

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.15>

Катерина САВЕЛЬЄВА, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0009-0005-6804-7520

e-mail: katerina1971s@gmail.com

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Ольга ДАШКО, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

ORCID ID: 0000-0002-4775-418X

e-mail: olga.dashko@gmail.com

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

ВЗАЄМОДІЯ ПОЗДОВЖНИХ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ХВИЛЬ

Теоретично досліджено взаємодію пружних плоских гармонічних хвиль у матеріалі, нелінійні властивості якого описано пружним потенціалом Мурнагана. Наведено огляд методів аналітичного дослідження хвильового процесу. Охарактеризовано методологію дослідження поперечних і поздовжніх хвиль. З використанням метода збурень для поперечних хвиль представлено результати дослідження одночасного поширення хвиль двох типів: вертикально та горизонтально поляризованих. Записано відповідні рівняння та проаналізовано спотворення відповідних хвильових профілів. Встановлено, що внаслідок нелінійної хвильової взаємодії поперечні хвилі поступово трансформуються у свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації відбувається перекачування енергії з потужної хвилі у слабку. Проведено числові дослідження з використанням значень ефективних сталих для ряду нанокомпозитних матеріалів. Для поздовжніх хвиль досліджено одночасне поширення хвиль з окремим урахуванням квадратичної та кубічної нелінійності. На основі кубічних рівнянь руху розкрито різні випадки взаємодії гармонічних хвиль. Поетапно використано метод повільно змінних амплітуд. Проаналізовано отримані рівняння, перші інтеграли цих рівнянь та запис закону збереження для чотирьох хвиль, що взаємодіють. Отримано вкорочені й повні еволюційні рівняння та записано співвідношення Менлі – Роу. Зазначений метод дослідження передбачає слабку змінюваність амплітуд і фаз хвиль протягом одного періоду коливального процесу. Сферою застосування такого хвильового дослідження є ряд задач нелінійної оптики та фізики плазми. Урахування кубічної нелінійності також необхідне для дослідження внутрішніх і поверхневих хвиль у рідині. Подібно до того, як у квадратично нелінійних середовищах у процесі трихвильової взаємодії можуть утворюватися хвильові триплети, так у кубічно-нелінійних середовищах відбувається чотирехвильова взаємодія, з утворенням за певних умов хвильових квадруплетів.

Ключові слова: гармонічна хвиля, кубічна нелінійність, плоска хвиля, квадруплет, чотирехвильова взаємодія.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 74B20, 74J30.

Вступ

Теорія хвиль з урахуванням квадратичної та кубічної нелінійності є базовою теорією для дослідження внутрішніх і поверхневих хвиль у твердих тілах та рідині. Актуальність дослідження процесів розповсюдження хвиль визначає множина задач нелінійної оптики та фізики плазми. Відомо, що вільні лінійнопружні хвилі не взаємодіють, тому й спотворення їхніх профілів є відсутнім. Проте навіть слабка нелінійність середовища породжує безліч ефектів взаємодії хвиль. Подібно до того, як у квадратично нелінійних середовищах під час трихвильової взаємодії можуть утворюватися хвильові триплети, так у кубічно-нелінійних середовищах відбувається чотирехвильова взаємодія, з утворенням за певних умов хвильових квадруплетів. Квадратичні ефекти досліджено й описано у роботі, де розглянуто кубічну нелінійність (Руцицький, & Цурпал, 1998).

Об'єкт дослідження – пружні плоскі хвилі у гіперпружному матеріалі. Предметом публікації є результати теоретичного дослідження нелінійного спотворення пружних плоских хвиль у процесі їхнього поширення.

Мета та завдання дослідження – теоретично дослідити нелінійне спотворення пружних плоских хвиль під час їхнього поширення в гіперпружному матеріалі, отримати відповідні хвильові рівняння та проаналізувати спотворення хвильових профілів.

Використовуються метод збурень для поперечних хвиль та метод повільно змінних амплітуд (метод ван дер Поля) для поздовжніх хвиль, що традиційно застосовують для вивчення хвильової взаємодії в нелінійній оптиці. Ці методи дослідження передбачають слабку змінюваність амплітуд і фаз хвиль протягом одного періоду коливального процесу.

1. Повна системи рівнянь для вивчення хвиль різної поляризації. Для опису матеріалу будемо користуватися потенціалом Мурнагана у відомому представленні (Achenbach, 1973; Руцицький, 1998; Cattani, & Rushchitsky, 2007).

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}\mu[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \\
 & + \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}A + B + \frac{1}{3}C\right)(u_{1,1})^3 + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{1,1}[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \\
 & + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + A + 2B)[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2]^2 + \\
 & + \frac{1}{8}(3A + 10B + 4C)(u_{1,1})^2[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2]^2,
 \end{aligned}$$

де λ , μ – пружні сталі Ляме (другого порядку), A , B , C – пружні сталі Мурнагана (третього порядку).

Квадратична нелінійність у записі потенціалу Мурнагана відносно тензора деформації дає можливість урахувати не тільки традиційну квадратичну, а й кубічну нелінійність визначальних співвідношень. Таке представлення пружного потенціалу, з урахуванням доданків четвертого порядку, дає змогу досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти в гіперпружному матеріалі (Rushchitsky, 2009; Гузь, А., Руцицький, & Гузь, І., 2010), зважаючи на повну

систему рівнянь для плоских хвиль, що складається із трьох взаємопов'язаних рівнянь. Залежність вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної x_1 та часу t дає можливість подальшого запису повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі Ox_1 .

Повна система складається із трьох взаємно пов'язаних рівнянь, кожне відносно поздовжньої, вертикально та горизонтально поляризованих поперечних хвиль. У разі окремого врахування тільки кубічної нелінійності (квадратичні ефекти взаємодії вважають відомими і докладно описаними (Рушицький, & Цурпал, 1998) нелінійні хвильові рівняння для поздовжніх хвиль, згідно з роботою Рушицького (Rushchitsky, 2009), мають вигляд

$$\begin{aligned} \rho u_{1,t} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = \\ = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}) + N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2 + N_4 (u_{2,11} u_{2,1} u_{1,1} + u_{3,11} u_{3,1} u_{1,1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Рівняння для горизонтально та вертикально поляризованих поперечних хвиль, відповідно, такі:

$$\begin{aligned} \rho u_{2,t} - \mu u_{2,11} = \\ = N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{1,11} u_{2,1}) + N_4 u_{2,11} (u_{2,1})^2 + N_5 u_{2,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{2,11} (u_{3,1})^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho u_{3,t} - \mu u_{3,11} = \\ = N_2 (u_{3,11} u_{2,1} + u_{1,11} u_{3,1}) + N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11} (u_{2,1})^2 + N_6 u_{3,11} (u_{1,1})^2. \end{aligned} \quad (3)$$

У цих рівняннях коефіцієнти дорівнюють:

$$\begin{aligned} N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + \frac{1}{2}A + B, \quad N_3 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + 6(A + 3B + C), \\ N_4 = \frac{1}{2}[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C], \quad N_5 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu + A + 2B), \quad N_6 = 3A + 10B + 4C, \end{aligned}$$

де A, B, C – пружні сталі Мурнагана.

2. Загальний підхід до вивчення взаємодії хвиль. Залежно від досліджуваних у задачі хвиль, окрему увагу приділено не тільки певним рівнянням системи (1)–(3), а й окремим доданкам із цих рівнянь. Подальше розв'язання визначальних рівнянь доцільно проводити саме для обраних, зважаючи на постановку задачі, елементів і додаткових умов.

Теоретично досліджуємо наступну задачу. На вході в середовище задаємо одну з поперечних (ТН- та ТВ-) хвиль і виявляємо генерування другої поперечної хвилі.

Дослідження взаємодії горизонтально та вертикально поляризованих поперечних хвиль відбувається на основі рівнянь (2) з урахуванням першого та третього доданків його правої частини та (3), а також третього та четвертого доданків. Розв'язання зазначених рівнянь і подальше дослідження проводиться за допомогою методу збурень на основі розв'язку відповідного лінійного рівняння, що утворюється в разі відкидання нелінійної правої частини – це класична гармонічна хвиля, що відповідає граничним умовам

$$u_2(x, 0) = u_3(x, 0) = 0; \quad u_2(0, t) = u_2^0 \cos \omega t; \quad u_3(x, 0) = u_3^0 \cos \omega t.$$

За одночасного поширення хвиль у нелінійному матеріалі відбувається спотворення їхніх профілів, про що свідчить аналітичний запис і числовий аналіз розв'язків. Унаслідок нелінійної хвильової взаємодії хвилі поступово трансформуються у свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації відбувається перехід енергії з потужної хвилі у слабку. Цей процес має назву перемикування хвиль з одинарної на потрібну частоту.

3. Аналіз поздовжніх хвиль за методом повільно змінних амплітуд. Укорочені й еволюційні рівняння для двоххвильової взаємодії. Загальна умова узгодженості частот, що забезпечує взаємодію хвиль, має такий вигляд:

$$\omega_4 = \pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3,$$

а відповідна умова узгодженості хвильових векторів – $k_4 = \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3$.

Початкове збудження поперечних хвиль під час розв'язання цієї задачі вважають відсутнім. У процесі аналізу поздовжніх хвиль на основі рівняння (1) з урахуванням першого доданку його правої частини, за методом повільно змінних амплітуд, будуюмо вкорочені й еволюційні рівняння для двоххвильової взаємодії поздовжніх хвиль. Було доведено, що унаслідок передавання енергії з початково потужніших хвиль у слабші, у межах наперед двоххвильової взаємодії, відбувається необмежене зростання амплітуд останніх. Для поздовжньої хвилі при цьому відбувається перемикування з початково потужної хвилі накачування (*pumping wave*) на початково слабку сигнальну хвилю (*signal wave*). Далі проводимо дослідження чотирихвильової взаємодії, яку спостерігаємо в межах узгодженості частот під час поширення в кубічно нелінійному середовищі.

Додатковою умовою є умова слабкої нелінійності середовища, що означає повільність зміни амплітуд у процесі поширення хвиль (це означає, що при поширенні хвилі за час, що дорівнює одному періоду, зміною амплітуди хвилі можна нехтувати). Ця умова дає можливість застосування метода повільно змінних амплітуд (метода ван дер Поля, що традиційно застосовують для вивчення хвильової взаємодії в нелінійній оптиці).

Для хвиль, поширення яких описується рівнянням (1), за умови узгодженості частот розв'язок представляється у вигляді чотирьох поздовжніх хвиль з різними амплітудами, хвильовими числами та частотами

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{n=1}^4 A_n(x_1) e^{i\varphi_n}, \quad \varphi_n = k_n x - \omega_n t; \\ \sum_{n=1}^4 k_n \frac{dA_n}{dx} e^{i\varphi_n} = \frac{-iN_3}{2(\lambda + 2\mu)} \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^4 k_k^2 k_m^2 A_k^2 A_m e^{i(2\varphi_k + \varphi_m)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таке представлення дає можливість подальшого аналізу міжхвильового передавання енергії.

За традиційною термінологією нелінійної оптики це рівняння є вкороченим рівнянням. Вкорочені рівняння розділяються з урахуванням умови частотного синхронізму.

Далі послідовно використовуємо умову синхронізму за хвильовими числами. З огляду на це записуємо еволюційні рівняння, для яких приймається гіпотеза про те, що ефект самогенерації кожної з хвиль є менш значним, ніж хвильовий взаємодіє.

Схему взаємодії хвиль із зазначеними загальними умовами узгодженості зазвичай подають у нелінійній оптиці як генерацію нової хвилі трьома різними хвилями накачування, або дві хвилі є хвилями накачування, одна хвиля сигнальна й одна холоста.

Починається розгляд схеми з дослідження двоххвильової взаємодії для двох протилежно спрямованих однаково потужних хвиль великої амплітуди. Поширюючись у нелінійному середовищі, хвилі взаємодіють. Ця взаємодія розглядається як двоххвильова взаємодія. Одночасно перпендикулярно до цих двох хвиль, уздовж осі апікат, задається слабкий сигнал малої амплітуди.

Слабкі хвилі аналізуємо в межах чотирьоххвильової взаємодії. Розгляд хвильової взаємодії відбувається на основі двох гіпотез. По-перше, вважаємо, що дві слабкі хвилі не впливають на дві потужні хвилі накачування, тому потужні хвилі можна розглядати незалежно.

По-друге, потужні хвилі накачування впливають на слабкі сигнальні, і в аналізі взаємодії сигнальних хвиль необхідно враховувати усі чотири хвилі, з яких дві хвилі накачування вважаємо вже відомими. Далі послідовно використовується умова синхронізму за хвильовими числами і з огляду на це записуємо еволюційні рівняння, для яких справджується гіпотеза, згідно з якою ефект самогенерації кожної із хвиль є менш значним, ніж хвильовий взаємодіє. У підсумку отримуємо еволюційні рівняння. Отже, у кубічно нелінійних середовищах у процесі чотирьоххвильової взаємодії за певних умов можуть утворюватися хвильові квадруплеті.

Дискусія і висновки

У роботі проаналізовано методологію аналітичного дослідження різних видів плоских хвиль у процесі їхнього поширення в матеріалі, властивості якого описуються пружним потенціалом Мурнагана. Отримано теоретичне підґрунтя для подальшого розв'язання багатьох задач хвильової взаємодії у кубічно нелінійному гіперпружному середовищі. Представлено спосіб моделювання процесів утворення хвильових квадруплетів у кубічно нелінійному пружному середовищі. Пропонована робота є продовженням досліджень Рушицького (Rushchitsky, 2005a; 2005b; Rushchitsky, 2009; Rushchitsky, 2014).

Внесок авторів: Катерина Савельєва – концептуалізація, методика; Ольга Дашко – аналіз джерел, підготовка огляду літератури.

Подяка, джерела фінансування. Ця робота фінансується в межах виконання науково дослідної роботи "Еволюція поодиноких хвиль різних початкових профілів в пружних матеріалах" (2024–2027 рр.) Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України.

Список використаних джерел

- Гузь, А. Н., Рушицький, Я. Я., & Гузь, І. А. (2010). *Введение в механику нанокмполитов*. Академперіодика.
 Рушицький, Я. Я., & Цурпал, С. І. (1998). *Хвилі в матеріалах з мікроструктурою*. Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка.
 Achenbach, J. D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland Publishing Company.
 Cattani, C., & Rushchitsky, J. J. (2007). *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. World Scientific.
 Rushchitsky J. J. (2005). Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state. *International Applied Mechanics*, 41(5), 701–712.
 Rushchitsky, J. J. (2005). Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution. *International Applied Mechanics*, 41(7), 825–833.
 Rushchitsky, J. J. (2005). Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetric and other states. *International Applied Mechanics*, 41(6), 831–840.
 Rushchitsky, J. J. (2009). On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites. *International Applied Mechanics*, 45(1), 73–93.
 Rushchitsky, J. J. (2014). *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Springer, 2014.
 Shen, Y. R. (1984). *The principles of nonlinear optics*. John Wiley.

References

- Achenbach, J. D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland Publishing Company.
 Cattani, C., & Rushchitsky, J. J. (2007). *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. World Scientific.
 Guz, A. N., Rushchitsky, J. J., & Guz, I. A. (2010). *Introduction to mechanics of nanocomposites*. Akademperiodika [in Ukrainian].
 Rushchitsky, J. J. & Tsurpal, S. I. (1998). *Waves in Materials with Microstructure*. S. P. Timoshenko Institute of Mechanics [in Russian].
 Rushchitsky, J. J. (2005). Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state. *International Applied Mechanics*, 41(5), 701–712.
 Rushchitsky, J. J. (2005). Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetric and other states. *International Applied Mechanics*, 41(6), 831–840.
 Rushchitsky, J. J. (2005). Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution. *International Applied Mechanics*, 41(7), 825–833.
 Rushchitsky, J. J. (2009). On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites. *International Applied Mechanics*, 45(1), 73–93.
 Rushchitsky, J. J. (2014). *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Springer.
 Shen, Y. R. (1984). *The principles of nonlinear optics*. John Wiley.

Отримано редакцією журналу / Received: 15.03.24
 Прорецензовано / Revised: 21.04.24
 Схвалено до друку / Accepted: 16.05.24

Katerina SAVELIEVA, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCIDID: 0009-0005-6804-7520
e-mail: katerina1971s@gmail.com
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Olha DASHKO, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-4775-418X
e-mail: olga.dashko@gmail.com
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

INTERACTION OF LONGITUDINAL NONLINEAR ELASTIC WAVES

The theoretical investigation of the interaction of elastic planar harmonic waves in a material whose nonlinear properties are described by the Murnaghan elastic potential is presented. A review of the methods for analytical study of the wave process is provided. The methodology for studying transverse and longitudinal waves is described. Using the perturbation method for transverse waves, results are presented for the simultaneous propagation of two types of waves: vertically and horizontally polarized. The corresponding equations are written, and the distortion of the respective wave profiles is analyzed. It has been established that because of the nonlinear wave interaction, the transverse waves gradually transform into their third harmonics. With different initial intensities of waves of different polarization, energy is transferred from the powerful wave to the weaker wave. Numerical studies were conducted using values of effective constants for a range of nanocomposite materials. For longitudinal waves, the simultaneous propagation of waves with separate consideration of quadratic and cubic nonlinearity was investigated. Various cases of harmonic wave interaction were studied based on cubic equations of motion. The method of slowly varying amplitudes was sequentially used. The obtained equations, the first integrals of these equations, and the conservation law for four interacting waves are analyzed. Truncated and full evolutionary equations were obtained, and the Manley-Rowe relations were recorded. This research method assumes weak variability of the amplitudes and phases of waves over one period of the oscillatory process. The field of application of such wave research includes several problems in nonlinear optics and plasma physics. Considering cubic nonlinearity is also necessary for the study of internal and surface waves in a fluid. Similarly to how wave triplets can form in quadratically nonlinear media through three-wave interaction, four-wave interaction occurs in cubically nonlinear media, with the formation of wave quadruplets under certain conditions.

Keywords: *harmonic wave, cubic nonlinearity, planar wave, quadruplet, four-wave interaction.*

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.