МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ТИЩУК Тетяна Володимирівна

УДК 517.9

СПІВІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ КУСКОВО-СТАЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичної фізики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Самойленко Валерій Григорович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, професор кафедри
математичної фізики.

Офіційний опонент: доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України, професор
Слюсарчук Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства
та природокористування, професор кафедри вищої
математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка МОН України,
завідувач кафедри математичної економіки та
економетрії.

Захист відбудеться «18» квітня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України за адресою: 03022, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «18» березня 2016 р.
Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У даний час науковці-математики та спеціалісти з інших галузей знань приділяють значну увагу дослідженню моделей об'єктів, функціонування яких пов'язано з передачею (отриманням) чи зберіганням інформації у цифровому вигляді. Часто в якості феноменологічних моделей таких об'єктів використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними і нелінійними крайовими умовами.

Такі нелінійні крайові задачі у випадку лінійних диференціальних рівнянь спеціальним чином редукуються до (нелінійних) різницевих рівнянь з неперервним часом, вивчення яких проводиться за допомогою методів теорії одновимірних динамічних систем, що дає можливість дослідити властивості розглядуваних реальних динамічних процесів, від зовсім простих, до хаотичних і навіть турбулентних, і тим самим отримати важливу інформацію про їх властивості.

На важливості дослідження подібних задач наголошує академік НАН України Шарковський О.М., який зазначив таке: "Сведение краевых задач к разностным уравнениям позволяет осмыслить важные особенности пространственно-временной эволюции реальных систем, в частности, понять, как зарождается и развивается каскадный процесс образования когерентных структур убывающих масштабов, почему в системе осуществляется переход к состоянию хаотического перемешивания, как со временем может происходить стохастизация полностью детерминированной системы." (передмова до книги Романенко Е.Ю. Разностные уравнения с непрерывным аргументом. – Киев: Институт математики, 2014. – 347 с.).

Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та нелінійними крайовими умовами плідно досліджуються у відділі теорії динамічних систем Інституту математики НАН України, де отримано низку фундаментальних результатів у цій галузі. Так, Шарковський О.М. і Романенко О.Ю. показали, що траєкторії розв'язків нелінійних крайових задач (у загальному випадку) можуть демонструвати дуже складну поведінку, наприклад, володіти властивістю автостохастичності. Шарковський О.М. і Сівак А.Г. розглянули класи нелінійних крайових задач, періодичні розв'язки яких мають ті ж самі якісні та кількісні універсальні біфуркаційні властивості, що й траєкторії відповідних одновимірних динамічних систем.

При цьому в якості початкових функцій у випадку згаданих крайових задач розглядалися неперервно диференційовні функції. Природно виникає питання про вивчення властивостей розв'язків нелінійних крайових задач зі сталими початковими умовами, наприклад, для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зауважимо, що такі задачі досі не досліджувалися, можливо тому, що не мають, взагалі кажучи, класичних розв'язків. Природно в якості їх розв'язків розглядати узагальнені розв'язки.

Тому дослідження нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є актуальною задачею, тим більше, що подібні крайові задачі можуть використовуватися в якості феноменологічних моделей широкосмугових генераторів цифрових періодичних сигналів, які (математично) описуються кусково-сталими функціями. Широкосмуговість згаданих генераторів вимагає від крайової задачі наявності у неї нескінченної множини "несхожих" один на одного періодичних розв'язків, що для багатьох класів динамічних систем є ознакою хаотичності системи, а отже певний інтерес становить задача про співіснування узагальнених періодичних розв'язків згаданих вище нелінійних крайових задач.

Як зазначено вище, при дослідженні нелінійних крайових задач суттєво використовується теорія одновимірних динамічних систем і, зокрема, комбінаторна динаміка, які активно розвиваються з 60-их років XX-го століття. Фактично зародження комбінаторної динаміки, як розділу теорії динамічних систем, почалося з праць Шарковського О.М., який запропонував розглядати новий тип взаємозв'язку між траєкторіями динамічної системи – їх співіснування.

Одним з перших фундаментальних результатів в комбінаторній динаміці стала теорема, яка опублікована в 1964 році і яка в даний час широко відома як теорема Шарковського, про співіснування циклів різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе. З моменту опублікування цієї теореми інтерес до неї не згасає, про що свідчать численні публікації різних авторів, якими запропоновано нові варіанти її доведення, а також аналоги та узагальнення даної теореми для різних класів відображень, фазових просторів і навіть для складніших структур, ніж цикл відображення відрізка в себе.

У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами. Але, як відомо, відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду, а тому такої класифікації, взагалі кажучи, недостатньо. Природно, крім класифікації циклів за періодами, розглядати їх класифікацію за типами (циклічними перестановками). Хоча у цьому напрямі отримано цілу низки вагомих результатів у працях Шарковського О.М., Федоренка В.В., Alsedà L., Baldwin S., Llibre J., Misiurewicz M. та інших, але питання про класифікацію циклів (деякого фіксованого періоду) неперервного відображення за їх типами є актуальним. Саме питання про співіснування циклів неперервного відображення відрізка в себе не за періодом (як у теоремі Шарковського), а за запропонованим у дисертаційній роботі новим поняттям моделі типу циклу розглядається у даній дисертації. Отримані результати щодо класифікації таких циклів суттєво використовуються у даній дисертації при вивченні питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках державної бюджетної наукової теми № 11 БФ 038-04 "Варіаційні та асимптотичні методи в задачах механіки суцільних середовищ" (номер державної реєстрації 0111U004956).

Мета і задачі дослідження. Основною метою роботи є дослідження питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

Об'єктом дослідження є крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними.

Предметом дослідження є періодичні кусково-сталі розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

Методи дослідження. У дисертації використано результати і методи теорії одновимірних динамічних систем, комбінаторної динаміки, диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати дисертаційної роботи є новими. У ній вперше:

– запропоновано поняття моделі типу циклу і поняття ваги моделі типу циклу для неперервного відображення відрізка в себе, за допомогою яких описано множину типів циклів, що має довільне неперервне відображення відрізку в себе з L-схемою, і встановлено співіснування унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе;

– запропоновано поняття узагальненого кусково-сталого періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами;

– запропоновано поняття типу узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку;

– для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (одного рівняння, системи двох рівнянь і систем $2n$ рівнянь) з нелінійними крайовими умовами встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані для побудови феноменологічних моделей широкосмугових генераторів цифрових сигналів. Вони також можуть використовуватися при читанні спеціальних курсів з теорії диференціальних рівнянь, зокрема, теорії одновимірних динамічних систем.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати дисертації, які виносяться на захист, отримані здобувачем особисто. При формулюванні означення 2.3.1 і леми 2.4.1 використано результати статті Федоренка В.В. “Канонические периодические траектории одномерных динамических систем” // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений, К.: Ин-т математики АН УРСР, 1983, с. 106–109. У працях, які опубліковано спільно з науковим керівником доктором фіз.-мат. наук, професором Самойленком В.Г., кандидатом фіз.-мат. наук, старшим науковим співробітником Федоренком В.В. і асистентом Федоренко Ю.В., Самойленку В.Г. належить визначення напрямку дослідження і постановка задач, а Федоренку В.В. та Федоренко Ю.В. – постійна участь у обговореннях отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації неодноразово доповідалися на науковому семінарі “Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики” кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: професор Мельник Т.А., професор Самойленко В.Г.; м. Київ, 2013, 2014, 2015), науковому семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України Самойленко А.М., академік НАН України Перестюк М.О.; м. Київ, 2015) та на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях: міжнародній науковій конференції “Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г.М. (Київ, 2014), П’ятнадцятій та Шістнадцятій міжнародних наукових конференціях імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014, 2015), Четвертій міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 2014), Сьомій міжнародній конференції імені Ляшка І.І. (Київ, 2014), Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015), Third International Conference on memory of corresponding member of NAS of Ukraine Melnik V.S. “Nonlinear analysis and applications” (Kyiv, 2015).

Публікації. Основні результати роботи опубліковано в 6 статтях у виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань МОН України, серед яких 1 стаття в зарубіжному виданні, та 7 тезах доповідей міжнародних конференцій.

Структура та об’єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та переліку використаних джерел. Обсяг дисертаційної роботи становить 129 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел містить 86 найменувань і займає 10 сторінок.

Автор щиро вдячна академіку НАН України Шарковському Олександру Миколайовичу за формулювання проблем, що пов’язані з вивченням нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методами теорії одновимірних динамічних систем, та своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Самойленку Валерію Григоровичу за постійну увагу, поради та підтримку при роботі над дисертацією.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, висвітлено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію роботи.

У **першому розділі** подано огляд літератури за темою дисертації.

У **другому розділі** запропоновано класифікацію унімодальних циклів одновимірних неперервних відображень відрізка в себе за моделлю типу циклу. Дано означення моделі типу циклу та ваги моделі типу циклу, які використовуються для опису унімодальних циклів неперервного відображення. Визначено множину типів циклів, яку має довільне неперервне відображення відрізка в себе з L-схемою. На просторі опуклих циклічних перестановок описано відношення лінійного порядку, що індукується вагою опуклої циклічної перестановки.

У підрозділі 2.1 запропоновано поняття моделі опуклої циклічної перестановки, яка в подальшому використовується при вивченні питання про співіснування унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе.

Нехай $B=\{\beta_1, \ldots, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \ \beta_n\}$ – довільний цикл періоду n відображення g, де $\beta_1 < \ldots < \beta_i < \beta_{i+1} < \ldots < \beta_n$, причому виконуються наступні рівності $g(\beta_i)=\beta_{j_i}$, де $1 \le j_i \le n, 1 \le i \le n$. Тоді відповідну циклу B циклічну перестановку можна записати наступним чином $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$. Циклічне зображення перестановки π має вигляд $(1, \pi(1), \ldots, \pi^{i-1}(1), \ldots, \pi^{n-1}(1))$.

Циклічна перестановка π називається типом циклу B.

Означення 2.1.3. *Циклічна перестановка* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ *називається опуклою вгору, якщо виконуються нерівності* $j_i < j_{i+1}$ *при* $1 \le i < \hat{i}$ *та* $j_i > j_{i+1}$ *при* $\hat{i} \le i < n$*, де* $2 \le \hat{i} \le n-1$ *і* $\pi(\hat{i}) = n$.

Аналогічно, циклічна перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ називається опуклою вниз, якщо виконуються нерівності $j_i > j_{i+1}$ при $1 \le i < \check{i}$ та $j_i < j_{i+1}$ при $\check{i} \le i < n$, де $2 \le \check{i} \le n-1$ і $\pi(\check{i}) = 1$.

Оскільки два неперервні відображення відрізка, одне з яких має цикли типу опуклої вгору циклічної перестановки, а інше – цикли типу опуклої вниз циклічної перестановки, є топологічно спряженими, то розглянуто лише відображення, що мають цикли, яким відповідають опуклі вгору циклічні перестановки. Такі перестановки називаються опуклими циклічними перестановками. Множину всіх опуклих циклічних перестановок порядку n позначено Π_n. Множину, що складається з циклічних перестановок довжин 1 і 2 (які не є опуклими) та всіх опуклих циклічних перестановок позначено Σ. З опуклими циклічними перестановками тісно пов'язані цикли унімодальних неперервних відображень.

Означення 2.1.5. *Відображення* $f \in C^0(I, I)$ *називається унімодальним, якщо існує таке значення* $c \in (0;1)$*, що* f *монотонно не спадає (монотонно не зростає) на відрізку* $[0;c]$ *і монотонно не зростає (монотонно не спадає) на відрізку* $[c;1]$.

Означення 2.1.6. *Відображення* $g \in C^0(I, I)$ *називається* Λ*-відображенням, якщо виконуються наступні умови:*

1) $g(0) = g(1) = 0$;

2) існує така точка a, де $0 < a < 1$, що $g(a) = 1$;

3) функція $g(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$.

Відображення $f \in C^0(I, I)$ містить L-схему, якщо існують три точки $a, b, c \in I$, де $a < b < c$, для яких виконуються наступні рівності $a = f(a)$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Прикладом Λ-відображення, що містить L-схему, є тент-відображення, яке визначається наступним чином:

$$x \mapsto \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1. \end{cases} \tag{1}$$

Нехай циклічне зображення типу циклу періоду n унімодального відображення має вигляд $\pi = (1, \pi(1), \dots, \pi^{i-1}(1), \dots, \pi^{n-1}(1))$. Позначимо $\pi^i(1) = r_{i+1}$, де $1 \le i \le n-1$. Тоді тип циклу записується у вигляді $(1, r_2, \dots, r_n)$. Оскільки $r_n = n$ – максимальне число серед чисел $1, r_2, \dots, r_n$, що утворюють тип $(1, r_2, \dots, r_n)$ циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка π, а число r_{n-1} є прообразом елемента r_n, то кожне з чисел $1, r_2, \dots, r_n$ послідовно порівнюється з числом r_{n-1} і тип циклу $(1, r_2, \dots, r_n)$ розбивається на блоки (упорядковані ланцюжки чисел, з дотриманням уже встановленого в типові порядку) за наступним правилом: кожен блок містить елементи, які або всі менші за число r_{n-1}, або ж всі не менші за r_{n-1}. Очевидно, що блоки з непарними номерами містять лише числа, що менші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами – лише ті числа, що не менші за r_{n-1}. Тоді тип $(1, r_2, \dots, r_n)$ перестановки π записується наступним чином:

$$\begin{aligned} &\left(1,\dots,r_{m_1}|r_{m_1+1},\dots,r_{m_1+l_1}|\dots|r_{m_1+l_1+\dots+l_{s-1}+1},\dots,r_{m_1+l_1+\dots+m_s}|\right. \\ &\left. r_{m_1+l_1+\dots+m_s+1},\dots,r_{m_1+l_1+\dots+m_s+l_s}|\right), \end{aligned} \tag{2}$$

де символ | розділяє сусідні блоки. При цьому $m_1 + l_1 + \dots + m_s + l_s = n$.

Тип $(1, r_2, \dots, r_n)$ перестановки π можна записати ще таким чином:

$$\begin{aligned} &\left(|1,\dots,r_{m'_1}|r_{m'_1+1},\dots,r_{m'_1+l'_1}|\dots|r_{m'_1+l'_1+\dots+l'_{s'-1}+1},\dots,r_{m'_1+l'_1+\dots+m'_{s'}}|\right. \\ &\left. r_{m'_1+l'_1+\dots+m'_{s'}+1},\dots,r_{m'_1+l'_1+\dots+m'_{s'}+l'_{s'}}|\right), \end{aligned} \tag{3}$$

де блоки з непарними номерами містять лише числа, що не більші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами – лише ті числа, що більші за r_{n-1}, та $m'_1 + l'_1 + \dots + m'_{s'} + l'_{s'} = n$. Кількість блоків у рядках (2) та (3) є парною, адже $r_n = n > r_{n-1}$, тобто кожен з рядків в (2), (3) закінчується блоком з парним номером.

З чисел m_1, m_2, $\dots$, m_s, l_1, l_2, $\dots$, l_s, m'_1, m'_2, $\dots$, $m'_{s'}$, l'_1, l'_2, $\dots$, $l'_{s'}$, які фігурують в (2) і (3), утворено числові набори вигляду:

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s), \tag{4}$$

$$(m'_1, l'_1, m'_2, l'_2, \dots, m'_{s'-1}, l'_{s'-1}, m'_{s'}, 1), \tag{5}$$

де (4) відповідає рядку (2), а (5) – рядку (3).

Означення 2.1.7. *Скінченна послідовність символів* $B_n = (\beta_1, \beta_2, \dots \dots \beta_{n-1}, \beta_n)$ *називається періодичною, якщо існує таке натуральне число* s*, що її можна записати у* *вигляді* $B_n = (\underbrace{B_s, B_s, \ldots B_s, B_s}_{p})$, *де* $B_s = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{s-1}, \beta_s)$.

Означення 2.1.8. *Якщо числовий набір (4), що побудований за опуклою циклічною перестановкою* π*, не є періодичним, то (4) називається м-моделлю перестановки* π*. Аналогічно, якщо числовий набір (5), що побудований за опуклою циклічною перестановкою* π*, не є періодичним, то (5) називається р-моделлю перестановки* π*.*

У підрозділі 2.1 доведено леми про зв'язок числових наборів (4) і (5) і наведено приклади, що ілюструють необхідність відсутності повторюваних блоків у моделі опуклої циклічної перестановки.

У підрозділі 2.2 доведено твердження, які дають теоретичне обґрунтування існування моделі опуклої циклічної перестановки. Використовуючи леми про зв'язок між числовими наборами (4) і (5) для перестановки π, доведено, що, якщо числовий набір (4) є періодичною послідовністю в сенсі означення 2.1.7, то числовий набір (5) не є періодичною послідовністю, і навпаки, якщо числовий набір (5) є періодичною послідовністю, то числовий набір (4) не є періодичною послідовністю. Підрозділ 2.2 завершується доведенням твердження про те, що числові набори (4) і (5) для опуклої вгору циклічної перестановки одночасно не є періодичними послідовностями.

У підрозділі 2.3 сформульовано означення ваги числового набору.

Означення 2.3.1. *Вагою числового набору* $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$ *називається число*

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{s} (-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j} \, 2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j} \left(1 - (-2)^{l_i}\right)}{1 - (-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i} \, 2^{\sum_{i=1}^{s} m_i}}. \tag{6}$$

Лема 2.3.1. *Ваги числових наборів* $B_k = (m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_k, l_k)$ *та* $B_s = (\underbrace{B_k, B_k, \ldots B_k, B_k}_{p})$, *де* $s = kp$, *однакові.*

Лема 2.3.1 дозволяє визначити поняття ваги моделі типу циклу та поставити опуклій циклічній перестановці у відповідність тільки одну модель.

Означення 2.3.2. *Моделлю опуклої циклічної перестановки називається та модель з м-моделі або р-моделі, яка має більшу вагу. Відповідно, вага цієї моделі називається вагою перестановки.*

Вагу опуклої циклічної перестановки π позначено σ_π.

У підрозділі 2.4 доведено лему, яка пояснює геометричний зміст ваги моделі опуклої циклічної перестановки π, вагу якої позначено σ_π.

Лема 2.4.1. *Нехай* $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$ *– модель опуклої циклічної перестановки* π*. Тент-відображення має цикл типу* π*, координата мінімальної точки* α *якого дорівнює:*

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{\sum_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j} (1-(-2)^{l_i}) \right)}{1-(-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum_{i=1}^{s} m_i}}.$$

У підрозділі 2.5 доведено наступну теорему.

Теорема 2.1.1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\pi \in \Sigma$;

2) π є типом деякого циклу тент-відображення;

3) π є типом деякого циклу Λ-відображення.

З теореми 2.1.1, яка становить один з основних результатів розділу 2, випливає, що довільна опукла циклічна перестановка є типом циклу Λ-відображення.

У підрозділі 2.6 доведено твердження, що описує множину типів циклів, які має довільне відображення з L-схемою.

Твердження 2.1.3. *Якщо відображення $f \in C^0(I,I)$ містить L-схему, то воно має цикл кожного типу, який має тент-відображення (1).*

У підрозділі 2.7 на множині опуклих циклічних перестановок Π введено відношення порядку $\dashv$ наступним чином: дві довільні опуклі циклічні перестановки π' і π'' знаходяться у відношенні $\dashv$, тобто $\pi' \dashv \pi''$, якщо $\sigma_{\pi'} \le \sigma_{\pi''}$.

Із визначення відношення порядку $\dashv$ випливає, що $\dashv$ є відношенням лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок Π.

Теорема 2.7.1. *Якщо неперервне відображення $g \in C^0(I,I)$ має цикл типу $\pi_1 \in \Pi$, то це відображення має також цикл типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \dashv \pi_2$.*

Теорема 2.7.1 описує співіснування унімодальних циклів неперервного відображення відрізку в себе, тобто дозволяє класифікувати цикли однакового періоду цих відображень.

У **третьому розділі** розглянуто нелінійні крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними, для яких досліджено питання про співіснування їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків. Вивчення таких узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків здійснено шляхом зведення відповідної нелінійної крайової задачі до різницевого рівняння з неперервним часом, яке у подальшому вивчається з використанням результатів розділу 2.

У підрозділі 3.1 розглянуто приклади початкових задач, розв’язки яких визначаються однозначно, взагалі кажучи, не для всіх значень t, але поняття розв’язку цих задач можна визначити так, щоб розв’язок був однозначно визначеним для всіх значень $t \ge t_0$, де t_0 – початковий момент часу.

У підрозділі 3.2 розглянуто питання про співіснування узагальнених періодичних розв’язків нелінійної крайової задачі вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^+, \tag{7}$$

$$u(1,t) = f(u(0,t)), t \in \mathbb{R}_0^+, \tag{8}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0;1]. \tag{9}$$

Тут $f \in C^0(I,I)$, а її перша похідна є кусково неперервною, $\varphi(x) = \varphi \in \mathbb{R}$, якщо $x \in [0;1)$, $\varphi(1) = f(\varphi)$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Дослідження крайової задачі (7)–(9) зведено до вивчення одновимірного неперервного відображення відрізка $[0;1]$ в себе за допомогою функції f з крайової умови (8), що дало змогу проаналізувати властивості узагальнених періодичних розв'язків даної крайової задачі. Функції, що задовольняють крайову задачу (7)–(9), є періодичними кусково-сталими і мають розриви першого роду вздовж характеристик рівняння (7), які задаються рівняннями $x+t = const$. З крайової умови (8) випливає, що поведінку розв'язків крайової задачі (7)–(9) визначають прямі $t = -x+i$, де $i \in \mathbb{N}$. Оскільки крайова задача (7)–(9) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = -x+i$ розглядаються множини вигляду $P_i = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, t = -x+i\}$, де $i \in \mathbb{N}$.

Означення 3.2.1. *Узагальненим розв'язком крайової задачі (7)–(9) називається функція* $u:[0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$*, яка має такі властивості:*

1) є неперервно диференційовною в кожній області D_i, $i \in \mathbb{N}$, вигляду:
$$D_i = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \mid i-1 < t+x < i\}$$
і задовольняє у ній рівняння (7);

2) є неперервною на кожній множині $D_{i+1} \cup P_i$;

3) задовольняє крайову умову (8) для всіх $t \in \mathbb{R}_0^+$;

4) задовольняє початкову умову (9) для довільних значень $x \in [0;1]$.

Означення 3.2.2. *Узагальненим кусково-сталим розв'язком крайової задачі (7)–(9) називається її узагальнений розв'язок* $u(x,t)$ *такий, що функція* $u(x,t)$ *приймає лише скінченну множину значень, тобто* $u:[0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \Theta_1$*, де* Θ_1 *є скінченною підмножиною множини* $\mathbb{R}$.

Означення 3.2.3. *Узагальненим кусково-сталим* n*-періодичним розв'язком крайової задачі (7)–(9) називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок* $u(x,t)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}^+$ *має місце рівність* $u(x,t+n) = u(x,t)$*, і при цьому* $n \in \mathbb{N}$ *є найменшим серед чисел, для яких виконується остання рівність.*

Доведено теорему про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків крайової задачі (7)–(9).

Теорема 3.2.1. *Нехай функція* $f \in C^0(I,I)$ *і має кусково неперервну першу похідну, а початкова функція* $\varphi(x) = \varphi \in \mathbb{R}$*, якщо* $x \in [0;1)$*, і* $\varphi(1) = f(\varphi)$*. Якщо крайова задача (7)–(9) має узагальнений кусково-сталий* n*-періодичний розв'язок, то крайова задача (7), (8) має узагальнений кусково-сталий* n'*-періодичний розв'язок такий, що* $n' < n$*, де* $1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \ldots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \ldots < 9 < 7 < 5 < 3$ *– порядок Шарковського на множині натуральних чисел.*

Дано означення типу узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв'язку крайової задачі (7)–(9) за припущення, що стала φ з початкової умови (9) є періодичною точкою відображення f з крайової умови (8).

Означення 3.2.4. *Типом узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв'язку крайової задачі (7)–(9) називається тип періодичної точки φ одновимірної динамічної системи, що породжена неперервним відображенням f з крайової умови (8).* У підрозділі 3.2 отримано аналітичний вигляд узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків крайової задачі (7)–(9) та доведено теорему про їх співіснування за типами.

Теорема 3.2.2. *Нехай функція $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, а початкова функція $\varphi(x) = \varphi \in \mathsf{R}$, якщо $x \in [0;1)$, і $\varphi(1) = f(\varphi)$. Якщо значення φ є періодичною точкою типу $\pi_1 \in \Pi$ відображення f, то крайова задача (7), (8) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.*

У підрозділі 3.3 розглянуто питання про співіснування узагальнених періодичних розв'язків нелінійної крайової задачі вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathsf{R}^+, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathsf{R}^+, \tag{11}$$

$$u(0,t) = v(0,t), t \in \mathsf{R}_0^+ \tag{12}$$

$$v(1,t) = f(u(1,t)), t \in \mathsf{R}_0^+, \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0;1], \tag{14}$$

$$v(x,0) = \psi(x),\ x \in [0;1]. \tag{15}$$

Тут $f \in C^0(I,I)$, а її перша похідна є кусково неперервною, $\varphi(x) = \varphi \in \mathsf{R}$, якщо $x \in (0;1]$ і $\varphi(0) = \psi \in \mathsf{R}$, $\psi(x) = \psi$, якщо $x \in [0;1)$ і $\psi(1) = f(\varphi)$, $\mathsf{R}_0^+ = \mathsf{R}^+ \cup \{0\}$.

Дослідження нелінійної крайової задачі (10)–(15) зведено до вивчення відповідного одновимірного неперервного відображення відрізка $[0;1]$ в себе за допомогою функції f з крайової умови (13), що дало змогу проаналізувати властивості узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі (10)–(15).

Функції $(u(x,t);v(x,t))$, які задовольняють крайову задачу (10)–(15), є періодичними кусково-сталими і мають розриви першого роду вздовж характеристик рівнянь (10), (11), відповідно.

Якщо значення початкових функцій φ, ψ є періодичними точками відображення f з крайової умови (13), то поведінку розв'язків крайової задачі (10)–(15) визначають прямі $t = x + j$, $t = -x + j$, де $j \in \mathsf{N} \cup \{0\}$, які паралельні характеристикам рівнянь (10), (11).

Оскільки крайову задачу (10)–(15) задано на множині $\{(x,t) \in \mathsf{R}^2 | \, 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = x + j$, $t = -x + j$ розглядаються множини вигляду

$$\underline{P_j} = \{(x,t) \in \mathsf{R}^2 | \, 0 < x < 1,\ t = x + j\}, \tag{16}$$

$$\overline{P_j} = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 | \, 0 < x < 1, t = -x + j\}, \tag{17}$$

де $j \in \mathrm{N}_0$.

Означення 3.3.1. *Узагальненим розв'язком крайової задачі (10)–(15) називається вектор-функція довжини* 2 *вигляду* $(u;v)$, *де функції* $u:[0;1]\times\mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}$, $v:[0;1]\times\mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}$ *мають такі властивості:*

1) функція u є неперервно диференційовною в кожній області $\underline{D_j}$, $j \in \mathrm{N}$, вигляду:

$$\underline{D_j} = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathrm{R}_0^+ \mid j-1 < t - x < j\} \tag{18}$$

і задовольняє у ній рівняння (10), а функція v є неперервно диференційовною в кожній області $\overline{D_j}$, $j \in \mathrm{N}$, вигляду:

$$\overline{D_j} = \{(x,t) \in [0;1]\times\mathrm{R}_0^+ \mid j-1 < t + x < j\} \tag{19}$$

і задовольняє у ній рівняння (11);

2) функція u є неперервною на кожній множині $\underline{D_{j+1}} \cup \underline{P_j}$, а функція v є неперервною на кожній множині $\overline{D_{j+1}} \cup \overline{P_j}$;

3) функції u, v задовольняють крайові умови (12), (13) для всіх $t \in \mathrm{R}_0^+$;

4) функції u, v задовольняють початкові умови (14), (15) для довільних значень $x \in [0;1]$.

Означення 3.3.2. *Узагальненим кусково-сталим розв'язком крайової задачі (10)–(15) називається її узагальнений розв'язок* $(u;v)$ *такий, що вектор-функція* $(u;v)$ *приймає лише скінченну множину значень, тобто* $(u;v):([0;1]\times\mathrm{R}_0^+;[0;1]\times\mathrm{R}_0^+) \to \Theta_2$, *де* Θ_2 *є скінченною підмножиною множини* R^2.

Означення 3.3.3. *Узагальненим кусково-сталим* k*-періодичним за Шарковським розв'язком крайової задачі (10)–(15) називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок* $(u;v)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t) \in [0;1]\times\mathrm{R}^+$ *мають місце рівності* $u(x,t+k^1) = u(x,t)$, $v(x,t+k^2) = v(x,t)$ *і при цьому* k^1, k^2 *є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, та має місце співвідношення* $k = \max_{(}\{k^1, k^2\}$, *де символ "*$<$*" визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел.*

Доведено наступну теорему про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків крайової задачі (10)–(15) за періодом і отримано аналітичний вигляд узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків крайової задачі (10)–(15).

Теорема 3.3.1. *Нехай функція* $f \in C^0(I,I)$ *і має кусково неперервну першу похідну, а початкові функції* $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, *якщо* $x \in (0;1]$, *і* $\varphi(0) = \psi \in \mathrm{R}$, $\psi(x) = \psi$, *якщо* $x \in [0;1)$, *і* $\psi(1) = f(\varphi)$. *Якщо крайова задача (10)–(15) має узагальнений кусково-сталий* k*-періодичний за Шарковським розв'язок, то крайова задача (10)–(13) має узагальнений* *кусково-сталий $k^{'}$-періодичний за Шарковським розв'язок такий, що $k^{'} < k$, де символ "$<$" визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел.*

Аналогічно поняттям типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв'язку задачі (7)–(9), дано означення типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі (10)–(15).

Означення 3.3.5. *Типом узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (10)–(15) називається тип тієї періодичної точки відображення f з крайової умови (13) серед φ, ψ, період якої дорівнює k.*

Означення 3.3.6. *Моделлю типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (10)–(15) називається модель типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка, період якої дорівнює k. Якщо ця перестановка має дві моделі типу циклу, то обирається та з них, вага якої більша.*

Означення 3.3.7. *Вагою моделі типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (10)–(15) називається вага моделі типу цього розв'язку.*

Використовуючи відношення лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок Π, доведено наступну теорему.

Теорема 3.3.2. *Нехай функція $f \in C^0(I, I)$ і має кусково неперервну першу похідну, а початкові функції $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, і $\varphi(0) = \psi \in \mathrm{R}$, $\psi(x) = \psi$, якщо $x \in [0;1)$, і $\psi(1) = f(\varphi)$. Якщо крайова задача (10)–(15) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_1 \in \Pi$, то крайова задача (10)–(13) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.*

У підрозділі 3.4 розглянуто приклад узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі для симетричної гіперболічної системи двох рівнянь з частинними похідними та побудовано його графічне зображення.

У підрозділі 3.5 розглянуто питання про співіснування узагальнених періодичних розв'язків нелінійної крайової вигляду

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^+, \tag{20}$$

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^+, \tag{21}$$

$$u_i(0,t) = v_i(0,t), t \in \mathrm{R}_0, \tag{22}$$

$$v_i(1,t) = f(u_i(1,t)), t \in \mathrm{R}_0, \tag{23}$$

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), x \in [0;1], \tag{24}$$

$$v_i(x,0) = \psi_i(x), x \in [0;1]. \tag{25}$$

Тут $f \in C^0(I, I)$, а її перша похідна є кусково неперервною, $\varphi_i(x) = \varphi_i \in \mathrm{R}$, якщо

$x \in (0;1]$, $\varphi_i(0)=\psi_i \in \mathbb{R}$, $\psi_i(x)=\psi_i$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi_i(1)= f(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Дослідження нелінійної крайової задачі (20)–(25) зведено до вивчення відповідного одновимірного неперервного відображення відрізка $[0;1]$ в себе за допомогою функції f з крайових умов (23).

В якості розв’язку крайової задачі (20)–(25) розглядається вектор-функція, відповідні компоненти якої задовольняють умови крайової задачі (20)–(25), є періодичними кусково-сталими функціями і мають розриви першого роду вздовж характеристик рівнянь (20), (21), відповідно.

Поведінку розв’язків крайової задачі (20)–(25) визначають прямі $t = x + j$, $t = -x + j$, де $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, які паралельні характеристикам рівнянь (20), (21). Оскільки крайова задача (20)–(25) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = x + j$, $t = -x + j$ розглядаються множини (16), (17).

Означення 3.5.1. *Узагальненим розв’язком крайової задачі (20)–(25) називається вектор-функція довжини* $2n$ *вигляду* $(u_1;v_1;\ldots;u_i;v_i;\ldots;u_n;v_n)$, *де функції* $u_i : [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $v_i : [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, *мають такі властивості:*

1) функції u_i є неперервно диференційовними в кожній області $\underline{D_j}$ (18), $j \in \mathbb{N}$, і задовольняють у ній рівняння (20), а функції v_i є неперервно диференційовними в кожній області $\overline{D_j}$ (19), $j \in \mathbb{N}$, і задовольняють у ній рівняння (21);

2) функції u_i є неперервними на кожній множині $\underline{D_{j+1}} \cup \underline{P_j}$, а функції v_i є неперервними на кожній множині $\overline{D_{j+1}} \cup \overline{P_j}$;

3) функції u_i, v_i задовольняють крайові умови (22), (23) для всіх $t \in \mathbb{R}_0^+$;

4) функції u_i, v_i задовольняють початкові умови (24), (25) для довільних значень $x \in [0;1]$.

Означення 3.5.2. *Узагальненим кусково-сталим розв’язком крайової задачі (20)–(25) називається її узагальнений розв’язок* $(u_1;v_1;\ldots;u_i;v_i;\ \ldots;u_n;v_n)$ *такий, що вектор-функція* $(u_1;v_1;\ldots;u_i;v_i;\ldots;u_n;v_n)$ *приймає лише скінченну множину значень з множини* $\mathbb{R}^{2n}$.

Сформульовано наступне означення k-періодичного за Шарковським розв’язку крайової задачі (20)–(25).

Означення 3.5.3. *Узагальненим кусково-сталим* k*-періодичним за Шарковським розв’язком крайової задачі (20)–(25) називається її узагальнений кусково-сталий розв’язок* $(u_1;v_1;\ldots;u_i;v_i;\ldots;u_n;v_n)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}^+$ *мають місце рівності* $u_i(x,t+k_i^1) = u_i(x,t)$, $v_i(x,t+k_i^2) = v_i(x,t)$, $1 \le i \le n$, *і при цьому* k_i^1, k_i^2 *є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, та має місце співвідношення* $k = \max_{<}\{k_1^1, k_1^2, \ldots, k_i^1, k_i^2, \ldots, k_n^1, k_n^2\}$, *де символ “$<$” визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел.*

У підрозділі 3.5 доведено наступну теорему про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків крайової задачі (20)–(25) за періодом.

Теорема 3.5.1. *Нехай $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, $\varphi_i(x)=\varphi_i \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi_i(0)=\psi_i \in \mathrm{R}$, $\psi_i(x)=\psi_i$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi_i(1)=f(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$. Якщо крайова задача (20)–(25) має узагальнений кусково-сталий k-періодичний за Шарковським розв'язок, то крайова задача (20)–(23) має узагальнений кусково-сталий $k^{'}$-періодичний за Шарковським розв'язок такий, що $k^{'} < k$, де символ “$<$” визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел.*

У підрозділі 3.5 отримано аналітичний вигляд узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків крайової задачі (20)–(25).

Аналогічно поняттям типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв'язку крайових задач (7)–(9) і (10)–(15), дано означення типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі (20)–(25).

Означення 3.5.5. *Типом узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (20)–(25) називається тип тієї періодичної точки відображення f з крайової умови (23) серед φ_i, ψ_i, $1 \le i \le n$, період якої дорівнює k.*

Означення 3.5.6. *Моделлю типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (20)–(25) називається модель типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка, період якої дорівнює k. Якщо ця перестановка має дві моделі типу циклу, то обирається та з них, вага якої більша.*

Означення 3.5.7. *Вагою моделі типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (20)–(25) називається вага моделі типу цього розв'язку.*

Використовуючи відношення лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок Π, доведено наступну теорему.

Теорема 3.5.2. *Нехай $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, $\varphi_i(x)=\varphi_i \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi_i(0)=\psi_i \in \mathrm{R}$, $\psi_i(x)=\psi_i$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi_i(1)=f(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$. Якщо крайова задача (20)–(25) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_1 \in \Pi$, то крайова задача (20)–(23) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.*

У підрозділі 3.6 розглянуто питання про співіснування узагальнених періодичних розв'язків нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь (20), (21) з крайовими умовами (22) і крайовими умовами вигляду

$$v_i(1,t)=f_i(u_i(1,t)), t \in \mathrm{R}_0^+, \tag{26}$$

та початковими умовами (24), (25).

Тут $f_i \in C^0(I,I)$, $1 \le i \le n$, а їх перші похідні є кусково неперервними, $\varphi_i(x)=\varphi_i \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi_i(0)=\psi_i \in \mathrm{R}$, $\psi_i(x)=\psi_i$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi_i(1)=f_i(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$, $\mathrm{R}_0^+ = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.

Дослідження крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) зведено до вивчення одновимірних динамічних систем, що задаються за допомогою відображень f_i з крайових умов (26).

В якості розв'язку крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) розглядається вектор-функція, відповідні компоненти якої задовольняють умови крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25), є періодичними кусково-сталими функціями і мають розриви першого роду вздовж характеристик рівнянь (20), (21), відповідно.

Поведінку розв’язків крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) визначають прямі $t = x + j$, $t = -x + j$, де $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, які паралельні характеристикам системи рівнянь (20), (21). Оскільки крайова задача (20)–(22), (26), (24), (25) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = x + j$, $t = -x + j$ розглядаються множини (16), (17).

Сформульовано означення узагальненого та узагальненого кусково-сталого розв’язків крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25), які аналогічні означенням 3.5.1 та 3.5.2 відповідно.

Сформульовано наступне означення k-періодичного за Шарковським розв’язку крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25).

Означення 3.6.3. *Розв’язок* $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n)$ *задачі (20)–(22), (26), (24), (25) називається* k*-періодичним за Шарковським, де* $k = (k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$*, називається її узагальнений кусково-сталий розв’язок* $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots;\ u_n; v_n)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}^+$ *мають місце рівності* $u_i(x, t + k_i^1) = u_i(x,t)$*,* $v_i(x, t + k_i^2) = v_i(x,t)$*,* $1 \le i \le n$*, і при цьому* k_i^1*,* k_i^2 *є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, множини типів циклів функцій* f_i*,* $1 \le i \le n$*, не є рівними і виконуються співвідношення* $k_i = \max_{<}\{k_i^1, k_i^2\}$*, де символ “$<$” визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел. Якщо серед функцій* f_i*,* $1 \le i \le n$*, є такі, що множини типів їх циклів є рівними, то значення* k_i *з номерами, що відповідають таким функціям, є рівними і знаходяться за аналогічними формулами, де більше згідно порядку Шарковського число знаходять з-поміж всіх значень періодів, номери яких співпадають з номерами таких функцій* f_i*.*

Аналогічно поняттям типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв’язку крайових задач (7)–(9), (10)–(15), (20)–(25) дано означення типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв’язку крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25).

Означення 3.6.5. *Типом узагальненого кусково-сталого* k*-періодичного за Шарковським розв’язку крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) називається таблиця* T_n*, кожен рядок з номером* i*,* $1 \le i \le n$*, якої дорівнює типу тієї періодичної точки серед точок* φ_i*,* ψ_i*,* $1 \le i \le n$*, період якої дорівнює відповідній за номером компоненті* k_i *вектора* k*.*

Означення 3.6.6. *Моделлю типу узагальненого кусково-сталого* k*-періодичного за Шарковським розв’язку крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) називається така таблиця, кожен рядок з номером* i*,* $1 \le i \le n$*, якої дорівнює моделі типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка періоду, що дорівнює компоненті* k_i *вектора* k*. Якщо ця перестановка має дві моделі типу циклу, то обирається та з них, вага якої більша.*

Означення 3.6.7. *Вагою моделі типу узагальненого кусково-сталого* k*-*

періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) називається вектор, що складається з ваг відповідних за номером рядків у таблиці-моделі типу цього розв'язку.

На множині векторів-ваг моделей типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) визначено відношення порядку наступним чином: два довільні вектори-$\sigma' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_i', \ldots, \sigma_n')$ і $\sigma'' = (\sigma_1'', \ldots, \sigma_i'', \ldots, \sigma_n'')$ знаходяться у відношенні '$\preccurlyeq$', тобто $\sigma' \preccurlyeq \sigma''$, якщо для довільного номера i, $1 \le i \le n$, виконується $\sigma_i' \ge \sigma_i''$. Таким чином введене відношення '$\preccurlyeq$' є відношенням часткового порядку на множині векторів-ваг.

Використовуючи відношення часткового порядку '$\preccurlyeq$' на множині векторів-ваг, на множині типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25) визначено відношення порядку "$\dashv$" наступним чином: дві довільні таблиці T_n' і T_n'' знаходяться у відношенні $\dashv$, тобто $T_n' \dashv T_n''$, якщо $\sigma_{T_n'} \preccurlyeq \sigma_{T_n''}$, де $\sigma_{T_n'}$ – вектор ваги типу T_n', а $\sigma_{T_n''}$ – вектор ваги типу T_n''. Таким чином введене відношення порядку $\dashv$ є відношенням часткового порядку на множині типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25).

Використовуючи відношення часткового порядку на множині типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (20)–(22), (26), (24), (25), доведено наступну теорему.

Теорема 3.6.1. *Нехай $f_i \in C^0(I, I)$, $1 \le i \le n$, і мають кусково неперервні перші похідні, початкові функції $\varphi_i(x) = \varphi_i \in \mathbb{R}$, $\psi_i(x) = \psi_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, тобто є сталими, а значення цих сталих є точками опуклих циклів динамічної системи породженої відповідними відображеннями f_i. Якщо крайова задача (20)–(22), (26) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу T_n', то вона також має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу T_n'', де $\sigma_{T_n'} \circ \sigma_{T_n''}$.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню періодичних кусково-сталих розв'язків нелінійних крайових задач для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку і для систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та дослідженню питання про їх співіснування.

Запропоновано поняття моделі типу циклу і поняття ваги моделі типу циклу для неперервного відображення відрізка в себе, за допомогою яких описано множину типів циклів, що має довільне неперервне відображення відрізку в себе з L-схемою, і встановлено співіснування унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе. Також запропоновано поняття узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами та поняття типу узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв'язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, для системи двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та для систем $2n$ лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків.

Доведені у дисертації твердження доповнюють і розширюють існуючі результати з якісної теорії диференціальних рівнянь і можуть бути використаними для подальшого її розвитку.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані результати можуть знайти застосування при дослідженні тих явищ та процесів, які описуються математичними моделями на основі нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь чи систем таких рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Самойленко В.Г. Кусочно-постоянные решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка / В.Г. Самойленко, Т.В. Тищук // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серия 4. Физика. Математика. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 41 – 46.

2. Самойленко В.Г. Співіснування типів унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе / В.Г. Самойленко, Т.В. Тищук, В.В. Федоренко // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 4. – С. 102 – 111.

3. Самойленко В.Г. Унімодальні цикли неперервних відображень інтервалу / В.Г. Самойленко, Т.В. Тищук, В.В. Федоренко // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 5. – С. 147 – 174.

4. Тищук Т.В. Класифікація періодичних траєкторій неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе / Т.В. Тищук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2014. – Т. 31, № 1. – С. 41 – 44.

5. Тищук Т.В. Класифікація циклів неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе за ознакою взаємного розміщення точок циклу / Т.В. Тищук // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г.М.: Тези доповідей – Київ, Україна, 2014. – С. 129.

6. Тищук Т.В. Співіснування періодичних кусково-сталих розв'язків нелінійної крайової задачі для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними / Т.В. Тищук // Шістнадцята міжнародна наукова конф. імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування : Тези доповідей – Київ, Україна, 2015. – С. 242.

7. Тищук Т.В. Співіснування типів циклів спеціального класу неперервних

відображень відрізка в себе / Т.В. Тищук // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”: Тези доповідей – Рівне, Україна, 2015. – С. 162 – 163.

8. Тищук Т.В. Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи рівнянь з частинними похідними / Т.В. Тищук, Ю.В. Федоренко // Буковинський математичний журнал. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 115 – 120.

9. Тищук Т.В. Типи періодичних траєкторій деякого класу унімодальних відображень / Т.В. Тищук // П’ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: Тези доповідей – Київ, Україна, 2014. – С. 306.

10. Тищук Т.В. Узагальнені періодичні розв’язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу / Т.В. Тищук // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 113 – 117.

11. Тищук Т.В. Узагальнені періодичні розв’язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу / Т.В. Тищук // Четверта міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана: Тези доповідей – Чернівці, Україна, 2014. – С. 200.

12. Тищук Т.В. “Цифрові” (digital) розв’язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними / Т.В. Тищук // Сьома міжнародна конф. імені Ляшка І.І.: Тези доповідей – Київ, Україна, 2014. – С. 101.

13. Tyshchuk T.V. Coexistence of types of unimodal cycles of a continuous map of an interval / T.V. Tyshchuk // Third International Conference on memory of corresponding member of NAS of Ukraine Melnik V.S. “Nonlinear analysis and applications”: Book of Abstracts – Kyiv, Ukraine, 2015. – P. 72.

АНОТАЦІЯ

Тищук Т.В. **Співіснування періодичних кусково-сталих розв’язків нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, МОН України, Київ, 2016.

Робота присвячена вивченню узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами та дослідженню питання про їх співіснування за допомогою методів теорії одновимірних динамічних систем. Дано означення моделі типу циклу та ваги моделі типу циклу; запропоновано класифікацію унімодальних циклів одновимірних неперервних відображень відрізка в себе за моделлю типу циклу; визначено множину типів циклів, яку має будь-яке неперервне відображення відрізка в себе, що містить L-схему; на просторі опуклих циклічних перестановок описано відношення лінійного порядку, що індукується вагою опуклої циклічної перестановки.

Запропоновано поняття узагальненого кусково-сталого періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

першого порядку з нелінійними крайовими умовами та поняття типу такого узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв'язку. Для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, для системи двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та для систем $2n$ лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків.

Ключові слова: нелінійні крайові задачі, узагальнені розв'язки, одновимірні динамічні системи, цикли неперервного відображення, тип циклу.

АННОТАЦИЯ

Тищук Т.В. **Сосуществование периодических кусочно-постоянных решений нелинейных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, МОН Украины, Киев, 2016.

Работа посвящена изучению обобщенных кусочно-постоянных периодических решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейными краевыми условиями и исследованию вопроса об их сосуществования. Дано определение модели типа цикла и веса модели типа цикла; предложена классификация унимодальных циклов одномерных непрерывных отображений отрезка в себя по модели типа цикла; определено множество типов циклов, которую имеет любое непрерывное отображение отрезка в себя, содержащее L -схему; на пространстве выпуклых циклических перестановок описано отношение линейного порядка, индуцированное весом выпуклой циклической перестановки.

Предложено понятие обобщенного кусочно-постоянного периодического решения нелинейной краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и понятие типа такого решения. Для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (одного уравнения, системы двух уравнений, систем $2n$ уравнений) установлено сосуществование (по типам) их обобщенных кусочно-постоянных периодических решений.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, обобщенные решения, одномерные динамические системы, циклы непрерывного отображения, тип цикла.

SUMMARY

Tyshchuk T.V. **Coexistence periodic piecewise constant solutions of nonlinear boundary value problems for linear differential equations of the first order.** – Manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 – differential equations. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis deals with problem of coexistence of generalized piecewise constant periodic solutions of nonlinear boundary value problems for first-order linear partial differential equations.

Definitions of model of cycle type and weight of concave circular permutations are formulated. These notions are used to describe cycles of unimodal concave map and they also help to solve a problem of classification of continuous maps by their models of a cycle type. In the space of concave circular permutations we described a linear order relation induced by weight of concave circular permutation. The set of cycles of any continuous maps with L -schema are described.

Nonlinear boundary value problems for first-order linear partial differential equations are studied. Notion of generalized piecewise constant periodic solution of the problems are proposed. The studying of generalized piecewise constant periodic solutions is done by reducing the nonlinear boundary value problem to difference equation with continuous time. Boundary conditions and initial conditions provide a reduction of resulting difference equation with continuous time to difference equation with discrete argument. The notion of type of the generalized piecewise constant periodic solution is proposed and the problem of coexistence of such solutions by their types is studied. Generalized piecewise constant periodic solutions for a certain class of nonlinear boundary value problems are obtained in exact form.

The results of thesis are theoretical ones. They can be applied while studying of the phenomena and processes mathematically described by nonlinear boundary value problems for first-order linear partial differential equations or systems of similar equations.

Keywords: nonlinear boundary value problems, generalized solutions, one-dimension dynamical systems, cycles of continuous map, cycle type.