Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 532.685

MSC 76S05

RICHARDS–KLUTE EQUATION: THE STATE OF THE ART

V. A. Kolesnykov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com.

РІВНЯННЯ РІЧАРДСА–КЛЮТА: ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

В. А. Колесников

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com.

Abstract. The article is dedicated to the Richards–Klute equation. A derivation of this equation and several forms of its notation are given. Analytical methods for solving the equation are analyzed. The current state and directions of theoretical research are described. The main numerical methods for solving the equation are presented and the methods of time and space discretization used in them are analyzed. The list of programs for numerical modeling of the Richards–Klute equation is given. Their comparative analysis was carried out. Possible areas of further research are mentioned.
Keywords: Mathematical simulation, Analytical methods, Numerical methods, Software, Richards–Klute equation.

Анотація. Стаття присвячена рівнянню Річардса–Клюта. Наведені вивід цього рівняння та декілька форм його запису. Проаналізовано аналітичні методи розв'язання рівняння. Описаний сучасний стан та напрямки теоретичних досліджень. Наведені основні чисельні методи розв'язання рівняння та проаналізовані використовувані в них методи дискретизації часу і простору. Наведений список програм для чисельного моделювання рівняння Річардса–Клюта. Проведено їх порівняльний аналіз. Сформульовані можливі напрямки подальших досліджень.
Ключові слова: математичне моделювання, аналітичні методи, чисельні методи, програмне забезпечення, рівняння Річардса–Клюта.

1. Вступ

Задача масопереносу у пористому середовищі з межею насичення є однією з важливих задач математичної фізики. За допомогою неї моделюють процеси зрошення та осушення, розповсюдження корисних речовин у ґрунті, її також активно використовують у гідрології та при побудові іригаційних систем. Зазвичай її моделюють за допомогою рівняння Річардса–Клюта, що було виведене у першій половині 20-го сторіччя. За своєю природою воно є нелінійним еліптико-параблічним рівнянням. Цьому рівнянню була присвячена низка робіт: як закордонних, так і вітчизняних. Деякі з них стосувалися аналітичного виводу розв'язку рівняння, проте через його надзвичайну складність, вдалося зробити це лише для певної кількості часткових випадків.

З розповсюдженням обчислювальних машин збільшився інтерес до чисельного розв'язання рівняння Річардса–Клюта і у цій області були отримані певні результати, що суттєво розширили можливості моделювання насичено-ненасиченого потоку. Також досліджувалася обернена задача, або задача керування для рівняння Річардса–Клюта, яка полягає у знаходженні оптимальної потужності джерел для отримання заданого рівня насичення середовища. Зрозуміло, що результати цих досліджень особливо ціняться у сільському господарстві. Дана стаття містить аналіз основних результатів дослідження рівняння Річардса–Клюта: як аналітичних (розділ 2), так і за допомогою комп'ютерного моделювання (розділ 3). Також у розділі 4 міститься огляд моделей та програмного забезпечення, що найчастіше використовується для моделювання масопереносу у пористому середовищі.

2. Рівняння Річардса–Клюта

Рівняння Річардса для моделювання масопереносу у пористих середовищах було вперше використане у роботах Річардсона [1] та Річардса [2] на початку минулого сторіччя. Для його виводу скористаємося законом Дарсі (експериментально доведений у [3] та теоретично у [4-7]) для потоку рідини через ізотропне пористе середовище:

$$U = -K\nabla H, \tag{1}$$

де U — швидкість векторного потоку (м/с), K — водопроникність (м/с) середовища (залежить від насиченості), H — повний потенціал напору (м), сума потенціалу гідравлічного тиску h та гравітаційних сил, причому останні направлені вздовж позитивного напрямку осі z.

Підставляючи (1) у фундаментальну формулу балансу для руху рідини

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot U + s, \tag{2}$$

де θ — насиченість (безрозмірна), s — інтенсивність джерел (1/с, можуть бути від'ємними у випадку стоків), отримаємо примітивну, або змішану форму рівняння Річардса-Клюта:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K\nabla H) + s. \tag{3}$$

Рівняння (3) хоч і виведене за певних припущень стосовно рідини та середовища, все ж досить загальне і ефективно описує рух рідини у багатьох випадках. Проте така форма запису не дуже зручна для подальшої дискретизації та чисельного розв'язання рівняння. Якщо ж розглянути у якості основної змінної потенціал тиску h, то можна записати рівняння (3) у дещо іншій, так званій напірній формі:

$$C\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K\nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z} + s, \tag{4}$$

де $C = \partial\theta/\partial h$ — вологоємкість середовища (1/м). У такому вигляді стає очевидною еліптико-параболічна природа рівняння Річардса–Клюта, оскільки коефіцієнт C у лівій частині (4) обертається в нуль на повністю насиченій частині простору, тим самим рівняння стає еліптичним. Взагалі кажучи, рівняння Річардса є нелінійним виродженим еліптико-параболічним рівнянням у часткових похідних [8]. Звідси виводиться одна з інтерпретацій рівняння Річардса–Клюта, а саме розділення досліджуваної області на дві підобласті з рухомою границею між ними, причому в одній з підобластей рівняння має еліптичний тип, в іншій — параболічний, а на границі розв'язки повинні бути узгодженими. Така постановка задачі зводить проблему розв'язку рівняння Річардса–Клюта до класу задач Стефана [9].

З іншого боку, рівняння (3) можна також розписати та отримати рівняння:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla \theta) + \frac{\partial K}{\partial z} + s, \tag{5}$$

де $D = K/C$ — гідравлічна дифузійність середовища (м2/с) — інша фізична величина, яку можна обчислювати експериментально.

Кожне з рівнянь (3)-(5) має свої переваги з теоретичної або практичної точок зору та нарівні з іншими використовується у теоретичних дослідженнях та для розробки чисельних методів моделювання масопереносу у пористих середовищах.

3. Сучасний стан аналітичних методів розв'язування рівняння Ричардса–Клюта.

В силу нелінійності рівняння Річардса–Клюта, аналітичні методи аналізу акцентують увагу на доведенні теорем існування, єдиності розв'язку та інших його властивостях, які можна отримати без знання формули для точного розв'язку, наприклад, регулярності. Причому досить часто ці теореми формулюються не для класичної постановки задачі, а для рівняння Річардса–Клюта у слабкій формі.

Так, у класичних роботах [10-19] можна знайти результати з питань існування, єдиності, регулярності слабких розв'язків рівняння Річардса–Клюта, визначеного на певних областях з додатковими умовами на коефіцієнти. Також серед результатів цих статей можна виділити наявність варіаційних нерівностей для рівняння Річардса–Клюта [10], неперервність границі між насиченою та ненасиченою областями [17-18], проблему Стефана [10] та існування в'язкісного розв'язку [19].

Також варто відзначити роботи Дегтярьова [20-24], в яких рівняння Річардса–Клюта описується з точки зору насичених-ненасичених областей та рухомої границі між ними. Так, у [20] розглядається еліптичне рівняння з параметром, на основі якого у [21] для квазілінійного еліптико-параболічного рівняння доведені теореми існування гладкого розв'язку та гладкість межі локально по часу. Для цього автор використовує простори функцій, неперервних за Гьолдером та метод, описаний у [22-24], що, по суті, зводиться до методу Ньютона розв'язання нелінійних рівнянь.

Часто для спрощення рівняння Річардса–Клюта використовують різні перетворення, що позбавляють рівняння нелінійності. Одним з таких методів є перетворення Кірхгофа, його застосування можна побачити, наприклад, у [25-27]. Зазвичай ці перетворення роблять для спрощення подальшого обчислення, проте результати оригінального та перетвореного рівнянь можуть сильно відрізнятися, див., наприклад, [28]. Порівняльний аналіз різних методів перетворення рівняння Річардса–Клюта можна знайти у [29].

Серед інших аналітичних підходів цікавим є метод, запропонований у [30]. Він полягає у зведенні рівняння Річардса–Клюта до задачі оптимального керування потоком та подальшому розв'язку цієї задачі методами теорії керування. Стаття містить доведення коректності переходу до задачі керування а також чисельні експерименти та їх аналіз.

Проте існують і результати стосовно точних розв'язків рівняння Річардса–Клюта. Зазвичай вони отримуються за рахунок розглядання одновимірної задачі та накладання додаткових умов, інколи навіть лінеаризації рівняння. В деяких випадках ці умови настільки сильні, що втрачається зв'язок з фізичною природою задачі. Так, у роботах [31-34] можна знайти точні розв'язки рівняння з умовами, які майже не зустрічаються у реальному світі, проте ці розв'язки можна використовувати для тестування та аналізу чисельних методів. У [35] можна знайти каталог аналітичних розв'язків лінеаризованого рівняння Річардса–Клюта. Серед інших аналітичних результатів варто виділити роботу [36], де аналітичний розв'язок рівняння генерується за допомогою методу дрейфуючих хвиль, [37], де побудовано розв'язок одновимірного рівняння Річардса-Клюта для двошарового ґрунту з різними параметрами вологоємкості, [38-39], де розглянутий аналітичний розв'язок з нерівномірною початковою та нестаціонарними крайовими умовами, [40], де розглядається поглинання речовини коренем рослини, та [41-42], де, на відміну від попередніх випадків, розглянуто дво- та тривимірні розв'язки рівняння. Також варто зазначити, що у роботі [43] вперше наведений розв'язок багатовимірного рівняння Річардса–Клюта з урахуванням стоків, інтенсивність яких нелінійно залежить від насиченості середовища. Таким чином, аналітичні розв'язки рівняння Річардса–Клюта за рахунок його нелінійності будуються в основному за досить сильних обмежень на розмірність, властивості середовища та початкові і граничні умови.

Стосовно задачі керування для моделі з точковими джерелами, то тут можна виділити роботи [44-45]. Випадок моделювання точкових джерел за допомогою дельта-функції у двовимірному випадку розглянуто у роботі

[25] з чисельними експериментами. Теоретичне обґрунтування такої моделі можна знайти у роботах [46-47]. Основний принцип роботи полягає в ітеративному процесі оптимізації з використанням спряженого рівняння.

Наприкінці цього розділу варто згадати роботи Паронетто [48-51], у яких розглядається еліптико-параболічне рівняння у банахових просторах. Там воно набуває вигляду $Ru' + Au = f$, де R, A — оператори, причому R залежить від часу та може вироджуватися в нульовий оператор. Так, за додаткових умов у статтях доведені теореми існування та регулярності слабких розв'язків рівняння (6).

4. Сучасний стан чисельних методів розв'язування рівняння Річардса–Клюта

Рівняння Річардса–Клюта, як і багато інших нелінійних рівнянь математичної фізики, набагато частіше розв'язують за допомогою чисельних методів. Огляд чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса–Клюта можна знайти, наприклад, у [52-53]. Проте, знову ж таки, в силу нелінійності, і у цій області виникають труднощі, пов'язані з побудовою точної та водночас ефективної схеми для розв'язання рівняння. Дослідження в цьому напрямку в основному базуються на комбінації описаних нижче дискретизацій по часу та простору, причому іноді для суттєвого підвищення ефективності обирається одна з форм запису рівняння (3)-(5).

Що стосується дискретизації по часу, то для моделювання розв'язку рівняння Річардса–Клюта найчастіше використовується зворотний метод Ейлера. Його перевагою є стійкість, якої не вистачає методам Рунге–Кутти та Кранка–Ніколсона, незважаючи на те, що вони дають більшу точність ніж метод Ейлера [54]. У ранніх роботах, наприклад [55], використовувався рівномірний крок по часу, проте згодом набули популярності методи адаптивного кроку по часу [56], оскільки вони краще справлялися з різкими коливаннями значень змінних, причиною якої була нелінійність рівняння. Проте і у такого підходу є недоліки: він не дуже ефективним при осцилюючих граничних умовах [57].

Серед методів дискретизації просторових похідних є низка методів, серед яких найбільшою популярністю користуються метод скінченних елементів [58-62], метод скінченних різниць [8,63-67], метод скінченних об'ємів [68-69], та метод Гальоркіна [70-71]. У відповідних роботах можна знайти оцінки похибок таких дискретизацій. Як і з дискретизацією по часу, досліджувалися адаптивні схеми дискретизації простору, наприклад, у роботі [72]. Оскільки наявні схеми переважно є лише умовно стійкими, то для коректної роботи чисельних методів необхідно обирати досить малі кроки за часом, що, у сукупності з порядком дискретизації простору, призводить до різкого збільшення кількості обчислень, що є основною проблемою у напрямку чисельного моделювання розв'язків рівняння Річардса–Клюта.

Наприкінці варто зазначити, що для тестування та аналізу чисельних методів є два підходи. Перший полягає в тому, щоб оцінювати їх роботу на умовах, для яких відомі аналітичні розв'язки. Другий — порівняння з іншими чисельними експериментами, які є в певному сенсі еталонними для деяких часткових випадків рівняння. Так, у роботах [63, 73-76] наведені чисельні експерименти з експертно підібраними параметрами, такими як кроки часової та просторової дискретизації. Зрозуміло, що порівняння з такими чисельними розв'язками набагато ненадійніше за порівняння з аналітичними розв'язками рівняння, проте через надзвичайно малу кількість останніх будь-якими додатковими даними не можна нехтувати.

5. Огляд програмного забезпечення для розв'язання рівняння Річардса–Клюта

На даний момент існує низка програм, присвячених розв'язку рівняння Річардса–Клюта, більшість з них інтегрована у софт для моделювання процесів, що відбуваються на межі грунт-атмосфера. Серед програмного забезпечення можна виділити як комерційний софт (HydroGeoSphere, FEFLOW), так і програми з відкритим кодом (HYDRUS, PFLOTRAN), як пакети для моделювання широкого класу процесів (HYDRUS), так і вузько направлені програми, присвячені якійсь конкретній задачі ("Алгоритм оптимізації потужності точкових джерел у двовимірному пористому середовищі"). Моделі у різних програмах також відрізняються: можна побачити як одновимірні приклади (CoupModel), так і двовимірні (ADH, VS2DI) та тривимірні (HYDRUS, FEFLOW, PEFLOTRAN). Також софт можна розподілити за критерієм зручності користування. Так, деякі програми потребують прямого втручання користувача у виконувані файли, в той час як інші надають зручний графічний інтерфейс та можливість онлайн-підтримки користувача (CoupModel, HYDRUS).

Переважна більшість програм саме для обчислень використовує мови програмування FORTRAN або C/C++, оскільки, як було вказано вище, чисельне моделювання розв'язку рівняння Річардса–Клюта потребує великої кількості обчислень, а дані мови програмування мають суттєву перевагу у швидкості виконання саме арифметичних операцій. Моделі, які використовуються у програмах, найчастіше використовують метод скінченних різниць, метод скінченних елементів або метод скінченних об'ємів. Далі наведені характеристики, сильні та слабкі місця деяких популярних програм та моделей для розв'язання рівняння Річардса-Клюта:

- CoupModel [77-78] — безкоштовна програма для моделювання моделювання одновимірних процесів масопереносу у грунті з урахуванням наявності рослин, що поглинають речовину, та можливістю заморозки грунту. Базується на методі скінченних різниць. Наявна підтримка користувача через онлайн-форум.
- HYDRUS [58,79] — багатозадачний програмний пакет з відкритим кодом на мові програмування FORTRAN. Реалізовані моделі для одно-, дво- та тривимірного рівняння Річардса–Клюта за допомогою метода скінченних елементів. Має графічний інтерфейс та зрозумілу документацію. Є можливість розв'язувати задачу для двошарового ґрунту.

- HydroGeoSphere [80] — комерційна платформа для розв'язання тривимірного рівняння Річардса–Клюта на основі методу скінченних скінченних елементів. Використовує адаптивний крок по часу з автоматичним розрахунком його величини.
- PFLOTRAN [81] — багатозадачний програмний комплекс з реалізацією обчислень на мові програмування FORTRAN та паралельними обчисленнями на основі бібліотеки PETSc. Має відкритий код. Реалізує метод скінченних об'ємів для тривимірного рівняння Річардса–Клюта.
- VS2DI [82-83] — моделює двовимірне рівняння Річардса–Клюта у формі (4) за допомогою методу скінченних різниць. Мова реалізації — FORTRAN.
- ADH [84] — багатозадачна платформа, що моделює одно-, дво- та тривимірне рівняння Річардса–Клюта за допомогою методу скінченних елементів.
- CATHY [85] — модель для моделювання тривимірного рівняння Річардса–Клюта за допомогою методу скінченних елементів.
- FEFLOW [86] — комерційна платформа для розв'язання тривимірного рівняння Річардса–Клюта на основі методу скінченних скінченних елементів.
- WASH123D [87] — багатозадачна програма для моделювання одно-, дво- та тривимірного рівняння Річардса–Клюта за допомогою методу скінченних елементів. Мова програмування — FORTRAN.
- "Алгоритм оптимізації потужності точкових джерел у двовимірному пористому середовищі" [25, 88] — програма з реалізацією обчислень на мові C# та візуалізацією у Maple. Присвячена моделі переносу маси у пористому середовищі з точковими джерелами за допомогою модифікованого перетворення Кірхгофа та задачі керування для двовимірного квазілінійного рівняння Річардса–Клюта на прямокутнику з сингулярним керуванням. Перша з програм, що розв'язує задачу керування із заданими обмеженнями. На цьому функціонал програми обмежується.

6. Висновки

З наведених вище результатів видно, що, незважаючи на велику кількість робіт, присвячених масопереносу у пористих середовищах та рівнянню Річардса–Клюта, ця задача досліджена не настільки детально, як хотілося б. Більшість результатів стосуються часткових випадків з додатковими обмеженнями на параметри рівняння. Таким чином, існує багато напрямків подальшого дослідження, такі як дослідження властивостей розв'язків у загальному випадку, подальший аналіз задачі керування токовими джерелами, побудова більш ефективних та економних чисельних методів та абстракція рівняння до гільбертових та банахових просторів. Що стосується програмного забезпечення, то, хоч у статті наведено багато робочих моделей і програм, більшість з них або присвячені частковим випадкам рівняння Річардса–Клюта, або реалізують лише один з варіантів дискретизації рівняння, або взагалі містять моделювання насичено-ненасиченого потоку як додатковий функціонал. На даний момент часу досі немає програми, яка б реалізувала різні схеми розв'язання рівняння Річардса–Клюта, що дозволяло б ефективно їх порівнювати, та покривала більшість випадків, що зустрічаються на практиці.

Література

1. Richardson L. F. Weather prediction by numerical process. University Press, Cambridge. 1922. p. 262. https://doi.org/10.1002/qj.49704820311
2. Richards L. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics.* 1931. Vol. 1(5). P. 318–333. https://doi.org/10.1063/1.1745010
3. Darcy H. The public fountains of the city of Dijon: Exposition and application of the principles to be followed and the formulas to be employed in questions of water distribution; work ended with an appendix relating to the water supplies of several cities to the filtering of water and the manufacture of cast iron, lead, sheet metal and bitumen pipes. Paris: V. Dalmont, 1856. 647 p. (in French)
4. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Averaging processes in periodic media. Moscow: Nauka, 1984. P. 164–169. (in Russian)
5. Sanchez-Palencia E. Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture notes in Physics.* 1980. Vol. 127. 398 p.
6. Belyaev A. Y. Averaging in filtration theory problems. Moscow: Nauka, 2004. P. 76–127. (in Russian)
7. Leontyev N. E. Filtration theory basics. Moscow: Izd-vo CPI pri mechaniko-matematicheskom facultete MGU, 2009. P. 24–29. (in Russian)
8. List F., Radu F. A. A study on iterative methods for solving Richards' equation. *Comput. Geosci.* 2016. Vol. 20. P. 341–353. doi:10.1007/s10596-016-9566-3
9. Rubinstein L. I. Stefan problem. Riga: Zwaigzne, 1967. 458 p. (in Russian)
10. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*. 1983. Vol. 183. No. 1. P. 311–341.
11. Van Duyn C. J., Peletier L. A. Nonstationary filtration in partially saturated porous media. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1982. Vol. 78. No. 2. P. 173–198.
12. Van Duyn C. J. Nonstationary filtration in partially saturated porous media: contunuity of the free boundary. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1982. Vol. 79. No. 3. P. 261–265.
13. Van Duyn C. J., Hulshof J. An elliptic-parabolic with a nonlocal boundary condition. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1987. Vol. 99. No. 1. P. 61–73.
14. Bertsch M., Hulshof J. Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. Vol. 297. No. 1. P. 337–350.
15. Di Benedetto E., Gariepy R. Local behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation. *Arch. Rational. Mech. Anal.* 1987. Vol. 97. No. 1. P. 1–17.
16. Hulshof J., Peletier L. A. An elliptic-parabolic free boundary problem. *Nonlinear Anal: Theory, Method Appl.* 1986. Vol. 10. No. 12. P. 1327–1346.
17. Hulshof J. An elliptic-parabolic free boundary problem: continuity of the interface. *Proc. Royal Soc. Edinburg.* 1987. Vol. 106A. No. 3. P. 327–339.

18. Chen X., Friedman A., Kimura T. Nonstationary filtration in partially saturated porous media. *Eur. J. Appl. Math.* 1994. Vol. 5. No. 3. P. 405–429.
19. Mannucci P., Vazquez J. L. Viscosity solutions for elliptic-parabolic problems. Nonlinear Differ. *Equ. Appl.* 2007. Vol. 14. No. 1–2. P. 75–90.
20. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem I: Elliptic problem with a parameter. *Ukr. Math. Vystnyk.* 2014. Vol. 11. No. 1. P. 15–48. (in Russian)
21. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem II: smooth solution. *Ukr. Math. Vystnyk.* 2014. Vol. 11. No. 4. P. 447–479. (in Russian)
22. Bazaliy B. V., Degtyarev S. P. On the classical solvability of the multidimensional Stefan problem in the case of convective motion of a viscous incompressible fluid. *Mat. Sbornyk.* 1987. Vol. 132(174). No. 1. P. 3–19. (in Russian)
23. Bazaliy B. V., Degtyarev S. P. Solvability of a problem with an unknown boundary between the domains of parabolic and elliptic equations. *Ukr. Mat. Zhurnal.* 1989. Vol. 41. No. 10. P. 1343–1349. (in Russian)
24. Bazaliy B. V., Degtyarev S. P. On the Stefan problem with kinematic and classical conditions on the free boundary. *Ukr. Mat. Zhurnal.* 1992. Vol. 44. No. 2. P. 155–166. (in Russian)
25. Tymoshenko A. A. Optimal point control of mass transfer in porous media. PhD Dissertation, Taras Shevchenko National University of Kyiv. 2021. 149 p. (in Ukrainian)
26. Berninger H., Loisel S., Sander O. The 2-Lagrange multiplier method applied to nonlinear transmission problems for the Richards equation in heterogeneous soil with cross points. *SIAM Journal of. Scientific Computing.* 2014. Vol. 36. № 5. P. 2166–2198.
27. Pop I. S., Schweizer B. Regularization schemes for degenerate Richards equations and outflow conditions. *Mathematical Models and Methods in the Applied Sciences.* 2011. Vol. 21. № 8. P. 1685–1712.
28. Zha Y., Shi L., Ye M., Yang J. A generalized Ross method for two- and three-dimensional variably saturated flow. *Advances in Water Resources.* 2013. Vol. 54(4). P. 67–77. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2013.01.002
29. Williams G. A., Miller C. T., Kelley C. T. Transformation approaches for simulating flow in variably saturated porous media. *Water Resources Research.* 2000. Vol. 36(4). P. 923–934. https://doi.org/10.1029/1999WR900349
30. Kostyerina E. A., Lapin A. V. Solving the problem of saturated-unsaturated fluid filtration in soil with monitoring of the saturation front. *Isv. Vuzov. Matem.* 1995. Vol. 6. P. 42–50. (in Russian)
31. Rogers C., Stallybrass M. P., Clements D. L. On two phase filtration under gravity and with boundary infiltration: Application of a Backlund transformation. *Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl.* 1983. Vol. 7(7). P. 785–799. doi:10.1016/0362-546X(83)90034-2
32. Broadbridge P., White I. Modelling solute transport, chemical adsorption and cation exchange. *Int. Hydrology and Water Resources Symp. Nat. Conf. Publ.* No. 92/19 (Preprints of Papers. 1988. Vol. 3. P. 924–929).
33. Barry D. A., Sander G. C. Exact solutions for water infiltration with an arbitrary surface flux or nonlinear solute adsorption. *Water Resour. Res.* 1991. Vol. 27. P. 2667–2680. doi:10.1029/91WR01445

34. Ross P. J., Parlange J.-Y. Comparing exact and numerical solutions of Richards' equation for one-dimensional infiltration and drainage. *Soil Sci.* 1994. Vol. 157(6). P. 341–344. doi:10.1097/00010694-199406000-00002
35. Pullan A. The quasilinear approximation for unsaturated porous media flow. *Water Resources Research.* 1990. Vol. 26(6). P. 1219–1234. https://doi.org/10.1029/WR026i006p01219
36. . Zlotnik V. A., Wang T., Nieber J. L., Simunek J. Verification of numerical solutions of the Richards equation using a traveling wave solution. *Advances in Water Resources.* 2007. Vol. 30. P. 1973–1980. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2007.03.008
37. De Luca D. L., Cepeda J. M. Procedure to obtain analytical solutions of one-dimensional Richards' equation for infiltration in twolayered soils. *Journal of Hydrologic Engineering.* 2016. Vol. 21(7). https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001356
38. Barry D., Parlange J., Sander G., Sivaplan M. A class of exact solutions for Richards' equation. *Journal of Hydrology.* 1993. Vol. 142(1–4). P. 29–46. https://doi.org/10.1016/0022-1694(93)90003-R
39. Menziani M., Pugnaghi S., Vincenzi S. Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. *Journal of Hydrology.* 2007. Vol. 332(1–2). P. 214–225. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2006.06.030
40. Yuan F., Lu Z. Analytical solutions for vertical flow in unsaturated, rooted soils with variable surface fluxes. *Vadose Zone Journal.* 2005. Vol. 4. P. 1210–1218. https://doi.org/10.2136/vzj2005.0043
41. Tracy F. T. Clean two- and three-dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solvers. *Water Resources Research.* 2006. Vol. 42(8). P. 1–11. https://doi.org/10.1029/2005WR004638
42. Chen J. M., Tan Y. C., Chen C. H. Multidimensional infiltration with arbitrary surface fluxes. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering.* 2001. Vol. 127(6). P. 370–377. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2001)127:6(370)
43. Broadbridge P., Daly E., Goard J. Exact solutions of the Richards equation with nonlinear plant-root extraction. *Water Resources Research.* 2017. Vol. 53. P. 9679–9691. https://doi.org/10.1002/2017WR021097
44. Vabisshevich P. N. Numerical solution of the problem of identification of the right side of the parabolic equation. *Izvestiya vysshyh uchebnyh zavedeniy. Matematika.* 2003. No. 1. P. 29–37. (in Russian)
45. Lyashko S. I., Klyshin D. A., Semenov V. V., Shevchenko K. V. Lagrange-Euler approach to solving the inverse problem of convective diffusion. *Dopovidi NAN Ukrainy.* 2007. No. 10. P. 38–43. (in Ukrainian)
46. Lions J.-L. Optimal control of systems described by partial differential equations. Moscow: MIR, 1972. 416 p.
47. Lyashko S. I. Generalized control of linear systems. Kyiv: Naukova Dumka, 1998. 470 p.
48. Paronetto F. Existence results for a class of evolution equations of mixed type. *J. Funct. Anal.* 2004. Vol. 212(2). P. 324–356.
49. Paronetto F. G-convergence of mixed type evolution operators. *J. Math. Pures Appl.* 2010. Vol. 9(93). P. 361–407.
50. Paronetto F. A Harnack's inequality for mixed type evolution equations. *J. Differ. Equ.* 2016. Vol. 260. P. 5259–5355.

51. Paronetto F. Further existence results for elliptic–parabolic and forward–backward parabolic equations. *Calc. Var.* 2020. Vol. 59(137). https://doi.org/10.1007/s00526-020-01793-7
52. Farthing M. W., Ogden F. L. Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal.* 2017. Vol. 81(6). P. 1257–1269. https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058
53. Zha Y., Yang J., Zeng J., Tso C.-H. M., Zeng W., Shi L. Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIREs Water.* 2019. Vol. 6. p. e1364, 10.1002/wat2.1364
54. Shahraiyni H. T., Ataie-Ashtiani B. Mathematical forms and numerical schemes for the solution of unsaturated flow equations. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering.* 2012. Vol. 138(1). P. 63–72. https://doi.org/10.1061/(asce)ir.1943-4774.0000377
55. Hills R., Porro I., Hudson D. B., Wierenga P. J. Modeling one-dimensional infiltration into very dry soils: 1. Model development and evaluation. *Water Resources Research.* 1989. Vol. 25(6). P. 1259–1269. https://doi.org/10.1029/WR025i006p01259
56. Celia M., Bouloutas E., Zarba R. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research.* 1990. Vol. 26(1). P. 1483–1496. https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483
57. Zha Y., Yang J., Yin L., Zhang Y., Zeng W., Shi L. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil. *Journal of Hydrology.* 2017. Vol. 551. P. 56–69. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.05.053
58. Simunek J., van Genuchten M., Sejna M. The HYDRUS software package for simulating the two-and three-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. Riverside: University of California Riverside, 2006.
59. Scudeler C., Putti M., Paniconi C. Mass-conservative reconstruction of Galerkin velocity fields for transport simulations. *Advances in Water Resources.* 2016. Vol. 94. P. 470–485.
60. Mostaghimi P. et al. Anisotropic Mesh Adaptivity and Control Volume Finite Element Methods for Numerical Simulation of Multiphase Flow in Porous Media. *Mathematical Geosciences.* 2015. Vol 47. No. 4. P. 417–440.
61. Lai W., Ogden F. L. A mass-conservative finite volume predictor – corrector solution of the 1D Richards' equation. *Journal of Hydrology.* 2015. Vol. 523. P. 119–127.
62. Pop I. S., Radu F., Knabner P. Mixed finite elements for the Richards' equation: linearization procedure. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2004. Vol. 168. P. 365–373.
63. Dogan A., Motz L. H. Saturated-unsaturated 3D groundwater model. I: Development. *Journal of Hydrologic Engineering.* 2005. Vol. 10(6). P. 492–504. https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2005)10:6(492)
64. Lipnikov K., Moulton D., Svyatskiy D. New preconditioning strategy for Jacobian-free solvers for variably saturated flows with Richards' equation. *Advances in Water Resources.* 2016. Vol. 94. P. 11–22.
65. Zha Y. et al. Comparison of noniterative algorithms based on different forms of Richards' equation. *Environmental Modelling Assessment.* 2016. Vol. 21. No. 3. P. 357–370.

66. Zeng J., Zha Y., Yang J. Switching the Richards' equation for modeling soil water movement under unfavorable conditions. *Journal of Hydrology.* 2018. Vol. 563. P. 942–949.
67. Klyushin D. A., Onotskiy V. V. Numerical modeling of three-dimensional moisture transfer under microirrigation. *Zhurnal Obchyslyuvalnoyi ta Prykladnoyi Matematyky.* 2016. No. 1. P. 54–64. (in Ukrainian)
68. Caviedes-Voullieme D., Garcia-Navarro P., Murillo J. Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. *Journal of Hydrology.* 2013. Vol. 480. P. 69–84. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.12.008
69. Svyatskiy D., Lipnikov K. Second-order accurate finite volume schemes with the discrete maximum principle for solving Richards' equation on unstructured meshes. *Advances in Water Resources.* 2017. Vol. 104. P. 114–126. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2017.03.015
70. Li H., Farthing M. W., Miller C. T. Adaptive local discontinuous Galerkin approximation to Richards' equation. *Advances in Water Resources.* 2007. Vol. 30(9). P. 1883–1901. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2007.02.007
71. Arbogast T. An error analysis for Galerkin approximations to an equation of mixed ellipticparabolic type. Technical Report TR90-33, Department of Computational and Applied Mathematics. Rice University, Houston, TX. 1990. 28 p.
72. Miller C., Abhishek C., Farthing M. A spatially and temporally adaptive solution of Richards' equation. *Advances in Water Resources.* 2006. Vol. 29(4). P. 525–545. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2005.06.008
73. Vauclin M., Khanji D., Vachaud G. Experimental and numerical study of a transient, two-dimensional unsaturated-saturated water table recharge problem. *Water Resources Research.* 1979. Vol. 15(5). P. 1089–1101. https://doi.org/10.1029/WR015i005p01089
74. Shen C., Phanikumar M. S. A process-based, distributed hydrologic model based on a large-scale method for surface–subsurface coupling. *Advances in Water Resources.* 2010. Vol. 33(12). P. 1524–1541. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2010.09.002
75. Twarakavi N. K. C., Simunek J., Seo S. Evaluating interactions between groundwater and vadose zone using the HYDRUS-based flow package for MODFLOW. *Vadose Zone Journal.* 2008. Vol. 7(2). P. 757–768. https://doi.org/10.2136/vzj2007.0082
76. Xu X., Huang G., Zhan H., Qu Z., Huang Q. Integration of SWAP and MODFLOW-2000 for modeling groundwater dynamics in shallow water table areas. *Journal of Hydrology.* 2012. Vol. 412-413. P. 170–181. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2011.07.002
77. Jansson P.-E., Karlberg L. Coupled Heat and Mass Transfer Model for Soil-Plant-Atmosphere Systems. Royal Institute of Technology. Stockholm. 2010. 484 p.
78. Jansson P.-E. CoupModel: Model Use, Calibration, and Validation. *ASABE.* 2012. Vol. 55(4). P. 1337-1346. https://www.coupmodel.com
79. Sejna M., Simunek J., van Genuchten M. Th. The HYDRUS Software Package for Simulating One-, Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Porous Media, User Manual, Version 5.0, PC Progress, Prague, Czech Republic. 2022. 348 p.
80. Aquanty Inc. HGS user manual. Waterloo, ON: Aquanty Inc. 2015.

81. Hammond G. E., Lichtner P. C., Mills R. T. Evaluating the performance of parallel subsurface simulators: An illustrative example with PFLOTRAN. *Water Resources Research.* 2014. Vol. 50(1). P. 208–228. https://doi.org/10.1002/2012WR013483
82. Hsieh P. A., Wingle W., Healy R. W. VS2DI—A graphical software package for simulating fluid flow and solute or energy transport in variably saturated porous media. U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 99-4130. Lakewood, CO. 2000.
83. Healy R. W. Simulating water, solute, and heat transport in the subsurface with the VS2DI software package. *Vadose Zone J.* 2008. Vol. 7. P. 632–639. doi:10.2136/vzj2007.0075
84. Howington S. E., Berger R. C., Hallberg J. P., Peters J. F., Stagg A. K., Jenkins E. W., Kelley C. T. A model to simulate the interaction between groundwater and surface water. ADA451802. US Army Engineering Research and Development Center, Vicksburg, MS. 1999. P. 1–12.
85. Camporese M., Paniconi C., Putti M., Orlandini S. Surface-subsurface flow modeling with path-based runoff routing, boundary condition-based coupling, and assimilation of multisource observation data. *Water Resour. Res.* 2010. Vol. 46. doi:10.1029/2008WR007536.
86. Diersch H.-J. G. FEFLOW 5.1 user's manual. Berlin, Germany: WASY Institute for Water Resources Planning and Systems Research Ltd. 2009.
87. Yeh G.-T., Shih D.-S., Cheng J.-R. C. An integrated media, integrated processes watershed model. *Comput. Fluids.* 2011. Vol. 45(1). P. 2–13. doi:10.1016/j.compfluid.2010.11.018
88. Klyushin D. A., Tymoshenko A. A. Computer program "Algorithm for optimizing the power of point sources in a two-dimensional porous medium": pat. 106332, Ukraine. Registr. Date: 16.07.2021. Publ. Date: 30.09.2021. Bulet. No. 66.

Надійшла: 20.06.2022 / Прийнята: 27.06.2022