступове погіршення здоров'я людини з плином часу. Однак основним прийнятим, використаним і застосованим терміном була «інтенсивність смертності» за віком.

Стан здоров'я або життєздатність організму можна оцінити за наборами даних про народження та смерть. З точки зору якісних досліджень можна сказати, що гарний стан здоров'я населення призведе до збільшення тривалості життя. Проте кількісна відповідь має включати дані народжуваності та смертності.

Але як кількісно оцінити та змодельовати стан здоров'я населення, передбачивши функцію стану здоров'я за віком? Причина відсутності розвитку кількісної теорії в основному пов'язана з тим, що здоров'я людини — це стохастичний процес, а смерть — це кінець цього процесу, коли стан здоров'я нижче межі, що називається бар'єром, тобто в момент першого досягнення рівня (бар'єра) цим стохастичним процесом. В подальшому для стохастичного процесу, пов'язаного зі станом («кількістю») здоров'я людини, момент першого досягнення критично низького рівня будемо називати «моментом (або часом) першого виходу». Теорія випадкових процесів була розроблена лише в минулому столітті, а ретельно розроблена теорія для часу досягнення рівня певними типами процесів була запропонована лише в останні десятиліття. Натомість аналіз інтенсивності смертності заснований на простих імовірнісних аргументах, розроблених протягом останніх чотирьох століть.

## 2.1 Стохастична модель і пов'язані з нею параметри

Очікується, що функцію щільності ймовірності, що відображає процес смерті, можна описати за допомогою стохастичної теорії, пов'язаної з часом першого виходу, за допомогою оцінки щільності неперервної випадкової величини, яка є моментом, коли стохастичний процес вперше перетне бар'єр. Смерть виникає як причина втрати життєвих сил або здоров'я, що можна розглядати як випадковий процес. Змодельовати цей процес можна простим стохастичним диференціальним рівнянням [19]:

$$dS_t = \mu_t^* dt + \sigma_t dW_t \quad (10)$$

Тут  $S_t$  – це стан здоров'я або життєва сила людини,  $\mu_t^*$  – функція, що виражає втрату життєвих сил або швидкість зниження стану здоров'я залежно від віку  $t$ ,  $\sigma_t$  – нескінченно мала дисперсія здоров'я людини, яка вважається сталим для даної моделі,  $W(t)$  - стандартний процес Вінера. Щоб уникнути плутанини з інтенсивністю смертності, що позначається  $\mu$  в актуарній математиці, ми обрали  $\mu^*$  для функції, що виражає втрату життєвих сил або швидкість зниження стану здоров'я.

Розв'язок рівняння (10) можна отримати шляхом прямого інтегрування. Тоді  $S_t$  визначається як:

$$S_t = S_0 + \int_{t_0}^t \mu_s^* ds + \sigma_s [W_t - W_0] \quad (11)$$

де  $S_0$  – значення  $S_t$  у момент  $t = 0$ . Тепер наше головне завдання – отримати аналітичний вигляд функції  $\mu_t^*$ . Вважаємо, що середнє значення  $S_t$  є функцією  $H = H_t$ , заданою формулою

$$H_t = E|S_t| = S_0 + \int_{t_0}^t \mu_s^* ds \quad (12)$$

ми отримаємо

$$\mu_t^* = \frac{dH_t}{dt} \quad (13)$$

де  $H_t$  – функція стану здоров'я.

Основна проблема тут полягає не в тому, щоб знайти розв'язок (10), а в переході до щільності неперервної випадкової величини. З (10) ми можемо перейти до пов'язаного диференціального рівняння Фоккера-Планка [19]:

$$\frac{\partial p(S_t, t)}{\partial t} = -\mu_t^* \frac{\partial p(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 p(S_t, t)}{\partial S_t^2} \quad (14)$$

Розв'язок, буде мати вигляд:

$$p(t) = \frac{1}{\left[2\pi \int_0^t \sigma_s^2 ds\right]^{1/2}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2 \int_0^t \sigma_s^2 ds}} \quad (15)$$

Тоді як для сталої  $\sigma$  приймає вигляд

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (16)$$

## 2.2 Функція щільності часу першого виходу

Знаходження функції щільності, що виражає розподіл часу першого досягнення критично низького рівня надано Е. Шредінгером [20] і М. Смолуховським [21] у двох роботах, опублікованих незалежно в одному номері журналу. Пізніше А. Зігерт [22] дав інтерпретацію, ближчу до нашого сучасного позначення, тоді як в роботах [23]-[25] дано найцікавішу форму функції щільності першого виходу. Для простого випадку, представленого раніше (15), запропонована форма:

$$g(t) = \frac{|a|}{t} p(a, t) = \frac{|a|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2 t}} \quad (17)$$

К. Дженнен [23] запропонував більш загальну форму для випадку криволінійної межі, використовуючи дотичну апроксимацію щільності першого виходу. Застосування цієї теорії до моделювання смертності призводить до наступної форми [19], [26]:

$$g(t) = \frac{|H_t - tH'_t|}{t} p(t) = \frac{|H_t - tH'_t|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (18)$$

Як бачимо з останньої формули  $|H_t - tH'_t|$  враховує локальну лінеаризацію і в кількох випадках може розглядатися як константа. У цьому випадку виникає простіша форма:

$$g(t) = \frac{k}{t} p(t) = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (19)$$

Залишилося знайти функції стану здоров'я  $H_t$ , яка виражає процес втрати життєздатності через те, що вона має бути спадною функцією в кінці життєвого шляху. Простіша форма виражена в [27]:

$$H_t = l - (bt)^c \quad (20)$$

Де  $l$  і  $c$  — параметри. Коли  $c = 1$ , результуюча щільність неперервної випадкової величини є так званою оберненою гауссівською

$$g(t) = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(l-bt)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (21)$$

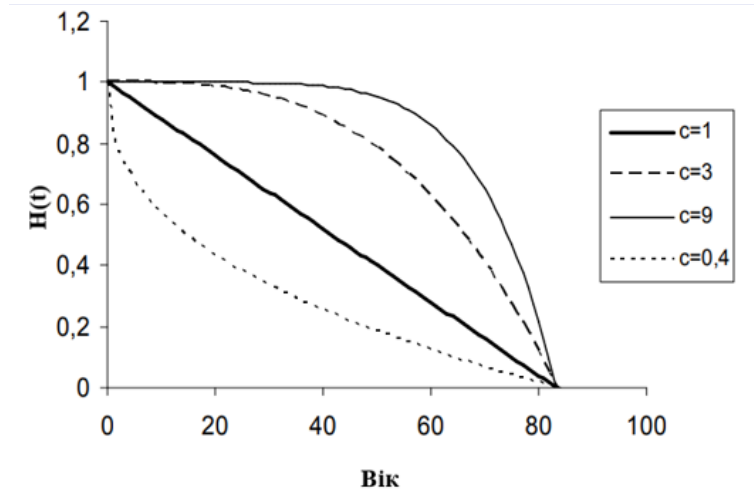


Рисунок 2.2.1 - Прості моделі стану здоров'я

На рисунку 2.2.1 проілюстроване моделювання погіршення стану здоров'я. Лінійний підхід ( $c = 1$ ) можливий лише для дуже простої системи або організму. Процес смерті виражається поступовим зношенням системи. Оскільки організм або система ускладнюються, механізм відновлення, представлений параметром  $c$ , стає складнішим та потужнішим, таким чином моделюючи організм, який залишається в хорошому стані протягом тривалого періоду життя. Ці випадки виражаються через  $c = 3$  і  $c = 9$ . Випадок з  $c = 0,4$  пояснює, що система працює погано.

### 2.3 Моделювання систем

У той час як попередній випадок має перевагу включення оберненої гаусівської моделі як окремих випадок, інший підхід також є досить важливим. Основна ідея полягає в тому, щоб запропонувати функцію, що моделює тенденцію живого організму покращувати стан здоров'я протягом першого періоду життя. Це можливо у випадку багатьох складних живих організмів, якщо спостерігати,

що стан здоров'я починається з дуже низьких значень при народженні, згодом значно покращується до певного рівня, а потім знижується, як це відбувається у людей. Ця ідея лягла в основу моделі з п'ятьма параметрами, запропонованої Дж. Янссеном та К. Скіадасом [19].

Метод пошуку моделі, за якою слідує система, під час процесу зростання або занепаду, описаний у [28]. Основна ідея полягає в побудові діаграми  $(G(t), g(t))$ , де в розглянутому тут випадку  $g(t)$  є функцією щільності ймовірності, а  $G(t)$  є функцією розподілу ймовірностей або кумулятивною функцією  $g(t)$ . Дані для функції щільності ймовірності  $g(t)$  беруться зі статистичних досліджень, зокрема з баз даних смертності людей. Треба нормувати ці дані таким чином, щоб виконувалась рівність  $\sum_0^n g(t) = 1$ , та оцінити функцію розподілу ймовірностей з  $G(t) = \sum_0^n g(t)$ .

Перша спроба знайти функцію, що виражає зростання живого організму, виражену величиною  $G(t)$  і першою похідною  $g(t)$ , може бути заснована на логістичному зростанні виду  $g(t) = bG(t)(1 - G(t))$ , де  $b$  – коефіцієнт зростання. Логістичне зростання зазвичай нереалістичне, якщо припустити симетричну форму процесу зростання. Крім того, не існує механізму управління, пов'язаного з внутрішніми силами системи. Для процесу народження і смерті механізм контролю повинен бути пов'язаний з відносною швидкістю зміни системи.

На основі відносного темпу зростання:

$$\frac{g(t)}{G(t)} = \frac{d}{dt} \ln G(t) = (\ln G(t))' = y \quad (22)$$

де  $y$ , відносна величина системи, визначається як

$$y = \int \frac{d(G(t))}{G(t)} = \ln G(t) \quad (23)$$

і може бути наближено за

$$y \approx \sum \frac{\Delta G(t)}{G(t)} \quad (24)$$

Тобто відносна величина  $y$  є мірою всіх відносних змін системи від її початкового формування до поточного стану. Розумно очікувати, що система має обмеження для свого зростання, було б більш реалістично припустити зниження відносного темпу зростання. Припускаючи, що це зниження пропорційне відносному зростанню  $y$  системи, приведемо до простого диференціального рівняння:

$$\dot{y} = -by \quad (25)$$

Або

$$(\ln G(t))' = -b \ln G(t) \quad (26)$$

Це також можна записати як

$$g(t) = -bG(t) \ln G(t) \quad (27)$$

Ця модель була вперше запропонована Б. Гомперцом в 1825 році.

Проінтегрувавши:

$$G(t) = e^{\ln G(0)e^{-bt}} \quad (28)$$

Інший цікавий варіант виникає, якщо замінити  $x$  на  $1 - x$  в диференціальному рівнянні Гомперца (27), в результаті чого:

$$g(t) = -b(1 - G(t)) \ln(1 - G(t)) \quad (29)$$

Ця модель виникає з урахуванням відносного розпаду системи, а не відносного зростання. Ця модель має асиметрію, протилежну моделі Гомперца, оскільки зараз максимальний темп зростання досягається, коли  $1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$ .

Це дві форми так званої моделі Гомперца. Перша використовується в статистиці, а друга популярна в демографії та актуарній математиці. Другий випадок — це форма, яка підходить до наборів даних таблиці життя.

Трипараметрична модель має вигляд:

$$g(t) = k(c - 1)(bt)^c (t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(bt)^{2c}}{2t}}$$

Або форма запропонована в [19]:

$$g(t) = \frac{k}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2t}},$$

Де функція стану здоров'я  $H_t$  дорівнює

$$H_t = a_1 + at^4 - b\sqrt{t} + lt^2 - ct^3 \quad (30)$$

Ця модель розроблена з метою включення дитячої смертності ( $a_1$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $l$  і  $c$  є параметрами).

## 2.4 Характерна властивість функції стану здоров'я $H(t)$

Оскільки ми ввели стан здоров'я як протилежність смертності, а функцію стану здоров'я як протилежність функції смертності, ми повинні знайти простий і досить ефективний метод для оцінки  $H(t)$  з таблиць життя або даних про смертність. З першого опублікування таблиць життя стало очевидним, що оптимістичний термін «життя» має перевагу над песимістичний «смерть». Б. Гомперц високо оцінив «непередбачені життєві обставини» у своїй фундаментальній роботі [29], а Е. Галлей оцінив смертність [18]. Терміни «Таблиця життя» та «Дані таблиць життя» частіше використовуються, оскільки такі терміни підкреслюють оптимістичний погляд на життєвий шлях. Ми розуміємо, що дані про стан здоров'я

включені в дані про смертність, і головне завдання – знайти спосіб залучення цієї інформації з даних про смертність або з даних таблиці життя.

Теорія запропонованої в [26] функції стану здоров'я є відносно новою. Звертаючись до запропонованого загального рівняння (19)

$$g(t) = \frac{k}{t} p(t) = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}},$$

ми бачимо, що, оцінюючи параметри моделі з будь-якою функцією стану здоров'я  $H(t)$ , коефіцієнт дифузії  $\sigma$  не може бути оцінений явно, оцінімо його на основі інших параметрів – стану здоров'я або життєвої сили людини ( $S_t$ ). Проте стохастичне диференціальне рівняння (10) забезпечує простий метод оцінки  $\sigma$  з наборів даних. Ми можемо це відразу помітити

$$(dS_t)^2 = (\sigma_t dW_t)^2 = \sigma_t^2 dt, \quad (31)$$

і оцінка константи  $\sigma$  виникає з

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_0^n (S_{t+1} - S_t)^2}{n}} \quad (32)$$

Без втрати загальності ми можемо встановити  $\sigma = 1$  в рівнянні (19) для  $g(t)$  і продовжити використання простої форми моделі

$$g(t) = \frac{k}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2t}} \quad (33)$$

Де новий параметр  $k = k^*/\sqrt{2\pi}$

Тепер ми перейдемо до оцінки форми невідомої функції стану здоров'я  $H(t)$ , переставивши попереднє рівняння та виразивши  $H(t)$  як функцію  $g(t)$ . Отримана функція має вигляд

$$H_t = \left| \left( -2t \ln \frac{g(t)\sqrt{t^3}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \quad (34)$$

Щоб забезпечити позитивний знак члену в дужках у правій частині останньої формули, має виконуватись таке співвідношення:

$$k \geq g(t)\sqrt{t^3} \quad (35)$$

Таким чином, ми можемо відразу отримати ілюстрацію вигляду функції  $H(t)$ , ввівши значення кількості смертей  $g(t)$  у віці  $t$  з будь-яких річних наборів даних із баз даних смертності людей у наведеній вище формулі після оцінки параметра  $k$ .

Отже, максимальне значення коефіцієнта  $k(T)$  свідчить про нульове значення функції стану здоров'я в цьому віці, вік максимальної смертності  $T$  ми оцінюємо за співвідношенням:

$$k(t) = g(t)\sqrt{t^3} \quad (36)$$

Оцінка параметра  $k$  не є важким завданням, якщо ми помітимо, що функція  $H(t)$  має бути неперервною, як і функція  $g(t)$ , вона повинна безперервно зменшуватися в старшому віці і повинна бути нульовою (або дуже близькою до нуля) у віці максимальної смертності.

Дуже важливим моментом є вибір відповідних наборів даних, які зазвичай надаються Бюро перепису конкретної країни. У цій частині дослідження ми в основному використовуємо актуарні позначення, замінюючи час  $t$  роками, позначеними  $x$  у всіх попередніх позначеннях і рівняннях. Необхідні дані – це кількість померлих у віці  $x$  протягом року ( $dx$ ), а також спостережувана чисельність населення за віком  $x$  в певному році ( $lx$ ). Тоді інтенсивність смертності в точці  $x$  (у віці  $x$ )  $\mu_x$  визначається як

$$\mu_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (37)$$

Коли дані надані в термінах  $\mu_x$ , ми переходимо до безпосереднього пошуку  $H_x$ . Оскільки в наших розрахунках нам потрібні дані для оцінки функції щільності ймовірності  $g(x)$ , ми можемо знайти цю функцію з визначення  $\mu_x$  з формули

$$\mu_x = \frac{g(x)}{1 - \int_0^x g(t) dt} \quad (38)$$

Після перегрупування та диференціювання отримуємо

$$(\ln(g_x))' = (\ln(\mu_x))' - \mu_x \quad (39)$$

Переставляючи та інтегруючи, отримуємо

$$\ln(g_x) = \ln(c) + \ln(\mu_x) - \int_0^x \mu_t dt \quad (40)$$

Ми можемо встановити константу інтегрування  $c = 1$ , щоб отримати такий вигляд для функції щільності ймовірності:

$$g_x = \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt} \quad (40)$$

Слід зазначити, що отримані значення для  $g_x$  будуть нормовані так, що

$$\int g_x = 1$$

Формула для  $g_x$  надає функцію щільності ймовірності  $g(x)$  як функцію  $\mu_x$ . Відповідно, ми можемо знайти наступну форму для функції стану здоров'я

$$H_x = \left| \left( -2x \ln \frac{\sqrt{x^3} \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \quad (42)$$

Параметр  $k$  тепер визначається як

$$k = \sqrt{x^3} \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt} \quad (43)$$

Дослідження проведено на основі даних наданих базою даних про смертність людей <https://www.mortality.org/>. З вказаної бази даних було використано кількість померлих у віці  $x$  протягом року (Таблиця 2.4.1), а також спостережувана чисельність населення за віком  $x$  в певному році (Таблиці 2.4.2). Дане оцінювання було проведено за допомогою середовища MS Excel.

Year	Age	Female	Male	Total
2000	0	1836.50	2786.96	4623.46
2000	1	319.43	362.95	682.38
2000	2	165.22	225.21	390.43
2000	3	112.15	144.77	256.92
2000	4	88.12	144.77	232.89
2000	5	79.11	112.61	191.72

Таблиця 2.4.1 - Ukraine, Deaths

Year	Age	Female	Male	Total
2000	0	186626.00	198354.00	384980.00
2000	1	201520.00	211574.00	413094.00
2000	2	210955.00	222025.00	432980.00
2000	3	224936.00	237571.00	462507.00
2000	4	235171.00	247730.00	482901.00
2000	5	245649.00	258911.00	504560.00

Таблиця 2.4.2 - Ukraine, Population size

Застосувавши формулу (43) для визначення параметру  $k$  до даних про смертність України за 2000 рік, було отримано оцінку значення  $k=31,63$  у 82-річному віці для жінок (Рисунок 2.4.1) і  $k=16,28$  у 76 років для чоловіків (Рисунок 2.4.2).

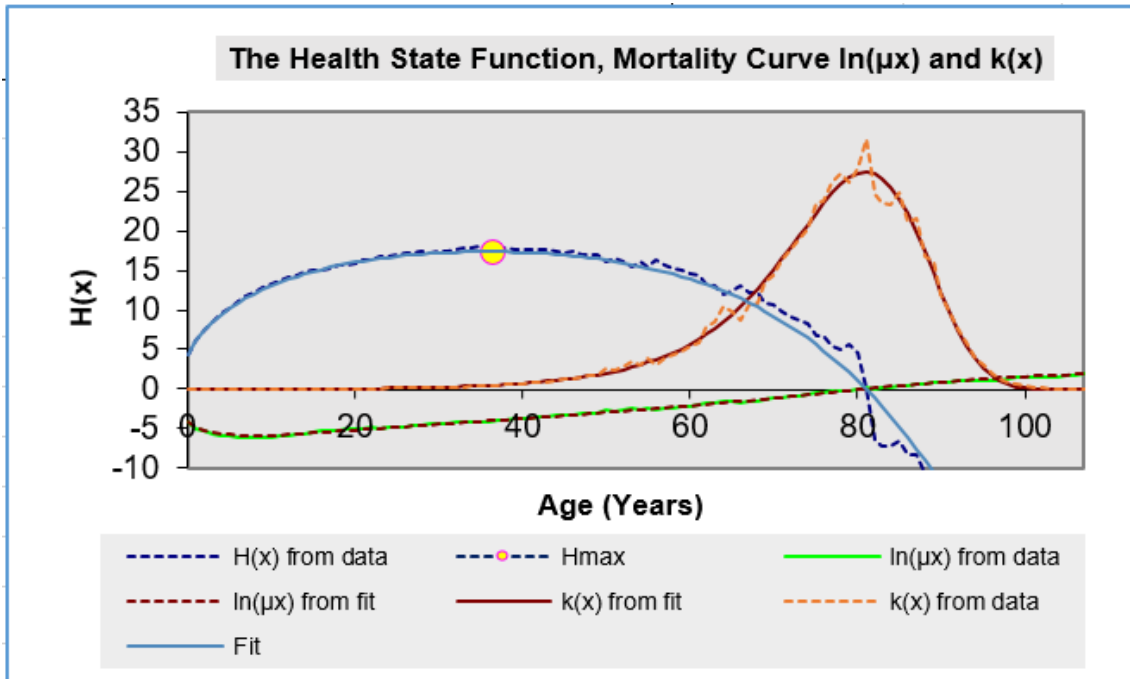


Рисунок 2.4.1 - Функція стану здоров'я, крива смертності  $\ln(\mu x)$  і  $k(x)$  (жінки 2000 р.)

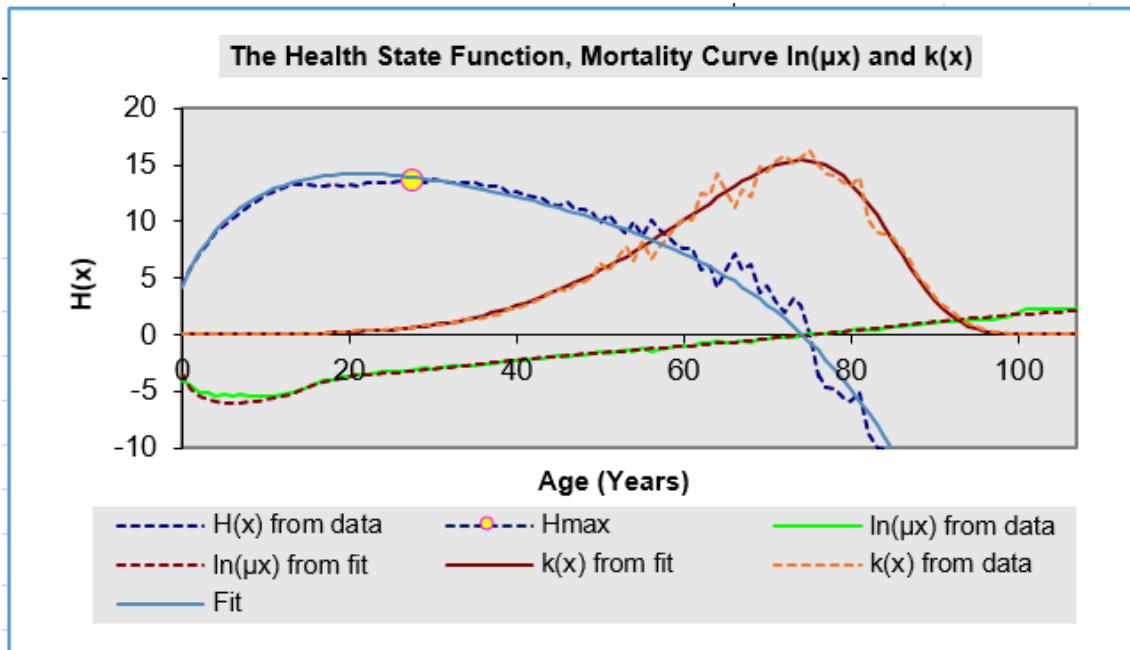


Рисунок 2.4.2 - Функція стану здоров'я, крива смертності  $\ln(\mu x)$  і  $k(x)$  (чоловіки 2000 р.)

Де,  $H(x)$  from data – функція стану здоров'я згідно статистичних таблиць за формулою (42),  $\ln(\mu x)$  from data – крива смертності згідно статистичних таблиць за формулами (38) та (40),  $k(x)$  from data – функція параметру  $k(x)$  згідно

статистичних таблиць за формулою (43),  $H_{max}$  – найбільше значення функції стану здоров'я. Також на графіку зображені криві:  $Fit$  – апроксимуюча крива для функції стану здоров'я за формулою (30), а криві  $\ln(\mu x)$  from  $fit$  та  $k(x)$  from  $fit$  – функції обраховані на основі значень функції  $Fit$ , що представлені формулою (30) та похідними від неї формулами, а саме формулами (36), (38) та (33).

Очевидним зв'язком між цими формулами є те, що коефіцієнти апроксимуючої функції  $Fit$  розраховані на основі тих самих даних статистичних таблиць із застосуванням методів регресійного аналізу. Як видно на графіку апроксимуюча функція  $Fit$  дає достатнє наближення до функції  $H(x)$ , що побудована на основі статистичних даних.

Графічне зображення стану здоров'я, представлене формулою (30), на рисунку 2.4.2 підтверджує, що ця формула має недолік щодо втрати стану здоров'я в інтервалі віку максимального стану здоров'я, тому надалі для практичного застосування будемо використовувати формулу (42).

Оскільки ми спостерігали форму параболі для функції  $H(x)$ , ми можемо знайти вік  $x$ , де  $H(x)$  отримує максимум. Для випадку України в 2000 році ми знайшли  $x=36$  років і  $H(x)=17,94$  для жінок та  $x=31$  рік і  $H(x)=13,72$  для чоловіків.

Отримані графіки для  $H(x)$  забезпечують несиметричну форму, подібну до параболи. Ця функція описує середнє значення стану здоров'я населення за конкретний рік як функцію віку. Стан здоров'я починається з низького рівня при народженні, а потім продовжує зростати до 30-45 років (для жінок), а потім знижується до нуля у віці максимальної смертності.

Функції стану здоров'я для чоловіків і жінок за один і той же період часу (2000 р.) для України проілюстровані на Рисунку 2.4.3.  $H(t)$  для жінок має вищі значення, ніж для чоловіків, і те саме стосується нульового віку  $H(t)$ . У випадку

жінок максимальним станом здоров'я вважається вік від 30 до 45 років, проте в чоловіків від 20 до 35 років.

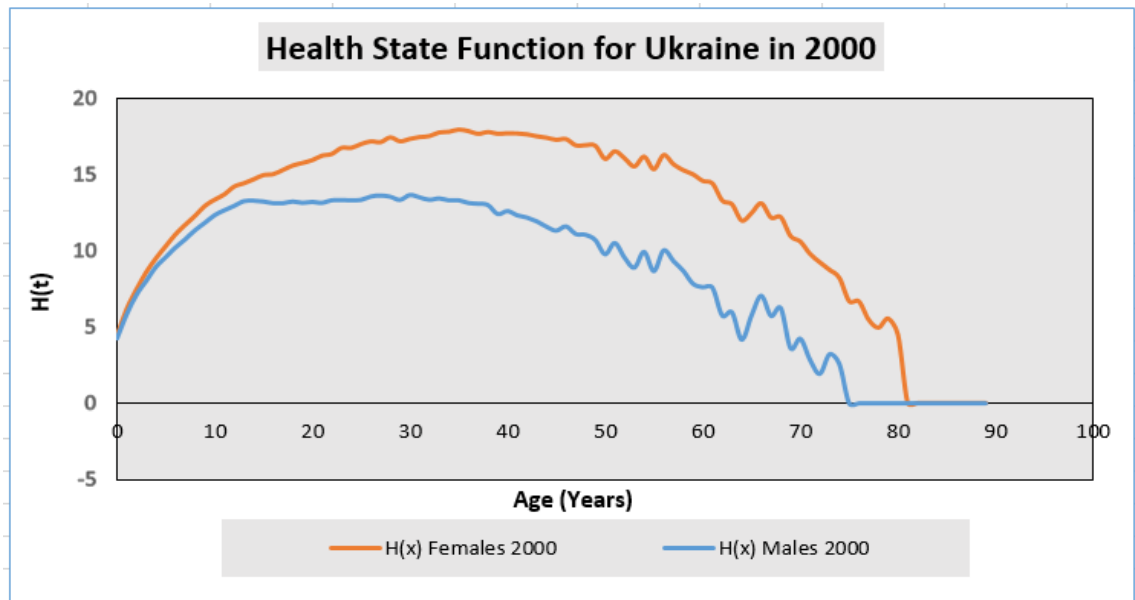


Рисунок 2.4.3 - Функція стану здоров'я чоловіків і жінок в Україні

Для спостереження зміни значення функції життєвості для України за даними в різні роки побудуємо модель за формулою (42) для жінок та чоловіків України за період з 1990 року по 2012 рік з інтервалом в 2 роки.

Розглянемо спочатку ситуацію для жінок. Оскільки основне дослідження проводилося за даними 2000 року покажемо результати на двох різних рисунках з включенням результатів 2000 року в обидва рисунки. Перший рисунок зображує зміну функції стану здоров'я з 1990 року по 2000 рік (Рисунок 2.4.4), а другий – з 2000 року по 2012 рік (Рисунок 2.4.5).

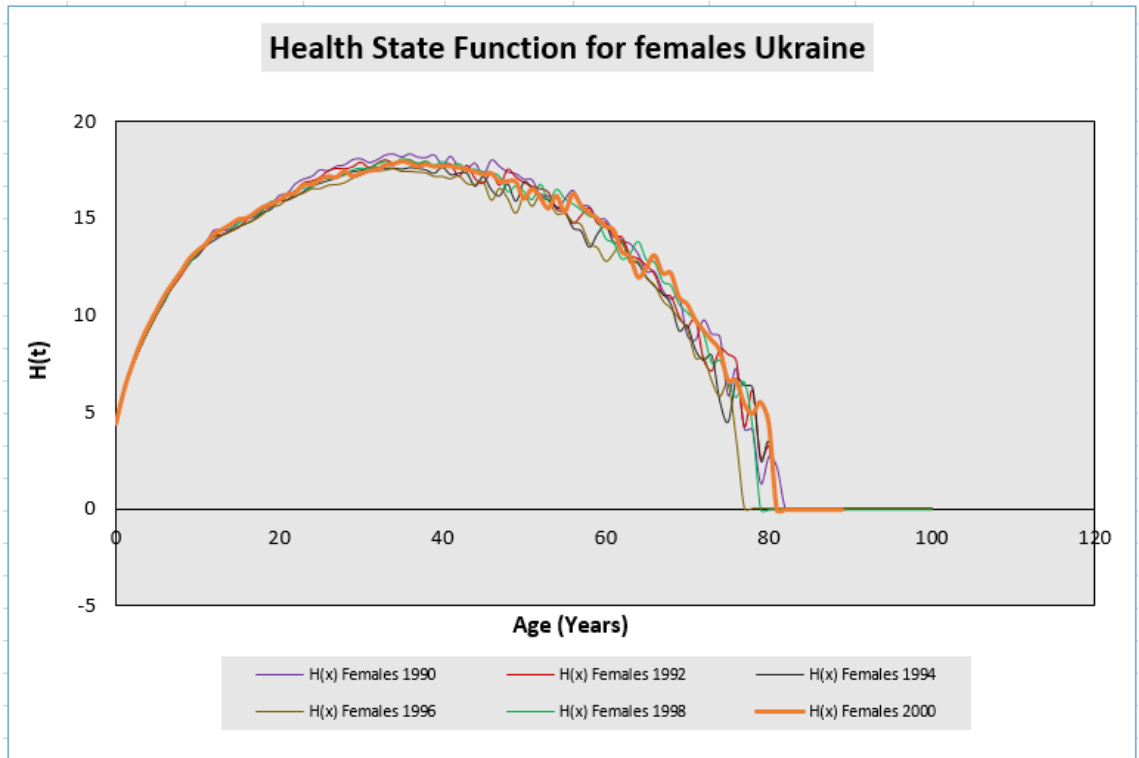


Рисунок 2.4.4 - Функція стану здоров'я (жінки 1990-2000р.)

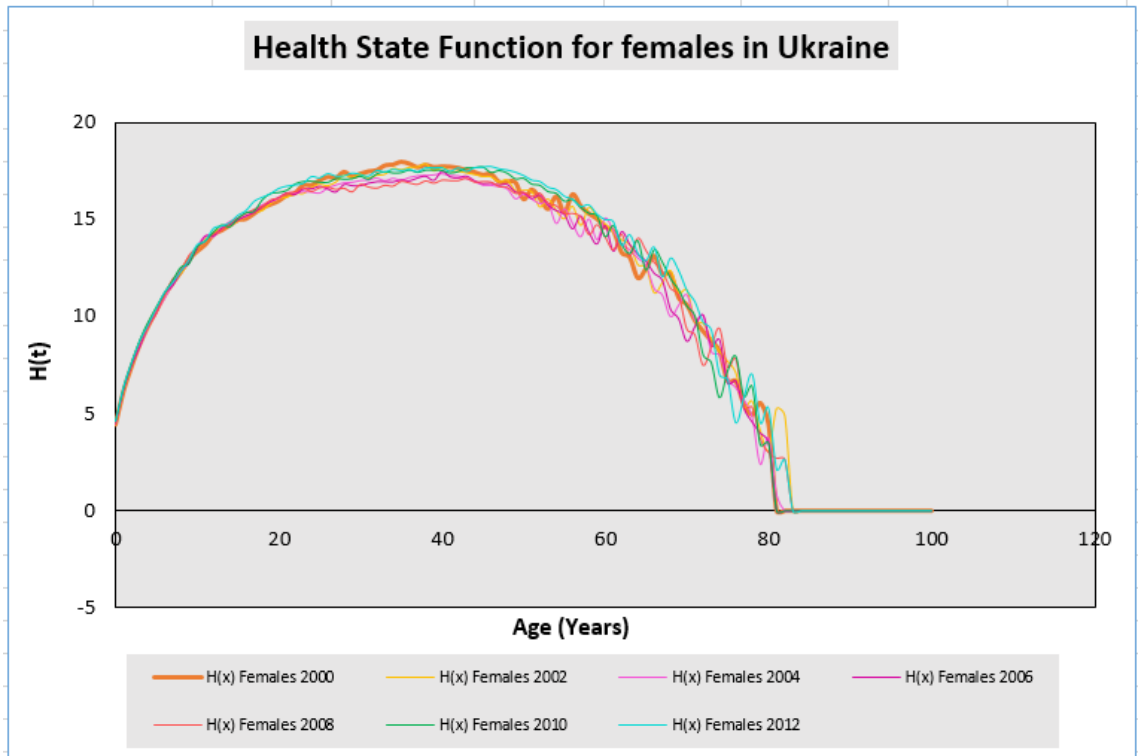


Рисунок 2.4.5 - Функція стану здоров'я (жінки 2000-2012р.)

Проаналізувавши обидва графіки та порівнявши криві стану здоров'я всіх досліджуваних років відносно кривої за 2000 рік, можна сказати, що стан здоров'я жінок залишається відносно стабільним протягом 22 років. Максимальне значення функції стану здоров'я становить  $H(x)=18.3$  у віці  $x=37$  році, а мінімальне  $H(x)=17,09$  у віці  $x=44$  році. Проте для обох цих випадків вік нульового значення стану здоров'я є приблизно рівний – 83 та 84 роки відповідно. Також можна побачити, що інтервал максимального значення стану здоров'я для жінок знаходиться у віці 30-45 років.

Аналогічне дослідження було проведено для чоловіків. Рисунок 2.4.6 зображує зміну функції стану здоров'я з 1990 року по 2000 рік, а рисунок 2.4.7 – з 2000 року по 2012 рік

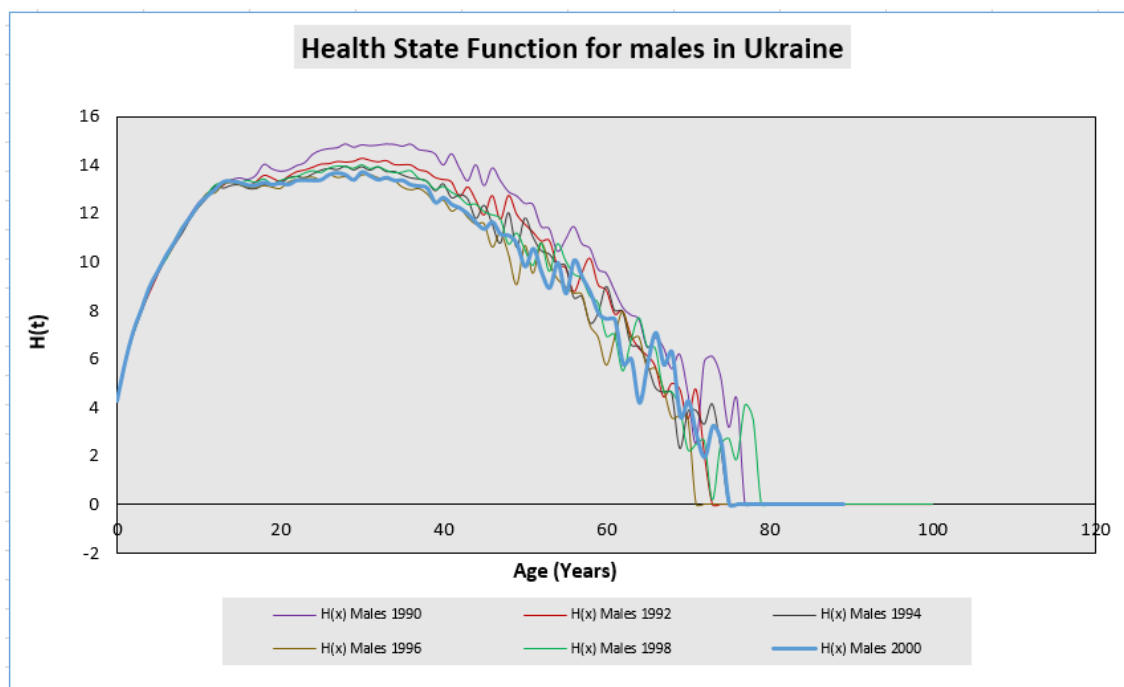


Рисунок 2.4.6 - Функція стану здоров'я (чоловіки 1990-2000р.)

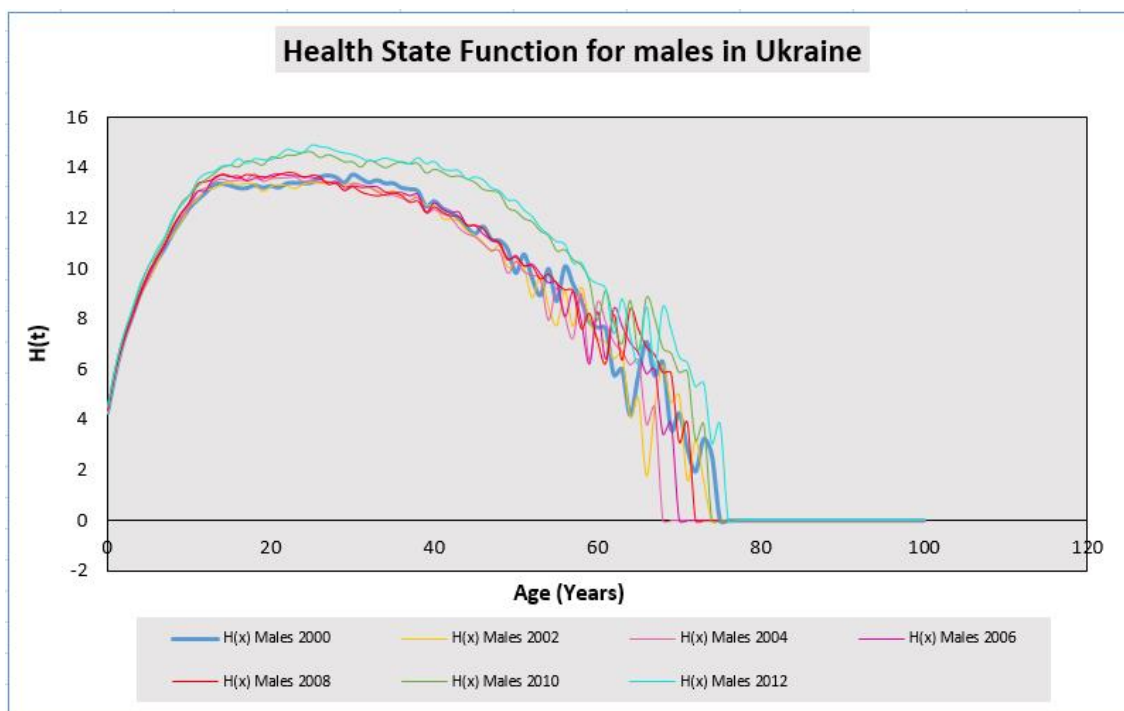


Рисунок 2.4.7 - Функція стану здоров'я (чоловіки 2000-2012р.)

Спираючись на результати дослідження для чоловіків можна сказати, що значення функції стану здоров'я значно нища від значення за даними жінок. Максимальне значення  $H(x)=14,9$  у віці  $x=29$  року в 2000 році, мінімальне  $H(x)=13,44$  теж у віці  $x=29$  років в 2002 році. А нульове значення функції стану здоров'я відносно рівне – 78 та 75 років відповідно. Для чоловіків інтервал максимального значення стану здоров'я знаходиться у віці 20-35 років. Проте на графіку можна побачити деяке покращення стану здоров'я в період з 2010 по 2012 рік.

На основі розрахунків та графіків спостерігається чітка тенденція зростання стану здоров'я жінок: при відносно сталому максимальному значенні функції стану здоров'я, вік максимального значення стану здоров'я підвищується (Таблиця 2.4.3). Також, помітно різницю віку нульового значення стану здоров'я, в жінок він значно вищий, ніж в чоловіків (Таблиця 2.4.4). Така різниця

зумовлена сукупністю факторів, які можна узагальнити способом життя.

Найбільш поганий вплив на здоров'я спричиняють: алкоголь, куріння та неправильне харчування. Також чоловіки більш схильні до ризику та мають більш небезпечні роботи.

Рік	Максимальне значення функції $H(x)$	Вік максимального значення стану здоров'я, р.	Вік нульового значення стану здоров'я, р.
1990	18,3	37	83
1992	18,1	34	82
1994	17,7	41	82
1996	17,5	35	78
1998	18,1	36	80
2000	17,94	36	82
2002	17,87	39	84
2004	17,32	41	83
2006	17,50	41	82
2008	17,09	44	84
2010	17,70	46	82
2012	17,75	47	84

Таблиця 2.4.3 - Порівняння значень функції стану здоров'я та років масимального і нульового стану здоров'я жінок в Україні

Рік	Максимальне значення функції $H(x)$	Вік максимального значення стану здоров'я, р.	Вік нульового значення стану здоров'я, р.
1990	14,9	29	78
1992	14,3	31	74
1994	13,9	29	76

1996	13,6	32	72
1998	14,0	31	80
2000	13,72	31	76
2002	13,44	29	75
2004	13,73	19	69
2006	13,76	22	71
2008	13,84	23	73
2010	14,64	26	75
2012	14,90	26	77

Таблиця 2.4.4 - Порівняння значень функції стану здоров'я та років масимального і нульового стану здоров'я чоловіків в Україні

Побудуємо аналогічну модель для Японії, для того щоб провести порівняння. Модель функції  $H(x)$  за формулою (42) та параметру  $k(x)$  за формулою (43) для жінок Японії в 2000 році представлена на Рисунку 2.4.8, а для чоловіків – на Рисунку 2.4.9. Функція  $H(x)$  за даними жінок перетинає горизонтальну вісь у віці 92 роки та 82 роки – за даними чоловіків, де крива, що виражає  $k(x)$ , має максимум. Цей максимум при  $k=39,06$  (2000р., жінки) та  $k=18,7$  (2000р., чоловіки) є необхідним значенням для параметра  $k$ , щоб функція  $H(x)$  існувала, була неперервною і спадала у старості. В порівнянні можна побачити, що жінки Японії досягають віку нульового значення функції життєвості на 10 років пізніше за чоловіків.

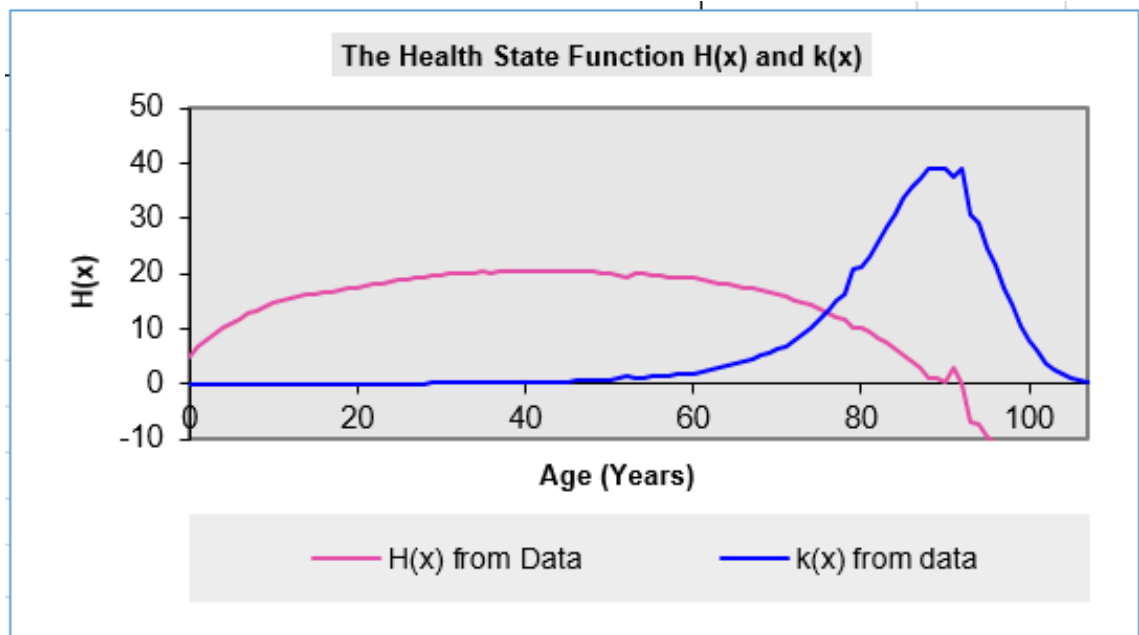


Рисунок 2.4.8 - Функція стану здоров'я та  $k(x)$  для Японії (2000 р., жінки)

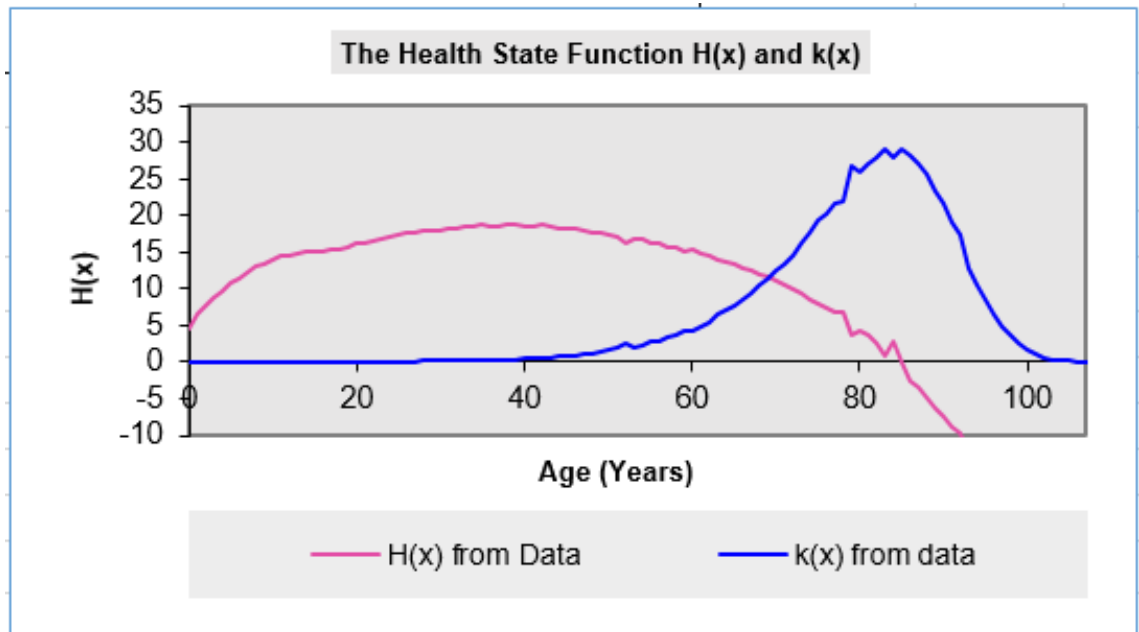


Рисунок 2.4.9 - Функція стану здоров'я та  $k(x)$  для Японії (2000 р., чоловіки)

Жінки та чоловіки в Японії демонструють вищий стан здоров'я, ніж жінки та чоловіки в Україні за 2000 рік. Результати порівняння даних забражено на рисунку 2.4.10 для жінок та на рисунку 2.4.11 для чоловіків.

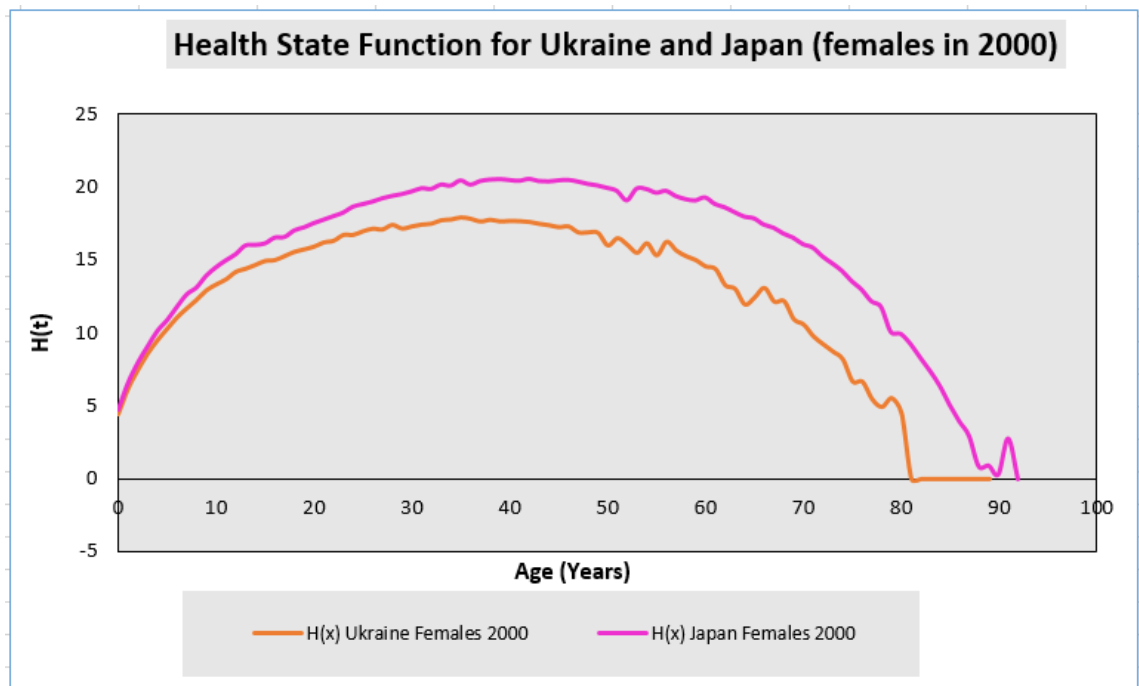


Рисунок 2.4.10 - Функція стану здоров'я для жінок в Україні та Японії

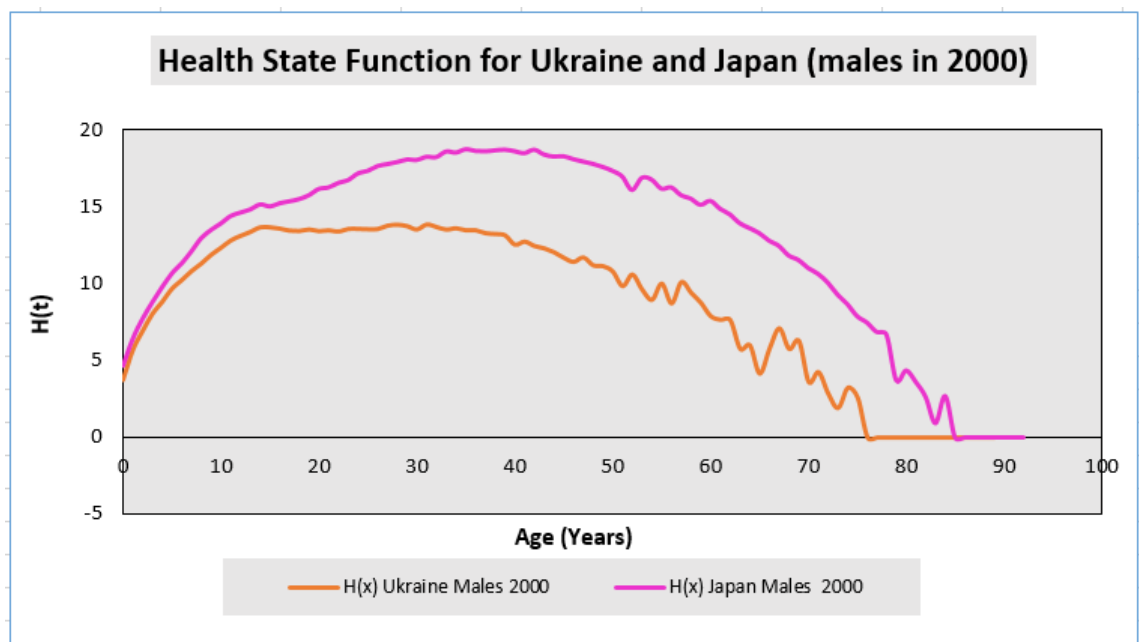


Рисунок 2.4.11 - Функція стану здоров'я для чоловіків в Україні та Японії

## ВИСНОВКИ

В даній роботі було розглянуто історичний розвиток математичних моделей старіння, модель Гомперца-Мейхема, модель Стрелела-Мілдвана. Основною частиною цієї роботи є обґрунтування та побудова адекватної моделі. Ця модель, запропонована Дж. Янсенем та К. Скіадасом в 1995 р., тепер розширена і включає уточнення щодо втрати стану здоров'я для вікової групи чоловіків від 15 до 30 років. Було проаналізовано загальну теорію стану здоров'я населення, безпосередньо пов'язану зі смертністю. Використовуючи цю теорію та інструменти програми Excel виконано моделювання функцій стану здоров'я та смертності та їх графічне зображення, що представлено у роботі.

На основі зібраних даних по населенню України, було змодельовано функції стану здоров'я та смертності. А саме, дані для жінок та чоловіків України за період з 1990 року по 2012 рік з інтервалом в 2 роки. Результати дослідження були представлені у вигляді графіків функцій стану здоров'я та смертності, а також у вигляді таблиці для порівняння інтервалів максимального значення функції стану здоров'я та віку нульового значення функції стану здоров'я – віку смерті. За результатами дослідження можна побачити, що стан здоров'я жінок значно вищий від стану здоров'я чоловіків, це також стосується, зокрема, віку нульового значення стану здоров'я. Особливо ця різниця помітна в 2004 році, де вік нульового значення стану здоров'я становить 83 роки для жінок та 69 років для чоловіків. У випадку жінок віком з максимальним станом здоров'я вважається вік від 30 до 45 років, проте в чоловіків цей показник – від 20 до 35 років. Також можна зробити висновок, що максимальне значення функції стану здоров'я не впливає на вік нульового значення стану здоров'я.

Для загального розуміння аналізу функції стану здоров'я та смертності була побудована аналогічна модель для жінок та чоловіків Японії 2000 року. При

порівнянні значень за даними Японії та України можна спостерігати значну різницю стану здоров'я, а також віку значення нульового стану здоров'я. Для японських жінок цей вік становить 92 роки, в той час як для українських – 82 роки. Для чоловіків ці значення дорівнюють 82 роки для японських чоловіків та 76 – для українських.

Тепер ми можемо класифікувати різні країни за рівнем максимального стану здоров'я за конкретний рік, що дуже важливо для різних організацій, наприклад, таких як Всесвітня організація охорони здоров'я. А також вивчати та ідентифікувати різні аспекти, які сприяють довголіттю, наприклад: соціальне, економічне та фізичне середовища та ранжувати країни за ступенем соціального та фізичного середовища, сприятливого для виживання.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Finkelstein, M. (2008). *Failure Rate Modeling for Reliability and Risk*. London: Springer.
2. Prieto, M. D., Llorca, L., & Delgado-Rodriguez, M. (1996). Longitudinal Gompertzian and Weibull analyses of adult mortality in Spain (Europe), 1990–1992. *Mechanisms of Ageing and Development*, 90, 35–51.
3. Riggs, J. E., & Millicchia, R. J. (1992). Using the Gompertz-Strehler model of aging and mortality to explain mortality trends in industrialized countries. *Mechanisms of Ageing and Development*, 65, 217–228.
4. Riggs, J. E., & Myers, E. J. (1994). Defining the impact of prevention and improved management upon stroke mortality. *Journal of Clinical Epidemiology*, 47, 931–939.
5. Riggs, J. E. (1993). Aging, genomic entropy and carcinogenesis: Implications derived from longitudinal age-specific colon cancer mortality rate dynamics. *Mechanisms of Ageing and Development*, 72, 165–181.
6. Riggs, J. E. (1994). Carcinogenesis, genetic instability and genomic entropy: Insight derived from malignant brain tumor age specific mortality rate dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, 170, 331–338.
7. Riggs, J. E. (1995). Increasing multiple myeloma mortality among the elderly: A manifestation of aging and differential survival. *Mechanisms of Ageing and Development*, 77, 227–234.
8. Yashin, A. I., Iachine, I. A., & Begun, A. S. (2000). Mortality modeling: A review. *Mathematical Population Studies*, 8, 305–332.
9. Yashin, A. I., Begun, A. S., Boiko, S. I., Ukraintseva, S. V., & Oeppen, J. (2001). The new trends in survival improvement require a revision of traditional gerontological concepts. *Experimental Gerontology*, 37, 157–167.

10. Yashin, A. I., Begun, A. S., Boiko, S. I., Ukrainsteva, S. V., & Oeppen, J. (2002a). New age patterns of survival improvement in Sweden: Do they characterize changes in individual aging? *Mechanisms of Ageing and Development*, 123, 637–647.
11. Yashin, A. I., Ukrainsteva, S. V., Boiko, S. I., & Arbeev, K. G. (2002b). Individual aging and mortality rate: How are they related? *Social Biology*, 49, 206–217.
12. Wilmoth, J. R. (1997). In search of limits. In K. H. Wachter & C. E. Finch (Eds.), *Between Zeus and the salmon: The biodemography of longevity* (pp. 38–64). Washington, DC: National Academy.
13. Rau, R., Soroko, E., Jasilionis, D., & Vaupel, J. W. (2008). Continued reductions in mortality at advanced ages. *Population and Development Review*, 34, 747–768
14. Kowald, A., & Kirkwood, T. B. L. (1993). Explaining fruit fly longevity. *Science*, 260, 1664–1665.
15. Vaupel, J. W. (1997). Trajectories of mortality at advanced ages. In K. H. Wachter & C. E. Finch (Eds.), *Between Zeus and the salmon: The biodemography of longevity* (pp. 17–37). Washington, DC: National Academy.
16. Wilmoth, J. R., & Lundstrom, H. (1996). Extreme longevity in five countries: Presentation of trends with special attention to issues of data quality. *European Journal of Population*, 12, 63–93.
17. J. Graunt, *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, London, First Edition, 1662; Fifth Edition (1676).
18. E. Halley, *An Estimate of the Degrees of Mortality of Mankind, Drawn from the Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslau, with an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives*, *Philosophical Transactions*, Volume 17, pp. 596-610 (1693).
19. J. Janssen and C. H. Skiadas, *Dynamic modelling of life-table data*, *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 11, 1, 35-49 (1995).
20. E. Schrödinger, *Zur theorie der fall- und steigversuche an teilchenn mit Brownsche bewegung*, *Phys. Zeit.*, 16, 289-295 (1915).

21. M. Smoluchowsky, *Phys. Zeit.* 16, 318 (1915).
22. A.J.F. Siegert, A.J.F. (1951). On the first passage time probability problem, *Physical Review*, 81, 617-623.
23. C. Jennen, Second-order approximation for Brownian first exit distributions, *Ann. Probab.* 13, 126-144 (1985).
24. H. R. Lerche, *Boundary crossing of Brownian motion*, Berlin, SpringerVerlag (1986).
25. C. Jennen, C. and H. R. Lerche, First exit densities of Brownian motion through one-sided moving boundaries, *Z. Wahrsch. uerw. Gebiete*, 55, 133-148 (1981).
26. C. H. Skiadas and C. Skiadas, A modeling approach to life table data, in *Recent Advances in Stochastic Modeling and Data Analysis*, C. H. Skiadas, Ed. (World Scientific, Singapore), 350–359 (2007).
27. C. H. Skiadas, C. Skiadas, Comparing the Gompertz Type Models with a First Passage Time Density Model, in *Advances in Data Analysis*, C. H. Skiadas Ed. (Springer/Birkhauser, Boston), 203-209 (2010).
28. C. H. Skiadas and C. Skiadas, *Chaotic Modelling and Simulation: Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms*, CRC / Taylor & Francis (2008).
29. B. Gompertz, On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on the mode of determining the value of life contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 115, 513-585 (1825).