Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук і кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на тему:

Математичне моделювання односекторної економіки з утилізацією продуктів забруднення

студентки 4 курсу
кафедри МСС
Регіни НЕЧИПОРЕНКО

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент
Сергій ВОЛОЩУК

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 10 від 5 червня 2023 р.

Завідувач кафедри МСС __________ д.т.н., доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2023

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота бакалавра містить: 47 сторінок, 4 рисунки, 3 додатки, 8 інформаційних джерел.

Актуальність роботи. Питання утилізації є дуже важливим при розгляді еколого-економічної системи бо: обсяг багатьох ресурсів обмежений, а потрапивши в навколишнє середовище, вони зазвичай стають забруднювачами; відходи та вироби, що закінчили свій життєвий цикл, часто є дешевшим джерелом багатьох речовин і матеріалів, ніж природні джерела. Тому дослідження математичних моделей таких процесів є актуальними.

Мета роботи. Побудова та дослідження розв’язків динамічної моделі економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення виробничого та невиробничого характеру і контролю над забрудненням довкілля неутилізованими рештками.

Об’єкт дослідження. Односекторна економіка, яка для забезпечення суспільства виробляє єдиний основний продукт і здійснює утилізацію продукту забруднення (повну чи часткову), тобто створює чи виробляє продукт «чисте довкілля».

Предмет дослідження. Математична модель односекторної економіки, у якій врахована переробка відходів.

Ключові слова: математична модель, односекторна економіка, продукти забруднення, задача Коші, крайова задача, утилізація.

ЗМІСТ

ВСТУП

У кваліфікаційній роботі розглянуто математичну модель односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення в динаміці.

Сучасна економіка стикається зі складними викликами, пов'язаними зі зростанням населення, збільшенням обсягу виробництва та використання ресурсів. Це призводить до збільшення кількості відходів, що потребують утилізації. Забезпечення належної утилізації відходів є одним з найважливіших завдань сучасного світу для збереження екології довкілля. Зокрема, в Україні актуальність цього питання щороку зростає.

Утилізація продуктів забруднення має на меті доцільне використання відходів або залишків виробництва для отримання корисної продукції. Це дозволяє зменшити вплив відходів на навколишнє середовище та забезпечити екологічну сталість економічних систем. Для розуміння та оцінки динаміки економічних систем з урахуванням утилізації продуктів забруднення застосовуються математичні моделі.

Актуальність. З 1960 року населення планети збільшилось з 2,5 до 7,5 мільярдів. Водночас збільшилась кількість побутових та промислових відходів, які потребують утилізації. Правильна утилізація відходів є одним з найважливіших завдань сучасного цивілізованого світу, які треба негайно вирішувати для збереження екології довкілля. Зокрема з кожним роком зростає актуальність цього питання в нашій країні. Питання утилізації є дуже важливим при розгляді еколого-економічної системи бо: по-перше, обсяг багатьох ресурсів обмежений, а потрапивши в навколишнє середовище, вони зазвичай стають забруднювачами; по-друге, відходи та вироби, що закінчили свій життєвий цикл, часто є дешевшим джерелом багатьох речовин і матеріалів, ніж природні джерела. Тому дослідження математичних моделей таких процесів є актуальними.

Мета роботи – побудова та дослідження розв’язків динамічної моделі економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення виробничого та невиробничого характеру і контролю над забрудненням довкілля неутилізованими рештками.

Завданнями роботи є вивчення, доповнення і розв'язання задач, які можна поставити на основі математичної моделі односекторної економіки при утилізації продуктів забруднення; аналіз і візуалізація динаміки заощаджень працівника, заощаджень виробника, тарифу на утилізацію, ціни на основний продукт і забруднення навколишнього середовища.

Об'єктом дослідження є односекторна економіка, яка для забезпечення суспільства виробляє єдиний основний продукт і здійснює утилізацію продукту забруднення (повну чи часткову), тобто створює чи виробляє продукт «чисте довкілля».

Предметом дослідження є математична модель односекторної економіки, у якій врахована переробка відходів.

Методи дослідження. Методи математичного моделювання, чисельні методи знаходження розв'язку систем диференціальних рівнянь, графічний метод відображення результатів дослідження.

Практичне значення дослідження. У роботі висвітлений практичний бік використання математичних моделей у дослідженні динаміки еколого-економічних систем, оскільки результати такого дослідження дають можливість прогнозувати можливі сценарії розвитку економіки в умовах її екологізації, тобто з урахуванням умов функціонування економіки будь-якої цивілізованої країни світу, адже шлях на скорочення шкідливого впливу людини на роботу біосфери є одним з провідних завдань сучасних держав.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі зроблено викладки теоретичного матеріалу. У другому – результати практичних досліджень над задачею Коші до поставленої моделі. У третьому розділі проведена спроба реалізації крайової задачі, запропоновані варіанти оптимізації і модифікації моделі та її параметрів, а також представлено кілька можливих варіантів практичного застосування моделі.

РОЗДІЛ 1
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ З УРАХУВАННЯМ ПЕРЕРОБКИ ВІДХОДІВ

1.1. Поняття сектору односекторної та багатосекторної економіки

Для початку означимо, що розуміють під поняттям сектору. Сектор, в контексті економічної системи, може бути описаний об'єктивно і суб'єктивно. Об'єктивно, сектор є відносно автономним елементом всієї економічної структури. Сектором вважається група економічних одиниць, що займаються однорідним або взаємозалежним видом діяльності, виробляючи товари або послуги. Компанії в межах сектору мають схожість в характері виробничої діяльності.

На макроекономічному рівні, сектори можуть включати такі широкі галузі як промисловість, сільське господарство, туризм та інші. Водночас, можливе і більш деталізоване секторальне поділення. Це впливає на зручність проведення аналізу і залежить від конкретної задачі.

Хоча сектори об'єктивно існують, розбивка всієї економічної системи на окремі сектори в значній мірі суб'єктивна і залежить від контексту дослідження. Наприклад, для аналізу економічного статусу країни, часто використовується поняття валового внутрішнього продукту (ВВП), де вся економіка розглядається як один сектор. Цей інтегральний підхід спрощує аналіз, але не завжди дозволяє враховувати деякі особливості внутрішньої динаміки.

Для більш глибокого дослідження економічних процесів використовується поділ на багатосекторний формат. Отже, односекторна модель економіки є ефективною тільки в рамках визначених завдань, де більш детальний аналіз не є обов'язковим.

Ідентифікація і дослідження різних секторів економіки важливі для економістів, оскільки це дозволяє проводити галузевий аналіз, що, в свою чергу, надає важливу інформацію про тенденції економічного розвитку - розширення або спад економічних сфер. Еколого-економічна система у своїй структурі має дві великі підсистеми: екологічну та економічну. До того ж, навколишнє середовище, як сукупність природних і штучних систем, є не лише місцем існування людини та об'єктом її трудової діяльності, але одночасно й результатом такої діяльності [1]. Навколишнє природне середовище є сукупністю екологічних систем, які перебувають у стані внутрішньої рівноваги і спроможні її підтримувати. Щоправда за останні сторіччя безпечна поведінка людини у виробництві, а також байдужість до проблеми зменшення забруднення як промисловими, так і побутовими відходами призвела до того, що на даний час світ стоїть на порозі незворотної екологічної кризи. Для того, щоб їй запобігти, слід уважніше ставитися до діяльності такої еколого-економічної системи, враховуючи при цьому утилізацію продуктів забруднення.

Утилізація відходів виробництва становить важливе завдання для підприємств та заводів, оскільки неутилізовані відходи потрапляють в навколишнє середовище, включаючи повітря, ґрунт і водойми. Це екологічна проблема, яка не може бути ігнорована, оскільки може привести до серйозних наслідків.

З плином часу обсяг відходів зростає, включаючи рідкі, тверді та газоподібні відходи, що виходять з виробництв і потрапляють в атмосферу. Це наносить непоправну шкоду планеті та людству. Окрім утилізації різних видів відходів, також необхідна утилізація застарілого обладнання, яке більше не може бути використане.

Враховуючи вищезазначене, підприємства, фабрики та заводи постійно зосереджують свою увагу на розв'язанні проблеми утилізації відходів, а також вдосконаленні процесів утилізації. Це передбачає використання технологій та методів, які забезпечують безпечну та ефективну утилізацію різних видів відходів, зменшуючи їх негативний вплив на навколишнє середовище. Крім того, утилізація застарілого обладнання проводиться з метою запобігання його неправильному використанню та подальшому забрудненню.

Утилізація відходів стає необхідним кроком у збереженні природних ресурсів та забезпеченні сталого розвитку. Ефективна утилізація сприяє зниженню забруднення довкілля, покращенню якості повітря, води і ґрунту, а також зменшенню негативного впливу на здоров'я людей і екосистему.

Під утилізацією продуктів забруднення розуміють доцільне використання відходів або залишків виробництва для отримання корисної продукції. У вирішенні цього питання застосовується математичне моделювання і дослідження отриманих математичних моделей, яке дає змогу отримувати характеристики реального економічного об’єкта чи системи. У режимі комп’ютерної імітації математичне моделювання дозволяє перевіряти різні сценарії розвитку еколого-економічних систем, аналізувати можливі допустимі траєкторії та наслідки соціально-економічного та екологічного характеру, що відіграє надзвичайно важливу роль при розв’язанні проблем взаємодії економічної, екологічної та соціальної підсистем економіки. У роботі розглянуті деякі моделі для односекторної економіки, а також показані графіки основних динамічних змінних, за якими доцільно спостерігати при її функціонуванні.

1.2. Модель односекторної економіки, яка описує утилізацію продуктів забруднення

Будемо розглядати роботу односекторної економіки, де випускається єдиний вид продукції – продукт виробництва (ПВ). Водночас відбувається утилізація продуктів забруднення (ПЗ), або створюються одиниця чистого довкілля (ОЧД).

Забруднення складається із забруднення виробничого характеру (ЗВХ), та із звичайного господарського забруднення, або з забруднення невиробничого характеру (ЗНХ). Нехай у економіці задіяно M власників підприємств (тобто виробників ПВ) і N працівників.

Підкреслимо, що ця «одиничність» виду продукції є відносною. Насправді, найчастіше, видів продукції досить багато, але з деяких причин, зручно оцінювати ефективність діяльності економічної системи єдиним показником – сумарною вартістю продукції.

Наша модель буде базуватися на рівнянні Леонтьева для односекторної економіки:

$$(1 - a) \cdot x = y,$$

де

x – сумарна вартість продукції за деякий проміжок часу (місяць, квартал, рік);

a – параметр, що вказує частку вартості, яка залишається в системі з метою поновлення її роботи (витрати на закупівлю сировини, амортизаційні витрати і т.п.);

y – вільний залишок для використання поза системою, тобто на невиробничі потреби.

Це рівняння при заданому виробничому коефіцієнті a дозволяє чи знаходити залишок y по заданому x чи навпаки, обсяг (вартість) продукції x, що має бути вироблений для досягнення заданого залишку y.

Опишемо односекторну економіку з урахуванням наступних параметрів:

x_m – заощадження виробника, $m \epsilon [1, M]$;

y_n – заощадження працівника, $n \epsilon [1, N]$;

p – ціна ОП (основного продукту) ;

c – собівартість ОП ;

r – тариф на утилізацію забруднення (англ. “rate”);

w – обсяг забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ ;

pp – купівельна спроможність (англ. “purchase in power”);

pc – виробнича спроможність (англ. “production capacity”);

dc –утилізаційна спроможність (англ. “disposal capacity”);

D – функція попиту (англ. “demand”) – $D(pp)$;

S – функція випуску, або ж пропозиції, ПВ (англ. “seply”) – $S(pc)$;

U – функція утилізації ПВ (англ. “utilization”) – $U(dc)$, а також її можна вважати функцією випуску;

DU – обсяг попиту на утилізацію (зрозуміло, що $DU = DU_{\text{ЗНХ}}+DU_{\text{ЗВХ}}$);

SU обсяг пропозиції на утилізацію ($SU = SU_{\text{ЗНХ}}+SU_{\text{ЗВХ}}$) ;

Розглядається модель для 5 динамічних змінних: x_m, x_n, p, r і w.

Конкретизуємо як будуть обрані аргументи функцій $x_m(\cdot)$, $x_n(\cdot)$, $p(\cdot)$, $r(\cdot)$, $w(\cdot)$ з урахуванням наступних відомих параметрів для конкретної односекторної економіки:

α_m – частка заощаджень власника на придбання ПВ (0≤ α_m ≤1);

α_n – частка заощаджень працівника на придбання ПВ (0≤ α_n ≤1)

(звідси надалі $pp_m = \frac{\alpha_m \cdot x_m}{p}$ і $pp_n = \frac{\alpha_n \cdot y_n}{p}$);

β – частка заощаджень власника на виготовлення ПВ (0≤ α_n ≤1)

(тоді $pc = \frac{\beta \cdot x_m}{c}$, тобто обсяг випуску ОП обраховується як $S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right)$);

γ – частка заощаджень власника на придбання ОЧД

(тоді $dc = \frac{\gamma \cdot w}{r}$, тобто функція утилізації обраховується як $U\left(\frac{\gamma \cdot w}{r}\right)$);

λ_{DU} – коефіцієнт, що формує попит на утилізацію ЗНХ відповідно до відношення обсягу виробленого ПВ до нього;

λ – коефіцієнт, що відображає обсяг цього попиту з урахуванням політики власників підприємства та регулювання державними установами запиту на переробку

(звідси надалі $DU_{\text{ЗВХ}} = \lambda \cdot S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right)$);

$SU_{\text{ЗНХ}}$ і $DU_{\text{ЗНХ}}$ вважаємо за константи ($DU_{\text{ЗНХ}} \leq SU_{\text{ЗНХ}}$);

μ_β і μ_γ – частки доданої вартості, що витрачається на заробітну плату працівника під час випуску ПВ і ОЧД відповідно. Тоді величина

$p \cdot \mu_\beta \cdot S(pc)$ у грошових одиницях є заробітною платою працівника, яку він отримує від випуску ПВ, а $r \cdot \mu_\gamma \cdot U(dc)$ – від утилізації ПЗ (тобто від випуску ОЧД);

ξ – стала ставка податку на дохід працівника.

Зауважимо, що на вказані вище параметри встановлені обмеження: $0 \le \alpha_m \le 1$, $0 \le \alpha_n \le 1$, $0 \le \beta \le 1$, $0 \le \gamma \le 1$, $\alpha_m + \beta + \gamma \le 1$, $0 \le \lambda_{DU} \le 1, 0 \le \lambda \le 1, 0 \le \mu_\beta \le 1, 0 \le \mu_\gamma \le 1.$

Динаміка заощаджень працівника описується рівнянням:

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{M\left[p \cdot \mu_\beta \cdot S(pc) + r \cdot \mu_\gamma \cdot U(dc)\right]}{N} \cdot (1 - \xi) - p \cdot D(\,pp_n)$$

або, якщо використати ті факти, що $pc = \frac{\beta \cdot x_m}{c}$, $dc = \frac{\gamma \cdot w}{r}$, $pp_n = \frac{\alpha_n \cdot y_n}{p}$, отримаємо

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{M\left[p \cdot \mu_\beta \cdot S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right) + r \cdot \mu_\gamma \cdot U\left(\frac{\gamma \cdot w}{r}\right)\right]}{N}(1 - \xi) - p\,D\left(\frac{\alpha_n \cdot y_n}{p}\right). \quad (1.1)$$

Прибуток виробника залежить від:

частки забезпечення попиту на ОП усіх виробників і працівників, яка обчислюється за формулою: $P = \frac{[M \cdot D(\,pp_m) + N \cdot D(\,pp_n)]}{M}$;

частки забезпечення попиту у незадіяних у виробництві члені суспільства, яку можна поки що оцінити як $k \cdot P$, де k – коефіцієнт попиту;

забезпечення попиту суспільства на ОЧД, тобто на величину $r \cdot \frac{DU_{\text{знх}}}{M}$.

Отже операційний прибуток виробника визначається такою сумою:

$P + k \cdot P + r \cdot \frac{DU_{\text{знх}}}{M}$.

Щоб знайти чистий прибуток слід ще визначити його витрати і врахувати рівень оподаткування.

Витрати власника можна поділити на 4 основні категорії:

- вартість особистого споживання продукту – $p \cdot D(\,pp_m)$;

- фонд заробітної плати працівників, що включає у себе податок на нього (позначимо $\hat{\xi}$) і формалізується як $\frac{(1+\hat{\xi})}{M} \cdot M\left[p \cdot \mu_\beta \cdot S(pc) + r \cdot \mu_\gamma \cdot U(dc)\right]$;
- організаційні потреби, які виникають для створення додаткової вартості при виготовленні ПВ, і податок на неї;
- організаційні потреби, які виникають для створення додаткової вартості при виготовленні ОЧД, і податок на неї;

Витрати власника третьої і четвертої категорії можна записати у вигляді $p \cdot \delta_\beta \cdot S(pc)$ і $r \cdot \delta_\gamma \cdot U(dc)$, де δ_β і δ_γ є певними коефіцієнтами, що відображають суму відповідної частки доданої вартості (від 0 до 1) та ставки податків на виробництво ВП і ОЧД відповідно.

Отже, рівняння динаміки заощаджень власника має наступний вигляд:

$$\frac{dx_m}{dt} = P + k \cdot P + r\frac{DU_{\text{ЗНХ}}}{M} - p \cdot D(pp_m) -$$
$$-\frac{(1+\hat{\xi})}{M} M\left[p\mu_\beta S(pc) + r\mu_\gamma U(dc)\right] - p\delta_\beta S(pc) - r\delta_\gamma U(dc),$$

або з урахуванням визначення $P = \frac{[M \cdot D(pp_m) + N \cdot D(pp_n)]}{M}$, $pc = \frac{\beta \cdot x_m}{c}$, $dc = \frac{\gamma \cdot w}{r}$ і $pp_m = \frac{\alpha_m \cdot x_m}{p}$, що наведенні вище, отримаємо формулу:

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\left[M\, D\left(\frac{\alpha_m x_m}{p}\right) + N\, D\left(\frac{\alpha_n y_n}{p}\right)\right](1+k)}{M} + r\frac{DU_{\text{ЗНХ}}}{M} - pD\left(\frac{\alpha_m x_m}{p}\right) -$$
$$-\frac{(1+\hat{\xi})}{M} M\left[p\mu_\beta S(pc) + r\mu_\gamma U(dc)\right] - p\delta_\beta S\left(\frac{\beta x_m}{c}\right) - r\delta_\gamma U\left(\frac{\gamma w}{r}\right). \qquad (1.2)$$

Ціна на продукт залежить від різниці попиту і пропозиції на ПВ. Також при обчисленні ціни будемо брати до уваги таке явище економіки, як інерція. Це науковий термін, який описує тенденцію фізичного об’єкта чинити опір змінам. У маркетингу це слово використовувалося для опису підприємств, які не адаптують або не змінюють свої маркетингові стратегії для задоволення зростаючих проблем споживачів, змін на ринку чи економічних ситуацій. Позначимо за θ_β – коефіцієнт інерційності ринку ПВ. Рівняння динаміки ціни має наступний вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = \theta_\beta \cdot M[(1+k)P - S(pc)],$$

або, враховуючи позначення $P = \frac{[M \cdot D(pp_m) + N \cdot D(pp_n)]}{M}$ і $pc = \frac{\beta \cdot x_m}{c}$, отримаємо:

$$\frac{dp}{dt} = \theta_\beta \cdot M[(1+k)\frac{\left[M \cdot D\left(\frac{\alpha_m \cdot x_m}{p}\right) + N \cdot D\left(\frac{\alpha_n \cdot y_n}{p}\right)\right]}{M} - S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right)]. \quad (1.3)$$

Щодо зміни у тарифі на утилізацію, то вони залежать від надлишкового попиту на ОЧД. Зміна тарифу вираховується як різниця між обсягом попиту на утилізацію ЗВХ та ЗНХ на підприємствах і реальним обсягом утилізованого забруднення. До того ж враховується так званий коефіцієнт регулювання тарифу – θ_γ. Зміна тарифу на утилізацію з часом описується наступним рівнянням:

$$\frac{dr}{dt} = \theta_\gamma \cdot [DU_{\text{ЗНХ}} + M \cdot DU_{\text{ЗВХ}} - S(pc)],$$

або, враховуючи, що $pc = \frac{\beta \cdot x_m}{c}$ і $DU_{\text{ЗВХ}} = \lambda \cdot S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right)$), перепишемо це рівняння як:

$$\frac{dr}{dt} = \theta_\gamma \cdot \left[DU_{\text{ЗНХ}} + M \cdot \lambda \cdot S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right) - S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right)\right]. \quad (1.4)$$

Для завершення формування стандартної математичної моделі односекторної економіки з урахуванням утилізації забруднення, залишилося записати рівняння динаміки обсягу забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ. Очевидно, що ці залишки попадають у навколишнє середовище, вони залишаються на полях, скидаються у водойми, попадають у атмосферу при спалюванні. Зазначимо той факт, що біосфера має здатність до певного самоочищення, яку ми, при формуванні рівняння, зобразимо за допомогою коефіцієнта природного зменшення забруднення φ $(0 \leq \varphi \leq 1)$. Тому приріст забруднення навколишнього середовища неутилізованими рештками фактично дорівнює різниці між обсягами створеного забруднення та обсягами утилізованого забруднення:

$$\frac{dw}{dt} = M \cdot \lambda_{DU} \cdot S(pc) + SU_{\text{ЗНХ}} - M \cdot U(dc) - \varphi \cdot w,$$

або, аналогічно до попередніх випадків, скористуємося тими фактами, що $pc = \frac{\beta \cdot x_m}{c}$ і $dc = \frac{\gamma \cdot w}{r}$:

$$\frac{dw}{dt} = M \cdot \lambda_{DU} \cdot S\left(\frac{\beta \cdot x_m}{c}\right) + SU_{\text{ЗНХ}} - M \cdot U\left(\frac{\gamma \cdot w}{r}\right) - \varphi \cdot w\,. \qquad (1.5)$$

Рівняння (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), складають собою математичну модель односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення.

1.3. Постановки задач для моделі односекторної економіки, де враховується переробка відходів

До описаної у попередньому пункті економічно-екологічної моделі можна поставити наступні задачі:

1. Задача Коші. Це задача з визначеною початковою умовою. Вона формулюється таким чином: необхідно знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), яка у заданий початковий момент часу t_0 приймає задане значення. Тобто припустимо, що нам відомі значення цих функцій у початковий момент часу t_0, а саме:

$$\begin{cases} x_m(t_0) = x_m^{(0)}, \qquad y_n(t_0) = y_n^{(0)} \\ p(t_0) = p^{(0)}, \qquad r(t_0) = r^{(0)}, \\ w(t_0) = w^{(0)}. \end{cases} \qquad (1.6)$$

2. Задача Коші з початковими умовами, які задані сегментами. Ця задача схожа на класичну задачу Коші, але одна з функцій може набувати у початковий момент t_0 довільного значення з заданого сегменту. Наприклад, значення $w(t_0)$ знаходиться на відомому відрізку $[w_1, w_2]$.

$$\begin{cases} x_m(t_0) = x_m^{(0)},\ y_n(t_0) = y_n^{(0)} \\ p(t_0) = p^{(0)},\ r(t_0) = r^{(0)}, \\ w(t_0) \in \left[{w_1}^{(0)}, {w_2}^{(0)}\right]. \end{cases} \qquad (1.7)$$

3. Крайова задача. Це задача, в якій крім початкової умови для функцій, задається також їх значення у кінцевий момент часу. Наприклад, якщо для системи рівнянь (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) відомі значення функцій, динаміка яких досліджується, у початковий момент часу t_0, а також у кінцевий момент часу T, то крайові умови будуть такими:

$$\begin{cases} x_m(t_0) = x_m^{(0)},\ x_m(T) = x_m^{(T)}, \\ y_n(t_0) = y_n^{(0)},\ y_n(\mathrm{T}) = y_n^{(T)}, \\ p(t_0) = p^{(0)},\ p(\mathrm{T}) = p^{(T)} \\ r(t_0) = r^{(0)},\ r(\mathrm{T}) = r^{(T)} \\ w(t_0) = w^{(0)}, \\ w(\mathrm{T}) = w^{(T)}. \end{cases} \tag{1.8}$$

РОЗДІЛ 2
ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ МОДЕЛІ ОДНОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ

2.1. Задача Коші

Задача Коші, яка описана у пункті 1.3 і складається з рівнянь (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) та системи початкових умов (1.6), являється базовою задачею для дослідження односекторної економіки з утилізацією продуктів забруднень. Змінюючи початкові умови, ми можемо дослідити поведінку системи і адаптувати її до конкретних економічних і екологічних контекстів.

Наведемо результати декількох експериментів.

Експеримент 1.

Нехай:

$S = (1 - spoilage) \times pc$, де $spoilage$ – частка браку при виробництві;

$D(pp) = pp$, тобто попит вважаємо тотожнім купівельній спроможності;

$U(dc) = dc$, тобто утилізацію вважаємо тотожною утилізаційній спроможності.

Задача поставлена так, що нам відомі параметри моделі, і вони такі:

M = 500,

N = 1300,

α_n = 0.4,

α_m = 0.2,

β = 0.15,

γ =0.1,

λ_{DU} = 0.11,

λ = 0.4321,

$SU_{\text{ЗНХ}}$ = 6,

$DU_{\text{ЗНХ}}$ = 5,

μ_β = 0.77777,

μ_γ = 0.555555,

ξ = 0.32,

k = 0.44,

$\hat{\xi}$ = 0.5,

δ_β = 0.77777,

δ_γ = 0.555555,

θ_β =0.2,

θ_γ = 0.22222,

φ = 0.33333.

Крім того, маємо наступні значення змінних у момент часу $t_0 = 0$:

$y_n^{(0)}$ = 100,

$x_m^{(0)}$= 300,

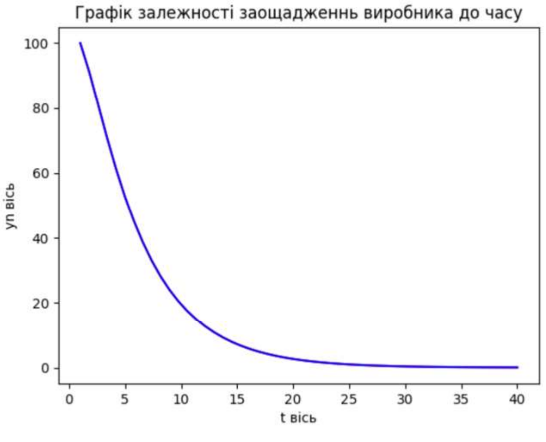
$p^{(0)}$= 1.2 × c, де c = 10000 ,

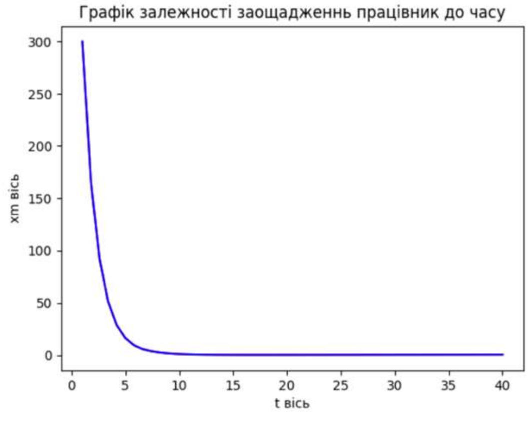
$r^{(0)}$= 3,

$w^{(0)} \in [0.3, 3]$.

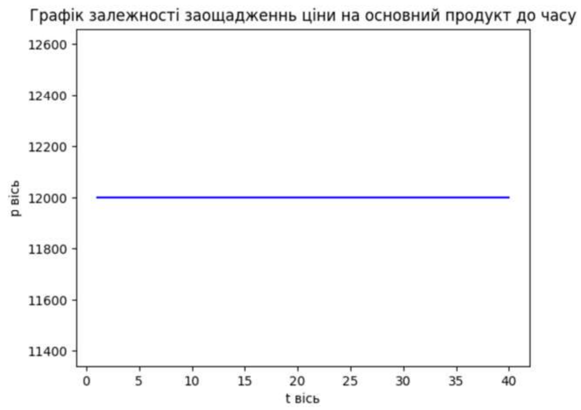
Для розв’язання задачі використаємо бібліотеку SciPy мови програмування Python, зокрема функцію odeint(). Ця функція призначена для вирішення систем звичайних диференціальних рівнянь чисельними методами**.**

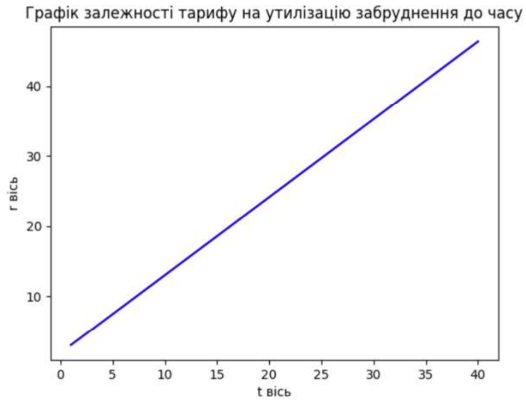
Представленні нижче графіки ілюструють динаміку функцій $x_m(\cdot)$, $y_n(\cdot), p(\cdot)$, r(·), $w(\cdot)$, визначених від заданого початкового моменту t_0 до моменту T = 40.



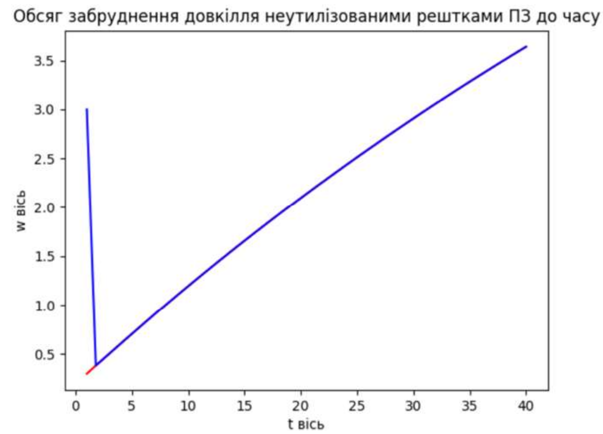


а) б)





в) г)



д)

Рисунок 2.1 – Графіки динаміки: а) заощаджень виробника; б) заощаджень працівника; в) ціни на основний продукт; г) утилізації зображення; д) забруднення довкілля.

З цієї візуалізації видно, що при такому розподілі ресурсів капітал як виробника, так і працівника суттєво прямує до нуля. Ціна на ОП при таких даних є сталою. Графік тарифу на утилізацію представляє собою пряму пропорційність. Кількість забруднення спочатку різко зменшується, після чого лінійно зростає. Ця поведінка функцій є наслідком неправильного вибору початкових умов, а саме невідповідності вартості продукції до купівельної спроможності населення.

2.2. Задача Коші з початковою умовою, заданою сегментом

На основі моделі (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) можна сформулювати задачу Коші з визначеним на сегменті значенням однієї з функцій у початковий момент часу. Задача полягає в тому, щоб визначити множину можливих станів системи, до яких вона може перейти із початкового стану за допомогою доступних дій.

У випадку даної моделі, початковий стан можна визначити, наприклад, як початкові значення обсягу продукції x_m, обсягу заощаджень працівника y_n, ціни продукту p, тарифу на утилізацію r і обсягу забруднення w, який належить деякому відомому сегменту. Задача полягатиме в тому, щоб визначити множину можливих значень цих функцій за допомогою системи рівнянь, які описують динаміку системи.

Для розв'язання задачі можна використовувати числові методи, такі як чисельне інтегрування диференціальних рівнянь або чисельне розв'язання системи рівнянь. Після обчислення значень змінних на певних проміжках часу можна визначити множину можливих станів системи.

Ця задача може бути корисною для аналізу і прогнозування поведінки системи при різних сценаріях початкового забруднення, а також для визначення оптимальних стратегій управління системою з метою досягнення певних цілей.

Проілюструємо це на прикладі заданого на проміжку початкового значення w, яке відповідає обсягу забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ, і є одним з ключових параметрів цієї моделі.

Для вирішення поставленої задачі ми звернемося до можливостей бібліотеки SciPy, що є частиною програмувального середовища Python, зосереджуючись на використанні функції odeint(). Остання, за своїм призначенням, придатна для розробки рішень систем звичайних диференціальних рівнянь з використанням чисельних методів.

Експеримент 2.

Нехай:

$S = 0.1 \times pc$,

$D = 0.1 \times pp$,

$U(dc) = 0.1 \times dc$.

Задача поставлена так, що нам відомі параметри моделі, і вони такі:

M = 520,

N = 115,

α_n = 0.2,

α_m = 0.2,

β = 0.15,

γ =0.1,

λ_{DU} = 0.11,

λ = 0.4321,

$SU_{\text{ЗНХ}}$ = 6,

$DU_{\text{ЗНХ}}$ = 5,

μ_β = 0.77777,

μ_γ = 0.555555,

ξ = 0.32,

k = 0.44,

$\hat{\xi}$ = 0.5,

δ_β = 0.77777,

δ_γ = 0.555555,

θ_β =0.2,

θ_γ = 0.22222,

φ = 0.33333.

Крім того, маємо наступні значення змінних у момент часу $t_0 = 0$:

$y_n^{(0)}$ = 100,

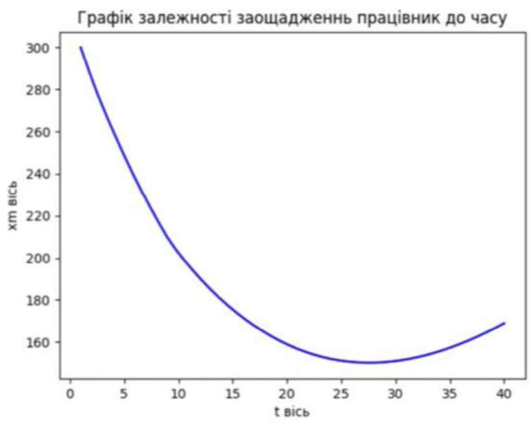
$x_m^{(0)}$= 300,

$p^{(0)}$= 1.2 × с, де c = 100,

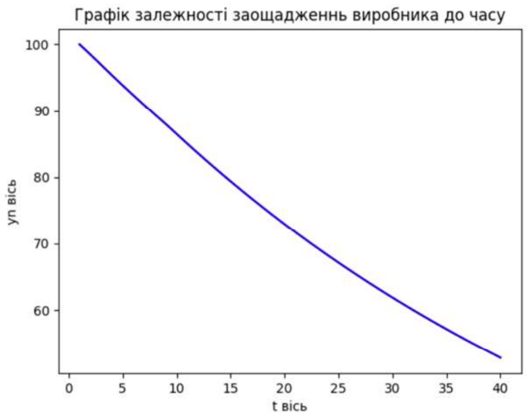
$r^{(0)}$= 3,

$w^{(0)} \in [1, 10]$.

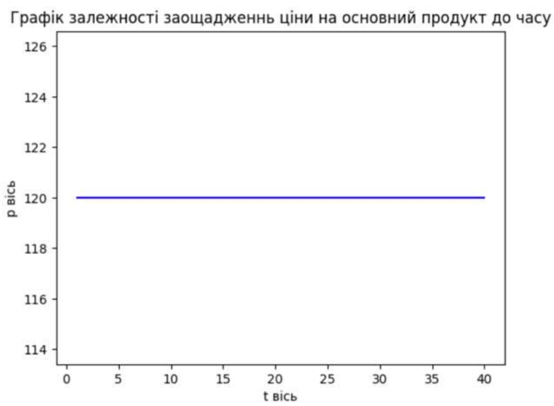
Представленні нижче графіки ілюструють динаміку функцій $x_m(\cdot)$, $y_n(\cdot), p(\cdot)$, r(·), $w(\cdot)$ від заданого початкового момент t_0 до моменту T = 40. Червоний колір на графіку відповідає проведенню експерименту при $w^{(0)} = 1$, а синій колір – при $w^{(0)} = 10$. На більшості з графіків ці лінії тотожні, тому ілюструється лише один з кольорів.



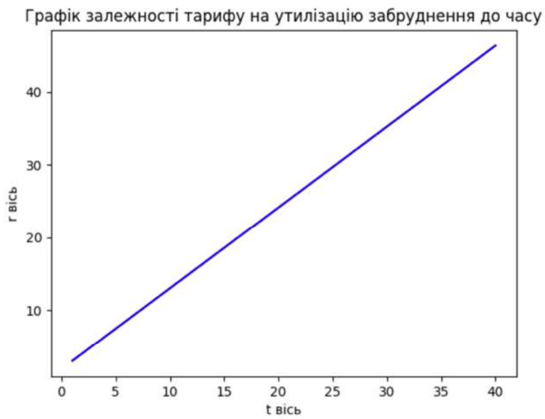
а)



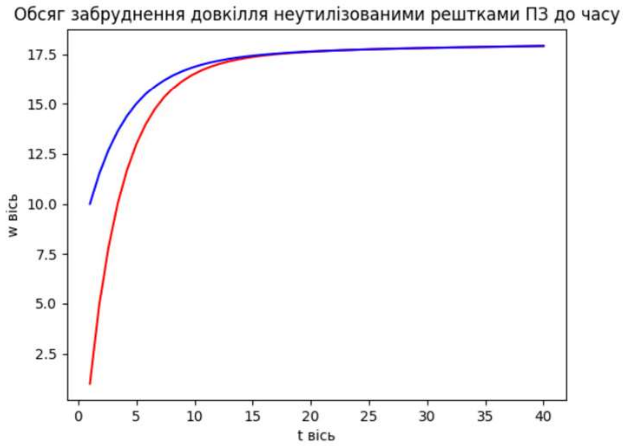
б)



в)



г)



д)

Рисунок 2.2 – Графіки динаміки: а) заощаджень виробника; б) заощаджень працівника; в) ціни на основний продукт; г) утилізації зображення; д) забруднення довкілля.

З графічного представлення результатів цього експерименту слідує, що при такій постановці задачі зміна w у межах певного визначеного відрізку не впливатиме суттєво на динаміку функцій $x_m(\cdot)$, $y_n(\cdot), p(\cdot)$, r$(\cdot)$. Помітний вплив спостерігається на функцію $w(\cdot)$.

Проведемо ще один експеримент для задачі Коші з початковою умовою, заданою сегментом.

Експеримент 3.

Нехай:

$S = (1 - spoilage) \times pc$, де $spoilage$ – частка браку при виробництві;

$D(pp) = pp$, тобто попит вважаємо тотожнім купівельній спроможності;

$U(dc) = dc$, тобто утилізацію вважаємо тотожною утилізаційній спроможності.

Задача поставлена так, що нам відомі параметри моделі, і вони такі:

M = 10,

N = 300,

α_n = 0.6,

α_m = 0.2,

β = 0.6,

γ =0.2,

λ_{DU} = 0.11,

λ = 0.4321,

$SU_{\text{ЗНХ}}$ = 6,

$DU_{\text{ЗНХ}}$ = 5,

μ_{β} = 0.15,

μ_{γ} = 0.2,

ξ = 0.32,

k = 0.8,

$\hat{\xi}$ = 0.5,

δ_{β} = 0.77777,

δ_{γ} = 0.555555,

θ_{β} =0.2,

θ_{γ} = 0.22222,

φ = 0.33333.

Крім того, маємо наступні значення змінних у момент часу $t_0 = 0$:

$y_n^{(0)}$ = 2*10**5,

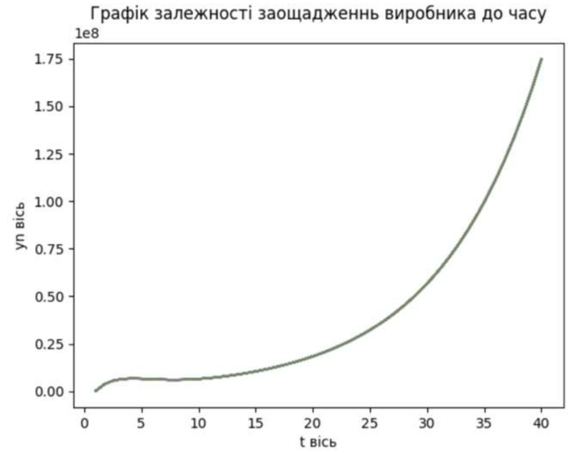
$x_m^{(0)}$= 5*10**9,

$p^{(0)}$= $1.05 \times$ с, де c = 3,

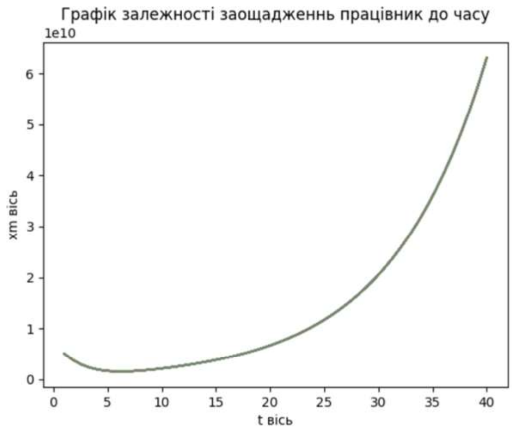
$r^{(0)}$= 12,

$w^{(0)} \in [0, 12]$.

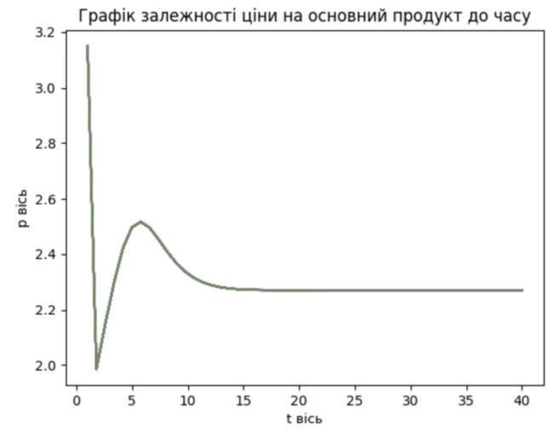
Наступні графіки показують зміни функцій $x_m(\cdot)$, $y_n(\cdot), p(\cdot)$, r(·), $w(\cdot)$ по часу.


Графік залежності заощадженнь виробника до часу
1e8
yn вісь
t вісь

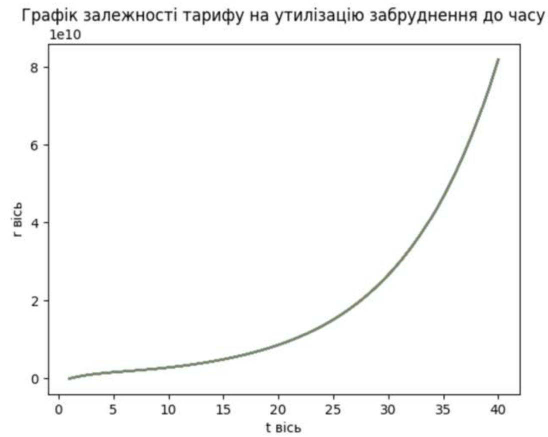
а)


Графік залежності заощадженнь працівник до часу
1e10
xm вісь
t вісь

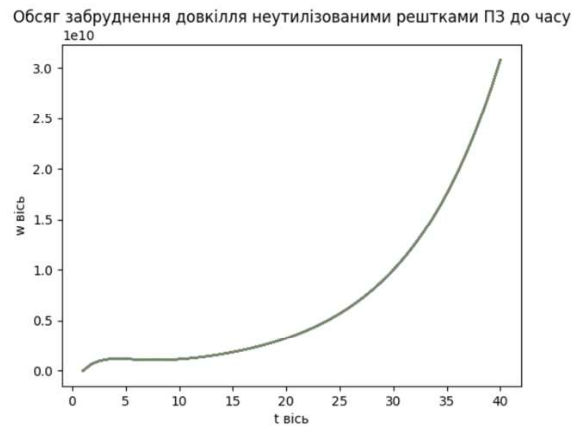
б)


Графік залежності ціни на основний продукт до часу
p вісь
t вісь

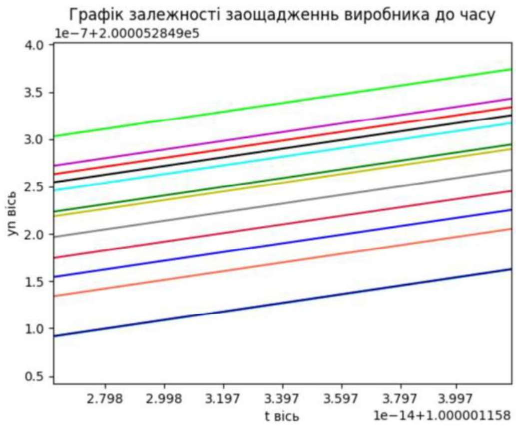
в)


Графік залежності тарифу на утилізацію забруднення до часу
1e10
r вісь
t вісь

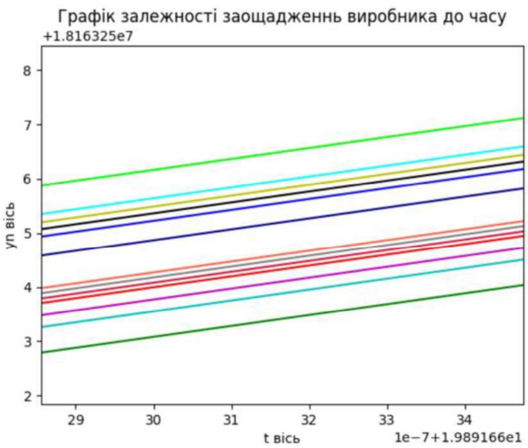
г)

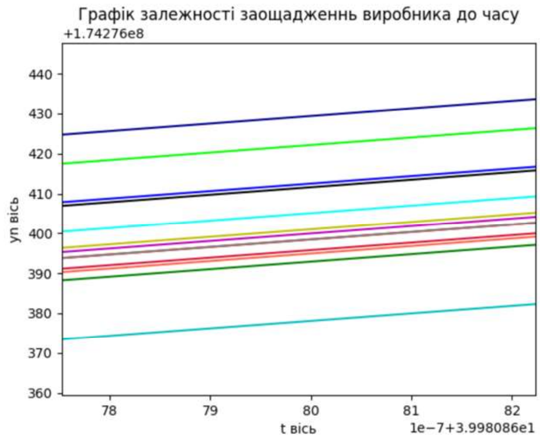

Обсяг забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ до часу
1e10
w вісь
t вісь

д)

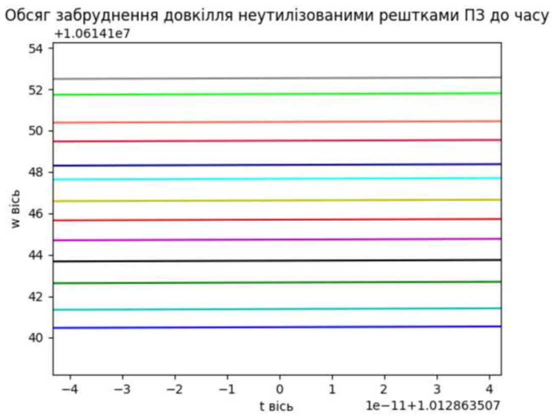

Графік залежності заощадженнь виробника до часу
1e−7+2.000052849e5
yn вісь
t вісь
1e−14+1.000001158

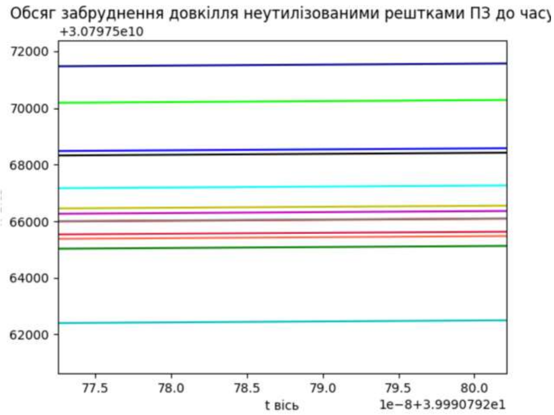
е)





ж) з)





к) л)

Рисунок 2.3 – Графіки динаміки: а) заощаджень виробника; б) заощаджень працівника; в) ціни на основний продукт; г) утилізації зображення; д) забруднення довкілля; е), ж), з) – наближений вигляд графіку а) на початку спостережень, під час спостережень і у кінці відповідно; к), л) наближений вигляд графіку д) на початку спостережень у кінці відповідно.

З цих графіків можна зробити висновки, що маючи достатній початковий капітал на момент початку спостережень, виробник і працівник збільшили б свої доходи у 17 і 12 разів відповідно. З іншого боку, тариф на утилізацію і, що більш суттєво, кількість забруднення навколишнього середовища неутилізованим сміттям також істотно збільшиться. Це ілюструє, що при таких обмеженнях, які були задані при проведені експерименту, контроль за екологічною складовою виробництва не працює.

При збільшенні масштабу видно, що збільшення значення початкової умови на $w(\cdot)$ не гарантує збільшення кінцевого результату. Синій графік відповідає динаміці системи при $w^{(0)}$= 0, блакитний при $w^{(0)}$= 1, зелений при $w^{(0)}$= 2, чорний при $w^{(0)}$= 3, маджента при $w^{(0)}$= 4, червоний при $w^{(0)}$= 5, жовтий при $w^{(0)}$= 6, водянистий при $w^{(0)}$= 7, темно-блакитний при $w^{(0)}$= 8, малиновий при $w^{(0)}$= 9, томатний при $w^{(0)}$= 10, лаймовий при $w^{(0)}$= 11, сірий при $w^{(0)}$= 12. Так, на графіку $w(\cdot)$ спочатку порядок кольорів був синій, блакитний, зелений, чорний, маджента, червоний-жовтий, водянистий, темно-блакитний, малиновий, томатний, лаймовий, сірий рахуючи знизу-вверх, та у кінці графіки розполягалися наступним чином: блакитний, зелений, томатний, червоний, сірий, маджента, червоний-жовтий водянистий, чорний, синій, лаймовий, темно-блакитний. Так само і графіки функцій $x_m(\cdot)$, $y_n(\cdot)$, $p(\cdot)$, r$(\cdot)$ відповідали нелінійно змінам $w^{(0)}$, що проілюстровано на прикладі графіку динаміки $y_n(\cdot)$ малюнками е,) ж) і з) на Рисунку 2.3.

Початкове значення *w* впливає на динаміку системи через вплив на кількість забруднення, яке потрібно утилізувати. Це, в свою чергу, впливає на багато інших змінних системи, включаючи:

1. Заощадження виробника (x_m): якщо початковий обсяг забруднення високий, виробникам може знадобитися більше ресурсів для його утилізації, що може зменшити їх заощадження.

2. Ціна основного продукту (p): високий обсяг забруднення може змусити виробників підвищити ціни на свою продукцію, щоб компенсувати витрати на утилізацію.

3. Тариф на утилізацію забруднення (r): якщо початковий обсяг забруднення високий, це може вимагати від влади збільшення тарифів на утилізацію, щоб стимулювати виробників до зменшення викидів.

4. Заощадження працівників (y_n): високий обсяг забруднення може вплинути на економічне добробут працівників, оскільки це може вплинути на вартість життя або спричинити здоров'ям проблеми, що зменшить їх здатність зберігати гроші.

Таким чином, експерименти з різними початковими значеннями *w* можуть допомогти краще зрозуміти, як вони впливають на динаміку системи в цілому.

РОЗДІЛ 3
РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛІ ОДНОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ

3.1. Метод «стрілянини»

Для системи (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) пропонуємо застосувати метод «стрілянини» [3] для вирішення крайової задачі з допомогою методу Рунге-Кутта. Метод «стрілянини» є чисельним методом, який використовується для вирішення крайових задач. Основний концепт полягає в перетворенні крайової задачі на початкову задачу, яку легше розв'язати. Ідея полягає в тому, щоб спочатку вгадати початкову величину, яка є невідомою, а потім використовувати метод Рунге-Кутта для розв'язання диференціального рівняння. Після цього можна порівняти реальний кінцевий стан з цільовим кінцевим станом. Якщо вони не збігаються, то процес повторюється з новою початковою величиною. Це виконується до тих пір, поки різниця між реальним і цільовим кінцевим станами не стане достатньо малою.

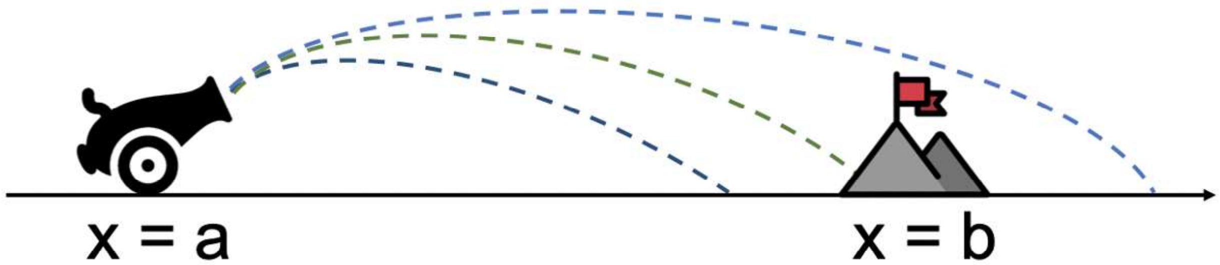


Рисунок 3.1 – Візуалізація методу «стрілянини»

Можна застосувати інший чисельний метод при реалізації методу «стрілянини», проте Метод Рунге-Кутта, зокрема класичний метод Рунге-Кутта четвертого порядку (RK4), має декілька важливих переваг у порівнянні з іншими методами чисельного інтегрування:

1. Точність. Метод RK4 є методом четвертого порядку, що означає, що глобальна похибка пропорційна кроку інтегрування до четвертого ступеня. Це дає RK4 велику точність для заданого кроку інтегрування у порівнянні з методами нижчого порядку, такими як метод Ейлера або метод Рунге-Кутта другого порядку (RK2).

2. Ефективність. На відміну від більш точних методів, таких як методи Рунге-Кутта вищих порядків або методи Бутчера, метод RK4 не вимагає суттєво більше обчислень за крок. Тому він часто є хорошим компромісом між точністю і ефективністю.

3. Стійкість. Метод RK4 відомий своєю стійкістю, що робить його надійним вибором для вирішення широкого спектра задач, включаючи задачі з жорсткими диференціальними рівняннями.

В роботі реалізована проста версія методу «стрілянини» з використанням метод Рунге-Кутта четверного порядку. Для вирішення системи рівнянь (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) для кожного кроку «стрілянини» будемо використовувати чисельний метод Ньютона. При обчисленнях приблизно визначено Якобіан цільової функції для кожного кроку методу «стрілянини», для якого використали схему центральної різниці.

Код, описаний у додатку 2, використовує метод «стрілянини» з методом Рунге-Кутта для вирішення системи диференціальних рівнянь. Він спочатку використовує метод Рунге-Кутта для розв'язку системи з початковими умовами, потім обчислює цільову функцію (різницю між залишковими значеннями і цільовими значеннями), використовує метод Ньютона для знаходження кореня цієї функції, оновлює початкові умови і повторює цикл до того часу, поки цільова функція не буде достатньо малою. Після цього код будує графіки розв’язків.

Однак ця програма викликає декілька помилок та попереджень, які пов'язані з чисельними проблемами:

1. Код генерує `RuntimeWarning: invalid value encountered in divide`. Це відбувається, коли ви ділите на значення, яке дуже близьке до нуля або коли ділите на нуль.

2. Отримується помилка `RuntimeWarning: overflow encountered in scalar multiply`, що відбувається, коли результат множення занадто великий, щоб бути представленим у використовуваному типі даних.

Ці проблеми можуть бути викликані декількома факторами:

1. Задані у цьому експеременті початкові умови або параметри можуть бути надмірно великі. Це може призвести до того, що деякі обчислення виходять за межі області валідних значень.

2. Самі обчислення можуть бути нестабільні – отримуємо дуже великі числа в результаті декількох ітерацій.

3.2. Можлива оптимізація і модифікація моделі

Оптимізація параметрів моделі вимагає розуміння цілей і обмежень, що ставляться перед нею. В залежності від них можна конкретизувати той чи інший параметр. Наприклад задля максимізації виробництва при мінімальному забрудненні, варто звернути увагу на наступні параметри:

1. Коефіцієнт утилізації (γ). Збільшення цього коефіцієнта може зменшити обсяг забруднення, що потрапляє в довкілля. Оптимальне значення може бути ближчим до верхнього обмеження.

2. Коефіцієнт природного зменшення забруднення (φ). Так само, збільшення цього коефіцієнта сприятиме зменшенню обсягу забруднення. Оптимальне значення також може бути ближчим до верхнього обмеження.

3. Коефіцієнт виробництва забруднення (λ). Зменшення цього коефіцієнта може зменшити обсяг виробленого забруднення, зберігаючи при цьому виробництво. Оптимальне значення може бути ближчим до нижнього обмеження.

4. Коефіцієнт виробництва (α_m і α_n). Збільшення цих коефіцієнтів може збільшити виробництво, що сприяє економічному зростанню. Оптимальне значення може бути ближчим до верхнього обмеження.

Отже при зміні значень навіть одного коефіцієнту, результати виконання усієї системи теж міняються.

Можна модифікувати економічну модель, описану у пункті 1.1, наприклад шляхом конкретизації її за допомогою даних про незадіяний у виробництві сектор суспільства: уточнювати його обсяг загального попиту на ВП через коефіцієнт пропорційності до попиту виробників чи власників; чи додати формалізацію зв’язку між обсягом випуску забруднення та обсягом попиту на ОЧД цієї частини суспільства з відповідним обсягу випуску ВЗ та попиту на утилізацію ВЗ також за допомогою певних коефіцієнтів пропорційності.

Зрозуміло, що додаткові вдосконалення та модифікації цієї моделі можуть збільшити її точність та прогнозний потенціал. Зокрема, щоб вдосконалити модель, можна розглянути наступні аспекти:

1. Врахування зв'язку між обсягом випуску забруднення та обсягом попиту на ОЧД в незадіяному у виробництві секторі суспільства.

2. Додати стохастичність. В реальному світі багато факторів непередбачувані. Можна додати випадкові величини до деяких параметрів моделі, щоб врахувати цю невизначеність.

3. Врахувати економічні фактори. Ціни, витрати, інфляція, валютні курси та інші економічні фактори можуть впливати на модель.

4. Включити більше видів забруднення. В моделі може бути більше одного виду забруднення, кожне з яких впливає на оточуюче середовище по-різному.

5. Врахувати політичні аспекти. Закони, регулятиви та податки можуть впливати на виробництво, забруднення та попит.

6. Включити вплив населення та споживачів. Поведінка споживачів, увага до екологічних питань і громадська думка можуть впливати на попит і виробництво.

7. Додати вплив часу. Попит, виробництво і забруднення можуть змінюватись з часом. Наприклад, виробничі процеси можуть ставати більш ефективними, а попит на певний продукт може зростати або зменшуватись.

Усі ці аспекти (вплив на модель яких можна включити, змінивши відповідні функції або додавши нові) зроблять модель складнішою, але вони також допоможуть зробити її більш точною і реалістичною.

3.3. Аналіз моделі

Зауваживши, що для використання моделей в реальних ситуаціях, необхідно враховувати точні дані та контекст конкретної економічної системи, нижче представлено кілька можливих варіантів застосування математичної моделі односекторної економічної системи з урахуванням утилізації продуктів забруднення.

1. Аналіз впливу політики відновлення довкілля. Використовуючи модель, можна дослідити різні сценарії політики зменшення забруднення та побудувати прогнози їх впливу на економічну систему. Наприклад, ви можете дослідити вплив збільшення ставки податків на забруднення або впровадження пільг для екологічно чистих підприємств.

2. Оцінка сталості економічної системи. Модель може бути використана для оцінки сталості та витривалості економічної системи в контексті забруднення. Можна дослідити, як різні рівні утилізації продуктів забруднення та зміни у податках впливають на сталість системи та збереження довкілля.

3. Прогнозування попиту та пропозиції. Використовуючи модель, можна прогнозувати попит та пропозицію на виробництво продуктів забруднення та

продуктів їх утилізації. Це може бути корисним для планування виробництва, оптимізації ресурсів та аналізу ринкових тенденцій.

4. Економічне моделювання при розробці екологічних стратегій. Задачі до математичної моделі, описані у даній роботі, можна використати для оцінки економічних наслідків різних екологічних стратегій і проектів. Наприклад, дослідити вплив впровадження нових технологій утилізації на витрати підприємств або розрахувати оптимальні рівні утилізації забруднення для досягнення економічної та екологічної сталості.

Зауважимо, що для використання моделей в реальних ситуаціях, необхідно враховувати точні дані та контекст конкретної економічної ситуації.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено математичну модель односекторної економічної системи з урахуванням утилізації продуктів забруднення. Для цієї моделі розглянуто і чисельно розв’язано початкові і крайові задачі з різними постановками.

У першому розділі роботи зроблено огляд моделі односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення та розглянуто задачу Коші для цієї моделі. Зроблено постановку задачі Коші з початковою умовою, заданою сегментом, та крайової задачі з відомим рівнем початкового і кінцевого забруднення. У другому розділі розв’язано задачі Коші, візуалізовано і проаналізовано отримані результати. У третьому розділі за допомогою методу «стрілянини» розв’язано крайову задачу, описану у першому розділі, проаналізовано отримані результати та побудовано їх графіки розв’язків.

Також у роботі розглянуто питання можливої оптимізації та модифікації моделі для покращення її точності та прогнозного потенціалу. Запропоновано враховувати у моделі зв'язок між обсягом забруднення та попитом на утилізацію, економічні фактори, політичні аспекти, вплив незадіяного у виробництво населення, стохастичність та інші фактори, які можуть впливати на модель.

Проведено ряд експериментів на тестових даних з використанням бібліотеки SciPy мови програмування Python.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Грабинський І. М. Сучасні економічні системи: [Навч. посіб.] / І. М. Г, С. 27
2. Утилізація відходів виробництва. УтильВторПром. URL: https://утилизация.укр/uk/utilizatsiya-othodov/utilizatsiya-othodov-proizvodstva/
3. М. В. Григорків. Динамічні односекторні моделі еколого-економічної системи з лінійними функціями економічної поведінки. Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці. 2015. Вип.1(57). С. 172-180. URL: http://chtei-knteu.cv.ua/herald_en/content/download/archive/2015/v1/NV-2015-v1_23.pdf
4. Григорків В.С., Григорків М.В. Динамічні моделі односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення. Інформаційні технології та економічна безпека. Вип. 1-2. 2021. С. 174-179. URL:10.37332/2309-1533.2021.1-2.23
5. Кветний Р. Н., Богач І. В. Бойко О. Р., Софита О. Ю., Шушура О.М. Комп’ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1. URL: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/2kvetnyj_komp%27yuterne_modelyuvannya_system_procesiv/t1/42..htm
6. Хусаїнов Д.Я., Мусатенко І.В. Диференціальні рівняння. // ВПЦ «Київський університет», – 2010
7. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. // К.: ВПЦ «Київський університет». – 2011
8. Medio A. Mathematical Models In Economics. Vol. 3. - Mathematical models. 2011. URL:https://www.eolss.net/sample-chapters/c02/e6-03b-09-02.pdf

ДОДАТКИ

ДОДАТОК 1

Програмний код задачі Коші математичної моделі односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення.

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *

c = 10  # собівартість

def D_m(xm, p):
    alpha_m = 0.2
    pp_m = (alpha_m * xm) / p
    return pp_m * 0.1

def D_n(xn, p):
    alpha_n = 0.2
    pp_n = (alpha_n * xn) / p
    return pp_n * 0.1

def S(xm):
    global c
    beta = 0.15
    pc = (beta * xm) / c
    return pc * 0.1

def U(w, r):
    gamma = 0.1
    dc = (gamma * w) / r
    return dc * 0.1

M = 20  # власники
N = 115  # виробники

def P(xm, xn, p):
    global M
    global N
    return int(M * D_m(xm, p) + N * D_n(xn, p))/ M

DU_znh = 5
SU_znh = 6
k = 0.44
mu_beta = 0.77777
mu_gamma = 0.555555
```

```
def dxndt(xn, xm, p, r, w, t): #дохід виробника
    global M
    global N
    global mu_beta
    global mu_gamma
    xi = 0.32
    rez = M * int(p * mu_beta * S(xm) + r * mu_gamma * U(w, r)) * (1 - xi) / N - p * D_n(xn, p)
    return rez

def dxmdt(xn, xm, p, r, w, t): #дохід працівника
    global M
    global k
    global mu_beta
    global mu_gamma
    global DU_znh
            xi_ = 0.5
    delta_beta = 0.77777
    delta_gamma = 0.555555
    rez = P(xm, xn, p) * (1 + k) + r * (DU_znh / M) - (p * D_m(xm, p) + ((1 + xi_) / M) * M *
int(p * mu_beta * S(xm) + r * mu_gamma * U(w, r)) + p * delta_beta * S(xm) + r *
delta_gamma * U(w, r))
    return rez

def dpdt(xn, xm, p, r, w, t):  # ціна
    theta_beta = 0.2
    global M
    global k
    rez = theta_beta * M * int((1 + k) * P(xm, xn, p) - S(xm))
    return rez

def drdt(xn, xm, p, r, w, t): #тариф на утилізацію
    theta_gamma = 0.22222
    global M
    global DU_znh
    lamb = 0.4321
    rez = theta_gamma * int(DU_znh + S(xm) * (M * lamb - 1))
    return rez

def dwdt(xn, xm, p, r, w, t): #забруднення
    lamb_du = 0.11
    global M
    global SU_znh
    phi = 0.33333
    rez = M * (lamb_du * S(xm) - U(w, r)) + SU_znh - phi * w
    return rez

xm0 = 300
xn0 = 100
p0 = 1.2 * c
r0 = 3
w0 = 1
```

```
conditions=[xn0,xm0,p0,r0,w0] #масив з значенням змінних в початковий момент часу
xn = int
xm = int
p = int
r = int
w = int
arguments=[xn, xm, p, r, w]

def func(arguments,t):
   xn=arguments[0]
   xm = arguments[1]
   p = arguments[2]
   r = arguments[3]
   w = arguments[4]
   rez = [dxndt(xn, xm, p, r, w, t), dxmdt(xn, xm, p, r, w, t), dpdt(xn, xm, p, r, w, t),
drdt(xn, xm, p, r, w, t), dwdt(xn, xm, p, r, w, t)]
   return rez

t = np.linspace(1,40)
y0 = conditions
time = t
rez=odeint(func, y0, t, full_output=False).T
print(rez)
xn_=rez[0]
xm_ = rez[1]
p_ = rez[2]
r_ = rez[3]
w_ = rez[4]

print(t)
print(p_)
plt.title("Графік залежності заощадженнь виробника до часу")
plt.xlabel("t вісь")
plt.ylabel("xn вісь")
plt.plot(t,xn_)
plt.show()

plt.title("Графік залежності заощадженнь працівник до часу")
plt.xlabel("t вісь")
plt.ylabel("xm вісь")
plt.plot(t,xm_, color ="red")
plt.show()

plt.title("Графік залежності заощадженнь ціни на основний продукт до часу")
plt.xlabel("t вісь")
plt.ylabel("p вісь")
plt.plot(t,p_, color ="orange")
plt.show()

plt.title("Графік залежності тарифу на утилізацію забруднення до часу")
plt.xlabel("t вісь")
plt.ylabel("r вісь")
```

```
plt.plot(t,r_, color ="green")
plt.show()

plt.title("Обсяг забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ до часу")
plt.xlabel("t вісь")
plt.ylabel("w вісь")
plt.plot(t,w_, color ="black")
plt.show()
```

ДОДАТОК 2

Програмний код задачі Коші з нечітко визначеною початковою умовою над математичною моделлю односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення.

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *

# xm,yn,p,r, w змінні
M = 10  # власники
N = 300 # виробники

def D_m(xm, p):
    alpha_m = 0.2  #######
    pp_m = (alpha_m * xm) / p
    return pp_m
def D_n(yn, p):
    alpha_n = 0.6  #######
    pp_n = (alpha_n * yn) / p
    return pp_n
def S(xm):
    global c
    spoilage = 0.01  # частка браку при виробництві
    beta = 0.6  #######
    pc = (beta * xm) / c
    return (1 - spoilage) * pc  # попит - це купівельна спроможність  з урахуванням браку
def U(w, r):
    gamma = 0.2  ############
    dc = (gamma * w) / r
    return dc
def P(xm, yn, p):
    global M
    global N
    return int(M * D_m(xm, p) + N * D_n(yn, p))/ M

DU_znh = 5  #######
SU_znh = 6  ############
k = 0.8  #######
mu_beta = 0.15  ########
mu_gamma = 0.2  ########
```

```
def dyndt(yn, xm, p, r, w, t):
    global M
    global N
    global mu_beta
    global mu_gamma
    xi = 0.32  ########
    rez = M * int(p * mu_beta * S(xm) + r * mu_gamma * U(w, r)) * (1 - xi) / N - p * D_n(yn, p)
    return rez
def dxmdt(yn, xm, p, r, w, t):
    global M
    global k
    global mu_beta
    global mu_gamma
    global DU_znh
    xi_ = 0.5  ########
    delta_beta = 0.77777  ########
    delta_gamma = 0.555555  ########
    rez = P(xm, yn, p) * (1 + k) + r * (DU_znh / M) - (p * D_m(xm, p) + ((1 + xi_) / M) * M * int(
        p * mu_beta * S(xm) + r * mu_gamma * U(w, r)) + p * delta_beta * S(xm) + r * delta_gamma
* U(w, r))
    return rez
def dpdt(yn, xm, p, r, w, t):
    theta_beta = 0.2  #######
    global M
    global k
    rez = theta_beta * M * int((1 + k) * P(xm, yn, p) - S(xm))
    return rez
def drdt(yn, xm, p, r, w, t):
    theta_gamma = 0.22222  ########
    global M
    global DU_znh
    lamb = 0.4321  ######
    rez = theta_gamma * int(DU_znh + S(xm) * (M * lamb - 1))
    return rez
def dwdt(yn, xm, p, r, w, t):
    lamb_du = 0.11  ############
    global M
    global SU_znh
    phi = 0.33333  ############
    rez = M * (lamb_du * S(xm) - U(w, r)) + SU_znh - phi * w
    return rez

#умови
c = 3  # собівартість
xm0 = 5*10**9
yn0 = 2*10**5
```

```
p0 = 1.05 * c
r0 = 12#000
w_cond = [i for i in range(0, 13, 1)]# можливі значення початкової умови W

def func(arguments,t):
    yn = arguments[0]
    xm = arguments[1]
    p = arguments[2]
    r = arguments[3]
    w = arguments[4]
    rez = [dyndt(yn, xm, p, r, w, t), dxmdt(yn, xm, p, r, w, t), dpdt(yn, xm, p, r, w, t), drdt(yn, xm,
p, r, w, t), dwdt(yn, xm, p, r, w, t)]
    return rez
t = np.linspace(1,40)
cols=['b','c' , 'g' ,'k' ,'m' ,'r' ,'y', 'aqua', 'darkblue', 'crimson', 'tomato', 'lime', 'gray', 'gold']

#функції будують графіки для всіх W
def allplotyn():
  plt.title("Графік залежності заощадженнь виробника до часу")
  plt.xlabel("t вісь")
  plt.ylabel("yn вісь")
  global yn0,xm0,p0,r0,cols,t,w_cond
  for i in range(len(w_cond)):
    w0 = w_cond[i]
    conditions=[yn0,xm0,p0,r0,w0]
    rez=odeint(func, conditions, t, full_output=False).T
    plt.plot(t,rez[0],color =cols[i])

  plt.show()
def allplotxm():
  plt.title("Графік залежності заощадженнь працівник до часу")
  plt.xlabel("t вісь")
  plt.ylabel("xm вісь")
  global yn0,xm0,p0,r0,cols,t,w_cond
  for i in range(len(w_cond)):
    w0 = w_cond[i]
    conditions=[yn0,xm0,p0,r0,w0]
    rez=odeint(func, conditions, t, full_output=False).T
    plt.plot(t,rez[1], color =cols[i])
  plt.show()
def allplotp():
  plt.title("Графік залежності ціни на основний продукт до часу")
  plt.xlabel("t вісь")
  plt.ylabel("p вісь")
  global yn0,xm0,p0,r0,cols,t,w_cond
  for i in range(len(w_cond)):
```

```
    w0 = w_cond[i]
    conditions=[yn0,xm0,p0,r0,w0]
    rez=odeint(func, conditions, t, full_output=False).T
    plt.plot(t,rez[2], color=cols[i])
  plt.show()
def allplotr():
  plt.title("Графік залежності тарифу на утилізацію забруднення до часу")
  plt.xlabel("t вісь")
  plt.ylabel("r вісь")
  global yn0,xm0,p0,r0,cols,t,w_cond
  for i in range(len(w_cond)):
    w0 = w_cond[i]
    conditions=[yn0,xm0,p0,r0,w0]
    rez=odeint(func, conditions, t, full_output=False).T
    plt.plot(t,rez[3], color =cols[i])
  plt.show()
def allplotw():
  plt.title("Обсяг забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ до часу")
  plt.xlabel("t вісь")
  plt.ylabel("w вісь")
  global yn0,xm0,p0,r0,cols,t,w_cond
  for i in range(len(w_cond)):
    w0 = w_cond[i]
    conditions=[yn0,xm0,p0,r0,w0]
    rez=odeint(func, conditions, t, full_output=False).T
    plt.plot(t,rez[4], color=cols[i])
  plt.show()

allplotyn()
allplotxm()
allplotp()
allplotr()
```

ДОДАТОК 3

Програмний код розв’язання крайової над математичною моделлю односекторної економіки з урахуванням утилізації продуктів забруднення методом «стрілянини» з використанням метода Рунге-Кутта.

```
import numpy as np
from scipy.linalg import solve
import matplotlib.pyplot as plt

c = 3
# крайові умови
xm0 = 10**18
yn0 = 10**6
p0 = 1.05 * c
r0 = 12
w0 = 10
xmT = 11**18
ynT = 10**7
pT = 1.05 * c
rT = 12
wT = 1
# Визначення системи
def system(y, t):
    xm, yn, p, r, w = y
    M = 10
    N = 300
    DU_znh = 5
    SU_znh = 6
    k = 0.8
    mu_beta = 0.15
    mu_gamma = 0.2
    global c
    alpha_m = 0.2
    alpha_n = 0.6
    spoilage = 0.01
    beta = 0.6
    gamma = 0.2
    xi = 0.32
    xi_ = 0.5
    delta_beta = 0.77777
    delta_gamma = 0.555555
    theta_beta = 0.2
    theta_gamma = 0.22222
    lamb = 0.4321
```

```
    lamb_du = 0.11
    phi = 0.33333

    pp_m = (alpha_m * xm) / p
    pp_n = (alpha_n * yn) / p
    pc = (beta * xm) / c
    dc = (gamma * w) / r

    dpdt = theta_beta * M * ((1 + k) * (M * pp_m + N * pp_n) / M - pc)
    dxmdt = (M * pp_m + N * pp_n) / M * (1 + k) + r * (DU_znh / M) - (p * pp_m + ((1 + xi_) /
M) * M * (
            p * mu_beta * pc + r * mu_gamma * dc) + p * delta_beta * pc + r * delta_gamma * dc)
    dyndt = M * (p * mu_beta * pc + r * mu_gamma * dc) * (1 - xi) / N - p * pp_n
    drdt = theta_gamma * (DU_znh + pc * (M * lamb - 1))
    dwdt = M * (lamb_du * pc - dc) + SU_znh - phi * w
    return [dxmdt, dyndt, dpdt, drdt, dwdt]



# визначення цільової функції
def target_function(init_conditions):
    t = np.linspace(0, 40, num=500)
    solution = rk4(system, init_conditions, t)
    final_values = solution[-1, :]
    target_values = np.array([xmT, ynT, pT, rT, wT])
    return final_values - target_values
# Якобіан
def jacobian(f, y):
    h = 1e-5
    f0 = f(y)
    jac = np.zeros((len(y), len(f0)))
    for i in range(len(y)):
        y_perturbed = y.copy()
        y_perturbed[i] += h
        f_perturbed = f(y_perturbed)
        jac[:, i] = (f_perturbed - f0) / h
    return jac

# визначаємо початкові умови
init_conditions = np.array([xm0, yn0, p0, r0, w0])
# метод стрілянини
for _ in range(10):  # iterate for a maximum of 10 times
    F = target_function(init_conditions)
    if np.allclose(F, 0):  # if we are close enough then stop
        break
    J = jacobian(target_function, init_conditions)
```

```
    delta = solve(J, F)  # solve J*delta = F for delta
    init_conditions -= delta  # update our initial conditions

# Результат
t0=0
T=40
t = np.linspace(t0, T, num=500)
solution = rk4(system, init_conditions, T)
#print(solution)
def rezultat(sol):
  # виводимо результат
    global t
    xm_, yn_, p_, r_, w_ = [],[],[],[],[]
    for i  in range(len(t)):
      xm_.append(sol[i][0])
      yn_.append(sol[i][1])
      p_.append(sol[i][2])
      r_.append(sol[i][3])
      w_.append(sol[i][4])

    plt.title("Графік залежності заощадженнь виробника до часу")
    plt.xlabel("t вісь")
    plt.ylabel("yn вісь")
    plt.plot(t,yn_,color ="red")
    plt.show()

    plt.title("Графік залежності заощадженнь працівник до часу")
    plt.xlabel("t вісь")
    plt.ylabel("xm вісь")
    plt.plot(t,xm_, color ="red")
    plt.show()

    plt.title("Графік залежності ціни на основний продукт до часу")
    plt.xlabel("t вісь")
    plt.ylabel("p вісь")
    plt.plot(t,p_, color ="red")
    plt.show()

    plt.title("Графік залежності тарифу на утилізацію забруднення до часу")
    plt.xlabel("t вісь")
    plt.ylabel("r вісь")
    plt.plot(t,r_, color ="red")
    plt.show()

    plt.title("Обсяг забруднення довкілля неутилізованими рештками ПЗ до часу")
    plt.xlabel("t вісь")
```

```
    plt.ylabel("w вісь")
    plt.plot(t,w_, color ="red")
    plt.show()
rezultat(solution)
```