УДК 519.71: 519.17: 517.97
MSC 93A30, 49K15, 60C20

ENTROPY METHOD AS A TOOL FOR OPTIMIZATION OF COMPLEX SYSTEMS

D. I. Symonov
Department of mathematical problems of applied informatics, V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
E-mail: denys.symonov@gmail.com

МЕТОД ЕНТРОПІЇ ЯК ІНСТРУМЕНТ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Д. І. Симонов
Лабораторія проблем прикладної інформатики, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, E-mail: denys.symonov@gmail.com

Abstract. The article is devoted to the study of the application of the entropy method for optimization of complex systems. The author discusses the basic principles of using entropy in analysis and planning, showing how this method can increase the efficiency and stability of complex dynamic systems. The article discusses the use of mathematical models and analysis of entropy variations to assess the impact of entropy changes on the dynamics of the utility function growth in complex dynamic systems. It also discusses two approaches to system analysis — entropy minimization and ensemble method — to maximize utility and manage uncertainty in data. The article emphasizes the advantages of these methods in the context of real and incomplete data, and offers new opportunities for developing effective decision-making strategies in various fields, including the management of public projects and other complex systems.
Keywords: entropy, complex dynamic systems, mathematical models, optimization, utility function, project management.

Анотація. Стаття присвячена дослідженню застосування методу ентропії для оптимізації складних систем. Автор розглядає основні принципи використання ентропії в аналізі та плануванні, показуючи, як цей метод може підвищити ефективність та стійкість складних динамічних систем. В статті обговорюється застосування математичних моделей та аналізу варіацій ентропії для оцінки впливу зміни ентропії на динаміку зростання функції корисності в складних динамічних системах. Також розглядаються два підходи до аналізу систем — мінімізація ентропії та метод ансамблів — з метою максимізації корисності та управління невизначеністю в даних. Стаття наголошує на перевагах цих методів у контексті реальних та неповних даних, а також пропонує нові можливості для розвитку ефективних стратегій прийняття

рішень в різних областях, зокрема управління державними проєктами та іншими складними системами.
Ключові слова: ентропія, складні динамічні системи, математичні моделі, оптимізація, функція корисності, управління проєктами.

Вступ

Сучасний світ характеризується надзвичайною складністю та різноманіттям систем, що нас оточують. Від технологічних до біологічних, від економічних до соціальних, системи стають все більш складними для управління. Відповідно, розвиток методів оптимізації та управління цими системами стає надзвичайно актуальним завданням.

У цьому контексті метод ентропії виявляється надзвичайно потужним інструментом, який дозволяє ефективно оптимізувати та управляти складними системами, концентруючи зусилля на найбільш важливих аспектах. Ентропія є одним з ключових понять у теорії інформації, що визначає ступінь хаосу або невизначеності в системі. У контексті оптимізації систем, концепція ентропії може бути використана для аналізу та прогнозування різних аспектів системи, включаючи її ефективність, стійкість та можливості вдосконалення. Стаття спрямована на розгляд методів застосування ентропії для оптимізації складних систем на прикладі управління портфелем проєктів. Це дозволить продемонструвати реальний вплив методу ентропії на покращення ефективності та стійкості систем [1].

Як було зазначено, одним з прикладів складних динамічних систем є система управління проєктами, що обумовлено наявністю багатофакторних взаємозв'язків компонентів системи, наявністю багатокомпонентних цілей та множиною зацікавлених сторін, наявністю вимог та обмежень ресурсів, зміною пріоритетів та вимог, постійними ризиками та необхідністю постійної адаптації. Управління проєктами вимагає постійного аналізу та прийняття рішень в умовах невизначеності. Отже, управління проєктами доцільно розглядати як складну динамічну систему, що вимагає використання математичних моделей та методів для ефективного прогнозування, планування та керування проєктами з урахуванням їх складності та мінливості.

1. Постановка задачі

Держава має багатий спектр інтересів у галузі стратегічних проєктів, що охоплюють розвиток інфраструктури, науки, технологій та оборони. Однак, обмеженість ресурсів значно ускладнює їх реалізацію, змушуючи уряд ретельно розставляти пріоритети та оптимізувати фінансування, а кожен проєкт має свої унікальні характеристики, які потребують індивідуального підходу та стратегій управління.

Використання значень ентропії в аналізі портфелю проєктів дозволяє оцінити рівень впорядкованості проєктів в портфелі, тобто рівень концентрації зусиль у вибраному стратегічному напрямку [2]. «Концентрація» сприяє уникненню потенційних ризиків широкої диференціації стратегічних проєктів та надає можливість ефективно розподіляти обмежені ресурси та контролювати їх цільове використання. Аналіз ентропії допомагає ідентифікувати можливі напрями оптимізації в плануванні та реалізації проєктів, сприяючи прийняттю обґрунтованих рішень на основі об'єктивних даних. Постійний моніторинг, оцінка та коригування стратегій дозволяють урізноманітнити ініціативи, щоб досягти максимальної суспільної вигоди від кожного проєкту.

Державні установи, зайняті в реалізації проєктів, прагнуть максимізувати функцію корисності U від впровадження державних проєктів шляхом ефективного розподілу ресурсів та забезпеченням оптимального співвідношення між витратами та очікуваними результатами.

Цільова функція функціонування системи має вигляд:

$$U = u\,(x_i,\, B) \to \max, \tag{1}$$

за обмеженнями:

$$\sum_i x_i c_i \leq B, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

де x_i — кількість проєктів в портфелі; c_i — сума інвестицій для певного проєкту; B — загальний інвестиційний бюджет.

Необхідно використати математичні моделі та аналіз варіацій ентропії для визначення впливу зміни ентропії на динаміку зростання функції корисності в складній динамічній системі [3].

2. Визначення впливу ентропії на функцію корисності

Зростання значення ентропії у державному управлінні або управлінні портфелем державних проєктів може свідчити про декілька речей:

1. потенційна неефективність системи: збільшення ентропії може вказувати на те, що система або проєкт не досконало організовані або не ефективно реалізовується (наприклад, надмірна складність, бюрократія, відсутність чіткої стратегії можуть призвести до збільшення ентропії);
2. відсутність структури або контролю: збільшення ентропії може також вказувати на відсутність чіткої структури або контролю в системі, що може призвести до хаосу, непрозорості та неспроможності досягти конкретних цілей;
3. необхідність реформ: максимізація ентропії може бути сигналом необхідності реформування системи або проєкту (наприклад, спрощення процесів, покращення управління, впровадження нових стратегій та політик);
4. необхідність інновацій: іноді збільшення ентропії може бути результатом нестандартних або інноваційних підходів, в таких випадках це може свідчити про те, що система або проєкт активно експериментують з новими ідеями та методами які заважають реалізації проєкта.

Припустимо, що загальна кількість проєктів в портфелі державних проєктів має вигляд:

$$M = \sum_i \sum_j M_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

відповідно, ентропію можна визначити як [4, 5]:

$$\mathrm{H} = -\sum_i \sum_j M_{ij} \cdot \ln M_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

або

$$\mathrm{H} = -\sum_i \sum_j p_{ij} \cdot \ln p_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де $p_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sum\limits_i \sum\limits_j M_{ij}}$ — розподіл ймовірності проєктів.

Визначимо лагранжіан $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = u\left(x_i,\, B\right) + \lambda \left(B - \sum_i x_i c_i\right), \tag{6}$$

де λ — множник Лагранжа для (2).

Відповідно, кількість проєктів можна визначити як:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \lambda c_i,$$

або

$$x_i = x_i\left(c_i,\, B\right), \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Визначимо частину бюджету, яку витрачає держава на реалізацію проєктів [6]:

$$y_i = \frac{x_i \cdot c_i}{B}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

З урахуванням (4) та (8), ентропія буде мати наступний вигляд:

$$\mathrm{H} = -\sum_i y_i \, \mathrm{ln} y_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Задачу (1), (2), з урахуванням (9), можна записати як:

$$U = u\left(\frac{y_i \cdot B}{c_i},\, B\right) \to \max, \tag{10}$$

за обмеженнями:

$$\sum_i y_i = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

а лагранжіан $\mathcal{L}$ (6) буде мати вигляд:

$$\mathcal{L} = u\left(\frac{y_i \cdot B}{c_i},\, B\right) + \lambda \left(1 - \sum_i y_i\right). \tag{12}$$

Виконав диференціювання отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = \lambda, \quad i = \overline{1, n},$$

або

$$\frac{\partial B}{\partial c_i} = \frac{y_i B}{c_i}, \tag{13}$$

де $y_i = y_i\,(c_i,\, B)$, $i = \overline{1, n}$.

Виконаємо розбиття множини компонентів системи (проєктів) на дві підмножини [7]:

1. f_k — підмножина деякої спадної функції витрат на реалізацію проєктів;
2. g_k — підмножина констант, що визначається з умови рівноваги суми інвестицій c_i для проєкту загальної кількості проєктів M та бюджету B.

Відповідно, оновлену цільову функцію можна представити у вигляді:

$$\mathrm{H} = -\sum_i y_i \ln y_i \to \min, \tag{14}$$

за обмеженнями:

$$\sum_i y_i = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{15}$$

$$f_k\,(y_i) = g_k, \quad k = \overline{1, K}. \tag{16}$$

Мінімізація ентропії та аналіз систем з максимальною корисністю, в кінцевому підсумку будуть надавати однаковий результат. Обидва підходи, чи то введення обмежень із подальшою перевіркою висновків, чи то визначення функцій корисності з аналізом висновків, призведуть до того самого результату. Мінімізація ентропії надає наступні переваги [8]:

- існує можливість використання апріорної інформації про конкретні обмеження, що накладаються на y_i — це сприяє побудові послідовної картини функції корисності;
- ентропійний підхід дозволяє враховувати різноманітні обмеження та умови, що робить його ефективним при розробці динамічних моделей;
- завдяки використанню ентропії можливе більш точне й ефективне управління невизначеністю в даних, що особливо важливо під час роботи з реальними і неповними даними;
- ентропійний підхід сприяє виявленню прихованих залежностей та патернів у даних, що може привести до отримання нових інсайтів і можливостей для поліпшення процесу прийняття рішень [9].

Значення функції Лагранжа з урахуванням (14)–(16) буде мати вигляд:

$$\mathcal{L} = \mathrm{H} + \lambda\left(1 - \sum_i y_i\right) + \sum_k \mu_k\,(g_k - f_k)\,, \tag{17}$$

відповідно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} = 0.$$

Вважаючи (14)–(16), (17) отримаємо:

$$\ln y_i = -\lambda - \sum_k \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}. \tag{18}$$

Відповідно, задачі максимізації корисності буде мати вигляд:

$$U = \mathrm{H} + \sum_k \mu_k \left(g_k - f_k\right) \to \max, \tag{19}$$

за обмеженнями:

$$\sum_i y_i = 1, \quad i = \overline{1, n}\,. \tag{20}$$

Метод ентропії має ряд обмежень для оцінки функції корисності, серед яких можна визначити наступні:

- якщо значення параметру $\mu_k \gg 1$, то значенням ентропії H в рівнянні (19) можна знехтувати, тобто цільова функція корисності (19)–(20) буде мати вигляд:

  $$U = \sum_k \mu_k \left(g_k - f_k\right) \to \max, \tag{21}$$

  за обмеженнями:

  $$\sum_i y_i = 1, \quad i = \overline{1, n}\,; \tag{22}$$

- якщо $|y_i| = |g_k|$, то систему рівнянь (19)–(20) можна вирішити без ентропії H, тобто цільова функція корисності (19)–(20) буде мати вигляд (21)–(22).

Метод мінімізації ентропії фактично передбачає присвоєння рівних ймовірностей всім станам, які не виключаються апріорною інформацією. Зазвичай для аналізу систем реалізації державних проєктів достатньо використання методу мінімізації ентропії, однак у низці випадків метод ансамблів може виявитися більш ефективним. Це значно обмежує можливості аналізу, але це обмеження можна подолати використавши метод ансамблів.

Ансамбль – це сукупність можливих станів системи, яким згодом приписують певні ймовірності. Загальна теорія ансамблів пов'язана з поняттям фазового простору та рівняннями руху відповідної системи. Ансамбль являє собою множину реалізацій системи, що цікавить, причому кожна реалізація відповідає одному можливому стану системи.

Теорія ансамблів доповнює метод мінімізації ентропії і є важливою для моделювання складних динамічних систем. Вона демонструє, як можна досліджувати різні системи за допомогою різних типів ансамблів, а математичне сподівання змінних отримуються шляхом усереднення по всьому ансамблю [10].

Відповідно, теорія ансамблів і метод мінімізації ентропії взаємодоповнюють один одного, дозволяючи отримувати комплексний огляд системи, зокрема, за допомогою ансамблів можна виокремити та вивчити складні взаємозв'язки між різними станами системи, що доповнює точковий підхід методу мінімізації ентропії.

4. Моделювання роботи методу ентропії на прикладі

Необхідно визначити оптимальний портфель проєктів з метою максимізації функції корисності U від портфелю державних проєктів в межах наявного бюджету на їх впровадження.

Нехай $M(c_{ij})$ — матриця вартості проєктів. $M(p_{ij})$ — матриця вартості проєктів. Бюджет $B = 120$.

$$M(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 1 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 4 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 7 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 6 & 8 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

$$M(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.043 & 0.800 & 0.725 & 0.612 & 0.182 & 0.712 & 0.194 \\ 0.991 & 0.095 & 0.943 & 0.131 & 0.655 & 0.559 & 0.441 \\ 0.390 & 0.105 & 0.081 & 0.322 & 0.822 & 0.665 & 0.436 \\ 0.583 & 0.076 & 0.561 & 0.088 & 0.519 & 0.453 & 0.889 \\ 0.469 & 0.912 & 0.303 & 0.043 & 0.055 & 0.125 & 0.798 \\ 0.050 & 0.537 & 0.097 & 0.718 & 0.099 & 0.029 & 0.449 \\ 0.803 & 0.868 & 0.352 & 0.695 & 0.470 & 0.858 & 0.055 \end{pmatrix}.$$

Система планування ресурсів на реалізацію проєктів визначається рівнянням:

$$d\left[\ln W\left(M_{ij}\right)\right] \cong \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \ln W}{\partial M_{ij}^2}(dM_{ij})^2 = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{(dM_{ij})^2}{M_{ij}}.$$

Враховуючи (5), систему планування ресурсів на реалізацію проєктів можна визначити як:

$$d\left[\ln W\left(M_{ij}\right)\right] \cong -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j p_{ij}^2 M_{ij},$$

де p_{ij} — відносна зміна величини M_{ij} по відношенню до найбільш ймовірного розподілу $p = \max\limits_{i,j}\left\{\frac{dM_{ij}}{M_{ij}}\right\}$.

Відповідно до умов прикладу та (7) цільова функція буде мати вигляд:

$$U = u\left(\frac{y_i \cdot B}{c_i},\, B\right) \to \max,$$

за обмеженнями,

$$\sum_i y_i = 1, \quad i = \overline{1,n},$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\sum_i f_i\left(x_i, \omega_i\right) = 1, \quad i = \overline{1,n},$$

де $f_i\left(x_i,\omega_i\right)$ — ймовірність параметру вимог ω_i та пріоритетів для кожного проєкту.

Оскільки $x=\sum\limits_i x_i$, $i=\overline{1,n}$, то ймовірнісний розподіл можна визначити за формулою:

$$F\left(x_i\right)=\int\limits_{\omega(x_1)}\ldots\int\limits_{\omega(x_i)}\prod_i f_i\left(x_i,\omega_i\right)d\omega,\quad i=\overline{1,n}.$$

Оптимальним рішенням буде знаходження балансу між функцією корисності та ентропією, яка збільшується зі зростанням кількості проєктів, що дозволить максимізувати загальний виграш. Це передбачає розподіл ресурсів таким чином, щоб кожен додатковий проєкт приносив максимальну користь без надмірного ускладнення системи. Важливо знайти підмножину проєктів, яка дозволить максимізувати корисність в межах наявного бюджету шляхом мінімізації ентропії. Такий підхід забезпечить ефективне управління проєктами та стабільний розвиток держави.

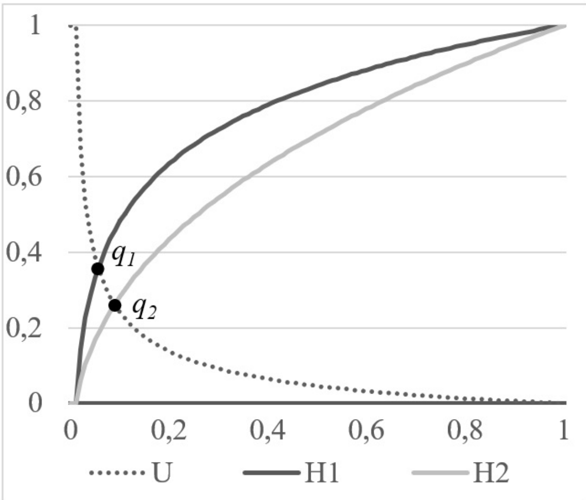

Рис. 1. Графік нормалізованих фукнцій: корисності U і ентропії Н.

Використовуючи метод ентропії в якості інструменту оптимізації складних систем для прикладу, з урахуванням обмежень бюджету B, були отримані дві підмножини проєктів, які умовно можна класифікувати як «оптимальні»:

1. $M_1=\{M_{17}, M_{24}, M_{32}, M_{36}, M_{53}, M_{72}, M_{75}\}$;
2. $M_2=\{M_{24}, M_{37}, M_{41}, M_{45}, M_{52}, M_{67}\}$.

Для обрання кращої моделі (підмножини проєктів) необхідно порівняти перспективне значення функції корисності двох підмножин проєктів. На рисунку 1 наведено графіки ентропії для двох підмножин M_1 і M_2, відповідно H_1 і H_2, та графік функції корисності. Точки перетину графіка функції корисності та ентропії є точками оптимального розв'язку задачі.

Як можна побачити з рисунка 1, підмножина M_1 (точка q_1) має перевагу (більше значення функції корисності U), відповідно, оптимальний розв'язок задачі – $M_1 = \{M_{17}, M_{24}, M_{32}, M_{36}, M_{53}, M_{72}, M_{75}\}$.

Висновок

Метод ентропії зарекомендував себе як ефективний інструмент для оптимізації складних систем. Його застосування дозволяє зосереджувати зусилля на ключових аспектах, підвищуючи загальну стійкість системи. Постійний моніторинг та коригування стратегій на основі аналізу ентропії дозволяють урізноманітнити ініціативи та максимізувати ефективність складних систем, забезпечуючи оптимальне співвідношення між витратами та результатами. Застосування математичних моделей та аналізу варіацій ентропії допомагає глибше зрозуміти вплив зміни ентропії на динаміку зростання функції корисності у складних динамічних системах, що є критично важливим для ефективного управління державними проєктами.

Метод ентропії як інструмент оптимізації складних систем дозволяє ефективно враховувати різноманітні обмеження та умови, що є важливим для розробки динамічних моделей та управління невизначеністю в реальних даних.

Література

1. Shan S., Zhang Z., Ji W., Wang H. Analysis of collaborative urban public crisis governance in complex system: A Multi-agent Stochastic Evolutionary Game Approach. *Sustainable Cities and Society*. 2023. Vol. 91. P. 104418. https://doi.org/10.1016/j.scs.2023.104418.
2. Jin M., Sun K., He S. A novel fractional-order hyperchaotic complex system and its synchronization. *Chinese Physics*. 2023. Vol. 32. P. 060501. https://doi.org/10.1088/1674-1056/acc0f6.
3. Shritika Waykar E.A. Innovations in Computational Approaches for Nonlinear Problems and Complex System Simulations. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*. 2023. Vol. 31, No 1. P. 34–51. https://doi.org/10.52783/cana.v31.298.
4. Xu W., Yuan K., Li W., Ding W. An Emerging Fuzzy Feature Selection Method Using Composite Entropy-Based Uncertainty Measure and Data Distribution. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*. 2023. Vol. 7. P. 76–88. https://doi.org/10.1109/TETCI.2022.3171784.
5. Mao A., Mohri M., Zhong Y. Cross-Entropy Loss Functions: Theoretical Analysis and Applications. *ArXiv*. 2023. Abs/2304.07288.
6. Симонов Д.І. Пошук напрямів оптимізації в ланцюгах постачання за допомогою нечітких когнітивних карт. *Математичне моделювання: наук. журн.* 2023. Вип. 1(48). С. 32–39. https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(48)2023.280068.
7. Garg D., Hejna J., Geist M., Ermon S. Extreme Q-Learning: MaxEnt RL without Entropy. *ArXiv*. 2023. Abs/2301.02328.
8. Zhai S., Likhomanenko T., Littwin E., Busbridge D., Ramapuram J., Zhang Y., Gu J., Susskind J.M. Stabilizing Transformer Training by Preventing Attention Entropy Collapse. *ArXiv*. 2023. Abs/2303.06296.

9. Симонов Д.І., Горбачук В.М. Метод пошуку рішень у динамічній моделі управління запасами за невизначеності. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2022. Вип. 4. С. 31–39. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.4.
10. Shi P., Yan B. A Survey on Intelligent Control for Multiagent Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems.* 2021. Vol. 51. P. 161–175. https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3042823.

Надійшла: 29.04.2024 / Прийнята: 20.05.2024