Журнал обчислювальної та прикладної математики
2022, № 2
Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.6

MSC 34A34, 65D30

TWO-SIDED METHODS FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. M. Pelekh, A. V. Kunynets, R. Ya. Pelekh

Lviv Polytechnic National University, Ukraine, Lviv,
E-mail: yaroslav.m.pelekh@lpnu.ua, andrii.v.kunynets@lpnu.ua, pelekh.r.ya@gmail.com

ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Я. М. Пелех, А. В. Кунинець, Р. Я. Пелех

Національний університет «Львівська політехніка», Україна, Львів,
E-mail: yaroslav.m.pelekh@lpnu.ua, andrii.v.kunynets@lpnu.ua, pelekh.r.ya@gmail.com

Abstract. Using the continued fractions and the method of constructing Runge-Kutta methods, numerical methods for solving the Cauchy problem for nonlinear Volterra non-linear integrodifferential equations are proposed. With appropriate values of the parameters, one can obtain an approximation to the exact solution of the first and second order of accuracy. We found a set of parameters for which we obtain two-sided calculation formulas, which at each step of integration allow to obtain the upper and lower approximations of the exact solution.
Keywords: Numerical methods, Initial value problem, Volterra integro-differential equations, two-sided approximation.

Анотація. Використовуючи апарат неперервних дробів та методику побудови методів Рунге-Кутти, запропоновано чисельні методи розв'язання задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра. При відповідних значеннях параметрів можна одержувати наближення до точного розв'язку першого та другого порядку точності. Запропоновано множину параметрів, при яких отримуємо двосторонні розрахункові формули, які на кожному кроці інтегрування дозволяють отримувати верхнє і нижнє наближення до точного розв'язку.
Ключові слова: числові методи, задача Коші, інтегро-диференціальне рівняння Вольтера, двосторонні методи.

1. Вступ

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок) у загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. При розв'язуванні таких задач важливо, щоб основні властивості розв'язку добре відображались наближеними методами.

В прикладній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, мають слабку чутливість до похибок заокруглень, вірно відображають основні властивості розв'язків досліджуваних задач. При розрахунку задач теорії управління, в'язкопружності, гідроакустики, епідеміології, динаміці росту населення і т. д., виникає потреба знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, але й отримувати оцінку похибки результату.

Одним з ефективних способів побудови таких наближень є ланцюгові дроби. Процес їх обчислень є циклічним і легко програмується.

2. Постановка задачі

Розглянемо на відрізку $I_L : [x_0, x_0 + L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds\right], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \quad L < \infty. \tag{2}$$

Припустимо, що розв'язок (1)–(2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. Зауважимо, що рівняння (1) можна перетворити в еквівалентну систему

$$u'(x) = F[x, u(x), z(x)], \quad z(x) = \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds. \tag{3}$$

Пропонуються обчислювальні схеми, які дають можливість на кожному кроці інтегрування отримувати наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) першого та другого порядку точності.

Виписано значення параметрів, при яких отримуємо двосторонні наближення до точного розв'язку.

3. Побудова методів Рунге-Кутта

На відрізку I_L введемо нерівномірну сітку $\sigma_h = \{x_i \in [x_0, x_N],\ x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$.

Використовуючи апарат ланцюгових дробів [1–3] та теорію побудови методів Рунге-Кутта [4, 5], наближений розв'язок задачі (1)–(2) в точці

$x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу [6, 7]:

$$u_1^{[k,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}}. \tag{4}$$

При різних значеннях k і l отримуємо наближення $(k+l)-$го порядку точності до точного розв'язку задачі (1)–(2).

Наприклад, при $k + l = 2$ $(k = 1, 2;\ l = 0, 1)$

$$c_0 = u_0, \quad d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0}, \quad d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0}, \quad d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2},$$

$$\delta_i = h\sum_{j=1}^{2} a_{ij}k_j, \quad i = 1, 2, \quad k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0], \tag{5}$$

$k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1]$, $\quad K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1]$, де $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_{21}, \gamma$ — невідомі параметри.

Розвинення розв'язку задачі (1)–(2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &= u(x_0) + h(F)_0 + \frac{1}{2}h^2\left\{(F_x)_0 + (F_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g)_0\right\} + \\ &+ \frac{h^3}{6}\big\{(F_{xx})_0 + 2(F_{xu})_0(F)_0 + (F_{uu})_0(F^2)_0 + (F_x)_0(F_u)_0 + \\ &+ (F_{zz})_0(g^2)_0 + 2(F_{xz})_0(g)_0 + 2(F_{uz})_0(F)_0(g)_0 + 2(F_z)_0(g_x)_0 + \\ &+ (F_z)_0(g_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g_s)_0 + (F_u^2)_0(F)_0 + (F_u)_0(F_z)_0(g)_0\big\} + O(h^4). \end{aligned} \tag{6}$$

Розглянемо формули (4) і (5) при $k = 1,\ l = 1$:

$$u_1^{[1,1]} = \cfrac{u_0}{1 - \cfrac{h\cfrac{a_{11}k_1 + a_{12}k_2}{u_0}}{1 + \cfrac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2 - u_0(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{u_0(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}}}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0], \quad k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, u_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1], \\ &K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1]. \end{aligned} \tag{8}$$

Невідомі параметри a_{ij}, α_j $(i = 1, 2; j = 1, 2)$, β_{21}, $\gamma_{21}, \alpha, \beta, \gamma$ виберемо з умови, щоб $R_{[1,1]} = \left|u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]}\right| = O(h^3)$. Для цього спочатку перетворимо формулу (7) до вигляду:

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \cfrac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}{1 - \cfrac{a_{21}k_1 + a_{22}k_2}{a_{11}k_1 + a_{12}k_2}}, \tag{9}$$

або

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \frac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2}{(a_{11} - a_{21})k_1 + (a_{12} - a_{22})k_2} = u_0 + \frac{P_{[1,1]}}{Q_{[1,1]}}. \tag{10}$$

Представлення формули (7) у вигляді (10) дає можливість проводити розрахунки при $u_0 \equiv 0$, а також, як показують подальші викладки, якщо $a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = 0$, то $\left|u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]}\right| = O(h^3)$.

Знайшовши різницю $u(x_0+h)-u_1^{[1,1]}$ та прирівнявши коефіцієнти чисельника при степенях h і h^2 до нуля, отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22} - (a_{11} + a_{12})^2 = 0, \\ (a_{11} - a_{21})\alpha_1 + (a_{12} - a_{22})\alpha_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22})- \\ -2(a_{11} + a_{12})(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2) = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\,\beta_{21} - 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\beta_{21} = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\,\gamma_{21} - 2(a_{11} - a_{12})a_{12}\gamma_{21} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

При цьому локальна похибка матиме вигляд: $R_{[1,1]} = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = O(h^3)$. Оскільки $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ не входить в систему (11), то їх можна вибрати довільними, наприклад, покласти $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Поклавши в (11) $a_{11} + a_{12} = 1$, отримаємо дві множини розв'язків даної системи:

I. $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12},\ a_{21} = -a_{22},\ \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2(a_{12} + a_{22})}, \tag{12}$$

де $a_{11},\ a_{12}$ — параметри.

II. $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1 - a_{12},\ a_{21} = a_{12} + \frac{2\alpha_1 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ &a_{22} = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} - a_{12},\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}, \end{aligned} \tag{13}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, a_{12}$ — довільні числа ($\alpha_1 \neq 1$).

Для всіх визначених вище параметрів $(a_{21}k_1 + a_{22}k_2) \cong hu''(x_0)$. Взявши відповідно один і два поверхи ланцюгового дробу (9), отримаємо методи першого та другого порядку точності.

Якщо у формулах (7)–(8) покласти $a_{21} = a_{22} = 0$, то отримаємо традиційні методи Рунге-Кутта другого порядку точності [8] для розв'язання задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра.

4. Побудова двосторонніх розрахункових формул

У зв'язку з відсутністю ефективного способу оцінки похибки наближеного розв'язку виникла необхідність розробки двосторонніх методів [9].

Побудуємо розрахункові формули, які дають двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2).

Поклавши в системі (11) $a_{11} + a_{12} = 1$, і прирівнявши друге, третє та четверте рівняння відповідно до $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, отримаємо розрахункову формулу, похибка якої в точці $x = x_1 = x_0 + h$ має вигляд:

$$R_{[1,1]} = \omega_1 h^2 (F_x)_0 + \omega_2 h^2 (F)_0 (F_u)_0 + \omega_3 h^2 (F_z)_0 (g)_0 + O(h^3).$$

Зауважимо, що при різних значеннях ω_i $(i = 1, 2, 3)$ можна побудувати двосторонні наближення на різних класах функцій.

Поклавши, наприклад, $\omega_2 = \omega_3 = \omega$ і $\omega_1 = 0$, отримаємо наступні розв'язки:

$$\begin{aligned} 1.\quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{11} = 1 + a_{22} + \frac{2\omega - 1}{2\beta_{21}}, \quad a_{12} = \frac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}} - a_{22}, \\ & a_{21} = -a_{22}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $a_{22},\ \beta_{21} (\beta_{21} \neq 0)$ — параметри.

$$\begin{aligned} 2.\quad & \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1 - 2\alpha_1}{1 - 2\omega}\beta_{21}, \quad a_{11} = 1 + a_{22} + \frac{2\omega - 1}{2\beta_{21}}, \quad a_{21} = -a_{22}, \\ & a_{12} = \frac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}} - a_{22}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $a_{22}, \alpha_1,\ \beta_{21} (\beta_{21} \neq 0)$ — параметри.

При цих значеннях параметрів

$$R_{[1,1]}(\omega_2 = \omega_3 = \omega) = \omega h^2 [(F)_0 (F_u)_0 + (F_z)_0 (g)_0] + O(h^3).$$

У формулах (14) параметри $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{21}, \gamma_{21}$ не містять ω. А це означає, що розрахункові формули (7)–(8) при цих параметрах дозволяють отримувати верхні та нижні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) без додаткових звертань до правої частини рівняння (1). Тобто, використовуючи тільки два звертання ($k_1,\ k_2$) до правої частини інтегро-диференціального рівняння, можна отримати розрахункову формулу другого порядку точності, а також двосторонні наближення першого порядку точності до точного розв'язку.

Для знаходження наближень у наступних точках x_n $(n \geq 2)$ користуємося способом рухомого початку. Представивши рівняння (1) у вигляді

$$u'(x) = F[x, u(x), w_n(x) + W(x)],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g(x, s, u(s)) ds, \quad W(x) = \int_{x_n}^{x} g(x, s, u(s)) ds,$$

отримаємо задачу з новим початком інтегрування (x_n), для розв'язування якої використовуються формули виду (7)–(8), причому наближення до $w_n(x)$ знаходимо за допомогою квадратурних формул.

5. Висновки

Виведено розрахункові формули розв'язування початкової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. При відповідних значеннях параметрів можна отримувати наближення до точного розв'язку задачі Коші (1)–(2) порядку $O(h^2)$ і $O(h^3)$. Знайдено множину параметрів, при яких можна отримати двосторонні розрахункові формули без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

Пара формул, що відповідають двом значенням, які відрізняються лише знаком, складають розрахункові формули двостороннього методу. Одна з них буде давати верхнє наближення до точного розв'язку, а інша — нижнє наближення. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень. Модуль піврізниці цих наближень дає похибку методу.

Модульний характер запропонованих методів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати декілька наближень до точного розв'язку.

Література

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения. М.: Мир. 1986. 502 с.
2. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М.: Мир. 1985. 416 с.
3. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М.: Наука. 1983. 312 с.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Том II. М.: Наука. 1977. 400 с.
5. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1979. 312 с.
6. Пелех Я. М., Будз І. С., Кунинень А. В., Філь Б. М. Методи розв'язування початкової задачі з оцінкою головного члена локальної похибки. *Вісник Львівського університету. Серія прикладної математики та інформатики.* 2019. Вип. 27. С. 75–88.
7. Пелех Я. М., Кунинень А. В., Берегова Г. І., Магеровська Т. В. Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою локальної похибки. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2021. Вип. 33. С. 88–92.
8. Coroian I. Asupra metodei Runge-Kutta-Fehlberg, pentru ecuatia integrala neliniara de tip Volterra. *Stud. Cerc. Math.* 1974. Vol. 26. No 4. P. 505–511.
9. Добронец Б. С., Шайдуров В. В. Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука. 1990. 206 с.

Надійшла: 22.09.2022 / Прийнята: 10.10.2022