УДК 519.21

О.І. Василик[1], *к.ф.-м.н., доцент*

Оцінювання розподілу супремуму строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: [1]ovasylyk@univ.kiev.ua

O.I. Vasylyk[1], *Ph.D., Associate Professor*

Estimation of distribution of suprema of a strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: [1]ovasylyk@univ.kiev.ua

У роботі досліджуються властивості строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, породженого випадковим процесом ξ та функцією відгуку g. Виведено нові оцінки для розподілів супремумів таких процесів. Наведено приклад застосування отриманих результатів.

Ключові слова: дробовий шум, процеси дробового ефекту, розподіл супремуму процесу, φ-субгауссові процеси.

In this paper, there are studied properties of a strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, generated by the process ξ and the response function g. New estimates for distributions of suprema of such processes are derived. An example of application of the obtained results is given.

Key Words: shot noise processes, distrubution of suprema of a process, φ-sub-Gaussian processes.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

У цій роботі продовжується дослідження властивостей сепарабельних строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту, розпочате у роботах [1, 25].

Простори φ-субгауссових випадкових величин $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ узагальнюють простори гауссових випадкових величин, тому вони широко застосовуються для моделювання реальних випадкових процесів у теорії черг, фінансовій математиці, фізиці. Розвиток теорії φ-субгауссових випадкових процесів можна прослідкувати за роботами [2, 6, 11, 13, 14, 15, 16, 17].

Процеси дробового ефекту (або дробового шуму) є математичними моделями різних явищ і досліджуються від початку XX століття. Перші роботи щодо дробового шуму опубліковані Кемпбеллом [7] та Шотткі [24], але фундаментальні результати з'явилися через багато років у роботах [19, 20, 21]. Зараз процеси дробового ефекту застосовуються не тільки у фізиці, а й у страхуванні, фінансовій математиці, теорії телекомунікаційних мереж [12, 22, 23].

У класичній моделі дробового ефекту припускається, що в деяку систему надходять імпульси згідно зі стандартним пуассонівським процесом, величини реакції (відгуку) на імпульс є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, незалежними від пуассонівського процесу надходження імпульсів, а після моменту імпульсу реакція «затухає» згідно з експоненціальним законом розподілу. Але із часом з'явилося дуже багато варіацій цієї моделі. У роботах [3, 6] розглянуто дійснозначний однорідний центрований випадковий процес із незалежними приростами $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$, визначений на стандартному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, та дійснозначна функція $g = (g(t,u), t, u \in \mathbb{R})$, яка задовольняє умову $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du < \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, називається *процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g*. У роботах [8, 9] та монографіях [3, 6] досліджувалися властивості передгауссових процесів дробового ефекту.

У цій роботі розглядається випадок, коли $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ є таким дійснозначним центрованим процесом із некорельованими приростами, що $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Якщо ξ є строго φ-субгауссовим процесом, то породжений ним процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$ називатимемо строго φ-субгауссовим процесом квазідробового ефекту. У статті [25] отримано оцінки розподілів супремумів та умови вибіркової неперевності таких процесів, визначених на компакті. У роботі [1] виведено деякі оцінки розподілів супремумів сепарабельних строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту, визначених на всій дійсній осі. Ті випадки, які не розглядалися раніше, досліджуються у даній статті.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, які далі застосовуються для дослідження властивостей процесів квазідробового ефекту. У розділі 3 наведено означення строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту та обгрунтовано існування таких процесів. Основні результати представлено у розділі 4, зокрема, отримано оцінки для розподілів супремумів строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту та проілюстровано процедуру перевірки виконання відповідних умов на прикладі субгауссового процесу квазідробового ефекту.

2 Необхідні відомості та результати з теорії φ-субгауссових випадкових процесів

У цьому розділі наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ [6, 11].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орлича*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орлича. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ.

Приклад 2.1. Якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 1$, то $\varphi^*(x) = \frac{|x|^q}{q}$, де q таке число, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Якщо $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi^*(x) = (|x| + 1)\ln(|x| + 1) - |x|$.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0.$$

Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [18] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орлича та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — це стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ — N-функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [6] *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \qquad (2.1) \\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned}$$

де $C > 0$ *— деяка стала.*

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega) = \mathrm{Sub}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція

$$H(\varepsilon) := \ln N_{(T,\rho)}(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

де $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини T, тобто, кількість елементів у найменшому ε-покритті цієї множини.

Приклад 2.2. Якщо $T = [a, b]$ та ρ — це евклідова відстань, то для довільного значення $\varepsilon > 0$:

$$\ln\left(\max\left\{\frac{b-a}{2\varepsilon}, 1\right\}\right) \leq H_{(T,\rho)}(\varepsilon) \leq \ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon} + 1\right).$$

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.3. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Теорема 2.2. [2] *Нехай Δ — строго φ-субгауссова сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ у просторі $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ також є строго φ-субгауссовою сім'єю випадкових величин із тією ж визначальною сталою.*

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

Основні результати цієї роботи грунтуються на властивостях φ-субгауссових випадкових процесів, отриманих у роботі [16].

Нехай (T,ρ) — сепарабельний псевдометричний простір, який можна розбити на зліченну кількість компактних множин, котрі позначимо через B_l, $l = \overline{1,\infty}$, тобто $T = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$.

Означення 2.8. Нехай $q = \{q(t), t \in T\}$ — така неперервна функція, що $q(t) > 0$ для всіх $t \in T$. Простір $C(T,q)$ — це простір неперервних функцій f на T таких, що $\sup_{t\in T} q(t)|f(t)| < \infty$. Простір $C_0(\mathbb{R},q)$ — це простір неперервних функцій f таких, що $\sup_{t\in T} q(t)|f(t)| < \infty$ та $q(t)f(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Розглянемо сепарабельний φ-субгауссовий випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$. Припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_l = \{\sigma_l(h), h > 0\}$, що $\sigma_l(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та для цих функцій виконуються такі нерівності

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le h,\\ t,s\in B_l}} \tau_\varphi(X(t)-X(s)) \le \sigma_l(h),\ l=\overline{1,\infty}. \qquad (2.3)$$

Введемо такі позначення:

- $\delta_l = \sup_{t\in B_l} q(t)$,
- w_l – деяка точка з множини B_l,
- $z_l = \tau_\varphi(X(w_l))$,
- $\varkappa_l = \sigma_l\left(\sup_{t\in B_l}\rho(t,w_l)\right)$, $l = \overline{1,\infty}$.

Наступна теорема випливає з леми 3.2 з роботи [16] (с. 113).

Теорема 2.3. *Нехай для всіх $l = \overline{1,\infty}$ виконуються умови:*

$$\int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi,\nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du < \infty, \qquad (2.4)$$

та

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi,\nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du < \infty, \qquad (2.5)$$

де $\theta_{\varphi,\nu}(x) = \frac{\nu(\exp\{x\})}{\varphi^{(-1)}(x)}$, $\nu = \{\nu(u), u \ge 1\}$ – невід'ємна неспадна функція така, що $\nu(\exp\{t\})$ – опукла. Тоді, якщо

$$d = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l z_l < \infty$$

та $\beta = \sup_l \frac{\varkappa_l}{z_l} < \infty$, то для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ маємо нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|q(t)X(t)|\right\} \le$$

$$2\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\delta_l z_l}{d}\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p\right\}$$

$$\times\left(\nu^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du\right)\right)^2$$

$$=: \Gamma_1(\lambda,p). \qquad (2.6)$$

Якщо ж

$$a = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l < \infty$$

та $\gamma = \sup_l \frac{z_l}{\varkappa_l} < \infty$*, то для всіх* $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$*, справедлива нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T}|q(t)X(t)|\right\} \leq$$

$$2\exp\left\{\frac{1-p}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\varphi\left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right) + \varphi\left(\frac{\lambda a}{(1-p)p}\right)p\right\}$$

$$\times\left(\nu^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int\limits_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}(\mathsf{H}_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du\right)\right)^2$$

$$=: \Gamma_2(\lambda,p). \quad (2.7)$$

У обох випадках для всіх $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ *отримуємо відповідну оцінку*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T}|q(t)X(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$\inf_{0<p<1}\inf_{\lambda>0}\Gamma_k(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon\}, \quad k = \overline{1,2}. \quad (2.8)$$

3 Строго φ-субгауссові процеси квазідробового ефекту

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — дійснозначний центрований випадковий процес з некорельованими приростами, визначений на стандартному ймовірнісному просторі, та

$$\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 = t-s, \quad t > s \in \mathbb{R}.$$

Нехай $g = (g(t,u), t,u \in \mathbb{R})$ — дійснозначна функція, яка задовольняє умову:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Будемо називати процес

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ *та функцією відгуку* g, де інтеграл у (3.2) визначений у середньому квадратичному.

Коваріаційна функція процесу X має вигляд

$$\mathsf{E}X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)g(s,u)du, \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

У Лемі 3.1 з роботи [25] доведено, що строго φ-субгауссові процеси вигляду (3.2) існують, а також виведено оцінки для норми такого процесу та норми його приростів.

Лема 3.1. *Нехай* $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — *строго* φ-*субгауссовий випадковий процес із некорельованими приростами та* $\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 = t-s$, $t > s \in \mathbb{R}$. *Тоді процес* $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, *теж є строго* φ-*субгауссовим процесом та для довільних* $t,s \in \mathbb{R}$

$$\tau_\varphi(X(t)) \leq c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du\right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$\tau_\varphi(X(t)-X(s)) \leq c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t,u)-g(s,u))^2du\right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

де c_ξ — *визначальна стала процесу* ξ.

Приклад 3.1. Вінерівський процес $W(t)$, $t \geq 0$, має незалежні прирости, $\mathsf{E}(W(t)-W(s))^2 = t-s$, $t > s \geq 0$, та для $t \in [0,1]$ його можна зобразити у вигляді випадкового ряду

$$W(t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\eta_k, \quad (3.5)$$

де η_k, $k \geq 0$, — незалежні стандартні гауссові випадкові величини (див., наприклад, [10, 5]).

Оскільки $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2} < \infty$, то ряд у зображенні (3.5) збіжний у середньому квадратичному. Якщо замість η_k, $k \geq 0$, у цей розклад підставити незалежні строго φ-субгауссові випадкові величини $\{\xi_k, k \geq 0\}$ такі, що $\mathsf{E}\xi_k^2 = 1\,\forall k \geq 0$, то випадковий процес

$$\xi(t) = t\xi_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\xi_k, \; t \in [0,1],$$

буде строго φ-субгауссовим випадковим процесом із тією ж визначальною сталою, що й для сім'ї $\{\xi_k, k \geq 0\}$ (див. [2]: приклад 2.4 с. 37). При цьому $\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 = t-s$, $t > s \in [0,1]$.

Означення 3.2. Будемо називати процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$ *строго* φ-*субгауссовим процесом квазідробового ефекту*, якщо ξ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом.

4 Оцінювання розподілу супремуму строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту

Нехай $T \equiv \mathbb{R}$ та $\rho(t,s) = |t-s|$, $t, s \in \mathbb{R}$. Розіб'ємо $\mathbb{R}$ на зліченну кількість неперетинних множин: $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l$, де $B_l = [b_l, b_{l+1})$, $b_l < b_{l+1}$, $l = \overline{1,\infty}$.

Теорема 4.1. *Нехай для сепарабельного строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, існують такі функції $r_l = (r_l(h),\ h \geq 0)$, $l = \overline{1,\infty}$, та $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$, що для функції відгуку g виконуються нерівності:*

$$|g(t,u) - g(s,u)| \leq r_l(|t-s|)k(u), \qquad (4.1)$$

де $t, s \in B_l$, $l = \overline{1,\infty}$, $u \in \mathbb{R}$, функції r_l є такими невід'ємними неперервними монотонно зростаючими функціями, що $r_l(h) \to 0$ при $h \to 0$, а функція k є невід'ємною неперервною і задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} k^2(u)du < \infty$.

Нехай існують такі точки $w_l \in [b_l, b_{l+1})$, $l = \overline{1,\infty}$, і неперервна функція $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$, $0 < q(t) < 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, що виконуються такі умови:

$$\int\limits_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du < \infty, \qquad (4.2)$$

та

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du < \infty, \qquad (4.3)$$

де $\theta_{\varphi,\nu}(x) = \frac{\nu(\exp\{x\})}{\varphi^{(-1)}(x)}$, $\nu = \{\nu(u), u \geq 1\}$ – невід'ємна неспадна функція така, що $\nu(\exp\{t\})$ – опукла, $c = \left(c_\xi \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. Тоді:

i) якщо

$$d = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l z_l < \infty \quad \text{та} \quad \beta = \sup_l \frac{\varkappa_l}{z_l} < \infty,$$

то для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ маємо нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)|\right\} \leq$$

$$2\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\delta_l z_l}{d}\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p\right\}$$

$$\times\left(\nu^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right)\right)^2$$

$$=: \hat{\Gamma}_1(\lambda, p); \qquad (4.4)$$

ii) якщо ж

$$a = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l < \infty \quad \text{та} \quad \gamma = \sup_l \frac{z_l}{\varkappa_l} < \infty,$$

то для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$, справедлива нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)|\right\} \leq$$

$$2\exp\left\{\frac{1-p}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\varphi\left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right) + \varphi\left(\frac{\lambda a}{(1-p)p}\right)p\right\}$$

$$\times\left(\nu^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right)\right)^2$$

$$=: \hat{\Gamma}_2(\lambda, p). \qquad (4.5)$$

У обох випадках для всіх $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ отримуємо відповідну оцінку розподілу супремуму строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту X:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$\inf_{0<p<1}\inf_{\lambda>0}\hat{\Gamma}_k(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon\}, \quad k = \overline{1,2}. \qquad (4.6)$$

Доведення. Якщо виконується умова (4.1), то з того, що X є строго φ-субгауссовим процесом, випливає, що для довільного значення $h \geq 0$

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h,\\ t,s\in B_l}} \tau_\varphi(X(t)-X(s)) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{|t-s|\leq h,\\ t,s\in B_l}} c_\xi\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(g(t,u)-g(s,u))^2du\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{|t-s|\leq h,\\ t,s\in B_l}} c_\xi\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(r_l(|t-s|)k(u))^2du\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{\substack{|t-s|\leq h,\\ t,s\in B_l}} c_\xi r_l(|t-s|)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq c_\xi r_l(h)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}} =: \sigma_l(h). \qquad (4.7)$$

Позначимо $c := \left(c_\xi \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. Тоді $\sigma_l(h) = c^{-1}r_l(h)$, $h \geq 0$, та $\sigma_l^{(-1)}(u) = r_l^{(-1)}(cu)$, $u \geq 0$. Відповідно, коли $B_l = [b_l, b_{l+1})$, $b_l < b_{l+1}$, $l = \overline{1, \infty}$, функцію $H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)$, $u \geq 0$, можна оцінити так:

$$H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right) \leq \ln\left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} + 1\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1\right), \; l = 1, 2, \ldots \quad (4.8)$$

Оскільки функція $\theta_{\varphi,\nu}(x)$ — неспадна, то зі збіжності інтеграла $\int\limits_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1\right)\right) du$ випливає збіжність інтеграла в умові (2.4) теореми 2.3. Зі збіжності ряду в умові (4.3) випливає виконання умови (2.5). Отже, якщо сепарабельний φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту X задовольняє умови (4.1)–(4.3), то для нього виконуються всі умови теореми 2.3 і, відповідно, справедливі оцінки (2.6) та (2.7).

З нерівності (4.8) та властивостей функції $\theta_{\varphi,\nu}(x)$ для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ отримуємо у випадку i) таку оцінку:

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)|\right\} \leq \Gamma_1(\lambda, p) \leq$$
$$2\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\delta_l z_l}{d}\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p\right\}$$
$$\times\left(\nu^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int\limits_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right)\right)^2$$
$$= \hat{\Gamma}_1(\lambda, p),$$

а у випадку ii) будемо мати

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)|\right\} \leq \Gamma_2(\lambda, p) \leq$$
$$2\exp\left\{\frac{1-p}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\varphi\left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right) + \varphi\left(\frac{\lambda a}{(1-p)p}\right)p\right\}$$
$$\times\left(\nu^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int\limits_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right)\right)^2$$
$$= \hat{\Gamma}_2(\lambda, p).$$

З наведеного вище та нерівності Чебишева випливають оцінки (4.6). □

Наслідок 4.1. *Якщо строго φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, є неперервним та задовольняє умови теореми 4.1, то з імовірністю 1 він належить зваженому простору неперервних функцій $C(\mathbb{R}, q)$, де $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ – така неперервна додатна «вагова» функція, що $q(t) < 1$, $t \in \mathbb{R}$.*

Приклад 4.1. Проілюструємо процедуру перевірки виконання умов Теореми 4.1.

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R}) \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$ – строго φ-субгауссовий сепарабельний випадковий процес із некорельованими приростами, $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Це означає, що ξ є строго субгауссовим процесом. При цьому $\mathsf{E}\xi^2(t) = \tau^2(\xi(t))$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $\tau(\cdot) = \tau_\varphi(\cdot)$ — це норма у просторі субгауссових випадкових величин $\mathrm{Sub}(\Omega)$ [6]. Тоді $c_\xi = 1$, $\varphi^{(-1)}(v) = \sqrt{2v}$, $v \geq 0$, та $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)} = \frac{v}{\sqrt{2v}} = \sqrt{\frac{v}{2}}$.

Нехай дійснозначна функція $g = (g(t,u), t, u \in \mathbb{R})$ має вигляд

$$g(t,u) = \frac{\sin(tu)}{|u|^\delta + 1}, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad \delta > 1. \quad (4.9)$$

Вона задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(tu)}{(|u|^\delta + 1)^2}du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, є коректно визначеним сепарабельним строго субгауссовим процесом квазідробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g, причому $\tau^2(X(t)) = \mathsf{E}X^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Приріст функції g можна оцінити так:

$$|g(t,u) - g(s,u)| = \frac{|\sin(tu) - \sin(su)|}{|u|^\delta + 1} =$$
$$\frac{\left|2\sin\frac{u(t-s)}{2}\cos\frac{u(t-s)}{2}\right|}{|u|^\delta + 1} \leq 2\left|\frac{u(t-s)}{2}\right|^\alpha\frac{1}{|u|^\delta + 1} =$$
$$\frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha|t-s|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = |t-s|^\alpha\cdot\frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = r(t-s)k(u),$$

де $r(t-s) = |t-s|^\alpha$, $k(u) = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta+1}$, $t, s, u \in \mathbb{R}$, $\delta > 1$, $\alpha = \min(1, \delta - 1) \in (0, 1]$.

Функція $r(h) = |h|^\alpha$, $h \in \mathbb{R}$, є невід'ємною неперервною монотонно зростаючою та $r(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Функція $k(u) = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta+1}$, $u \in \mathbb{R}$, невід'ємна неперервна і

$$\int_{\mathbb{R}} k^2(u)du = \int_{\mathbb{R}}\frac{2^{2-2\alpha}|u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2}du < \infty.$$

Отже, функція g задовольняє умову (4.1).

Розглянемо процес X на інтервалі $[0,+\infty)$. Виберемо розбиття $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{l=0}^{\infty}[b_l,b_{l+1})$ так, щоб послідовність $\{b_l,\, l = 0,1,2,\ldots\}$ була монотонно зростаючою, $b_0 = 0$ та $\sup_{l\geq 0}\frac{b_l}{b_{l+1}} = b < 1$. Нагадаємо, що w_l – деяка точка з $[b_l,b_{l+1})$. Нехай $w_l = b_l$, $l = 0,1,2,\ldots$. Тоді $\varkappa_l = \sigma_l\left(\sup_{t\in B_l}\rho(t,w_l)\right) = \sigma_l\left(\sup_{t\in[b_l,b_{l+1})}|t-b_l|\right) = c^{-1}(b_{l+1}-b_l)^{\alpha}$, оскільки $\sigma_l(h) = c^{-1}r_l(h) = c^{-1}h^{\alpha}$, $h\geq 0$.

Далі, $r_l^{(-1)}(cu) = (cu)^{1/\alpha}$,

$$\nu\left(\exp\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)\right) = $$

$$= \nu\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right),$$

$$\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right) = $$

$$= \sqrt{2\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right)\right)},$$

$$\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right) = $$

$$= \frac{\nu\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right)\right)}{\sqrt{2\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right)\right)}}.$$

Нехай $\nu(x) = \ln x$, $x\geq 1$. Тоді

$$\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right) = $$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Інтеграл в умові (4.2) буде збіжним, якщо $\alpha = \min(1,\delta-1) > \frac{1}{2}$, тобто, треба обирати $\delta > \frac{3}{2}$:

$$\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du \leq$$

$$\leq \int_0^{p\varkappa_l}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}du = $$

$$= \frac{(b_{l+1}-b_l)^{\frac{1}{2}}}{2c^{1/2\alpha}}\int_0^{p\varkappa_l}\frac{1}{u^{1/2\alpha}}\,du = $$

$$= \frac{(b_{l+1}-b_l)^{\frac{1}{2}}}{2c^{1/2\alpha}}\frac{(p\varkappa_l)^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{1-\frac{1}{2\alpha}} = $$

$$= \frac{(b_{l+1}-b_l)^{\frac{1}{2}}}{2c^{1/2\alpha}}\frac{(pc^{-1}(b_{l+1}-b_l)^{\alpha})^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{1-\frac{1}{2\alpha}} = $$

$$= \frac{(b_{l+1}-b_l)^{\alpha}p^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})} < \infty, \quad \alpha\in(\frac{1}{2};1].$$

Оцінимо ряд в умові (4.3):

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,\nu}\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\frac{(b_{l+1}-b_l)^{\alpha}p^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})} = $$

$$= \frac{p^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l(b_{l+1}-b_l)^{\alpha}.$$

Тепер оберемо послідовність $\{b_l,\, l=0,1,2,\ldots\}$ так: $b_0 = 0$, $b_l = e^l$, $l = 1,2,\ldots$. У випадку такого розбиття існує щонайменше одна неперервна функція $q = \{q(t), t\in[0,+\infty)\}$: $q(t)\in(0,1)\,\forall t\in[0,+\infty)$, яка дає нам можливість забезпечити виконання умови (4.3):

$$q(t) = \begin{cases}\frac{1}{e^{\alpha+\mu}}, t\in[0,e),\\ \frac{1}{t^{\alpha+\mu}}, t\in[e,+\infty),\end{cases}\qquad \mu>0.$$

Для цієї функції $\delta_0 = e^{-(\alpha+\mu)}$, $\delta_l = e^{-(\alpha+\mu)l}$, $l = 1,2,\ldots$ та

$$\frac{p^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l(b_{l+1}-b_l)^{\alpha} = $$

$$= \frac{p^{1-\frac{1}{2\alpha}}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})}\sum_{l=1}^{\infty}e^{-(\alpha+\mu)l}(e^{l+1}-e^l)^{\alpha} = $$

$$= \frac{p^{1-\frac{1}{2\alpha}}(e-1)^{\alpha}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})}\sum_{l=1}^{\infty}e^{-\mu l} = $$

$$= \frac{p^{1-\frac{1}{2\alpha}}(e-1)^{\alpha}}{2c(1-\frac{1}{2\alpha})(e^{\mu}-1)} < \infty,$$

отже, умова (4.3) теж виконується.

Сепарабельний строго субгауссовий процес квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}g(t,u)d\xi(u)$ з функцією відгуку вигляду (4.9) задовольняє умови пункту ii) Теореми 4.1. Покажемо це: $z_l = \tau(X(w_l)) = (\mathsf{E}X^2(b_l))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(e^l u)}{(|u|^{\delta}+1)^2}du\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\varkappa_l = c^{-1}(b_{l+1} - b_l)^\alpha = c^{-1}e^{\alpha l}(e-1)^\alpha$, $l = 1, 2, \ldots$, де $c = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{-\frac{1}{2}}$, оскільки $c_\xi = 1$. Звідси

$$a = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \varkappa_l = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(\alpha+\mu)l} c^{-1} e^{\alpha l}(e-1)^\alpha =$$

$$= c^{-1}(e-1)^\alpha \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\mu l} = \frac{(e-1)^\alpha}{c(e^\mu - 1)} < \infty,$$

$$\gamma = \sup_l \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(e^l u)}{(|u|^\delta+1)^2} du\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\alpha l}(e-1)^\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{2-2\alpha}|u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta+1)^2} du\right)^{\frac{1}{2}}} \le$$

$$\le \sup_l \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^l u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta+1)^2} du\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\alpha l}(e-1)^\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{2-2\alpha}|u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta+1)^2} du\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sup_l \frac{e^{\alpha l}}{2^{1-\alpha} e^{\alpha l}(e-1)^\alpha} = \frac{1}{2^{1-\alpha}(e-1)^\alpha} < \infty.$$

Отже, для процесу квазідробового ефекту X виконуються умови (4.1)–(4.3) та умови пункту ii) Теореми 4.1, тому для нього справедлива оцінка (4.6) при $k = 2$ та з імовірністю 1 він належить зваженому простору неперервних функцій $C(\mathbb{R}^+, q)$ з ваговою функцією

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\alpha+\mu}}, t \in [0, e), \\ \frac{1}{t^{\alpha+\mu}}, t \in [e, +\infty), \end{cases} \quad \mu > 0.$$

Висновки

У роботі деякі результати, отримані для випадкових процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, застосовано для дослідження властивостей процесів квазідробового ефекту. Виведено нові оцінки для розподілів супремумів строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту. Сформульовано умови належності таких процесів зваженим просторам неперервних функцій. Проілюстровано процедуру перевірки виконання умов відповідної теореми на прикладі субгауссового процесу квазідробового ефекту.

Список використаних джерел

1. *Василик О.І.* Властивості строго φ-субгауссових процесів квазі-дробового ефекту, Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2019. – Вип. 101. – С. 49–62.

2. *Василик О.І.* φ-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.

3. *Дарійчук І.В.* Випадкові процеси з просторів Орліча / І.В. Дарійчук, Ю.В. Козаченко, М.М. Перестюк. – Чернівці: “Золоті литаври”, 2011. – 212 с.

4. *Козаченко Ю.В.* Вибіркова неперервність та оцінювання розподілів приростів сепарабельних випадкових процесів з класу $V(\varphi, \psi)$, визначених на компакті / Ю.В. Козаченко, О.І. Василик // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004. – №2. – С.45 – 50.

5. *Козаченко Ю.В.* Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. – Київ: ТОВ “СІК ГРУП Україна ”, 2016. – 216 с.

6. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

7. *Campbell N.* The study of discontinuous phenomena / Proc. Cambr. Phil. Soc., 1909. – 15. – P. 117–136; Discontinuities in light emission / Proc. Cambr. Phil. Soc., 1909. – 15. – P. 310–328.

8. *Dariychuk I. V.* Some properties of pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko // Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts, Lviv, Ukraine, 2009. – С. 57–59.

9. *Dariychuk I. V.* The distribution of the supremum of Θ-pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2010. – No. 80. – P.85–100.

10. *Gikhman I. I.* Introduction to the Theory of Random Processes / I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. – M.: Nauka, 1977. – 570p.

11. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.

12. Koops D. T. Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities / D. T. Koops, O. J. Boxma, and M. R. H. Mandjes // Queueing Systems, August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.

13. *Kozachenko Yu. V.* Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 1985. – No. 32. – P.42–53.

14. *Kozachenko Yu. V.* On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of φ-sub-Gaussian Random Process / Yu. V. Kozachenko, M. M. Perestyuk, O. I. Vasylyk // Random Operators and Stochastic Equations, 2006. – 14, no.3. – P.209–232.

15. Kozachenko Yu. V. On the distribution of suprema of $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random processes / Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik // Theory of Stochastic Processes, 1998. – 4(20), issue 1–2. – P.147–160.

16. *Kozachenko Yu. V.* Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$ / Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2001. – 63. – P.109–121.

17. *Kozachenko Yu.* Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function /Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk // Random Oper. Stoch. Equ., 2005. – 13, no. 2. – P.111–128.

18. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.

19. *Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise // The Bell System Technical Journal, 1944. – 23. – P.282–332.

20. *Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise // The Bell System Technical Journal, 1945. – 24. – P.46–156.

21. *Rice J.* On generalized shot noise // Advances in Applied Probability, 1977. – 9. – P.553–565.

22. *Schmidt T.* Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes // Risks, ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2014. – 2, Iss. 1. – P.3–24. – http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003.

23. *Schmidt T.* Shot-noise processes in finance // arXiv:1612.06616v1, 2016.

24. *Schottky W.* Uber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitatsleitern // Annalen der Physik, 1918. – 362(23). – P.541–567.

25. *Vasylyk O. I.* Strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes // Statistics, Optimization and Information Computing, 2017. – 5. P.109–120.

References

1. VASYLYK, O.I. (2019)Properties of strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes, *Teoriya Imovirnostei ta Matematychna Statystyka*, 2(101), p. 49–62.

2. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

3. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V., and PERESTYUK, M.M. (2011) *Stochastic processes from Orlicz spaces.* Chernivtsi: "Zoloti lytavry", 212 p. (In Ukrainian)

4. KOZACHENKO, YU. V., VASYLYK, O. I. (2004) Sample pathes continuity and estimates of distributions of the increments of separable stochastic processes from the class $V(\varphi, \psi)$, defined on a compact set, *Bulletin of the University of Kiev, Series: Physics and Mathematics*. Iss. 2, p.45–50. (In Ukrainian)

5. KOZACHENKO, YU., PASHKO, A. (2016) *Accuracy and Reliability of Simulation of Random Processes and Fields in Uniform Metrics*. Kyiv: TOV "SIK GRUP Ukraina ", 216 p. (In Ukrainian)

6. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.

7. CAMPBELL, N. (1909) The study of discontinuous phenomena. Proc. *Cambr. Phil. Soc.* 15, 1p.17-–136; Discontinuities in light emission. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 15, p.310—328.

8. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2009) Some properties of pre-Gaussian shot noise processes. *Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts.* Lviv, Ukraine, p.57–59.

9. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2010) The distribution of the supremum of Θ-pre-Gaussian shot noise processes. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* No.80, p.85–100.

10. GIKHMAN, I. I., SKOROKHOD, A. V. (1977) *Introduction to the Theory of Random Processes*. M.: Nauka, 570p.

11. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.

12. KOOPS, D. T., BOXMA, O. J. AND MANDJES, M. R. H. (2016) Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities. *Queueing Systems.* August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.

13. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type, *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* No. 32, p.42–53.

14. KOZACHENKO, YU. V., PERESTYUK, M. M., VASYLYK, O. I. (2006) On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of φ-sub-Gaussian Random Process. *Random Operators and Stochastic Equations.* 14, no.3, p.209–232.

15. KOZACHENKO, YU. V., VASILIK, O. I. (1998) On the distribution of suprema of $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random processes. *Theory of Stochastic Processes.* 4(20), issue 1–2, p.147–160.

16. KOZACHENKO, YU. V., VASILIK, O. I. (2001) Stochastic processes of the classes $V(\varphi,\psi)$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 63, p. 109–121.

17. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R., VASYLYK, O. (2005) Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Oper. Stoch. Equ.* 13, no. 2, p.111–128.

18. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.

19. RICE, S. O. (1944) Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal.* 23, p.282–332.

20. RICE, S. O. (1945) Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal.* 24, p.46–156.

21. RICE, J. (1977) On generalized shot noise. *Advances in Applied Probability.* 9, p.553–565.

22. SCHMIDT, T. (2014) Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes, *Risks.* ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2, Iss. 1, p.3–24. http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003.

23. SCHMIDT, T. (2016) Shot-noise processes in finance. arXiv:1612.06616v1.

24. SCHOTTKY, W. (1918) Uber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitatsleitern. *Annalen der Physik.* 362(23), p.541–567.

25. VASYLYK, O. I. (2017) Strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 5, p.109–120.

Received: 02.03.2019