Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Голомозий Віталій Вікторович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Використання методу склеювання для дослідження стійкості неоднорідних ланцюгів Маркова

01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

В. В. Голомозий

Київ — 2023

Анотація

Голомозий В. В. Використання методу склеювання для дослідження стійкості неоднорідних ланцюгів Маркова.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю «111 — математика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню рекурентних властивостей та стійкості неоднорідних ланцюгів та процесів Маркова. Розглядаються різні типи процесів – як з дискретним, так і загальним простором значень, а також їх основні властивості.

В даній дисертаційній роботі представлено модифікацію умови зсуву (drift condition), що забезпечує геометричну рекурентність неоднорідного ланцюга Маркова. Досліджено рекурентні властивості пари неоднорідних ланцюгів та отримано умови, за яких пара ланцюгів також буде геометрично рекурентною. Дані результати застосовано для дослідження стійкості перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній нормі. Як наслідок, отримано нові умови та оцінки стійкості та геометричної рекурентності для неоднорідних авторегресійних процесів виду $X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_n$, при цьому, на відміну від класичних процесів, у даній роботі не вимагається, щоб W_n були однаково розподіленими та гауссівськими, а всі α_n були меншими за одиницю.

В дисертаційній роботі також узагальнено відому теорему Ліндвала щодо існування та скінченності математичного сподівання часу першого склеювання на випадок склеювання двох різних, неоднорідних ланцюгів Маркова. Отримано умови, що дозволяють обчислити оцінки вищеозначеного математичного сподівання із використанням стохастичного мажорування.

Окремо досліджувались проблеми стійкості ланцюгів Маркова з дискретним фазовим простором за умови рівномірного перемішування. Отримано умови, що гарантують рівномірну стійкість перехідних ймовірностей за n кроків як в рівномірній, так і у зваженій V-нормі, а також умови, що забезпечують стійкість скінченновимірних розподілів. Всі результати отримано як для однорідних, так і для неоднорідних ланцюгів. В якості основного інструмента дослідження використано метод максимального склеювання, адаптований до склеювання двох різних, можливо неоднорідних, ланцюгів.

Також отримано ряд результатів стосовно стійкості неоднорідних ланцюгів Маркова зі значеннями у довільному фазовому просторі за умови міноризації на всьому просторі. Зокрема, отримано оцінки рівномірної стійкості перехідних ймовірності за n кроків у рівномірній нормі, стійкості скінченновимірних розподілів, а також стійкості функціоналів від ланцюга Маркова в сенсі оцінки різниць виду $\left|\mathbb{E}_x f(X_n) - \mathbb{E}_y f(X'_n)\right|$ або L_2-оцінок виду $\mathbb{E}_{xy}\left|f(X_n) - f(X'_n)\right|^2$. При цьому розглядаються як обмежені функції f, так і необмежені.

В роботі також розглядаються неоднорідні процеси Маркова з неперервним часом та отримано нерівності для функції ризику в неоднорідній моделі Крамера-Лундберга.

Ключові слова: Стійкість перехідних ймовірностей, метод склеювання, максимальне склеювання, неоднорідні ланцюги Маркова, теорія відновлення, стохастичне мажорування, геометрична рекурентність ланцюгів Маркова, модель Крамера-Лундберга.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких, опубліковано основні наукові результати

1. Golomoziy, V. On geometric recurrence for time-inhomogeneous autoregression // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2023. Vol 10, no. 3. P. 1-29.

2. Golomoziy, V. Exponential moments of simultaneous hitting time for non-atomic Markov chains // Glasnik Matematicki. 2022. Vol 57, iss. 1. P. 129-147.

3. Golomoziy, V. and Mishura, Y. Stability Estimates for Finite-Dimensional Distributions of Time-Inhomogeneous Markov Chains // Mathematics. 2020. Vol. 8, iss. 2.

4. Golomoziy, V. Stability of functionals of perturbed Markov chains under the condition of uniform minorization // Random Operators and Stochastic Equations. 2020. Vol. 28, iss. 4. P. 237-251.

5. Golomoziy, V. Estimates of stability of transition probabilities for non-homogeneous Markov chains in the case of the uniform minorization // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2020. Vol 101. P. 85-101.

6. Golomoziy, V. On estimation of expectation of simultaneous renewal time of time-inhomogeneous Markov chains using dominating sequence // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2019. Vol 6, no. 3. P. 334-343.

7. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Some inequalities for the risk function in the time and space nonhomogeneous Cramer–Lundberg risk model // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2019. Vol 98. P. 243-254.

8. Golomoziy, V. Properties of the stochastic ordering for discrete distributions and their applications to the renewal sequence generated by a nonhomogeneous Markov chain // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2018. Vol 97. P. 33-43.

9. Golomoziy, V. An estimate of the expectation of the excess of a renewal sequence generated by a time-inhomogeneous Markov chain if a square-integrable majorizing sequence exists // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2017. Vol 94. P. 53-62.

10. Golomoziy, V. An estimate for an expectation of the simultaneous renewal for time-inhomogeneous Markov chains // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2016. Vol 3, no. 4. P.315-323.

11. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling and V-stability of discrete nonhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2016. Vol 93. P. 19-31.

12. Golomoziy, V. and Kartashov, M. and Kartashov, Y. Impact of the stress factor on the price of widow’s pensions. Proofs // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2016. Vol 92. P. 17-22.

13. Golomoziy, V. An inequality for the coupling moment in the case of two inhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2015. Vol 90. P. 43-56.

14. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling and stability of discrete non-homogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics.

2015. Vol 91. P. 17-27.

15. Golomoziy, V. and Kartashov, M. On the integrability of the coupling moment for time-inhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2014. Vol 89. P. 1-12.

16. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. I // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2013. Vol 86. P. 93-104.

17. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. II // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2013. Vol 87. P. 65-68.

18. Голомозий, В. Оцінка експоненційного моменту для часу одночасного відновлення двох випадкових блукань на півпрямій // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. 2021. Вип. 2. P. 26-31.

Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Golomoziy, V. Computable Bounds of Exponential Moments of Simultaneous Hitting Time for Two Time-Inhomogeneous Atomic Markov Chains // In: Malyarenko, A., Ni, Y., Rancic, M., Silvestrov, S. (eds) Stochastic Processes, Statistical Methods, and Engineering Mathematics . SPAS 2019. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Vol 408, 2023. P. 97-119.

2. Golomoziy, V. and Kartashov, M. and Kartashov, Y. Impact of the stress factor on the price of widow's pensions. // In: Silvestrov, D., Martin-Lof, A. (eds) Modern Problems in Insurance Mathematics. 2014. P. 223-237.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Golomoziy, V. Exponential moments of hitting times for time-inhomogeneous atomic Markov chains. // 8th European Congress of Mathematics. Conference materials. 2021.

2. Golomoziy, V. Geometric drift condition for inhomogeneous Markov chains. // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications V. Conference materials. 2021.

3. Golomoziy, V. Quantitive estimate of an expectation of the simultanious renewal for time-inhomogeneous Markov chains. // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications IV. Conference materials. 2018.

4. Golomoziy, V. Coupling of time-inhomogeneous Markov Chains. // Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv, Ukraine. Conference materials. 2015.

5. Golomoziy, V. Stability of time-inhomogeneous Markov chains satisfying minorization condition on the whole space // Modern problems of stochastic analysis (Uzbekistan). Conference materials. 2020.

6. Golomoziy, V. On expectation of the simultaneous renewal time for two time-inhomogeneous Markov chains // Actual problems of stochastic analysis (Uzbekistan). Conference materials. 2021.

7. Golomoziy, V. Stability estimate of time-inhomogeneous Markov chains under the uniformal minorization condition. // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications III. Conference materials. 2012.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Ланцюги та процеси Маркова є важливими класами випадкових процесів, які мають чітко визначену залежність розподілу майбутніх станів процесу від його теперішнього стану, що є зручною моделлю для багатьох природних процесів та динамічних систем.

Теорія ланцюгів Маркова активно досліджується та розвивається уже понад століття. За цей час було розроблено повноцінну, довершену теорію для однорідних у часі рекурентних ланцюгів Маркова (див. [111], [113]). Було детально досліджено асимптотичну поведінку таких процесів, ергодичність, збіжність до стаціонарного розподілу, а також встановлено зв'язок між рекурентними властивостями процесу та його асимптотичною поведінкою. Отримані результати знайшли широке застосування у різноманітних прикладних галузях математики. Так, на теорію ланцюгів Маркова спирається теорія черг (див. [49]), яка широко використовується при моделюванні трафіку (від аеропортів до комп'ютерних мереж, див. [10], [6], [19]). В актуарній математиці ланцюги та процеси Маркова використовуються для моделювання різноманітних страхових подій та обчислення відповідних нетто-премій та резервів (див. [122], [89], [88], [148]). Ланцюги та процеси Маркова є важливими і для теорії оптимального керування (див. [27]). Нарешті, у машинному навчанні та статистиці широко використовуються методи оптимізації, засновані на пошуку локальних та глобальних екстремумів за допомогою конструювання спеціального ланцюга Маркова. Такі методи навіть мають свою особливу назву - ланцюги Маркова Монте-Карло (Markov Chain Monte-Carlo, або MCMC, див. [46], [85], [15]).

Однак як теорія, так і практичні застосування не обмежуються лише однорідними ланцюгами. Більш складні моделі в актуарній математиці вимагають врахування факторів, які ведуть до порушення однорідності (таких як сезонність, або збурення стандартних процесів випадковими, важкопрогнозованими подіями, див. [146]), а в методах Монте-Карло неоднорідні ланцюги Маркова застосовуються для наближеного пошуку глобальних максимумів, що є неможливим при використанні стандартних методів оптимізаці, таких як стохастичний градієнтний спуск для неопуклих функцій (див. [104], [119], [114]).

Вищесказане мотивувало вибір теми дисертаційної роботи, яку присвячено розробці теорії неоднорідних ланцюгів Маркова, теорії стійкості, а також розробці нових методів та підходів, які дозволяють узагальнювати результати однорідної теорії на неоднорідний випадок.

Цей напрямок активно досліджується у наш час (див. [150]). Неоднорідним ланцюгам Маркова та їх застосуванням присвячено багато робіт, а у зв’язку із вибуховим поширенням алгоритмів машинного навчання та штучного інтелекту також активно розвиваються і методи оптимізації, зокрема і ті, які використовують неоднорідні ланцюги та процеси Маркова (див. [82], [90], [16]).

Однак варто зазначити, що методи та прийоми, які використовувались для розробки однорідної теорії, не можуть бути безпосередньо застосовані у неоднорідному випадку. Одною з головних перепон на цьому шляху є класична теорія відновлення, яка є ключовою в однорідній теорії та суттєво спирається на однакову розподіленість та незалежність інтервалів відновлення, які породжуються рекурентним та однорідним ланцюгом Маркова. У неоднорідному випадку такі інтервали не будуть ні незалежними, ні однаково розподіленими, тому класичні результати теорії відновлення застосувати неможливо. Таким чином, актуальною задачею, нерозривно пов’язаною із розвитком теорії та практики застосувань неоднорідних ланцюгів Маркова, є відповідне розширення теорії відновлення, зокрема, отримання нових оцінок для математичних сподівань часу першого відновлення, експоненційного та поліноміальних моментів відновлення, вивчення властивостей неоднорідного процесу відновлення та пов’язаних із ним неоднорідних згорток.

Отже, обрана тема дисертаційної роботи націлена на розв’язання ряду сучасних проблем, пов’язаних із розробкою теорії неоднорідних ланцюгів Маркова, і тісно пов’язана з іншими дослідженнями, які проводилися у час написання даної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем № 16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530), № 19БФ038-01 «Точні формули, оцінки, асимптотичні властивості і статистичний аналіз складних еволюційних систем з багатьма ступенями свободи» (номер державної реєстрації 0119U100317) та № 22БФ038-01 «Стохастичні динамічні системи, неоднорідні у часі або з випадковим часом: асимптотика та статистичний аналіз» (номер державної реєстрації 0122U001843) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розбудова теорії стійкості для неоднорідних ланцюгів Маркова, дослідження властивостей методу склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова та встановлення умов, за яких неоднорідні ланцюги Маркова будуть геометрично рекурентними.

Основними завданнями даної роботи є:

- встановлення умов, що гарантують скінченність математичного сподівання часу першого склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова;
- виведення оцінок для математичного сподівання часу першого склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова, які були би придатними для практичних застосувань;
- встановлення умов, що гарантують геометричну рекурентність неоднорідних ланцюгів Маркова;
- обчислення оцінок стійкості перехідних ймовірностей за n кроків для двох неоднорідних геометрично рекурентних ланцюгів Маркова;
- обчислення оцінок стійкості в рівномірній та зваженій V-нормах для перехідних ймовірностей за n кроків, а також стійкості скінченновимірних розподілів та функціоналів для неоднорідних ланцюгів Маркова,

що задовольняють умови рівномірного перемішування або рівномірної мінорИзації;
- встановлення оцінок для функції ризику у неоднорідній за часом та простором моделі Крамера-Лундберга.

Об'єктом дослідження є однорідні та неоднорідні ланцюги Маркова із дискретним та загальним фазовим простором, неоднорідні процеси Маркова у неперервному часі, процеси відновлення, породжені неоднорідним ланцюгом Маркова.

Предметом дослідження є оцінки математичних сподівань для часу першого склеювання, геометричного моменту для часу першого склеювання двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова, а також оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків в рівномірній та V-нормах, оцінки стійкості скінченновимірних розподілів та стійкості функціоналів для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова.

Методи дослідження. У роботі застосовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів та теорії відновлення. В якості основного методу дослідження стійкості використовується метод склеювання та його модифікації.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими. Вони стосуються теорії неоднорідних ланцюгів Маркова, їх геометричної рекурентності та стійкості. Основні результати такі:

1. узагальнено на неоднорідний випадок відому з однорідної теорії геометричну умову зсуву, яка гарантує геометричну рекурентність відповідного ланцюга;
2. побудовано оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків у нормі повної варіації для неоднорідних геометрично рекурентних ланцюгів Маркова;
3. отримано умови геометричної рекурентності та стійкості для узагальненої неоднорідної авторегресійної моделі;

4. отримано умови скінченності та оцінки математичного сподівання для часу першого спільного відвідування множини двома неоднорідними ланцюгами Маркова;
5. встановлено оцінки стійкості для неоднорідних ланцюгів Маркова з дискретним простором станів, що задовольняють умову рівномірного перемішування;
6. отримано умови та оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків в нормах повної варіації та V-нормі, оцінки стійкості скінченновимірних розподілів та оцінки стійкості функціоналів для неоднорідних ланцюгів Маркова, що задовольняють умову рівномірної мінoризації;
7. отримано оцінки для функції ризику в неоднорідній моделі Крамера-Лундберга.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Її результати, зокрема, дають можливість оцінювати відхилення перехідних ймовірностей за n кроків, а також скінченновимірних розподілів та функціоналів при неоднорідному збуренні ланцюга Маркова. Такі оцінки можуть використовуватися в актуарній математиці (як показано в Розділі 5.4). Отримані умови та оцінки для рекурентних властивостей неоднорідних ланцюгів Маркова можуть бути застосовані для розв'язання задач, що моделюються за допомогою ланцюгів Маркова, зокрема в теорії черг, телекомунікаціях, проблемах оптимізації в статистиці та алгоритмах машинного навчання.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи одержані здобувачем самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував вісімнадцять робіт у фахових періодичних виданнях [68, 66, 77, 60, 59, 58, 74, 56, 55, 54, 73, 76, 53, 72, 71, 69, 70, 62], а також дві роботи ([67, 75]) у збірниках, надрукованих за результатами конференцій. Роботи [74, 73, 72, 71, 69, 70] опубліковані у співавторстві з проф. М. Карташовим, якому належить постановка задач, а також загальне керівництво роботами.

Роботи [75, 76] написані у співавторстві з проф. М. Карташовим та Ю. Карташовим. До даної дисертаційної роботи включені лише результати, отримані автором самостійно. Робота [77] опублікована у співавторстві з проф. Ю. Мішурою, якій належить загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких всеукраїнських та міжнародних конференціях:

1. 8th European Congress of Mathematics, Portoroz, Slovenia (online), June 20-26, 2021.
2. International conference Modern Stochastics: Theory and Applications V, Kyiv, Ukraine, June 1-4, 2021.
3. International conference Modern Stochastics: Theory and Applications IV, Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018.
4. Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv, Ukraine, April 7-10, 2015.
5. Modern problems of stochastic analysis, Tashkent, Uzbekistan (online), 2020.
6. Actual problems of stochastic analysis, Tashkent, Uzbekistan (online), 2021.
7. International conference Modern Stochastics: Theory and Applications III, September 10-14, 2012.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 18 статей у фахових періодичних виданнях [68, 66, 77, 60, 59, 58, 74, 56, 55, 54, 73, 76, 53, 72, 71, 69, 70, 62]. З них 16 робіт, а саме, [68, 66, 77, 60, 59, 58, 74, 56, 55, 73, 76, 53, 72, 71, 69, 70] опубліковані у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus та Web of Science. Одна з них, [77], опублікована у виданні, яке входить до квартиля Q2, а також 8 робіт [68, 66, 60, 59, 58, 74, 53, 72] у виданнях, які на момент публікації входили до квартиля Q3.
- 2 роботи [67, 75] — опубліковано у виданнях ЄС, укладених за результатами конференцій.
- 7 тез доповідей на наукових конференціях [63, 64, 57, 52, 61, 65, 51].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел (164 найменування) та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 315 сторінок, основний текст займає 289 сторінок.

Зміст роботи. **Перша частина** містить огляд існуючої на час написання дисертаційної роботи літератури за тематикою дисертації. Окремо розглядаються роботи, які стосуються методів склеювання та розщеплення, а також теорії відновлення, та роботи, присвячені практичним застосуванням ланцюгів Маркова.

У **другій частині** наведено попередні відомості про ланцюги Маркова, їх властивості, методи склеювання та розщеплення, а також відомі результати з теорії відновлення, які використовуються та узагальнюються в даній дисертаційній роботі.

Третю частину присвячено геометричній рекурентності неоднорідних ланцюгів Маркова, а також стійкості перехідних ймовірностей для таких ланцюгів. У *розділах 3.1 та 3.1.1* наведено основні означення, які потрібні для доведення основних результатів цієї частини дисертаційної роботи.

У *розділі 3.2* введено модифіковану умову зсуву для неоднорідних ланцюгів Маркова, яка формулюється наступним чином.

Умова (D).

Будемо казати, що послідовність марковських перехідних ймовірностей $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$ задовольняє **Умову (D)** з множиною $C \in \mathcal{E}$, якщо:

1. Існує послідовність вимірних функцій $V_k \colon E \to [1, \infty]$ та дві послідовності додатних чисел $\{\lambda_k,\ k \geq 0\}$ та $\{b_k,\ k \geq 0\}$ такі, що для всіх $x \in E$

$$P_k V_{k+1}(x) \leq \lambda_{k+1} V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x). \tag{1}$$

2. Послідовність $\{\lambda_k,\ k \geq 0\}$, визначена в п. 1., задовольняє умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k} (\lambda_j \vee 1) \right)^{-1} (1 - \lambda_k)^+ = \infty.$$

Тут $a \vee b = \max\{a, b\}$, та $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Доведено, що за виконання цієї умови відповідний неоднорідний ланцюг Маркова є геометрично рекурентним, та показано, як можна обчислити оцінку для експоненційного моменту відновлення за допомогою системи пробних функцій V_k.

У *розділі 3.3* досліджується пара неоднорідних атомарних ланцюгів Маркова, що задовольняють умову D, наведену вище, із атомом у якості множини C. У цьому розділі встановлено оцінки для математичного сподівання експоненційного моменту у вигляді $\mathbb{E}_{xy}\left[\delta^{\sigma_{C\times C}}\right]$, де $\sigma_{C\times C}$ – час першого після нуля відвідування множини $C \times C$ парою ланцюгів, для деякої сталої $\delta > 1$.

Отримані результати узагальнюються на випадок неоднорідних ланцюгів із довільним простором станів у розділі 3.4. При цьому в якості основного методу доведення використано метод розщеплення Нуммеліна.

Розділ 3.5 присвячено аналізу неоднорідної марковської моделі авторегресії у формі

$$X_{n+1} = \alpha_{n+1} X_n + W_{n+1}, n \geq 0,$$

де α_n – це деякі сталі, а W_n – деякі незалежні випадкові величини. Ця модель узагальнює стандартну авторегресійну модель у тому сенсі, що величини α_n необов'язково всі мають бути меншими за одиницю, а прирости W_n необов'язково однаково розподілені. Показано, що за умов симетричності розподілу W_n та рівномірної обмеженості математичних сподівань $\mathbb{E}W_n^+$ така модель задовольняє модифіковану умову зсуву, введену у розділі 3.2, а отже є геометрично рекурентною. Окрім цього, були застосовані результати розділу 3.3 для того, щоб отримати стійкість перехідних ймовірностей за n кроків для двох авторегресійних моделей такого виду і виразити оцінку такої стійкості через математичне сподівання експоненційного моменту відновлення для пари ланцюгів, отриманого в 3.3.

Розділ 3.6 присвячено іншому застосуванню отриманих результатів, а саме, побудові оцінок стійкості для неоднорідного випадкового блукання на півпрямій.

У **четвертій частині** дисертаційної роботи розглядається модифікований метод склеювання, що дозволяє склеювати різні неоднорідні ланцюги Маркова. Короткий опис задачі, що досліджується, міститься у *розділі 4.1*, а *розділ 4.2* присвячено узагальненню відомої теореми Ліндвала про існування моменту склеювання на випадок двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова. У цьому розділі продемонстровано, що послідовні інтервали відновлення, згенеровані неоднорідним ланцюгом Маркова, є залежними та не є однаково розподіленими. Показано, що за умови рівномірної інтегровності інтервалів відновлення та відділення ймовірностей відновлення від нуля математичне сподівання для часу наступного відновлення є скінченним.

Окремо варто зазначити, що умова відділеності ймовірностей відновлення від нуля в однорідному випадку виконана автоматично (якщо послідовність відновлення інтегровна) в силу основної теореми відновлення. Однак для неоднорідних ланцюгів ця теорема не виконується, тому і доводиться вводити таку умову.

Доведена теорема залишає декілька важливих запитань – як перевіряти умову відділеності ймовірностей відновлення від нуля на практиці, а також як оцінити математичне сподівання, скінченність якого було доведено в цьому розділі. Дослідженню цих питань присвячені наступні розділи цієї частини дисертаційної роботи.

Так, у *розділі 4.3* наведено ряд прикладів, у яких розв'язано питання, поставлені вище. Зокрема, для однорідних ланцюгів Маркова, як і в оригінальній теоремі Ліндвала, виявляється, що достатньо лише інтегровності інтервалів відновлення (доведена в попередньому розділі теорема є новою для однорідних ланцюгів також, оскільки розглядає питання склеювання двох різних ланцюгів, тоді як в оригінальній теоремі Ліднвала склеювались дві копії одного ланюга).

Для перевірки умови рівномірної відділеності для ймовірностей послідовності відновлення, породженої неоднорідним ланцюгом Маркова отримано ряд простіших достатніх умов, зокрема, якщо θ_n – послідовність відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, і $(g_n^{(t)})$ – сім'я її умовних розподілів, то шукана умова буде виконана у кожному з наступних випадків.

- Існує такий набір з m номерів $l_1, \ldots, l_m$, з найменшим спільним дільником, що дорівнює одиниці, що
$$\inf_{t,i} g_{l_i}^{(t)} > 0.$$
  та послідовність θ_n стохастично мажорована послідовністю $G_n^{(t)} \le \hat{G}_n \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty$, причому $\hat{g}_{l_1} > 0$ та існує скінченний момент $\hat{\mu} = \sum\limits_{n \ge 0} \hat{G}_n$.
- Існує таке n_0, що для довільних t, l та $n \ge n_0$: $g_n^{(t,l)} > 0$ та існують такі $\gamma_i > 0$, $i = \overline{0, n_0 - 1}$, що для всіх t, l виконується $g_{n_0+i}^{(t,l)} \ge \gamma_i$ для кожного $i = \overline{0, n_0 - 1}$.
- Існує $(\hat{g}_n)$ - стохастична мажоранта для сім'ї розподілів $(g_n^{t,l})$, тобто $G_n^{t,l} \le \hat{G}_n$ із $\hat{g}_1 > 0$.

- Серед розподілів $\{g_n^{t,l}, n \geq 0\}$ лише скінченна кількість різних, причому кожен розподіл неперіодичний.

Також даний розділ містить ряд оцінок шуканого математичного сподівання для однорідних ланцюгів Маркова. Показано, як отримані оцінки можуть бути обчислені на конкретних прикладах.

Наступні розділи, а саме *розділи 4.4 та 4.5*, присвячені побудові необхідного математичного апарату для того, щоб узагальнити оцінки математичного сподівання часу наступного склеювання для однорідних ланцюгів на випадок неоднорідних ланцюгів Маркова. Так, у *розділі 4.4* узагальнено ряд властивостей неоднорідних згорток, а у *розділі 4.5* узагальнено на неоднорідний випадок відомий результат теорії відновлення — нерівність Дейлі. Зокрема, показано, що математичне сподівання ексцесу (часу, який залишається до наступного відновлення) у неоднорідному випадку може бути оцінене за допомогою квадратично інтегровної мажоруючої послідовності як

$$\mathbb{E}[R_t] \leq \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0).$$

Тут R_t – це ексцес, $\hat{\mu}$ та $\hat{\mu}_2$ – перший та другий моменти мажоруючої послідовності, а γ – константа, яка фігурує в умові відділеності ймовірностей відновлення від нуля.

Отримані результати застосовані в *розділі 4.6* для побудови шуканої оцінки в неоднорідному випадку за умови існування квадратично інтегровної мажоруючої послідовності для неоднорідної послідовності відновлення. В *розділі 4.6* даний результат було розширено на випадок, коли мажоруюча послідовність має лише перший момент.

П'ята частина роботи присвячена аналізу однорідних та неоднорідних ланцюгів Маркова з дискретним простором станів за умов рівномірного перемішування та рівномірної близькості перехідних ймовірностей за один крок.

У *розділах 5.1 та 5.2* розглядається конструкція максимального склеювання для однорідних ланцюгів Маркова, та показується, у чому полягає максимальна властивість такого склеювання.

Після цього вводяться основні умови та виводяться оцінки стійкості для однорідних ланцюгів Маркова.

Умова рівномірної стійкості за один крок полягає у зближенні перехідних матриць P та P' у рівномірній нормі:

$$\exists\, \varepsilon \in (0,1) : r(P,P') \equiv \sup_i \left\|P_{i\bullet} - P'_{i\bullet}\right\|/2 \le \varepsilon. \tag{2}$$

Умова рівномірного перемішування зводиться до відділення від одиниці взаємного коефіцієнта перемішування:

$$\exists\, \rho \in (0,1) : \rho(P,P') \equiv \sup_{i\neq k} \left\|P_{i\bullet} - P'_{k\bullet}\right\|/2 \le \rho. \tag{3}$$

За даних умов отримано оцінку стійкості перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній нормі,

$$\sup_{B\subset E} \left|\mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_i(X'_n \in B)\right| \le \varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho) < \varepsilon/(1-\rho).$$

При виконанні модифікованих умов, а саме *умови V-стійкості за один крок*

$$\exists\, \varepsilon_V > 0 : \|P - P'\|_V \equiv \sup_i V_i^{-1} \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{ij}\right| V_j \le \varepsilon_V, \tag{4}$$

та *умови сильного перемішування* в термінах функції V :

$$\exists\, \rho_V < 1 : \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right| V_j \le \rho_V(V_i + V_k), \ \ \forall i \neq k \in E, \tag{5}$$

де V-деяка невід'ємна функція, отримано оцінку стійкості у зваженій нормі:

$$\sup_{|f|\le V} \left|\mathbb{E}_i f(X_n) - \mathbb{E}'_i f(X'_n)\right| \le \varepsilon_V K_i^{(n)}(1-\rho_V^n)/(1-\rho_V).$$

Окрім того, було отримано оцінку стійкості скінченновимірних розподілів у формі

$$\left|\mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}'_i\varphi'\right| \le (\varepsilon\mathbb{E}_i\theta)^{1/\beta} K_i^{(\alpha)}(\varphi),$$

де θ – деякий момент зупинки, а ϕ – деяка функція від траєкторії процесу до моменту θ.

Отримані результати було узагальнено на неоднорідний випадок у *розділі 5.3*.

Нарешті в *розділі 5.4* основні результати даної частини, зокрема, щодо стійкості неоднорідних ланцюгів Маркова, було застосовано до актуарної моделі "пенсія вдівця". В результаті було отримано оцінку відхилення стандартної нетто-премії для групової моделі страхування (дожиття одного із членів подружжя) від аналогічної нетто-премії за наявності стрес-фактору, що вимагає неоднорідної марковської моделі.

У **шостій частині** дисертаційної роботи розглядаються неоднорідні ланцюги зі значеннями у загальному просторі станів, які задовільняють умову рівномірної міноризації. У *розділі 6.1* вводяться основні поняття та формулюються головні умови. Так, умова рівномірної міноризації має наступний вигляд.

$$P_{it}(x, A) \geq \alpha\nu(A), \forall x \in E,$$

де $\alpha \in (0, 1)$, ν — деяка ймовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$. Як правило, цю умову можна послабити до вигляду

$$P_{it}(x, A) \geq \alpha_t \nu_t(A), \forall x \in E,$$

наклавши певні додаткові умови на α_t (як відділеність від нуля та одиниці) та ймовірнісні міри ν_t.

Оскільки головною метою даної частини дисертаційної роботи є дослідження стійкості неоднорідніх ланцюгів Маркова, то необхідно також ввести певні умови близькості вихідних ланцюгів. Розглядається декілька умов такої близькості.

Спочатку припускається, що перехідні ймовірності двох неоднорідних ланцюгів задовільняють зображення

$$P_{it}(x, A) = Q_t(x, A) + (1 - Q_t(x, E))R_{it}(x, A),$$

де $Q_t(x, A)$ деякий субстохастичний оператор (тобто $0 \leq Q_t(x, E) \leq 1$).

Умови близькості формулюються у термінах величини

$$\varepsilon_t(x) = 1 - Q_t(x, E), \ \varepsilon_t(x) \in [0, 1].$$

В *розділі 6.2* описується конструкція склеювання для двох ланцюгів, які задовільняють умову міноризації на всьому просторі, та вивчаються основні властивості такого склеювання. Важливою особливістю такого модифікованого склеювання є те, що ланцюги з певною ймовірністю можуть розклеїтись (це необхідно, для того, щоб маргинальні розподіли склеєного ланцюга співпадали з розподілами вихідних неоднорідних ланцюгів), а отже, ми маємо справу із серією циклів склеювання-розклеювання, тобто схемою неоднорідного відновлення. В даному розділі встановлено, що розподіл таких інтервалів відновлення (за умови рівномірної міноризації) має геометрично спадні хвости, що суттєво полегшує подальший аналіз.

У *розділі 6.3* встановлено оцінки стійкості за різних умов близькості перехідних ймовірностей за один крок. Так, за умови рівномірної близькості, тобто

$$\varepsilon := \sup_{t\geq 0, x\in E} \varepsilon_t(x) < 1,$$

встановлено, що

$$\sup_A |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(x,A)| \leq \varepsilon \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha},$$

та

$$\sup_A |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(y,A)| \leq (1-\alpha)^n + \varepsilon \left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1} \right).$$

В подальшому розглядається ситуація, коли умова рівномірної мінорризації порушується, та отримуються відповідні оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків.

У цьому розділі також отримано оцінки для стійкості скінченновимірних розподілів, а саме оцінки для модулів різниць

$$|\mathcal{P}\{X_{t+k}^{(1)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n} | X_t^{(1)} = x\} - \mathcal{P}\{X_{t+k}^{(2)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n} | X_t^{(2)} = x\}|,$$

за умови рівномірної близькості та її порушення.

Розділ 6.4 присвячено стійкості функціоналів. Зокрема, за умови рівномірної близькості та обмеженої функції f отримано оцінки

$$|E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| \leq \varepsilon_n^{(t)} ||f|| \left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} \right),$$

$$|E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| \leq ||f|| \left((1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} \right),$$

$$E_{xx}^{(t)} |f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})|^2 \leq 2\sigma_n^2(t,x) + \varepsilon ||g|| \left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} \right),$$

$$P_{xx}^{(t)} \left\{ |f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})| > \gamma\sigma_n(t,x) \right\} \leq 2/\gamma^2 + \varepsilon ||g|| \left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} \right) (\gamma\sigma_n(t,x))^{-2},$$

де $g(x) = |f(x) - \mu_n(t,x)|^2$, $\gamma > 0$ – деяка стала, x, y – початкові стани, $\sigma_n^2(t,x) = E_x^{(t)}[X_{t+n}^{(1)}]^2 - [E_x^{(t)} X_{t+n}^{(1)}]^2$.

Аналогічні оцінки також отримано для ситуацій, коли умова рівномірної близькості порушується, а також для необмежених функцій f.

Отримані результати проілюстровані на прикладі актуарної моделі страхування життя із переключенням.

Нарешті **частина сьома** дисертаційної роботи присвячена оцінюванню функції ризику у неоднорідній за часом та простором моделі Крамера-Лундберга. Розглядається неоднорідний за часом процес Маркова в $\mathbb{R}$, що описує динаміку страхового капіталу та є неперервним справа розв'язком стохастичного рівняння

$$dX(t) = c(X(t))dt - d\widetilde{Z}(t),\ t \geq s,\ \ X(s) = x,$$

де $(c(x), x \in \mathbb{R})$ – деяка додатна борелівська функція така, що функція $1/c(x)$ локально інтегровна та для деяких сталих $c > 0$ і $\gamma > 0$

$$c(x) - c = O(\exp(-\gamma x)),\ \ x \to \infty.$$

Тоді встановлено умови, за яких функція ризику (банкрутства) q буде обмеженою в деякій L_p-нормі, та обчислено оцінки для такої норми.

Висновки містять короткий перелік основних результатів даної дисертаційної роботи.

Автор висловлює глибоку вдячність своєму першому науковому керівникові, професору Карташову Миколі Валентиновичу, а також завідувачу кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, професору Мішурі Юлії Степанівні за всебічну підтримку та допомогу у написанні даної роботи.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

1.1 Історичний огляд

Послідовності випадкових величин, які пізніше отримали назву ланцюгів Маркова, вперше розглядав Андрій Марков ще на початку XX століття. Він застосував такі послідовності для частотного аналізу текстових документів (див. [110]). А. Марков напевно був одним із перших, хто системно вивчав послідовності залежних величин. Він показав, що для процесів, які він розглядав, замість розподілів окремих величин необхідно розглядати умовні розподіли, що і призвело по понять матриця перехідних ймовірностей та перехідне (Марковське) ядро. Сам термін "ланцюг Маркова" було введено С. Бернштейном (див. [115]) у 1927 році.

Однак, із часом виявилось, що процеси із таким типом залежності, як запропонував Марков, мають цікаві та нетривіальні властивості та можуть застосовуватися для моделювання різноманітних динамічних систем і виходити далеко за межі області текстового аналізу, які розглядав Марков. Стрімкий розвиток теорії відбувся за період 1930-1960 років. Це стало можливим завдяки формалізації теорії ймовірностей як науки, а також доведенню теореми про існування випадкового процесу (див. [103]). Аналогічну теорему для ланцюгів Маркова було доведено в 1949 р. і вона носить назву теореми Іонеску-Тулчі (див. [91]). Протягом цього ж періоду були встановлені такі фундаментальні результати, вже сучасної, теорії ланцюгів Маркова як рівняння Чепмена-Колмогорова, Р.Добрушиним була доведена центральна гранична теорема для ланцюгів Маркова (див. [28], [29], де було встановлено оригінальні результати, а також подальший розвиток в роботах [118] та [142]). За більш детальним історичним оглядом раннього періоду становлення теорії див. [141].

Говорячи про розвиток теорії ланцюгів Маркова, неможливо не згадати ранні, але надзвичайно впливові роботи В. Дьобліна (див. [31], [30], [32], а також окремі коментарі та уточнення щодо результатів Дьобліна в [23] та [34]). Саме Дьоблін вперше розглядав рекурентні властивості ланцюгів Маркова, використовував поняття атома, ввів умову Дьобліна, яка гарантує рівномірну ергодичність, та використав метод склеювання. Останній відіграє особливо важливу роль в контексті даної дисертаційної роботи.

На ранніх етапах розвитку теорії ланцюгів Маркова основні дослідження були зосереджені на вивченні ланцюгів зі скінченною або зліченою множиною можливих станів. Перехідні ймовірності таких ланцюгів утворюють матриці (можливо нескінченні), які мають певні особливості, а саме – всі елементи таких матриць невід'ємні, лежать в інтервалі від нуля до одиниці, а сума елементів по рядкам рівна одиниці. Такі матриці називаються стохастичними. Таким чином, вивчення властивостей ланцюгів Маркова із дискретним простором станів зводиться до вивчення властивостей стохастичних матриць. Системно теорія невід'ємних матриць вивчається в роботі [140]. Теорія однорідних ланцюгів Маркова (у дискретному та неперервному часі) з дискретним фазовим простором системно викладена у монографії [18]. Що стосується неоднорідного випадку, то повноцінної теорії, подібної до теорії однорідних ланцюгів, не існує навіть сьогодні, чим і зумовлюється актуальність даної дисертаційної роботи. У той же час неоднорідна теорія активно досліджувалась від самого зародження теорії ланцюгів Маркова. Так, у роботах [129] та [108] досліджуються способи розширити поняття ергодичного ланцюга Маркова на неоднорідний випадок, шляхом накладання певних умов на матриці перехідних ймовірностей. Зокрема, для неоднорідних ланцюгів виділяють поняття слабкої ергодичності (див. [83] та [84]). Дослідженню нескінченних добутків матриць присвячені також робота [86].

Також варто відзначити ряд робіт, де вивчаються ланцюги Маркова зі скінченим простором станів (див. [126]). Зокрема, властивостям залишкової σ-алгебри для таких ланцюгів присвячена робота [20], а в роботах [21] та [22] вивчаються асимптотичні властивості неоднорідних ланцюгів, що набувають лише скінченної кількості значень (див. також роботи [154], [157] та [158]).

Наступним важливим етапом розвитку став умовний період 1960-1990 років. Ранні результати цього періоду зібрані в монографії [128]. Протягом цього часу основний напрям дослідження змінився в сторону вивчення ланцюгів Маркова із загальним простором станів. Великий внесок в теорію було зроблено Д. Рев'юзом (див. монографію [135]) та рядом інших вчених. Варто зазначити, що основні результати були отримані для однорідних ланцюгів, а в якості основних методів дослідження широко використовувались аналітичні методи із широким застосуванням функціонального аналізу. Яскравими прикладами такого підходу є роботи преставників Київської школи теорії ймовірностей, зокрема М.В. Карташова (див. монографію [93]). В цей же час було встановлено зв'язок теорії ланцюгів та процесів Маркова з іншими математичними дисциплінами. В якості прикладів можна навести зв'язок із теорією потенціала (див. [127]), з ергодичною теорією в контексті динамічних систем (див. [161], [11] та [87]), а для процесів у неперервному часі було показано, що Марковський процес асоційований із певним параболічним диференціальним рівнянням в частинних похідних (див. монографію [151]). На даному етапі також активно вивчалася гранична поведінка ланцюгів та процесів Маркова (див. наприклад [133], де доведена гранична теорема Пуасона, або [160], де вивчається збіжність векторів дисперсій та коваріацій). Цікаві геометричні та комбінаторні аспекти, пов'язані з неоднорідними ланцюгами, вивчаються в роботах [100] та [101].

Безумовно, ймовірнісні методи та інструменти теорії випадкових процесів також активно використовувались при розробці теорії ланцюгів та процесів Маркова. Так, важливі фундаментальні результати було отримано з використанням теореми про збіжність мартингалів. Важливі результати, які пов'язують рекурентні та ергодичні властивості, отримано за допомогою формули Динкіна або теореми порівняння (див. [111], [113]), які в свою чергу теж опираються на теорію мартингалів. Для процесів із неперевним часом варто відмітити монографію [151] яка ілюструє зв'язок між теорією мартингалів, процесами Маркова, стохастичними диференціальними рівняннями Іто та параболічними диференціальними рівняннями в частинних похідних.

1.2 Склеювання та стійкість

Як уже було сказано вище, основна розробка теорії ланцюгів Маркова у класичний період, що описано в попередньому розділі, велася в основному з використанням методів функціонального аналізу або теорії мартингалів. За допомогою цих методів було побудовано цілісну теорію для однорідних, рівномірно ергодичних ланцюгів Маркова. Однак подальше використання означених методів для розширення теорії, зокрема у напрямку ланцюгів, які є ергодичними, але не рівномірно ергодичними, або неоднорідних ланцюгів виявилось ускладненим (хоча аналітичні методи для аналізу неоднорідних ланцюгів використовуються і в наш час, див. наприклад [117]).

Для вирішення подібних труднощів було запропоновано новий підхід до досліджень, а саме широке використання теорії відновлення разом з методами склеювання та розщеплення. Елементарна теорія відновлення викладена у [41]. Основні результати були отримані Д. Блеквелом [12] та Д. Кендалом [13] та покращені в роботах [8] та [9].

Що стосується склеювання, то варто зазначити, що його вперше застосовував ще Дьоблін у сорокових роках двадцятого століття, однак широко використовуватися він став приблизно після 1980 року. Метод слкеювання (coupling method) полягає у наступному. Розглядаються дві копії деякого однорідного ланцюга Маркова, які стартують із різних початкових станів. В деякий момент часу ці ланцюги “перетинаються” в тому сенсі, що їх траєкторії або потрапляють в одну точку, або в певну “малу” множину. Після цього ланцюги з деякою ймовірністю склеюються і далі рухаються за спільною траєкторією. Формальний виклад методу склеювання з детальним обговоренням різних видів склеювання та застосування до стійкості (або оцінювання різниці перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній або нерівномірній нормі, тобто $||P^n(x,\cdot) - P^n(y,\cdot)||$ для деяких початкових станів x та y) наведено у ставших вже класичними монографіях Т. Лідвалла [106] та Г. Торіссона [152]. Метод склеювання дозволяє досліджувати стійкість ланцюгів Маркова, а також швидкість збіжності перехідних ймовірностей до стаціонарного розподілу, що дозволяє розширити поняття рівномірної ергодичності ланцюгів Маркова і розглядати геометрично (або експоненційно), поліноміально чи субгеометрично ергодичні ланцюги (див. [42], [144], [40], [147]). Взагалі існує декілька різних варіацій методу склеювання (див. наприклад

[81]). У даній дисертаційній роботі використовується максимальне склеювання, C-склеювання та їх варіанти, модифіковані для неоднорідного випадку.

Основна ідея методу розщеплення (splitting method) полягає у тому, щоб розширити результати, отримані для атомарних ланцюгів (як правило, результати, що стосуються рекурентності, тобто, часу повернення ланцюга до атому) на ланцюги із загальним фазовим простором. Ключову роль тут відіграють так звані "малі" множини, або множини, на яких має місце локальне перемішування. Ще з часів Дьобліна та Колмогорова відомо, що якщо ймовірності потрапляння у певний стан чи множину відділені від нуля на всьому просторі (тобто має місце рівномірне перемішування, такі ланцюги у неоднорідному випадку вивчаються у частинах 5 та 6 даної дисертаційної роботи), то ланцюг буде рівномірно ергодичним. Теорія малих множин та метод розщеплення дозволяють узагальнити цей результат таким чином, що якщо умова перемішування виконана лише на деякій множині, то ланцюг буде "рівномірно ергодичним" лише на цій множині. Метод розщеплення було вперше запропоновано Е. Нуммеліном в 1978 році в роботі [125]. В тому ж році, в роботі [7] було використано ідентичний підхід незалежно від Нуммеліна. Дещо модифікований метод розщеплення, який зокрема використовується і в даній дисертаційній роботі, представлено в [26].

Методи склеювання та розщеплення є сучасними та зручними ймовірнісними методами для досліджень як однорідних, так і неоднорідних ланцюгів Маркова, тому основні результати даної дисертаційної роботи отримані за допомогою цих двох методів.

1.3 Застосування

Теорія ланцюгів Маркова має багато застосувань, зокрема це теорія черг, яку активно розробляли представники Київської школи теорії ймовірностей (див. [49]).

Ланцюги Маркова також широко застосовуються в актуарних моделях (див. [2]). В розділі 5.4 даної дисертаційної роботи показано, як отримані результати щодо стійкості можуть бути застосовані в актуарній моделі "пенсія вдівця".

Інша сфера застосувань ланцюгів та процесів Маркова – це теорія ризику. Цій темі присвячено частину 7 даної роботи. Див. також [145].

Безпосередньо неоднорідні ланцюги Маркова застосовуються в теорії оптимізації статистичних алгоритмів, зокрема алгоритмів машинного навчання. Так однорідні ланцюги Маркова широко використовуються у методах Монте-Карло (методи Монте-Карло в цілому грунтовно викладені в монографіях [136] та [137], щодо використання однорідних ланцюгів Маркова у методах Монте-Карло див. [44], [85] та [156], а для неоднорідних див. [109] та [33]). Неоднорідні ланцюги Маркова дуже активно використовуються у наш час у методах оптимізації, націлених на пошук глобального максимуму (див. [24], [4] та [5]).

Щодо інших застосувань, то неоднорідні ланцюги Маркова застосовуються також у теорії надійності (див. [132], [131], [130]) та інших галузях (див. наприклад [33]).

Сучасна теорія ланцюгів Маркова з ухилом у застосування, зокрема у теорії черг або методах Монте-Карло, викладена в монографіях [14] та [43].

Розділ 2

Попередні відомості

2.1 Ланцюги Маркова, основні властивості

Означення 2.1. Послідовність випадкових величин $(X_n, n \geq 0)$ зі значеннями у вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, задана на просторі з фільтрацією $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$, називається ланцюгом Маркова, якщо для кожного $n \geq 0$ та кожної множини $A \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}$-м.н. виконується рівність

$$\mathbb{P}\left\{X_{n+1} \in A | \mathcal{F}_n\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{n+1} \in A | X_n\right\}.$$

В подальшому вважатимемо, що фільтрація $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ – це природня фільтрація, тобто $\mathcal{F}_n = \sigma[X_j, 0 \leq j \leq n]$.

Теорема 2.1 (див. [111], Теорема 1.1.2)**.** *Послідовність $(X_n, n \geq 0)$ буде ланцюгом Маркова тоді і лише тоді, коли виконане будь-яке з наступних двох тверджень.*
1. Для довільного $n \geq 0$ та довільної обмеженої $\sigma[X_j, j \geq n]$-вимірної випадкової величини Y $\mathbb{P}$-м.н. виконано

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y|X_n].$$

2. Для довільного $n \geq 0$, довільної обмеженої $\sigma[X_j, j \geq n]$-вимірної випадкової величини Y та будь-якої обмеженої $\mathcal{F}_n$-вимірної випадкової величини Z $\mathbb{P}$-м.н. виконана рівність

$$\mathbb{E}[YX|X_n] = \mathbb{E}[Y|X_k]\mathbb{E}[Z|X_n].$$

Означення 2.2. Функція $P\colon E\times\mathcal{E} \to [0,1]$ називається Марковським перехідним ядром (або перехідною ймовірністю за один крок) якщо:
1. Для довільного фіксованого $x \in E$ відображення $P(x, \cdot)$ є ймовірнісною мірою

на $\mathcal{E}$.
2. Для довільної множини $A \in \mathcal{E}$ відображення $P(\cdot, A)$ є вимірною функцією (по відношенню до борелівської σ-алгебри на $[0, 1]$).

Ядро P називають *субмарковським*, якщо замість умови 1 в попередньому означенні $P(x, \cdot)$ є невід'ємною мірою та $P(x, E) \leq 1$.

Перехідне ядро є оператором на просторі невід'ємних мір або вимірних невід'ємних функцій на $(E, \mathcal{E})$, яке діє наступним чином: 1. Для довільної міри μ

$$\mu P(A) = \int_E \mu(dx) P(x, A).$$

2. Для довільної невід'ємної вимірної функції $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Pf(x) = \int_E P(x, dy) f(y).$$

Добуток перехідних ядер P та Q також є перехідним ядром і визначається як

$$PQ(x, A) = \int_E P(x, dy) Q(y, A).$$

Очевидно, що для довільного $n \geq 0$ функція

$$P_n(x, A) = \mathbb{P}\left\{X_{n+1} \in A | X_n = x\right\},$$

є перехідним ядром. Вона називається *перехідною ймовірністю на n-тому кроці.*

Означення 2.3. Ланцюг Маркова $(X_n, n \geq 0)$ називається однорідним, якщо його перехідна ймовірність на n-тому кроці не залежить від n, тобто для довільних $n \geq 0$ та $A \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}\left\{X_{n+1} \in A | X_n\right\} = P(X_n, A),$$

де P - деяке перехідне ядро.

Якщо $(X_n, n \geq 0)$ - однорідний ланцюг Маркова із перехідним ядром P, то його перехідною ймовірністю за n кроків буде n-тий степінь ядра P:

$$\mathbb{P}\left\{X_{k+n} \in A | X_k = x\right\} = P^n(x, A).$$

Означення 2.4. Ненульова σ-скінченна міра π називається інваріантною для марковської перехідної ймовірності P, якщо

$$\pi P = \pi.$$

Означення 2.5. Множина $B \in \mathcal{E}$ називається поглинаючою, якщо $P(x, B) = 1$ для всіх $x \in B$.

Відомо, що однорідний ланцюг Маркова повністю визначається своїм перехідним ядром та початковою мірою (див. [111], Теорема 3.1.2), а неоднорідний – набором перехідних ядер на кожному кроці та початковою мірою (див. [120], Глава V, Теорема Іонеску-Тулчі). Тому умовний розподіл однорідного ланцюга за фіксованого початкового стану часто позначають $\mathbb{P}_x(X) = \mathbb{P}\{X_1 \in A | X_0 = x\}$ (а відповідне математичне сподівання позначають через $\mathbb{E}_x$). Зауважимо, що ймовірнісна міра $\mathbb{P}_x$ визначена на $(E, \mathcal{E})$. Якщо задана перехідна ймовірність, то можливо побудувати канонічний ймовірнісний простір, на якому буде задано ланцюг Маркова з даною перехідною ймовірністю, при цьому простір елементарних подій матиме вигляд $\Omega = E^\infty$ і для $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$: $X_n(\omega) = \omega_n$. Надалі в цій частині дисертаційної роботи розглядатимемо лише однорідні ланцюги Маркова, задані на канонічному ймовірнісному просторі.

Означення 2.6. Випадкова величина $\tau \colon \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ називається моментом зупинки, якщо для всіх $n \geq 0$ $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. З кожним моментом зупинки τ асоційована певна σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$, що складається з таких множин $A \in \mathcal{F}$, що $\{\tau = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n$ для всіх n.

Наступна теорема відіграє важливу роль в теорії ланцюгів Маркова і може бути застосована навіть до неоднорідних ланцюгів Маркова.

Теорема 2.2. *Нехай* $\{V_n, n \geq 0\}$, $\{Y_n, n \geq 0\}$ *та* $\{Z_n, n \geq 0\}$ *– це три* $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$*-узгоджені невід'ємні процеси такі, що для всіх* $n \geq 0$

$$\mathbb{E}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n] + Z_n \leq V_n + Y_n,\ \mathbb{P} - \text{м.н.}$$

Тоді для довільного $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$*-моменту зупинки* τ,

$$\mathbb{E}\left[V_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} Z_k\right] \leq \mathbb{E}[V_0] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} Y_k\right].$$

Для довільної $A \in \mathcal{E}$ визначають момент (час) першого відвідування (τ_A) та повернення (σ_A) через

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\},$$

$$\sigma_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\},$$

де ми вважаємо, що $\inf \emptyset = +\infty$. Також визначають моменти послідовних повернень $\sigma_A^{(k)}$, при $k \geq 0$

$$\sigma_A^{(0)} = 0, \sigma_A^{(k+1)} = \inf \left\{ n > \sigma_A^{(k)} : X_n \in A \right\}.$$

Величини $\tau_A, \sigma_A, \sigma_A^{(k)}$ є моментами заупинки.

Означення 2.7. Нехай P – це марковське перехідне ядро. Множина $A \in \mathcal{E}$ називається досяжною, якщо $\mathbb{P}_x\{\sigma_A < \infty\} > 0$. Множину всіх досяжних множин із $\mathcal{E}$ позначають через $\mathcal{E}_P^+$.

На просторі $\Omega = E^\infty$ введемо оператор зсуву $\theta \colon \Omega \to \Omega$ такий, що для $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$, $\theta(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$. Тоді кожен ланцюг Маркова задовільняє наступну властивість, яка називається *строго марковською властивістю*:
для довільної $\mathcal{F}$-вимірної випадкової величини Y, довільного початкового розподілу ν та довільного моменту зупинки τ виконана наступна рівність

$$\mathbb{E}_\nu \left[Y \circ \theta_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}} | \mathcal{F}_\tau \right] = \mathbb{E}_{X_\tau}[Y] \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}},$$

$\mathbb{P}_\nu$-м.н.

Означення 2.8. Нехай P - марковське перехідне ядро, $A \in \mathcal{E}$ деяка множина. Тоді кількість відвідувань множини A визначається як

$$N_A = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(X_k).$$

Потенціалом ядра P називається ядро (необов'язково марковське)

$$U(x, A) = \mathbb{E}_x[N_A] = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(x, A).$$

Означення 2.9. Нехай P - марковське перехідне ядро, $m \geq 1$ деяке ціле число, μ - деяка міра. Множина $C \in \mathcal{E}$ називається (m, μ)-малою, якщо для всіх $x \in C$ та $A \in \mathcal{E}$

$$P^m(x, A) \geq \mu(A).$$

(m, μ)-мала множина C називається

- сильно неперіодичною, якщо $m = 1$ та $\mu(C) > 0$;
- позитивною, якщо $\mathbb{E}_x[\sigma_C] < \infty$ для всіх $x \in C$.

Марковське ядро P називається незвідним, якщо для нього існує досяжна мала множина. Нетривіальна σ-скінченна міра μ називається незвідною мірою, якщо з $\mu(A) > 0$ випливає $A \in \mathcal{E}_P^+$. Незвідна міра називається максимальною незвідною мірою, якщо з $A \in \mathcal{E}_P^+$ випливає $\mu(A) > 0$. Якщо для деякого ймовірнісного розподілу $\{a_n, n \geq 0\}$ та ненульової міри μ виконується нерівність

$$\sum_{n\geq 0} a_n P^n(x, A) \geq \mu(A),$$

для всіх $x \in C$ та $A \in \mathcal{E}$, то множину C будемо називати p-множиною (petite set).

Відомо, що інваріантна ймовірнісна міра є максимальною незвідною мірою, а також, що незвідний ланцюг допускає не більше однієї інваріантної міри.

Означення 2.10. Періодом досяжної малої множини C називається додатнє ціле число $d(C)$, визначене наступним чином

$$d(C) = \text{н.с.д.} \left\{ n \geq 1 : \inf_{x\in C} P^n(x, C) > 0 \right\}.$$

Нехай P – це незвідне перехідне ядро.

- Періодом P називається спільний період всіх досяжних множин.
- Якщо період рівний одиниці, то ядро називається неперіодичним.
- Якщо існує досяжна $(1, \mu)$-мала множина C із $\mu(C) > 0$, то ядро називається строго (сильно) неперіодичним.

Наступна теорема демонструє, що будь-який періодичний ланцюг Маркова має певну циклічну структуру. Ця теорема відіграє надзвичайно важливу роль в теорії однорідних ланцюгів Маркова, оскільки дозволяє зосередитись на дослідженні неперіодичних ланцюгів і переносити отримані результати на періодичний випадок.

Теорема 2.3. *(див. [111], Теорема 9.3.6) Нехай P незвідне, марковське ядро із періодом d. Тоді існує послідовність $C_0, \ldots, C_{d-1}$ взаємно несумісних досяжних множин, таких, що для $i = 0, \ldots, d-2$ та $x \in C_i, P(x, C_{i+1}) = 1$ та для всіх $x \in C_{d-1}, P(x, C_0) = 1$. Відповідно $\cup_{i=0}^{d-1} C_i$ є поглинаючою множиною.*

Теорема 2.4. *(див. [111], Теорема 9.4.10) Якщо ядро P незвідне та неперіодичне, то кожна p-множина є малою.*

2.2 Рекурентні властивості ланцюгів Маркова, стаціонарність

Означення 2.11. Множина $A \in \mathcal{E}$ називається:

- рекурентною, якщо $U(x, A) = \infty$ для всіх $x \in A$;
- Гаріс-рекурентною, якщо для всіх $x \in A$, $P_x(N_A = \infty) = 1$;
- геометрично рекурентною, якщо існує $\delta > 1$ таке, що

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}_x \left[\delta^{\sigma_A}\right] < \infty$$

- рівномірно транзієнтною, якщо $\sup_{x \in A} U(x, A) < \infty$
- транзієнтною, якщо $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, де A_n – рівномірно транзієнтні;
- максимальною поглинаючою, якщо $A = \{x \in E : \mathbb{P}_x\{\sigma_A < \infty\} = 1\}$.

Означення 2.12. Перехідне ядро P називається:

- рекурентним, якщо воно незвідне, та кожна досяжна множина рекурентна;
- Гаріс-рекурентним, якщо всі досяжні множини є Гаріс-рекурентними;
- транзієнтним, якщо E-транзієнтна.

Мають місце наступні властивості (див. [111], розділ 10).

Теорема 2.5. *Нехай P марковське ядро.*

- *P рекурентне тоді і лише тоді, коли воно допускає рекурентну, досяжну p-множину.*
- *Якщо P допускає інваріантну ймовірнісну міру, то P-рекурентне.*
- *Якщо P-незвідне, то воно або рекурентне, або транзієнтне. Якщо C - деяка досяжна (a, μ) p-множина із $\mu(C) > 0$, то ядро буде рекурентним тоді і лише тоді, коли $\mu U(C) = \infty$.*
- *Якщо P незвідне Гаріс-рекурентне ядро, то для довільної $A \in \mathcal{E}_p^+$, $\mathbb{P}_x\{N_A = \infty\} = 1$ для всіх $x \in E$. Якщо ж $A \notin \mathcal{E}_p^+$, то $\mathbb{P}_x\{N_A = \infty\} = 0$ для всіх $x \in E$.*

Наступна теорема стверджує, що будь-який незвідний рекурентний однорідний ланцюг Маркова можна розкласти на транзієнтну та Гаріс-рекурентну частини.

Теорема 2.6. *Нехай P - рекурентне незвідне марковське ядро. Тоді існує єдине розбиття $E = H \cup N$ таке, що*

(i) H - максимальна поглинаюча,

(ii) N - транзієнтна.

(iii) Звуження P на H є Гаріс-рекурентним.

Для довільної досяжної p-множини C маємо

$$H = \{x \in E : \mathbb{P}_x\{N_C = \infty\} = 1\}.$$

Якщо P не є Гаріс-рекурентним, то множина N непорожня та $\mathbb{P}_x\{\sigma_H = \infty\} > 0$ для всіх $x \in N$. Більше того, для всіх p-множин $C \subset N$ та $x \in N$ $P_x\{N_C = \infty\} = 0$.

Далі розглянемо питання, що стосуються існування інваріантних мір, а також збіжності перехідних ймовірностей (див. [111], Розділ 11).

Теорема 2.7. *Нехай P незвідне та рекурентне марковське ядро. Тоді для P існує ненульова інваріантна міра λ єдина з точністю до додатнього множника та така, що $\lambda(C) < \infty$ для всіх p-множин C. Більше того, для довільної досяжної множини A та невід'ємної вимірної функції h*

$$\lambda(h) = \int\limits_A \lambda(dx)\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_A - 1} h(X_k)\right] = \int\limits_A \lambda(dx)\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{\sigma_A} h(X_k)\right].$$

Означення 2.13. Незвідне марковське перехідне ядро P, що допускає інваріантну ймовірнісну міру, називається позитивним, в іншому разі називається нульовим.

Теорема 2.8. *Нехай P незвідне та рекурентне марковське ядро, λ його ненульова інваріантна міра. Якщо існує досяжна p-множина C така, що*

$$\int\limits_C \lambda(dx)\mathbb{E}_x[\sigma_C] < \infty,$$

то P-позитивне.

У наступній теоремі представлено один із головних результатів теорії ланцюгів Маркова, а саме збіжність перехідних ймовірностей за n кроків до стаціонарного розподілу.

Теорема 2.9. *Нехай P неперіодичне позитивне Марковське ядро з єдиною інваріантною ймовірнісною мірою π, та H - максимальна абсорбуюча множина з Теореми 2.6. Тоді для довільної ймовірнісної міри μ такої, що $\mu(E \setminus H) = 0$, має місце збіжність у нормі повної варіації на просторі знакозмінних мір.*

$$||\mu P^n - \pi|| \to 0,\ n \to \infty.$$

Якщо ланцюг є геометрично рекурентним (тобто допускає геометрично рекурентну малу множину), то швидкість збіжності в попередній теоремі теж є геометричною.

Теорема 2.10. *Нехай P – марковська перехідна ймовірність. Припустимо, що існують досяжна (m, μ)-мала множина C та $\beta > 1$ такі, що $\mu(C) > 0$ та*

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\beta^{\sigma_C}] < \infty.$$

Тоді для P існує єдина інваріантна ймовірнісна міра π та існують такі сталі $\delta > 1$ та $M < \infty$, що для довільної ймовірнісної міри λ має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^k ||\lambda P^k - \pi|| \le M\mathbb{E}_\lambda[\beta^{\sigma_C}].$$

Зауважимо, що ланцюги Маркова, для яких виконано твердження попередньої теореми, називають геометрично ергодичними.

Одним із найбільш вживаних методів для перевірки геометричної ергодичності на практиці є геометрична умова зсуву.

Теорема 2.11. *Нехай P – марковське перехідне ядро, $C \in \mathcal{E}$ деяка множина. Тоді (i) якщо $b = \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\beta^{\sigma_C}] < \infty$ для деякого $\beta > 1$, то функція $V(s) = \mathbb{E}_x[\beta^{\tau_C}]$ задовільняє геометричну умову зсуву*

$$PV \le \beta^{-1} V + b\mathbb{1}_C.$$

(ii) Якщо існує така функція $V\colon E \to [1, \infty]$ та сталі $\lambda \in [0, 1)$, $b < \infty$, що

$$PV \le \lambda V + b\mathbb{1}_C,$$

то для всіх $x \in E$

$$\mathbb{E}_x\,[\lambda^{-\sigma_C}] \le V(x) + b\lambda^{-1}.$$

В даній дисертаційній роботі наведений вище результат узагальнюється на випадок неоднорідних ланцюгів Маркова.

2.3 Методи склеювання та розщеплення

Означення 2.14. Склеюванням випадкових елементів $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, X)$ та $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}', X')$ на $(E, \mathcal{E})$ називається випадковий елемент $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}, (\hat{X}, \hat{X}'))$ на $(E^2, \mathcal{E}^2)$ такий, що

$$X \simeq \hat{X}, X' \simeq \hat{X}',$$

де символ $\simeq$ означає рівність розподілів.

Припустимо, що випадковий елемент $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{P}, (Z, Z'))$ є склеюванням. Тоді

$$||\mathbb{P} - \mathbb{P}'|| = 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} \left(\hat{P}\{Z \in A\} - \hat{P}\{Z' \in A\} \right).$$

У той же час

$$\hat{P}\{Z \in A\} - \hat{P}\{Z' \in A\} = \hat{P}\{Z \in A, Z = Z'\} + \hat{P}\{Z \in A, Z \neq Z'\} - \hat{P}\{Z' \in A, Z = Z'\}$$

$$-\hat{P}\{Z' \in A, Z \neq Z'\} = \hat{P}\{Z \in A, Z \neq Z'\} - \hat{P}\{Z' \in A, Z \neq Z'\} \leq \hat{P}\{Z \neq Z'\}.$$

Таким чином отримали нерівність

$$||\mathbb{P} - \mathbb{P}'|| \leq 2\hat{P}\{Z \neq Z'\}.$$

Ця нерівність називається базовою нерівністю склеювання.

В теорії ланцюгів Маркова в якості випадкових елементів, що склеюються, типово виступають дві незалежні копії деякого ланцюга Маркова. Отже, нехай $(\hat{X}, \hat{X}')$ це склеювання двох копій одного однорідного ланцюга Маркова, які мають різні початкові розподіли, тобто $X = (X_n)_{n \geq 0}$, $X' = (X'_n)_{n \geq 0}$.

Означення 2.15. В моделі склеювання двох ланцюгів Маркова, описаній вище, часом склеювання називається мінімальна випадкова величина T така, що $\hat{X}_n = \hat{X}'_n$ для всіх $n \geq T$.

Тоді матимемо нерівність

$$||\mathbb{P}\{X_n \in \cdot\} - \mathbb{P}\{X'_n \in \cdot\}|| \leq 2\hat{P}\{T > n\}.$$

Зауважимо, що шляхом подальших уточнень у даній нерівності можна позбавитись двійки у правій частині.

За допомогою методу склеювання можна оцінювати швидкість збіжності ланцюгів до стаціонарного розподілу, або норму повної варіації для різниць перехідних ймовірностей за n кроків для ланцюгів, що стартують з різними початковими розподілами. Детальніше про метод склеювання див. [106] та [152].

Розглянемо тепер **метод розщеплення**. Основна ідея методу полягає у тому, щоб довести певне твердження для атомарних ланцюгів Маркова (часто користуючись рекурентними властивостями та результатами з теорії відновлення), а потім поширити доведене твердження на ланцюги із довільним простором станів шляхом конструювання спеціального, допоміжного двокомпонентного ланцюга, який матиме атом, але маргинальний розподіл першої компоненти якого співпадатиме з початковим ланцюгом. Нижче буде наведено основні етапи конструювання розщеплення, за подробицями див. [111], Розділ 11.

Нехай P – це незвідне марковське ядро, що допускає $(1,\mu)$-малу множину, з $\mu(C)=1$. Не втрачаючи загальності, можемо вважати C $(1,2\varepsilon\nu)$-малою з $\varepsilon\in(0,1)$ та $\nu(C)=1$. Визначимо залишкове ядро

$$R(x,A)=\frac{P(x,A)-\varepsilon\nu(A)}{1-\varepsilon}\mathbb{1}_C(x)+P(x,A)\mathbb{1}_{E\setminus C}(x).$$

Тоді можна переписати P як

$$P(x,A)=(1-\varepsilon\mathbb{1}_C(x))\,R(x,A)+\varepsilon\mathbb{1}_C(x)\nu(A).$$

Визначимо “процес розщеплення” наступним чином. Нехай $\hat{E}=E\times\{0,1\}$ – новий простір станів, а $\hat{\mathcal{E}}$ відповідна σ-алгебра. Розглянемо процес $(\hat{X}=(X_n,D_n)_{n\geq 0})$, розподіл якого задано рекурентно. Якщо $X_n\notin C$, то X_{n+1} має розподіл $P(X_n,\cdot)$. Якщо $X_n\in C$ та $D_n=0$, то X_{n+1} має розподіл $R(X_n,\cdot)$, а якщо $X_n\in C$ та $D_n=1$, то X_{n+1} має розподіл ν (і не залежить від X_n). У свою чергу $\{D_n,n\geq 0\}$ це послідовність незалежних випадкових величин з розподілом Бернулі з ймовірністю успіху рівною ε. Очевидно, що $\hat{X}$ є ланцюгом Маркова. Наступна теорема містить основні властивості таким чином побудованого процесу (строгу побудову цього процесу див. у [111], Розділ 11.1).

Теорема 2.12. *Нехай P – незвідне марковське ядро, C $(1,2\varepsilon\nu)$-мала множина, з $\nu(C)=1$, і $\hat{P}$ перехідна ймовірність відповідного процесу розщеплення. Тоді:*
(i) Множина $\hat{\alpha}=C\times\{1\}$ є аперіодичним атомом для $\hat{P}$.

(ii) Множина $C \times \{0,1\}$ *є малою для ядра* $\hat{P}$.

(iii) Якщо C *досяжна, то* $\hat{\alpha}$ *досяжний атом для* $\hat{P}$ *та* $\hat{P}$ *незвідне.*

(iv) Для всіх $k \geq 1$, $\hat{P}^k(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = \varepsilon \nu P^{k-1}(C)$.

(v) Якщо C *рекурентна, то* $\hat{\alpha}$ *теж рекурентна для* $\hat{P}$.

(vi) Якщо C*-гарісова множина для* P*, то для довільної ймовірнісної міри* λ*, що задовільняє* $\mathbb{P}_\lambda\{\sigma_C < \infty\} = 1$*, маємо* $\mathbb{P}_{\lambda \times \delta_d}\{\sigma_{\hat{\alpha}} = 1\}$ *для всіх* $d \in \{0,1\}$. *Більше того, якщо* P *Гаріс-рекурентне, то таким є і* $\hat{P}$.

(v) Якщо C *досяжна та* P *допускає інваріантну ймовірнісну міру* π*, то* $\hat{\alpha}$ *є позитивною для* $\hat{P}$.

Розділ 3

Геометрична рекурентність та стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова

3.1 Вступ

Ця частина дисертаційної роботи присвячена дослідженню геометричної (або експоненційної) рекурентності неоднорідних ланцюгів Маркова та отриманню оцінок стійкості для перехідних ймовірностей за n кроків для геометрично рекурентних неоднорідних ланцюгів Маркова. Під геометричною рекурентністю ми розуміємо скінченність геометричного моменту для σ_C – часу першого повернення (return time) до певної множини C, або

$$\mathbb{E}_x \left[\beta^{\sigma_C}\right] < \infty,$$

для деякої сталої $\beta > 1$ (див. також роботи [123] та [124]). Ця частина організована наступним чином. У першому розділі розглядається модифікована для неоднорідного випадку умова зсуву, яка забезпечує геометричну рекурентність. Другий розділ присвячено оцінкам стійкості для неоднорідних ланцюгів, що допускають існування атому. Для цього використовується адаптована до неоднорідного випадку теорія відновлення, де ключову роль відіграє існування мажоруючої послідовності. У третьому розділі отримані результати узагальнюються на випадок довільного фазового простору. Основним інструментом дослідження виступає відомий метод розщеплення (splitting method) Нуммеліна. Нарешті, у четвертому розділі розглядається неоднорідна авторегресійна модель і наведено умови, які забезпечують геометричну рекурентність такої моделі, а також стійкість перехідних ймовірностей за n кроків.

3.1.1 Позначення

Розглянемо вимірний простір $(E, \mathcal{E})$ та позначимо через $\mathbb{M}_1(\mathcal{E})$, $\mathbb{F}_+(\mathcal{E})$, $\mathbb{F}_b(\mathcal{E})$ простори усіх ймовірнісних мір, невід'ємних та обмежених вимірних функцій на $(E, \mathcal{E})$ відповідно.

Позначимо через $\mathbb{N}_0$ множину всіх невід'ємних цілих чисел $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

В цьому розділі ми вивчатимемо неоднорідні ланцюги Маркова зі значеннями у фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$. Ми ототожнюватимемо неоднорідний ланцюг Маркова із послідовністю марковських ядер $P_t \colon E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$, де $t \in \mathbb{N}_0$. Марковське ядро $P_t(x, A)$ визначає ймовірність того, що ланцюг, який у момент часу t знаходиться у стані $x \in E$, потрапить у множину $A \in \mathcal{E}$ в момент часу $t + 1$.

Введемо спеціальні позначення для добутків перехідних ймовірностей:

$$P^{t,n}(x, A) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{t+k}\right)(x, A) = \int_E \ldots \int_E P_t(x, dx_1) \ldots P_{t+n-1}(x_{n-1}, A), \;\; n \geq 1$$

$$P^{t,0}(x, A) = \mathbb{1}_A(x).$$

Загальновідомо, що послідовність марковських ядер (P_t) разом із деякою початковою мірою $\lambda \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$ однозначно визначають деякий неоднорідний ланцюг Маркова (див [120], Теорема 5.1). Основна мета цього розділу це ввести позначення, які б не були занадтно обтяжені індексами та дозволили б застосовувати інтуїцію з теорії однорідних ланцюгів Маркова.

Нехай $\Omega = E^\infty$ – це множина всіх нескінченних послідовностей $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$, $\omega_j \in E$ та $\mathcal{F} = \mathcal{E}^\infty$ – це σ-алгебра циліндричних множин. Для довільного фіксованого $t \in \mathbb{N}_0$ та $\lambda \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$ існує єдина ймовірнісна міра $\mathbb{P}^t_\lambda$ (див. [120], Розділ 5 за деталями відповідної конструкції), така що для довільної циліндричної множини $A_0 \times A_1 \ldots A_{t+n} \times E^\infty \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}^t_\lambda \{A_0 \times \ldots \times A_{t+n}\} = \int_{A_t} \int_{A_{t+1}} \ldots \int_{A_{t+n}} \lambda(dx_0) P_t(x_0, dx_1) \ldots P_{t+n-1}(x_{n-1}, dx_n).$$

Визначимо послідовність випадкових величини $X_{t,n}(\omega) = \omega_{t+n}$, $n \geq 0$, таких, що для всіх $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$:

$$\mathbb{P}^t_\lambda \left\{X_{t,0} \in A_0, \ldots, X_{t,n} \in A_n\right\} = \mathbb{P}^t_\lambda \{E^t \times A_0 \times \ldots \times A_n\}.$$

Позначимо через

$$\mathcal{F}_{t,n} = \sigma\left[X_{t,k}, \; 0 \leq k \leq n\right],$$

натуральну фільтрацію, асоційовану з послідовністю випадкових величин $(X_{t,n},\ n \geq 0)$, та введемо позначення $\mathbb{E}^t\left[f(X_{t,n+m})|\mathcal{F}_{t,n}\right]$ для умовного математичного сподівання, асоційованого з $X_{t,n}, n \geq 0$ (тут $f \in \mathbb{F}_+(\mathcal{E})$, $n, m \geq 0$).

Тоді має місце Марковська властивість

$$\mathbb{E}^t\left[f(X_{t,n+m})|\mathcal{F}_{t,n}\right] = \mathbb{E}^t\left[f(X_{t,n+m})|X_{t,n}\right].$$

Станом на зараз ми визначили ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F})$ та послідовність $\mathbb{P}^t_\lambda$ ймовірнісних мір на цьому просторі, а також послідовність випадкових величин $X_{t,n}\colon \Omega \to E$, індексовану двома індексами $t, n \geq 0$. Природньо, ми асоціюємо $X_{t,n}$ із ймовірнісним простором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^t_\lambda)$. Тепер ми з'ясуємо, як $\mathbb{P}^t_\lambda$ та $X_{t,n}$ пов'язані при різних t.

Введемо оператор зсуву $\theta_n : \Omega \to \Omega$, $n \geq 1$, де $\forall \omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega$:

$$\theta(\omega) = \theta_1(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \ldots),$$

$$\theta_n(\omega) = (\theta_{n-1} \circ \theta)(\omega) = (\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots),\ n > 1.$$

Зрозуміло, що для довільних $t, s, n \in \mathbb{N}_0$,

$$X_{t+s,n} = X_{t,n+s} = X_{t,n} \circ \theta_s,$$

однак для $B \in \mathcal{E}$ маємо

$$\mathbb{P}^{t+s}_\lambda\left\{X_{t+s,n} \in B\right\} \neq \mathbb{P}^t_\lambda\left\{X_{t,n+s} \in B\right\}.$$

Для множини $C \in \mathcal{E}$ визначимо час першого відвідування (hitting time) та повернення (return time) у множину C як

$$\tau_{t,C} = \inf\{n \geq 0 : X_{t+n} \in C\},$$

$$\sigma_{t,C} = \inf\{n \geq 1 : X_{t+n} \in C\}.$$

Для того щоб спростити подальші перетворення та узгодити викладки із прийнятими в однорідній теорії, ми узгодимо наступне твердження.

Ми завжди будемо використовувати випадковий елемент $X_{t,n}$ в контексті ймовірності $\mathbb{P}^t_\lambda$ та ніколи в контексті $\mathbb{P}^s_\lambda$, $s \neq t$. Тому ми опускатимемо нижній індекс t для $X_{t,n}$, $\mathcal{F}_{t,n}$, $\tau_{t,C}$ та $\sigma_{t,C}$ в контексті $\mathbb{P}^t_\lambda$.

Наприклад, ми можемо написати

$$\mathbb{P}_{\lambda}^{t}\left\{\sigma_{C}>n\right\}=\mathbb{P}_{\lambda}^{t}\left\{\sigma_{t,C}>n\right\}=\mathbb{P}_{\lambda}^{t}\left\{X_{1}\notin C,\ldots X_{n}\notin C\right\}=$$

$$\mathbb{P}_{\lambda}^{t}\left\{X_{t,1}\notin C,\ldots X_{t,n}\notin C\right\}=\mathbb{P}_{\lambda}^{t}\left\{\omega\in\Omega:\omega_{t+1}\notin C,\ldots,\omega_{t+n}\notin C\right\}.$$

Аналогічно, для $f\in\mathbb{F}_{+}(\mathcal{E})$, скориставшись Марковською властивістю отримаємо

$$\mathbb{E}^{t}\left[f(X_{n+m})|\mathcal{F}_{n}\right]=\mathbb{E}^{t}\left[f(X_{t,n+m})|\mathcal{F}_{t,n}\right]=\mathbb{E}^{t}\left[f(X_{n+m})|X_{n}\right]=P^{t+n,m}f(X_{t,n})=$$

$$\int\limits_{E}\int\limits_{E}\ldots\int\limits_{E}P_{t+n}(\omega_{t+n},dx_{1})P_{t+n+1}(x_{1},dx_{2})\ldots P_{t+n+m-1}(x_{m-1},dx_{m})f(x_{m}).$$

Зауважимо, що у попередній формулі індекс t не може бути опущеним у $P^{t+n,m}f(X_{t,n})$.

З іншого боку, очевидно, що для $x\in E$

$$\mathbb{E}^{t}\left[f(X_{n+m})|X_{n}=x\right]=\mathbb{E}_{x}^{t+n}\left[f(X_{m})\right],$$

що є типовим виразом в теорії однорідних ланцюгів Маркова.

Завершимо цей розділ означенням атома.

Означення 3.1. Будемо казати, що множина $\alpha\in\mathcal{E}$ є атомом послідовності марковських перехідних ймовірностей $(P_{t},\ t\in\mathbb{N}_{0})$, якщо існує послідовність ймовірнісних мір $\mu_{t}\in\mathbb{M}_{1}(\mathcal{E})$ така, що для довільних $t\in\mathbb{N}_{0}$, $A\in\mathcal{E}$ та $x\in\alpha$:

$$P_{t}(x,A)=\mu_{t}(A).$$

Будемо казати, що атом α є *аперіодичним*, якщо існує $m\geq 1$ таке, що

$$\inf_{t}\{P^{t,m}(\alpha,\alpha),P^{t,m+1}(\alpha,\alpha)\}>0. \tag{3.1}$$

Зауваження 3.1. Для однорідного ланцюга Маркова з перехідним ядром P аперіодичний атом задовільняє нерівність

$$P^{n}(\alpha,\alpha)>0,$$

для всіх $n\geq m$, де m деяке додатнє ціле число. Зауважимо, що умова (3.1) означає існування $m\geq 1$ такого, що для всіх $n\geq 0$

$$P^{t,m+n}(\alpha,\alpha)>0.$$

На відміну від однорідного випадку, у неоднорідному можлива збіжність

$$P^{t,m+n}(\alpha,\alpha) \to 0,\ t \to \infty.$$

Саме тому ми вимагаємо в (3.1), щоб

$$\inf_t \{P^{t,m}(\alpha,\alpha), P^{t,m+1}(\alpha,\alpha)\} > 0.$$

Оскільки найбільший спільний дільник m та $m+1$ рівний 1, остання умова може бути переписана в наступному вигляді.

$$\exists m \geq 1,\ \forall n \geq 0, \exists \gamma_n > 0 : \inf_{t, 0\leq k \leq n} \{P^{t,m+k}(\alpha,\alpha) \geq \gamma_n > 0\}. \tag{3.2}$$

Саме в такому вигляді ми будемо використовувати дану умову.

3.2 Геометрична умова зсуву

3.2.1 Умова зсуву для неоднорідних ланцюгів Маркова

У цьому розділі побудуємо неоднорідний аналог добре відомого результату з теорії однорідних ланцюгів Маркова, що стосується геометричної умови зсуву (drift condition) та існування експоненційного моменту для часу першого повернення у множину. Варто зазначити, що умова зсуву для однорідних ланцюгів Маркова (яка забезпечує геометричну рекурентність) має вигляд

$$PV(x) \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_C(x)$$

та не є корисною, якщо ланцюг є неоднорідним (в роботі [36] розглядається модифікована умова зсуву, що забезпечує субгеометричну ергодичність). Це пов'язано з тим фактом, що властивості неоднорідного ланцюга не обов'язково визначаються поведінкою окремо взятої перехідної ймовірності P_t. Іншими словами, ланцюг може мати скінченний експоненційний момент, у той час як однорідні ланцюги, згенеровані окремими P_t, такого моменту не матимуть. В неоднорідному випадку константа λ та пробна функція V мусять залежати від t.

Умова (D).

Будемо казати, що послідовність марковських перехідних ймовірностей $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$ задовільняє **Умову (D)** з множиною $C \in \mathcal{E}$, якщо:

1. існує послідовність вимірних функцій $V_k\colon E \to [1,\infty]$ та дві послідовності додатніх чисел $\{\lambda_k,\ k \ge 0\}$, та $\{b_k,\ k \ge 0\}$ такі, що для всіх $x \in E$

$$P_k V_{k+1}(x) \le \lambda_{k+1} V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x); \tag{3.3}$$

2. послідовність $\{\lambda_k,\ k \ge 0\}$, визначена в п. 1., задовільняє умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k} (\lambda_j \vee 1) \right)^{-1} (1 - \lambda_k)^+ = \infty.$$

Тут $a \vee b = \max\{a, b\}$, та $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Зауваження 3.2. Помітимо, що λ_0 не фігурує в рівнянні (3.3), тому в подальшому будемо вважати, що $\lambda_0 = 1$.

Теорема 3.1. *Нехай $(P_t)_{t\ge 0}$ – послідовність марковських перехідних ймовірностей, $C \in \mathcal{E}$ деяка множина, та виконана **Умова (D)**.*

Тоді мають місце наступні твердження.

1. Для довільних $t \in \mathbb{N}_0$ та $x \in E$ таких, що $V_t(x) < \infty$:

$$\mathbb{P}_x^t\{\tau_C < \infty\} = \mathbb{P}_x^t\{\sigma_C < \infty\} = 1.$$

2. Для довільних $x \in E$, $t \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{E}_x^t \left[\prod_{j=1}^{\sigma_C} \lambda_{t+j}^{-1} \right] \le V_t(x) + \lambda_{t+1}^{-1} b_t \mathbb{1}_C(x).$$

Доведення. В доведенні ми дотримуватимемось позначень із розділу 3.1.1. Основним інструментом доведення буде Теорема Порівняння (див. 2.2). Нехай $t \in \mathbb{N}_0$ фіксоване. Всі подальші величини будемо розуміти в контексті $\mathbb{P}^t$, як описано у Розділі 3.1.1, тобто під λ_n слід розуміти λ_{t+n}, під $\mathcal{F}_n$ – $\mathcal{F}_{t+n}$ і т.д.

Покажемо спочатку, що за Умови 1 виконані рівності

$$\mathbb{P}_x^t\{\tau_C < \infty\} = \mathbb{P}_x^t\{\sigma_C < \infty\} = 1. \tag{3.4}$$

Визначимо

$$A_n = \left(\prod_{j=0}^{n} (\lambda_j \vee 1) \right)^{-1},$$

$$\mathcal{V}_n = A_n V_n(X_n),$$

$$\mathcal{Z}_n = A_{n+1}(1-\lambda_{n+1})^+ V_n(X_n),$$

$$\mathcal{Y}_n = b_n A_{n+1} \mathbb{1}_C(X_n).$$

Тоді запишемо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^t\left[\mathcal{V}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathcal{Z}_n &= A_{n+1}\left(\mathbb{E}^t\left[V_{n+1}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] + (1-\lambda_{n+1})^+ V_n(X_n)\right) \\
&= A_{n+1}\left(P_n V_{n+1}(X_n) + (1-\lambda_{n+1})^+ V_n(X_n)\right) \\
&\le A_{n+1}\left(\lambda_{n+1} V_n(X_n) + (1-\lambda_{n+1})^+ V_n(X_n) + b_n \mathbb{1}_C(X_n)\right).
\end{aligned}$$

Розглянемо два випадки. Якщо $\lambda_{n+1} \le 1$, то $A_{n+1} = A_n$ та

$$\lambda_{n+1} V_n(X_n) + (1-\lambda_{n+1})^+ V_n(X_n) = V_n(X_n),$$

звідки виводимо, що для $\lambda_{n+1} \le 1$:

$$\mathbb{E}^t\left[\mathcal{V}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathcal{Z}_n \le A_n V_n(X_n) + A_{n+1} b_n \mathbb{1}_C(X_n) = \mathcal{V}_n + \mathcal{Y}_n. \tag{3.5}$$

Нехай тепер $\lambda_{n+1} > 1$. У цьому випадку $A_{n+1}\lambda_{n+1} = A_n$ та $(1-\lambda_{n+1})^+ = 0$. Таким чином, для $\lambda_{n+1} > 1$

$$\mathbb{E}^t\left[\mathcal{V}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathcal{Z}_n \le A_n V_n(X_n) + A_{n+1} b_n \mathbb{1}_C(X_n) = \mathcal{V}_n + \mathcal{Y}_n. \tag{3.6}$$

Скомбінувавши (3.5) та (3.6), приходимо до висновку, що кожна з цих нерівностей виконана для всіх $\lambda_{n+1} > 0$.

Тоді з Теореми Порівняння маємо

$$\mathbb{E}^t_x\left[\mathcal{V}_{\sigma_C}\mathbb{1}_{\sigma_C<\infty}\right] + \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_C-1}\mathcal{Z}_k\right] \le \mathbb{E}^t_x\left[\mathcal{V}_0\right] + \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_C-1}\mathcal{Y}_k\right].$$

Скориставшись останньою нерівністю та тим фактом, що $V_k \ge 1$ для всіх $k \ge 0$, встановимо скінченність ряду

$$\sum_{n\ge 0} A_n(1-\lambda_n)^+ \mathbb{P}^t_x\left\{\sigma_C > n\right\} = \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{n=0}^{\sigma_C-1} A_n(1-\lambda_n)^+\right]$$

$$\le \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{n=0}^{\sigma_C-1} A_n(1-\lambda_n)^+ V_n(X_n)\right] = \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{n=0}^{\sigma_C-1}\mathcal{Z}_n\right] \le \mathbb{E}^t_x\left[\mathcal{V}_0\right] + \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_C-1}\mathcal{Y}_k\right]$$

$$= A_0 V_0(x) + A_1 b_0 \mathbb{1}_C(x) < \infty.$$

Отже, маємо співвідношення

$$\sum_{n\geq 0} A_n(1-\lambda_n)^+\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma_C > n\right\} < \infty.$$

Із **Умови (D)** випливає, що $\sum\limits_{n\geq 0} A_n(1-\lambda_n)^+ = \infty$, звідки маємо $\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma_C > n\right\} \longrightarrow 0$, що доводить (3.4).

Решта доведення слідує міркуванням з [111], Proposition 4.3.3 (ii). Застосуємо Теорему Порівняння ще раз. Покладемо

$$\Lambda_0 = 1,\ \Lambda_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1},\ n \geq 1,$$

$$\mathcal{V}_n = \Lambda_n V_n(X_n),\ n \geq 0,$$

$$\mathcal{Z}_n = 0, \mathcal{Y}_n = \Lambda_{n+1} b_n \mathbb{1}_C(X_n),\ n \geq 0.$$

Тоді для всіх $n \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^t\left[\mathcal{V}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathcal{Z}_n &= \Lambda_{n+1}P_nV_{n+1}(X_n)\\ &\leq \Lambda_{n+1}\lambda_{n+1}V_n(X_n) + \Lambda_{n+1}b_n\mathbb{1}_C(X_n)\\ &= \Lambda_nV_n(X_n) + \mathcal{Y}_n = \mathcal{V}_n + \mathcal{Y}_n.\end{aligned}$$

Припустимо, що для $x \in E$ виконана нерівність $V_0(x) < \infty$. Врахувавши (3.4) та застосувавши Теорему Порівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^t_x\left[\Lambda_{\sigma_C}\right] \leq \mathbb{E}^t_x\left[\mathcal{V}_{\sigma_C}\right] &\leq \mathbb{E}^t_x\left[\mathcal{V}_0\right] + \mathbb{E}^t_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_C - 1}\mathcal{Y}_k\right]\\ &= V_0(x) + \lambda_1^{-1}b_0\mathbb{1}_C(x),\end{aligned}$$

що і завершує доведення. □

Наслідок 3.1. *З Теореми 3.1 випливає, що для існування експоненційного моменту для σ_C при заданих $t \in \mathbb{N}_0$ та $x \in E$ достатніми є наступні умови*

*1. **Умова (D)**.*

2. Існують $\beta > 1$ та $C_\beta > 0$ такі, що $\forall k \geq 0$:

$$\beta^k \leq C_\beta \prod_{j=1}^{k} \lambda_{t+j}^{-1}.$$

3. $x \in E$ таке що $V_t(x) < \infty$.

Тоді має місце наступна нерівність

$$C_\beta^{-1}\mathbb{E}^t_x\left[\beta^{\sigma_C}\right] \leq V_t(x) + \lambda_{t+1}^{-1}b_t\mathbb{1}_C(x).$$

Наступне твердження є аналогом відомого результату з теорії однорідних ланцюгів Маркова (див. [111], Proposition 4.3.3 (i)).

Твердження 3.1. *Нехай* $\{\lambda_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ *це така послідовність додатніх чисел, що*

$$b := \sup_{t\in\mathbb{N}_0, x\in C} \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\sigma_C} \lambda_{t+k}^{-1}\right] < \infty.$$

Тоді умова зсуву

$$P_t V_{t+1}(x) \le \lambda_t V_t(x) + b\mathbb{1}_C(x)$$

виконана для функції $V_t(x) = \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\tau_C} \lambda_{t+k}^{-1}\right]$.

Доведення. З марковської властивості маємо:

$$\begin{aligned}
P_t V_{t+1}(x) &= \mathbb{E}_x^t\left[V_{t+1}(X_1)\right] = \mathbb{E}_x^t\left[\mathbb{E}_{X_1}^{t+1}\left[\prod_{k=0}^{\tau_C} \lambda_{t+1+k}^{-1}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\tau_C\circ\theta} \lambda_{t+1+k}^{-1}\right] = \sum_{j\ge1} \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\tau_C\circ\theta} \lambda_{t+1+k}^{-1}\mathbb{1}_{\sigma_C=j}\right] \\
&= \sum_{j\ge1} \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{j-1} \lambda_{t+1+k}^{-1}\mathbb{1}_{\sigma_C=j}\right] = \sum_{j\ge1} \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=1}^{j} \lambda_{t+k}^{-1}\mathbb{1}_{\sigma_C=j}\right] \\
&= \sum_{j\ge1} \lambda_t \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{j} \lambda_{t+k}^{-1}\mathbb{1}_{\sigma_C=j}\right] = \lambda_t \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\sigma_C} \lambda_{t+k}^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Для $x \notin C$ маємо $\mathbb{P}_x^t\{\sigma_C = \tau_C\} = 1$, звідки $P_t V_{t+1}(x) = \lambda_t V_t(x)$. Окрім того, для довільних $x \in C$:

$$P_t V_{t+1}(x) = \lambda_t \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\sigma_C} \lambda_{t+k}^{-1}\right] \le \lambda_t \sup_{x\in C} \mathbb{E}_x^t\left[\prod_{k=0}^{\sigma_C} \lambda_{t+k}^{-1}\right] \le \lambda_t \lambda_t^{-1} b.$$

Скомбінувавши вирази для $x \in C$ та $x \notin C$, отримаємо:

$$P_t V_{t+1}(x) \le \lambda_t V_t(x)\mathbb{1}_{C^c}(x) + b\mathbb{1}_C(x) \le \lambda_t V_t(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

Отже 3.1 доведено. □

3.2.2 Конструкція стохастичної мажоранти для часу повернення

Існування стохастичної мажоранти, тобто послідовності додатніх дійсних чисел $\{\hat{G}_n,\ n \geq 0\}$ таких, що:

$$\hat{G}_n(x) \geq \mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C > n \right\},$$

відіграватиме важливу роль в цілому ряді результатів, представлених у даній дисертаційній роботі.

Однак на практиці таку послідовність часто буває складно відшукати. Покажемо, що стохастичну мажоранту легко отримати із геометричної умови зсуву.

Лема 3.1. *Розглянемо неоднорідний ланцюг Маркова, визначений послідовністю перехідних ймовірностей* $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$. *Припустимо, що виконані умови Наслідку 3.1. Тоді*

$$\mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C > n \right\} \leq C_\beta \frac{V_t(x) + \lambda_{t+1}^{-1} b_t \mathbb{1}_C(x)}{e^{(n+1)\ln\beta}}. \tag{3.7}$$

Доведення. Шукане твердження є тривіальним наслідком застосування нерівності Чернова

$$\mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C > n \right\} = \mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C \geq n+1 \right\} \leq \frac{\mathbb{E}_x^t \left[e^{\sigma_C \ln\beta} \right]}{e^{(n+1)\ln\beta}}.$$

Формула (3.7) випливає з Наслідку 3.1. □

Скориставшись Лемою 3.1, ми зможемо побудувати мажоруючу послідовність припустивши, що права частина (3.7) є обмеженою функцією t. Гарною властивістю такої мажоруючої послідовності є те, що вона матиме скінченний експоненційний момент.

3.3 Геометрична рекурентність пари ланцюгів

У цьому розділі ми розглянемо дві послідовності марковських перехідних ймовірностей $(P_{0,t},\ t \in \mathbb{N}_0)$ та $(P_{1,t},\ t \in \mathbb{N}_0)$, визначених на $E \times \mathcal{E}$. Нехай $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ це σ-алгебра, згенерована добутками $A \times B,\ A, B \in \mathcal{E}$ та $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$, де $\lambda \otimes \lambda'$ це міра добутку, визначена на $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.

Ми можемо побудувати послідовність марковських перехідних ймовірностей $\bar{P}_t \colon E^2 \times \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \to [0,1]$, таких, що $t \in \mathbb{N}_0,\ x, y \in E, A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$:

$$\bar{P}_t((x,y),A) = \int\limits_{(z_0,z_1)\in A} P_{0,t}(x,dz_0)P_{1,t}(x,dz_1).$$

Також можемо побудувати канонічний ймовірнісний простір $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{F}})$ та послідовність ймовірнісних мір $\bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda_0\otimes\lambda_1}$ $(\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E}))$, використаши такий же підхід, що і в Розділі 3.1.1. Зрозуміло, що кожне $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ може бути записано як $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \ldots)$, де $\bar{\omega}_j = \left(\omega^{(0)}_j, \omega^{(1)}_j\right)$, $\omega^{(i)}_j \in E$, $i \in \{0,1\}$, $j \geq 0$. Тоді для довільного $t \in \mathbb{N}_0$ матимемо пару неоднорідних за часом ланцюгів Маркова $(X^{(0)}_{t,n}, X^{(1)}_{t,n},\ n \geq 0)$, таких, що $X^{(0)}_{t,n}(\bar{\omega}) = \omega^{(0)}_{t+n}$ та аналогічно $X^{(1)}_{t,n}(\bar{\omega}) = \omega^{(1)}_{t+n}$.

З цієї конструкції випливає, що $\forall A \in \mathcal{E}$, $i \in \{0,1\}$:

$$\bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda_0\otimes\lambda_1}\left\{X^{(i)}_n \in A\right\} = \int\limits_E \lambda_i(dx)P^{t,n}_i(x,A),$$

де для $i \in \{0,1\}$:

$$P^{t,n}_i(x,A) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{i,t+k}\right)(x,A).$$

Для заданої множини $C \in \mathcal{E}$ визначимо час потрапляння та повернення до множини $C \times C$:

$$\bar{\tau}_{t,C\times C} = \inf\{n \geq 0 : \left(X^{(0)}_{t,n}, X^{(1)}_{t,n}\right) \in C \times C\},$$

$$\bar{\sigma}_{t,C\times C} = \inf\{n \geq 1 : \left(X^{(0)}_{t,n}, X^{(1)}_{t,n}\right) \in C \times C\},$$

та оператор зсуву на $\bar{\Omega}$: $\bar{\theta}((\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \ldots)) = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots)$.

Також нам знадобляться ймовірності та математичні сподівання $\mathbb{P}^t_{i,\lambda}$, $\mathbb{E}^t_{i,\lambda}$, $i \in \{0,1\}$, $\lambda \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$. Їх слід розуміти як канонічні ймовірності та математичні сподівання, згенеровані послідовностями $(P_{0,t},\ t \in \mathbb{N}_0)$, або $(P_{1,t},\ t \in \mathbb{N}_0)$.

В подальшому опускатимемо нижній індекс t в контексті $\bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda_0\otimes\lambda_1}$, як описано в Розділі 3.1.1.

Введемо наступні умови.

Умова A: Існує множина $\alpha \in \mathcal{E}$, яка є аперіодичним атомом для обох послідовностей $(P_{0,t})$, та $(P_{1,t})$.

Умова D1: Припустимо, що **Умова (D)** виконана для обох послідовностей $(P_{i,t},\ t \in \mathbb{N}_0, i \in \{0,1\})$ із $V_t^{(i)}$, $\lambda_t^{(i)}$ та $\beta_t^{(i)}$. Припустимо також, що існує $\beta > 1$ та сталі $C_\beta^{(i)} > 0$ такі, що для $i \in \{0,1\}$, $t, n \geq 0$, та $\lambda_t^{(i)}$

$$\beta^n \leq C_\beta^{(i)} \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_{t+k}^{(i)} \right)^{-1}. \tag{3.8}$$

Тепер введемо спеціальні позначення, які знадобляться при доведенні основного результату.

Нехай виконана **Умова (A)**, та α відповідний аперіодичний атом для обох ланцюгів. Тоді без втрати загальності можемо припустити існування таких $m > 0$ та $\gamma_0 > 0$, що

$$\gamma_0 = \inf_{t \in \mathbb{N}_0, i \in \{0,1\}} \{P_i^{t,m}(\alpha,\alpha), P_i^{t,m+1}(\alpha,\alpha), \ldots, P_i^{t,2m-1}(\alpha,\alpha)\} > 0. \tag{3.9}$$

Визначимо послідовність “спроб склеювання” $\nu_{t,k}$:

$$\begin{aligned}
\nu_{t,-1} &= \min\{\bar{\sigma}_{t,\alpha\times E}, \bar{\sigma}_{t,E\times\alpha}\},\\
\nu_{t,0} &= \max\{\bar{\sigma}_{t,\alpha\times E}, \bar{\sigma}_{t,E\times\alpha}\},\\
\nu_{t,n+1} &= \begin{cases} \infty, \text{ якщо } \nu_n = \infty, \\ \min\{k \geq \nu_{t,n} + m,\ X_{t,k}^{(1)} \in \alpha\}, \text{ якщо } X_{t,\nu_{t,n}}^{(0)} \in \alpha, \\ \min\{k \geq \nu_{t,n} + m,\ X_{t,k}^{(0)} \in \alpha\}, \text{ якщо } X_{t,\nu_{t,n}}^{(1)} \in \alpha, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

де $n \geq 0$ та m взяті з (3.9). Також визначимо

$$\begin{gathered}
U_{t,n} = \nu_{t,n} - \nu_{t,n-1},\ n \geq 0,\\
\tau_t = \min\{k \geq 0 : \nu_{t,k-1} = \nu_{t,k}\}.
\end{gathered} \tag{3.11}$$

$U_{t,n}$ слід розуміти як час наступного після m потрапляння в α ланцюгом $X^{(1-i)}$, якщо $X_{t,\nu_{t,n}}^{(i)} \in \alpha$, а τ_t це номер першої успішної “спроби склеювання”, та ν_{t,τ_t} це такий індекс, що $\left(X_{t,\nu_{t,\tau_t}}^{(0)}, X_{t,\nu_{t,\tau_t}}^{(1)}\right) \in \alpha \times \alpha$ вперше. Основна причина, з якої ми додали затримку в m кроків, полягає у тому, щоб забезпечити відділеність від 0 послідовності відновлення, що є основним елементом доведення. Нарешті визначимо сім'ю σ-алгебр:

$$\mathcal{B}_{t,n} = \sigma\left[\bar{\mathcal{F}}_{\nu_{t,n-1}}, U_{t,n}\right],\ n \geq 0. \tag{3.12}$$

Теорема 3.2. *Нехай* $(P_{0,t},\ t \in \mathbb{N}_0)$ *та* $(P_{1,t},\ t \ge 1)$ *– це дві послідовності марковських перехідних ймовірностей. Припустимо, що* ***Умова (A)*** *виконана та існують стала* $\beta > 1$ *та множини* $\tilde{E}_0, \tilde{E}_1 \in \mathcal{E}$, *такі, що* $\alpha \subset \tilde{E}_0 \cap \tilde{E}_1$ *та для всіх* $x, y \in \tilde{E}_0 \times \tilde{E}_1$*:*

$$\sup_t \left(\mathbb{E}^t_{0,x}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right] + \mathbb{E}^t_{1,y}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right]\right) < \infty.$$

Тоді існує стала $M > 0$, *для якої виконана нерівність*

$$\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] \le M\left(\mathbb{E}^t_{0,x}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right] + \mathbb{E}^t_{1,y}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right]\right). \tag{3.13}$$

Стала M *може бути зображена як*

$$M = 1 + \frac{1}{1 - \sqrt{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}}, \tag{3.14}$$

де $\gamma,\ \varepsilon > 0$ *деякі сталі такі, що* $(1-\gamma)(1+\varepsilon) < 1$.

Доведення. Оскільки для довільного $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ має місце нерівність $\bar{\sigma}_{t,\alpha\times\alpha}(\bar{\omega}) \le \nu_{t,\tau_t}(\bar{\omega})$, то для всіх $x, y \in \tilde{E}_0 \times \tilde{E}_1$ виконано

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\beta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] &\le \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\beta^{\nu_\tau}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_{\tau=k}\beta^{\nu_k}\right] \\
&\le \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\beta^{\nu_0}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_{\tau>k-1}\beta^{\nu_k}\right] \\
&\le \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\beta^{\nu_0}\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\bar{\mathbb{P}}^t_{x,y}\left\{\tau > k\right\} \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\beta^{2\nu_{k+1}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Остання нерівність випливає з нерівності Коші-Шварца. За Лемою 3.6 з $r(k) = 1$ існує $\gamma \in (0,1)$ таке, що

$$\bar{\mathbb{P}}^t\left\{\tau > j | \bar{\mathcal{F}}_{\nu_{j-1}}\right\} \le (1-\gamma)\mathbb{1}_{\tau_t > j-1},$$

звідки

$$\bar{\mathbb{P}}^t_{x,y}\left\{\tau > k\right\} < (1-\gamma)^k. \tag{3.16}$$

Зауважимо, що $\nu_{t,k+1} = \nu_{t,k} + U_{t,k+1}$ та $\nu_{t,k}$ є $\mathcal{B}_{t,k}$-вимірними.

Оберемо таке ε, що $(1+\varepsilon)(1-\gamma) < 1$. Оскільки $\sup_{t,i} \mathbb{E}^t_{i,\alpha}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right] < \infty$, ми можемо застосувати Лему 3.4 та знайти таке $\delta \in (1, \beta)$, що

$$\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{2\nu_{k+1}}\right] = \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{2\nu_k}\bar{\mathbb{E}}^t\left[\delta^{2U_{k+1}}|\mathcal{B}_k\right]\right] \le (1+\varepsilon)\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{2\nu_k}\right]. \tag{3.17}$$

Застосувавши (3.17) рекурсивно, отримаємо оцінку:

$$\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{2\nu_{k+1}}\right] \le (1+\varepsilon)^{k+1}\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{\nu_0}\right]. \tag{3.18}$$

Підставивши (3.18) та (3.16) у (3.15), та взявши до уваги, що (3.15) залишається вірним, якщо замінити β на δ, отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] &\le \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{\nu_0}\right]\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}((1-\gamma)(1+\varepsilon))^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\le \bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{\nu_0}\right]\left(1+\frac{1}{1-\sqrt{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}}\right) \\ &\le \left(\mathbb{E}^t_{0,x}\left[\delta^{\sigma_\alpha}\right]+\mathbb{E}^t_{1,y}\left[\delta^{\sigma_\alpha}\right]\right)\left(1+\frac{1}{1-\sqrt{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}}\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Оскільки $\delta \le \beta$, то з (3.19) випливає:

$$\bar{\mathbb{E}}^t_{x,y}\left[\delta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] \le \left(\mathbb{E}^t_{0,x}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right]+\mathbb{E}^t_{1,y}\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right]\right)\left(1+\frac{1}{1-\sqrt{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}}\right), \tag{3.20}$$

що і доводить Теорему з $M = 1+\frac{1}{1-\sqrt{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}}$. □

Теорема 3.2 доводить існування експоненційного моменту, однак перевірка умов Теореми в практичних застосуваннях може викликати певні труднощі. Зокрема, теорема не дає прямих формул для обчислення констант $\delta,\ \varepsilon, \gamma$, які є необхідними для обчислення M за формулою (3.14). Наступний результат покликаний вирішити цю проблему.

Теорема 3.3. *Нехай* $(P_{i,t},\ i \in \{0,1\}, t \in \mathbb{N}_0)$ *дві послідовності марковських перехідних ядер. Припустимо, що виконані* ***Умова (A)*** *та* ***Умова (D1)****. Додатково припустимо наступне:*

1. існують сталі $\hat{C} > 0,\ \hat{\beta} > \beta$ *такі що*

$$\mathbb{P}^t_{i,\alpha}\left\{\sigma_\alpha > n\right\} \le \hat{G}_n := \hat{C}\hat{\beta}^{-n},$$

отже

$$\hat{m} := \sum_{n\ge 0}\hat{C}\hat{\beta}^{-n} = \frac{\hat{C}\hat{\beta}}{\hat{\beta}-1} < \infty;$$

2. існують $m > 0$ *та* $\gamma_0 > 0$ *такі, що* $i \in \{0,1\}$

$$\inf_{t\in\mathbb{N}_0}\{P_i^{t,m}(\alpha,\alpha),\ldots P_i^{t,2m-1}(\alpha,\alpha)\} \ge \gamma_0;$$

3. існують множини $\mathcal{A}_i \in \mathcal{E}, \mathcal{A}_i \neq \emptyset, i \in \{0,1\}$ *такі, що для всіх* $x \in \mathcal{A}_i$

$$\sup_t V_t^{(i)}(x) < \infty.$$

Тоді для $x \in \mathcal{A}_0 \cup \alpha, y \in \mathcal{A}_1 \cup \alpha$ *виконана наступна нерівність*

$$\bar{\mathbb{E}}_{x,y}^t \left[\delta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] \leq M\left(C_\beta^{(0)} W_t^{(0)}(x) + C_\beta^{(1)} W_t^{(1)}(y)\right), \tag{3.21}$$

де

$$\begin{gathered} W_t^{(i)}(x) = V_t^{(i)}(x) + \left(\lambda_{t+1}^{(i)}\right)^{-1} b_t^{(i)} \mathbb{1}_\alpha \left(X_t^{(i}\right),\ i \in \{0,1\}, \\ M = 1 + \frac{1}{1-\sqrt{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}}, \\ \gamma = \gamma_0 (1-\hat{G}_m)^{\frac{\hat{m}-\hat{G}_m}{\hat{G}_m}}, \\ \delta = (1+\varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}}, \\ n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\varepsilon(\hat{\beta}-\beta)}{2\hat{C}\beta^{m+1}}\right) / \ln\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right) \right\rfloor + 2. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Тут ε *є довільною сталою, що задовільняє нерівності* $\varepsilon < \frac{\gamma}{1-\gamma}$*, та* $\lfloor a \rfloor$ *позначає цілу частину дійсного числа* a*.*

Доведення. Оскільки **Умова (D1)** виконана, ми можемо застосувати Наслідок 3.1 та отримати для всіх $x \in \mathcal{A}_i \setminus \alpha, i \in \{0,1\}$:

$$\sup_t \mathbb{E}_{i,x}^t \left[\beta^{\sigma_\alpha}\right] < \infty,$$

З умови 1 отримаємо

$$\sup_t \mathbb{E}_{i,\alpha}^t \left[\beta^{\sigma_\alpha}\right] < \infty.$$

Отже, умови Теореми 3.2 виконуються із $\tilde{E}_i = \mathcal{A}_i \cup \alpha$.

Формули для $W_t^{(0)}(x)$ та $W_t^{(1)}(y)$ випливають із Теореми 3.1, формула для сталої M доведена в Теоремі 3.2, формули для δ та n_0 доведені в Лемі 3.4. Формула для γ випливає з лем 3.2 та 3.3. ☐

Зауваження 3.3. Умова 1 в Теоремі 3.3 на перший погляд є сильнішою, ніж **Умова (D1)**, однак її можна вивести із **Умови (D1)**, як показано в Лемі 3.1. Звичайно, для деяких ланцюгів можливо знайти краще $\hat{G}_n$, ніж отримане з Леми 3.1.

Далі покажемо, як оцінки експоненційного моменту можуть бути застосовані для дослідження ергодичності неоднорідних ланцюгів Маркова. Умови, які гарантують сильну та слабку ергодичність неоднорідних ланцюгів, добре відомі.

Сильна ергодичність досліджується у роботах [28, 29, 142], а критерій слабкої ергодичності встановлено в [108, 129].

Зауважимо, що з **Умови (D)** не випливає навіть слабкої ергодичності в сенсі, визначеному в [108, 129] (якщо лише не виконується $\sup_{x,t} V_t(x) < \infty$, чого не можна очікувати для більшості ланцюгів, які становлять практичний інтерес), однак ця умова достатня для збіжності у рівномірній нормі перехідної ймовірності за n кроків. Швидкість такої збіжності вивчалася в роботах [3] та [35]. В роботі [3] геометрична умова зсуву використовувалась для встановлення швидкості збіжності . Однак **Умова (D)** даної роботи є слабшою, ніж відповідні умови з [3], оскільки в нашому випадку деякі λ_t можуть бути більшими за 1.

Основна відмінність результату, який буде доведено нижче, від результатів роботи [3] полягає у тому, що ми встановили оцінки для сум $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta^k ||P^{t,k}(x,\cdot) - P^{t,k}(y,\cdot)||$, тоді як [3] присвячено оцінюванню $||P^{t,k}(x,\cdot) - P^{t,k}(y,\cdot)||$. Для того щоб довести оцінку для суми, визначеної вище, в наступній теоремі застосуємо метод склеювання до двох копій одного неоднорідного ланцюга Маркова, які стартують із різними початковими розподілами. Це дозволить нам показати, що сума обмежена експоненційним моментом часу одночасного потрапляння у множину C. Після цього ми можемо скористатися Теоремою 3.2 або 3.3, щоб обчислити відповідні оцінки у термінах експоненційних моментів кожного з ланцюгів, або за допомогою пробної функції з **Умови (D)**.

Наступна теорема є аналогом добре відомого результату з теорії однорідних ланцюгів Маркова. Її доведення повторює доведення відповідної теореми для однорідних ланцюгів (див. [111] Розділ 8, 13). В роботах [3], [92], [155] наведені аналогічні результати для однорідних ланцюгів за різних умов, а робота [35] присвячена неоднорідному випадку. Ми наводимо тут цю теорему, щоб продемонструвати можливі застосування Теорем 3.2 та 3.3, а також підкреслити важливіть існування експоненційного моменту.

Теорема 3.4. *Нехай $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$ є послідовністю марковських перехідних ймовірностей, для якої існує аперіодичний атом $\alpha \in \mathcal{E}$, та $\lambda, \lambda' \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$ дві ймовірнісні міри такі, що для всіх $t \in \mathbb{N}_0$,*

$$\mathbb{P}^t_\lambda\{\sigma_\alpha < \infty\} = \mathbb{P}^t_{\lambda'}\{\sigma_\alpha < \infty\} = 1.$$

Припустимо, що існує $\beta > 1$ таке, що

$$\mathbb{E}^t_\alpha\left[\beta^{\sigma_\alpha}\right] < \infty.$$

Тоді існує $\delta \in (1, \beta)$, що задовільняє нерівності

$$\sum_{k\geq 0} \delta^k ||\lambda P^{t,k} - \lambda' P^{t,k}|| \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(\bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[\delta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] - 1\right).$$

Доведення. Проведемо доведення, використовуючи адаптований до неоднорідних ланцюгів метод склеювання.

Нехай $f \colon E \to \mathbb{R}$ це обмежена вимірна функція. Розглянемо ланцюги $X^{(0)}_{t,n}$ та $X^{(1)}_{t,n}$, що представляють собою дві незалежні копії одного ланцюга, заданого послідовністю $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^t_{0,\lambda}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\right] &= \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\mathbb{1}_{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}=k}\right] + \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\mathbb{1}_{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}>n}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[\bar{\mathbb{E}}^{t+k}_{\alpha\times\alpha}\left[f\left(X^{(0)}_{n-k}\right)\right]\mathbb{1}_{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}=k}\right] + \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\mathbb{1}_{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}>n}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left\{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha} = k\right\} P^{t+k,n-k} f(\alpha) + \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\mathbb{1}_{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}>n}\right].
\end{aligned}$$

Аналогічна нерівність виконана для $\mathbb{E}^t_{1,\lambda'}\left[f\left(X^{(1)}_n\right)\right]$. Таким чином, можемо записати

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}^t_{0,\lambda}\left[f\left(X^{(0)}_n\right)\right] - \mathbb{E}^t_{1,\lambda'}\left[f\left(X^{(1)}_n\right)\right]\right| &\leq \bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[\left|f\left(X^{(1)}_n\right) - f\left(X^{(2)}_n\right)\right|\mathbb{1}_{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}>n}\right] \\
&\leq \sup_{x,y\in E}|f(x) - f(y)|\bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left\{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha} > n\right\}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$||\lambda P^{t,n} - \lambda' P^{t,n}|| = \sup_{A\in\mathcal{E}}\left|\mathbb{E}^t_{0,\lambda}\left[\mathbb{1}_A\left(X^{(1)}_n\right)\right] - \mathbb{E}^t_{1,\lambda'}\left[\mathbb{1}_A\left(X^{(2)}_n\right)\right]\right| \leq \bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left\{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha} > n\right\}.$$

Нарешті отримаємо, що

$$\sum_{n\geq 0}\delta^n ||\lambda P^{t,n} - \lambda' P^{t,n}|| \leq \sum_{n\geq 0}\delta^n \bar{\mathbb{P}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left\{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha} > n\right\} = \frac{1}{\delta - 1}\left(\bar{\mathbb{E}}^t_{\lambda\otimes\lambda'}\left[\delta^{\bar{\sigma}_{\alpha\times\alpha}}\right] - 1\right).$$

Теорему доведено. □

3.3.1 Допоміжні леми

Лема 3.2. *Нехай α є аперіодичним атомом для послідовності марковських перехідних ймовірностей $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$, та*

$$\gamma_0 = \inf_t \{P^{t,m}(\alpha,\alpha), P^{t,m+1}(\alpha,\alpha), \ldots, P^{t,2m-1}(\alpha,\alpha)\} > 0.$$

Тоді для всіх $t, n \geq 0$:

$$\begin{aligned} P^{t,2m+n}(\alpha,\alpha) &\geq \gamma_0 \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}_\alpha^{t+k}\{\sigma_\alpha \leq m+n-k\} \\ &= \gamma_0 \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}_\alpha^{t+n-k}\{\sigma_\alpha \leq m+k\} > 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Доведення. Доведемо лему за індукцією. Почнемо з $n = 0$ в (3.23)

$$\begin{aligned} P^{t,2m}(\alpha,\alpha) &= \sum_{k=1}^{2m} \mathbb{P}_\alpha^t \{\sigma_\alpha = k\} P^{t+k,2m-k}(\alpha,\alpha) \geq \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}_\alpha^t \{\sigma_\alpha = k\} P^{t+k,2m-k}(\alpha,\alpha) \\ &\geq \gamma_0 \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}_\alpha^t \{\sigma_\alpha = k\} = \gamma_0 \mathbb{P}_\alpha^t \{\sigma_\alpha \leq m\}. \end{aligned}$$

Припустимо, що нерівність (3.23) виконана для всіх $t \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$. Перевіримо її для $n+1$. Скориставшись розкладом за першим входом (див. [113], Розділ 8, ст. 174), запишемо

$$\begin{aligned} P^{t,2m+n+1}(\alpha,\alpha) &= \sum_{k=1}^{2m+n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} P^{t+k,2m+n+1-k}(\alpha,\alpha) \\ &\geq \sum_{k=1}^{m+n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} P^{t+k,2m+n+1-k}(\alpha,\alpha) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} P^{t+k,2m+n+1-k}(\alpha,\alpha) + \sum_{k=n+2}^{m+n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} P^{t+k,2m+n+1-k}(\alpha,\alpha)$$

$$\geq \gamma_0 \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} \prod_{j=0}^{n+1-k} \mathbb{P}_\alpha^{t+k+n+1-k-j}\{\sigma_\alpha \leq m+j\} + \gamma_0 \mathbb{P}_\alpha^t\{n+2 \leq \sigma_\alpha \leq m+n+1\}$$

$$= \gamma_0 \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} \prod_{j=0}^{n+1-k} \mathbb{P}_\alpha^{t+n+1-j}\{\sigma_\alpha \leq m+j\} + \gamma_0 \mathbb{P}_\alpha^t\{n+2 \leq \sigma_\alpha \leq m+n+1\}$$

$$\geq \gamma_0 \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha = k\} \prod_{j=0}^{n} \mathbb{P}_\alpha^{t+n+1-j}\{\sigma_\alpha \leq m+j\} + \gamma_0 \mathbb{P}_\alpha^t\{n+2 \leq \sigma_\alpha \leq m+n+1\}$$

$$\geq \left(\gamma_0 \prod_{j=0}^{n} \mathbb{P}_\alpha^{t+n+1-j}\{\sigma_\alpha \leq m+j\}\right) \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha \leq m+n+1\} = \gamma_0 \prod_{j=0}^{n+1} \mathbb{P}_\alpha^{t+n-j}\{\sigma_\alpha \leq m+j+1\}.$$

Оскільки для довільного $t \in \mathbb{N}_0, \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha \leq m\} \geq P^{t,m}(\alpha, \alpha) > 0$, та послідовность $\mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha \leq n\}$ зростає по n, отримаємо строгу додатність кожного множника в (3.23). Тоді $P^{t,2m+n}(\alpha, \alpha) > 0$ для всіх $n \geq 0$. □

Лема 3.3. *Нехай виконані умови Леми 3.2, та припустимо існування спадної числової послідовності з невід'ємними елементами* $\{\hat{G}_n,\ n \geq 0\}$*, такої, що*

$$\hat{G}_n \geq \sup_t \mathbb{P}_\alpha^t\{\sigma_\alpha > n\},\ \text{та} \sum_{n\geq 0} \hat{G}_n = M < \infty.$$

Припустимо також, що $\hat{G}_m < 1$*. Тоді для* $\gamma = \gamma_0(1-\hat{G}_m)^{\frac{M-\hat{G}_m}{\hat{G}_m}} > 0$ *та для всіх* $t, n \geq 0$ *маємо нижню оцінку*

$$P^{t,2m+n}(\alpha, \alpha) \geq \gamma > 0. \tag{3.24}$$

Доведення. З Леми 3.2 отримаємо

$$P^{t,2m+n} \geq \gamma_0 \prod_{k=0}^{n} (1 - \hat{G}_{m+k}). \tag{3.25}$$

Той факт, що з (3.25) випливає (3.24), буде доведено в наступному розділі, в Теоремі 4.3. □

Помітимо, що умова $\hat{G}_m < 1$ не є занадто обмежуючою. Оскільки $\sum\limits_{n=0}^{\infty} G_n < \infty$ та $\{G_n,\ n \geq 0\}$ незростаюча, то з необхідністю існуватиме n_0 таке, що $\hat{G}_k < 1$ для всіх $k > n_0$. У випадку $m \leq n_0$, скориставшись Лемою 3.2 отримаємо існування іншого, більшого m за рахунок меншого γ_0.

Наступні три леми це модифіковані з теорії однорідних ланцюгів Маркова результати (див. [111], Розділ 13). Основна відмінність полягає у тому, що ми вивчаємо два різних ланцюги, а не дві копії одного і того ж ланцюга (як в однорідній теорії). У наступній лемі, наприклад, матимемо умови та оцінки, які відрізняються від аналогічних результатів теорії однорідних ланцюгів.

Лема 3.4. *(i) Розглянемо послідовність марковських перехідних ймовірностей* $(P_t,\ t \in \mathbb{N}_0)$, *та припустимо, що для неї існує аперіодичний атом* α *та стала* $\beta > 1$ *такі, що*

$$\sup_t \mathbb{E}^t_\alpha[\beta^{\sigma_\alpha}] < \infty. \tag{3.26}$$

Тоді для довільних $m \geq 0$ *та* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta = \delta(m, \varepsilon) \in (1, \beta)$ *таке, що*

$$\sup_{t,n} \mathbb{E}^t_\alpha[\delta^{m+\tau_\alpha \circ \theta_n}] \leq 1 + \varepsilon. \tag{3.27}$$

(ii) Якщо додатково існує мажоруюча послідовність $\hat{G}_n$ *та сталі* $\hat{C} > 0$, $\hat{\beta} > \beta$, *такі, що для всіх* $t, k \geq 0$

$$\mathbb{P}^t_\alpha\{\sigma_\alpha > k\} \leq \hat{G}_k \leq \hat{C}\hat{\beta}^{-k}, \tag{3.28}$$

то

$$\begin{aligned} \delta &= (1 + \varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}}, \\ n_0 &= \left\lfloor \ln\left(\frac{\varepsilon(\hat{\beta}-\beta)}{2\hat{C}\beta^{m+1}}\right) / \ln\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right) \right\rfloor + 2, \end{aligned} \tag{3.29}$$

де $\lfloor a \rfloor$ *– це ціла частина дійсного числа* a.

Доведення. Спершу встановимо наступну нерівність

$$\mathbb{P}^t_\alpha\{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}^{t+n-1}_\alpha\{\sigma_\alpha = k + j\}. \tag{3.30}$$

Для цього помітимо, що

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^t_\alpha\{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}^t\{\sigma^{(j)}_\alpha < n \leq \sigma^{(j+1)}_\alpha, \tau_\alpha \circ \theta_n = k\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}^t_\alpha\{\sigma^{(j)}_\alpha = i, \sigma_\alpha \circ \theta_{\sigma^{(j)}_\alpha} = k + n - i\} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}^t_\alpha\{\sigma^{(j)}_\alpha = i\}\mathbb{P}^{t+i}_\alpha\{\sigma_\alpha = k + n - i\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}^{t+i}_\alpha\{\sigma_\alpha = k + n - i\}\mathbb{P}^t_\alpha\{X_i \in \alpha\} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}^{t+i}_\alpha\{\sigma_\alpha = k + n - i\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}^{t+n-j}_\alpha\{\sigma_\alpha = k + j\}. \end{aligned}$$

Тепер отримаємо, що для довільного $l \geq 0$

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{\infty} \beta^k \mathbb{P}_\alpha^t\{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} &\leq \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \beta^k \mathbb{P}_\alpha^{t+n-j}\{\sigma_\alpha = k + j\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta^{-j} \sum_{k \geq l+j} \beta^k \mathbb{P}_\alpha^{t+n-j}\{\sigma_\alpha = k\}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

(i) Припустимо, що виконано (3.26). Позначимо

$$\beta_1 = \sqrt{\beta} > 0, \text{ та}$$

$$\xi_t = \beta_1^{\sigma_{t,\alpha}},$$

З умови (3.26) отримаємо

$$\sup_t \mathbb{E}_\alpha^t \left[|\xi_t|^2 \right] = \sup_t \mathbb{E}_\alpha^t \left[\beta^{\sigma_\alpha} \right] < \infty,$$

що означає, що сім'я розподілв ξ_t рівномірно інтегровна. Введемо спеціальне позначення для хвостів

$$a_n^{(t)} = \sum_{k \geq n} \beta_1^k \mathbb{P}_\alpha^t \left\{ \sigma_\alpha = k \right\}.$$

Отже, маємо $\sup_t a_n^{(t)} \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty$. З нерівності (3.31) отримаємо

$$\sup_n \sum_{k=l}^{\infty} \beta_1^k \mathbb{P}_\alpha^t \left\{ \tau_\alpha \circ \theta_n = k \right\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{-j} \sup_t a_{l+j}^{(t)} \longrightarrow 0,\ l \longrightarrow 0.$$

Останній вираз означає, що ми можемо знайти номер $n_0 > 0$ такий, що

$$\sum_{k > n_0}^{\infty} \beta_1^k \mathbb{P}_\alpha^t \{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} \leq \frac{\varepsilon}{2\beta_1^m}. \tag{3.32}$$

Оберемо таке $\delta \in (1, \beta_1)$, що $\delta^{m+n_0} \leq 1 + \varepsilon/2$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\alpha^t \left[\delta^{m+\tau_\alpha \circ \theta_n} \right] &= \mathbb{E}_\alpha^t \left[\delta^{m+\tau_\alpha \circ \theta_n} \mathbb{1}_{\tau_\alpha \circ \theta_n \leq n_0} \right] + \mathbb{E}_\alpha^t \left[\delta^{m+\tau_\alpha \circ \theta_n} \mathbb{1}_{\tau_\alpha \circ \theta_n > n_0} \right] \\ &\leq \delta^{m+n_0} + \beta_1^m \sum_{k > n_0} \mathbb{E}_\alpha^t \left[\beta_1^k \mathbb{1}_{\tau_\alpha \circ \theta_n = k} \right] \\ &= \delta^{m+n_0} + \beta_1^m \sum_{k > n_0} \beta_1^k \mathbb{P}_\alpha^t \{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} \\ &\leq 1 + \varepsilon/2 + \frac{\varepsilon \beta_1^m}{2\beta_1^m} = 1 + \varepsilon.\end{aligned} \tag{3.33}$$

(ii) Припустимо, що виконана умова (3.28). Скориставшись рівністю

$$\beta^k = (\beta - 1)\sum_{i=0}^{k-1}\beta^i + 1,$$

отримаємо для всіх $l \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j+l}^{\infty} \beta^k \mathbb{P}_\alpha^{t+n-j}\{\sigma_\alpha = k\} &\leq (\beta - 1)\sum_{k=l+j}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\beta^i \mathbb{P}_\alpha^{t+n-j}\{\sigma_\alpha = k\} + \hat{G}_{l+j-1} \\
&\leq (\beta - 1)\left[\left(\sum_{i=0}^{j+l-1}\beta^i\right)\hat{G}_{j+l-1} + \sum_{i\geq j+l}\beta^i \mathbb{P}_\alpha^{t+n-j}\{\sigma_\alpha > i\}\right] + \hat{G}_{l+j-1} \\
&\leq (\beta - 1)\left[\frac{\beta^{l+j} - 1}{\beta - 1}\hat{G}_{j+l-1} + \sum_{i\geq j+l}\beta^i \hat{G}_i\right] + \hat{G}_{l+j-1} \\
&= \beta^{j+l}\hat{G}_{j+l} + (\beta - 1)\sum_{i\geq j+l}\beta^i \hat{G}_i \\
&\leq \hat{C}\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^{j+l} + \hat{C}(\beta - 1)\sum_{i\geq j+l}\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^i = \left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^{j+l}\frac{\beta(\hat{\beta} - 1)}{\hat{\beta} - \beta}\hat{C}.
\end{aligned}$$

Підставивши цю нерівність в (3.31), отримаємо

$$\begin{aligned}
\sup_n \sum_{k=l}^{\infty} \mathbb{P}_\alpha^t\{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} &\leq \hat{C}\frac{\beta(\hat{\beta} - 1)}{\hat{\beta} - \beta}\sum_{j=1}^{\infty}\beta^{-j}\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^{j+l} \\
&= \hat{C}\frac{\beta(\hat{\beta} - 1)}{\hat{\beta} - \beta}\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^{l}\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\beta}^{-j} = \hat{C}\frac{\beta}{\hat{\beta} - \beta}\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^{l}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Тепер можемо знайти такий номер $n_0 \geq 1$, що

$$\sum_{k>n_0} \mathbb{P}_\alpha^t\{\tau_\alpha \circ \theta_n = k\} \leq \hat{C}\frac{\beta}{\hat{\beta} - \beta}\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)^{n_0 - 1} \leq \frac{\varepsilon}{2\beta^m}. \tag{3.35}$$

З (3.35) отримаємо вираз для n_0

$$n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\varepsilon(\hat{\beta} - \beta)}{2\hat{C}\beta^{m+1}}\right) / \ln\left(\frac{\beta}{\hat{\beta}}\right)\right\rfloor + 2,$$

який доводить формулу для n_0 в (3.29). Для завершення доведення покладемо $\delta = (1 + \varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}}$ та застосуємо перетворення (3.33) з β замість β_1.

□

У наступних двох лемах ми використовуватимемо позначення з Розділу 3.3 та припустимо виконання умов Теореми 3.2.

Лема 3.5. *Нехай* $h\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *вимірна функція. Тоді* $\forall t \in \mathbb{N}_0$*:*

$$\mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^t\left[h\left(X^{(i)}_{\nu_j}\right)|\mathcal{B}_j\right] = \mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)P_i^{t,U_j}h(\alpha) \tag{3.36}$$

Доведення. Доведемо формулу (3.36), скориставшись означенням умовного математичного сподівання. Випадкова величина $P_i^{t,U_j}h(\alpha)$ є $\mathcal{B}_j$-вимірною за конструкцією $\mathcal{B}_j$. Тому досить довести, що для довільної множини $A \in \mathcal{F}_{\nu_{j-1}}$:

$$\mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{U_j=k}\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})h(X^{(i)}_{\nu_j})\right] = \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{U_j=k}\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})P_i^{t,U_j}h(\alpha)\right]. \tag{3.37}$$

Скориставшись означенням ν_j, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{U_j=k}\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})h(X^{(i)}_{\nu_j})\right] = \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{U_j=k}h(X^{(i)}_{\nu_j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{U_j=k}h(X^{(i)}_{\nu_{j-1}+k})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{\nu_{j-1}+m+\tau^{(1-i)}\circ\theta_{\nu_{j-1}+m}=k}h(X^{(i)}_{\nu_{j-1}+k})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\mathbb{E}^t_{X^{(i)}_{\nu_{j-1}},X^{(1-i)}_{\nu_{j-1}}}\left[\mathbb{1}_{\tau^{(1-i)}\circ\theta_m=k-m}h(X^{(i)}_k)\right]\right]\\
&= \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\mathbb{E}^t_{i,\alpha}\left[h(X^{(i)}_k)\right]\mathbb{P}_{X^{(1-i)}_{\nu_{j-1}}}\{\tau^{(1-i)}\circ\theta_m = k-m\}\right]\\
&= \mathbb{E}^t_{i,\alpha}\left[h(X^{(i)}_k)\right]\mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\mathbb{P}^t\{U_j = k|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\}\right]\\
&= P_i^{t,k}h(\alpha)\mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{U_j=k}\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})\right] = \mathbb{E}^t_{x,y}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{U_j=k}\mathbb{1}_\alpha(X^{(i)}_{\nu_{j-1}})P_i^{t,U_j}h(\alpha)\right].
\end{aligned}$$

Таким сином, формула (3.37), а отже і (3.36) доведена. □

Лема 3.6. *Нехай* $r(n), n \geq 0$ *- невід'ємна числова послідовність. Тоді існує* $\gamma < 1$ *таке, що*

$$\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{\tau>j}r(\nu_j)|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right] \leq (1-\gamma)\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{E}^t\left[r(\nu_j)|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]. \tag{3.38}$$

Доведення. У цьому доведенні усі випадкові величини поза $\mathbb{E}^t$ слід розуміти як такі, що мають нижній індекс t, тобто $\mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right) = \mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{t,\nu_{t,j-1}}\right)$. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{\tau>j}r(\nu_j)|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right] &= \mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha^c}\left(X^{(i)}_{\nu_j}\right)r(\nu_j)|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\\
&= \mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_\alpha\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^t\left[\mathbb{E}^t\left[\mathbb{1}_{\alpha^c}\left(X^{(i)}_{\nu_j}\right)|\mathcal{B}_j\right]r(\nu_j)|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right].
\end{aligned}$$

З Леми 3.5 отримаємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[\mathbb{E}^{t}\left[\mathbb{1}_{\alpha^{c}}\left(X^{(i)}_{\nu_{j}}\right)|\mathcal{B}_{j}\right]r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\\
&\qquad=\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[P^{t,U_{j}}_{i}(\alpha,\alpha^{c})r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\\
&\qquad=\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[(1-P^{t,U_{j}}_{i}(\alpha,\alpha))r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right].
\end{aligned}$$

За лемою 3.3 $P^{t,2m+n}_{i}(\alpha,\alpha)\geq\gamma$, $\forall n\geq 0$, та, оскільки $U_{j}\geq 2m$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[(1-P^{t,U_{j}}_{i}(\alpha,\alpha))r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\\
&\qquad\leq(1-\gamma)\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right].
\end{aligned}$$

Це означає, що нами встановлено наступне співвідношення

$$\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[\mathbb{1}_{\tau>j}r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]\leq(1-\gamma)\mathbb{1}_{\tau>j-1}\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(i)}_{\nu_{j-1}}\right)\mathbb{E}^{t}\left[r(\nu_{j})|\mathcal{F}_{\nu_{j-1}}\right]. \tag{3.39}$$

Помітимо, що за означенням ν_{j-1}:

$$\left[\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(0)}_{\nu_{j-1}}\right)+\mathbb{1}_{\alpha}\left(X^{(1)}_{\nu_{j-1}}\right)\right]\mathbb{1}_{\tau>j-1}=1. \tag{3.40}$$

Тепер просумуємо нерівності (3.39) для $i\in\{0,1\}$, та, скориставшись (3.40), отримаємо (3.38). ☐

3.4 Геометрична рекурентність для пари неоднорідних ланцюгів Маркова зі значеннями у загальному фазовому просторі

У цьому розділі ми розглянемо пару неоднорідних за часом ланцюгів Маркова $X^{(1)}_{t}$ та $X^{(2)}_{t}$, $t\in\mathbb{N}_{0}=\{0,1,2,\ldots\}$ зі значеннями у загальному фазовому просторі $(E,\mathcal{E})$. Будемо дотримуватися позначень, введених у попередньому розділі.

Ключову роль для подальших результатів відіграватиме умова мінориризації.

Умова (A). Будемо казати, що послідовність марковських перехідних ядер $(P_{t},t\in\mathbb{N}_{0})$ задовольняє **Умову (A)**, якщо існує множина $C\in\mathcal{E}$, послідовність ймовірнісних мір $\nu_{t}\in\mathbb{M}_{1}(\mathcal{E})$ та послідовність сталих $\alpha_{t}\in(0,1)$ таких, що $\forall x\in C,\ A\in\mathcal{E}$ та для всіх $t\in\mathbb{N}_{0}$

$$P_{t}(x,A)\geq\alpha_{t}\nu_{t}(A),\ \text{та}$$

$$\alpha := \inf_t \alpha_t > 0.$$

Множина C з **Умови (A)** називається **малою множиною** (small set).

Умова мінорización є дуже важливим інструментом, який використовується в теорії однорідних ланцюгів Маркова. В нашому означенні ми ввели додаткову вимогу $\inf_t \alpha_t > 0$. Ця додаткова вимога гарантує те, що умова мінорizaції виконана рівномірно по часу та не зникає при $t \to \infty$. Така додаткова вимога є специфічною саме для неоднорідних ланцюгів.

Далі отримаємо оцінки для часу $\sigma_{C\times C}$ першого відвідування множини $C \times C$ парою ланцюгів $\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$, що визначені парою послідовностей марковських перехідних ядер $(P_{t,1}, P_{t,2}),\ t \in \mathbb{N}_0$. Припустимо, що обидва ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ задовольняють **Умову (A)** з тим же набором $\alpha_t, \nu_t,\ t \in \mathbb{N}_0$.

3.4.1 Конструкція розщеплення

Припустимо, що умова мінорizaції (A) виконана одночасно для обох ланцюгів зі спільними α_t, ν_t. Тоді ми можемо визначити “розщеплені” ланцюги $\check{X}_t^{(i)}$ та $\check{X}_{t,n}^{(i)}$ такі, що $\check{X}_t^{(i)}$ та $\check{X}_{t+n}^{(i)}$ є атомарними.

Покладемо $\check{E} = E \times \{0,1\}$ та $\check{\mathcal{E}} = \sigma[A \times \{0\}, A \times \{1\} \mid A \in \mathcal{E}]$. Для довільної множини $A \in \mathcal{E}$ визначимо $\check{A}_0 = A \times \{0\}$, $\check{A}_1 = A \times \{1\}$, $\check{A} = A \times \{0,1\}$.

Нехай $\varepsilon_t > 0$ – це послідовність додатних чисел. Для довільного $P_{t,i}$ визначимо $\check{P}_{t,i}\colon E \times \{0,1\} \to \check{\mathcal{E}}$.

Якщо $x \in E \setminus C$, $A \in \mathcal{E}$ та $d \in \{0,1\}$, то покладемо

$$\begin{gathered} \check{P}_{t,i}((x,d), A \times \{0\}) = (1-\alpha_t) P_{t,i}(x,A), \\ \check{P}_{t,i}((x,d), A \times \{1\}) = \alpha_t P_{t,i}(x,A). \end{gathered} \tag{3.41}$$

Якщо $x \in C$, то визначимо

$$\begin{gathered} \check{P}_{t,i}((x,0), A \times \{0\}) = (1-\alpha_t) \tfrac{P_{t,i}(x,A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1-\alpha_t}, \\ \check{P}_{t,i}((x,0), A \times \{1\}) = \alpha_t \tfrac{P_{t,i}(x,A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1-\alpha_t}, \\ \check{P}_{t,i}((x,1), A \times \{0\}) = (1-\alpha_t) \nu_t(A), \\ \check{P}_{t,i}((x,1), A \times \{1\}) = \alpha_t \nu_t(A). \end{gathered} \tag{3.42}$$

Із означень (3.41) та (3.42) бачимо, що

$$\check{P}_{t,i}((x,d), A \times \{0,1\}) = P_{t,i}(x,A), \tag{3.43}$$

для всіх $x \in E \setminus C,\ A \in \mathcal{E}$, та

$$(1-\alpha_t)\check{P}_{t,i}((x,0), A \times \{0,1\}) + \alpha_t \check{P}_{t,i}((x,1), A \times \{0,1\}) = P_{t,i}(x,A), \tag{3.44}$$

для всіх $x \in C,\ A \in \mathcal{E}$.

Іншою важливою рівністю, що випливає з означення (3.42), є наступна

$$\check{P}_{t,i}((x,d), A \times \{0\}) = (1-\alpha_t)\check{P}_{t,i}((x,d), A \times \{0,1\}), \tag{3.45}$$

для всіх $x \in E$, $d \in \{0,1\}$.

Нехай μ_1, μ_2 це дві ймовірнісні міри з $\mathbb{M}_1$, $d_1, d_2 \in \{0,1\}$, та δ_j – це міра Дірака, $j \in \{0,1\}$. За допомогою перехідних ймовірностей $\check{P}_{t,i}$ побудуємо канонічний ймовірнісний простір у спосіб, повністю аналогічний тому, що описано вище. Припустимо, що випадкові величини $\check{X}_t^{(i)}$ з $\check{X}_0^{(i)} \sim \mu_i \times \delta_{d_i}$, $d_i \in \{0,1\}$ та ймовірності $\check{\mathbb{P}}^t_{\mu_1 \times \delta_{d_1}, \mu_2 \times \delta_{d_2}}$ коректно визначені на вищевказаному ймовірнісному просторі. Щоб спростити позначення, введемо

$$\mu \times \{d\} := \mu \times \delta_d,\ \mu \in \mathbb{M}_1,\ d \in \{0,1\}. \tag{3.46}$$

Отримали ланцюги Маркова $\check{X}_t^{(i)}$, які мають атом $C \times \{1\}$. Позначимо

$$\begin{gathered} \sigma_C^{(i)} = \sigma_C^{(1,i)} = \inf\{t > 0 :\ X_t^{(i)} \in C\}, \\ \sigma_C^{(n,i)} = \sigma_C^{(i)} \circ \theta_{\sigma_C^{(n-1,i)}}. \end{gathered} \tag{3.47}$$

$$\begin{gathered} \check{\sigma}_{\check{C}}^{(i)} = \check{\sigma}_{\check{C}}^{(1,i)} = \inf\{t > 0 :\ \check{X}_t^{(i)} \in \check{C} = C \times \{0,1\}\}, \\ \check{\sigma}_{\check{C}}^{(n,i)} = \check{\sigma}_C^{(i)} \circ \theta_{\check{\sigma}_{\check{C}}^{(n-1,i)}},\ n \geq 2. \end{gathered} \tag{3.48}$$

Для фіксованих $k \in \{0,1\}$ покладемо

$$\begin{gathered} \check{\sigma}_{C_k}^{(i)} = \check{\sigma}_{C_k}^{(1,i)} = \inf\{t > 0 :\ \check{X}_t^{(i)} \in C \times \{k\}\}, \\ \check{\sigma}_{C_k}^{(n,i)} = \check{\sigma}_{C_k}^{(i)} \circ \theta_{\check{\sigma}_{C_k}^{(n-1,i)}},\ n \geq 2. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Нехай μ це ймовірнісна міра з $\mathbb{M}_1(\mathcal{E})$, та подія A залежить лише від одного із ланцюгів $\check{X}^{(1)}$ або $\check{X}^{(2)}$ таким чином, що індекс $i \in \{1,2\}$ зрозумілий із контексту. Ми використовуватимемо символ $\check{\mathbb{P}}^t_\mu\{A\}$, який означає наступне

$$\check{\mathbb{P}}^t_\mu\{A\} = (1-\alpha_t)\check{\mathbb{P}}^t_{\mu \times \{0\}}\{A\} + \alpha_t \check{\mathbb{P}}^t_{\mu \times \{1\}}\{A\},$$

де $\mu \times \{d\}$ визначено в (3.46). Будемо використовувати аналогічні позначення для математичних сподівань $\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[Z(X^{(i)})\right]$. Нарешті помітимо, що C_1 є атомом для кожного із ланцюгів $\{X_n^{(i)},\ n \geq 0\}$ так, що для всіх $x \in C$ ймовірність $\check{\mathbb{P}}^t_{x \times \{1\}}$ не залежить x. Позначимо її через $\check{\mathbb{P}}^t_{C_1}$, а відповідне математичне сподівання через $\mathbb{E}^t_{C_1}$.

3.4.2 Основний результат

В якості першого результату встановимо, що існування експоненційного моменту для кожного з $X^{(i)}$ є достатнім для існування експоненційного моменту для випадкової величини $\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}$. У наступній теоремі доведемо скінченність, однак не отримаємо оцінок, які можна було б використати на практиці, оскільки отримані з теореми оцінки залежатимуть від сталих γ та δ, які важко обчислювати у практичних застосуваннях. Тому ми доведемо окрему теорему, а саме Теорему 3.9, яка допоможе у вирішенні цієї проблеми.

Теорема 3.5. *Нехай $i \in \{1, 2\}$ фіксоване, ланцюги $X^{(i)}$ та $\check{X}^{(i)}$ визначені вище (тобто ланцюги $X^{(i)}$ задовільняють **Умову (A)**), випадкові величини $\sigma^{(i)}_C$ та $\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}$ визначені в (3.47) та (3.49) відповідно, та $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$. Припустимо, що існує таке $\beta > 1$, що*

$$\mathbb{E}^t_\mu\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right] < \infty,$$

та

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left\{ \frac{1}{1-\alpha_t} \left(\mathbb{E}^t_x\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right] - \alpha_t \mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right] \right) \right\} < \infty.$$

Тоді існують такі сталі $\delta > 1$ та $\gamma > 0$, що

$$\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right] \le \frac{1+\gamma}{1-\gamma} M_0 \mathbb{E}^t_\mu\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right], \tag{3.50}$$

$$\check{\mathbb{E}}^t_{C_1}\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right] \le \frac{1+\gamma}{1-\gamma} M_0 \mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right], \tag{3.51}$$

та

$$\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\sum_{j=0}^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}-1} \delta^j\right] \le \frac{M_1}{1-\gamma} \mathbb{E}^t_\mu\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right] \tag{3.52}$$

де

$$\begin{aligned} M_0 &= \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left\{ \tfrac{1}{1-\alpha_t} \left(\mathbb{E}^t_x\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right] - \alpha_t \mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right] \right) \right\}, \\ M_1 &= \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left\{ \tfrac{1}{1-\alpha_t} \left(\mathbb{E}^t_x\left[\sum_{l=0}^{\sigma^{(i)}_C-1} \delta^l\right] - \alpha_t \mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\sum_{l=0}^{\sigma^{(i)}_C-1} \delta^l\right] \right) \right\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

У рівностях (3.50)-(3.53) стала δ може бути довільним числом більшим за одиницю, яке задовільняє

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0, x\in C} \check{\mathbb{E}}^t_{x\times\{0\}}\left[\delta^{2\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}}}\right] = \sup_{t\in\mathbb{N}_0, x\in C}\left(\frac{\mathbb{E}^t_x\left[\delta^{2\sigma^{(i)}_C}\right] - \alpha_t\mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\delta^{2\sigma^{(i)}_C}\right]}{1-\alpha_t}\right) < \frac{1}{1-\alpha}, \tag{3.54}$$

де α визначено в ***Умові (A)****, та*

$$\gamma = \left((1-\alpha)\sup_{t\in\mathbb{N}_0, x\in C}\left(\check{\mathbb{E}}^t_{x\times\{0\}}\left[\delta^{2\sigma^{(i)}_C}\right]\right)\right)^{1/2}. \tag{3.55}$$

Доведення. Із Наслідку 3.3 ми знаємо, що для довільного $\delta > 1$

$$\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}}}\right] = \mathbb{E}^t_\mu\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right]. \tag{3.56}$$

Нехай $d \in \{0,1\}$ та позначимо $\mu\times\{d\}$ через μ_d, де $\mu\in\mathbb{M}_1$. Розглянемо довільне $\delta > 1$ та скористаємось елементарною рівністю

$$\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d}\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right] = 1 + (\delta-1)\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d}\left[\sum_{j=0}^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}-1}\delta^j\right].$$

Розкладемо $\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}$ наступним чином

$$\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d}\left[\sum_{j=0}^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}-1}\delta^j\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d}\left[\mathbb{1}_{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}=\check{\sigma}^{(k,i)}_{\check{C}}}\sum_{j=0}^{\check{\sigma}^{(k,i)}_{\check{C}}-1}\delta^j\right]. \tag{3.57}$$

Щоб спростити наступні викладки, покладемо

$$\bar{\sigma} = \check{\sigma}^{(i)}_{C_1},$$

$$\bar{\sigma}_j = \check{\sigma}^{(j,i)}_{\check{C}},$$

$$B_j = \sum_{k=\check{\sigma}^{(j,i)}_{\check{C}}}^{\check{\sigma}^{(j+1,i)}_{\check{C}}-1}\delta^k = \sum_{k=\bar{\sigma}_j}^{\bar{\sigma}_{j+1}}\delta^k.$$

Припустимо, що $\check{\sigma}_{\check{C}}^{(0,i)} = 0$, тоді рівняння (3.57) може бути записане як

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\sum_{j=0}^{\bar{\sigma}-1}\delta^{j}\right] &= \sum_{k=1}^{\infty}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_k}\sum_{j=0}^{k-1}B_j\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k>j}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_k}B_j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_j}B_j\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_j}\sum_{l=\bar{\sigma}_j}^{\bar{\sigma}_{j+1}-1}\delta^{l}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_j}\check{\mathbb{E}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_j}^{(i)}}^{t+\bar{\sigma}_j}\left[\sum_{k=0}^{\bar{\sigma}_1-1}\delta^{k}\right]\delta^{\bar{\sigma}_j}\right] \\ &\leq \sup_{x\in C,t\in\mathbb{N}_0}\check{\mathbb{E}}_{x\times\{0\}}^{t}\left[\sum_{l=0}^{\bar{\sigma}_1-1}\delta^{l}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_j}\delta^{\bar{\sigma}_j}\right].\end{aligned} \tag{3.58}$$

Далі розглянемо кожен множник у добутку в правій частині нерівності (3.58). Для довільних $x \in C$ з Наслідку 3.3 до Леми 3.8, а саме з нерівності (3.79) маємо

$$\check{\mathbb{E}}_{x\times\{0\}}^{t}\left[\sum_{l=0}^{\bar{\sigma}_1-1}\delta^{l}\right] = \frac{1}{1-\alpha_t}\left(\mathbb{E}_{x}^{t}\left[\sum_{l=0}^{\sigma_C^{(i)}-1}\delta^{l}\right] - \alpha_t\mathbb{E}_{\nu}^{t}\left[\sum_{l=0}^{\sigma_C^{(i)}-1}\delta^{l}\right]\right). \tag{3.59}$$

Тепер розглянемо другий множник у (3.58).

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_j}\delta^{\bar{\sigma}_j}\right] &= \check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_{j-1}+\bar{\sigma}_1\circ\theta_{\bar{\sigma}_{j-1}}}\delta^{\bar{\sigma}_{j-1}+\bar{\sigma}_1\circ\theta_{\bar{\sigma}_{j-1}}}\right] \\ &= \check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\check{\mathbb{E}}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_{j-1}+\bar{\sigma}_1\circ\theta_{\bar{\sigma}_{j-1}}}\delta^{\bar{\sigma}_{j-1}+\bar{\sigma}_1\circ\theta_{\bar{\sigma}_{j-1}}}|\mathcal{F}_{\bar{\sigma}_{j-1}}\right]\right] \\ &= \check{\mathbb{E}}_{\mu_d}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_{j-1}}\delta^{\bar{\sigma}_{j-1}}\check{\mathbb{E}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t+\bar{\sigma}_{j-1}}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_1}\delta^{\bar{\sigma}_1}\right]\right]\end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Коші-Шварца до внутрішнього математичного сподівання та рівність (3.45), щоб отримати

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{E}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t}\left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_1}\delta^{\bar{\sigma}_1}\right] &\leq \left(\check{\mathbb{P}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t}\{\bar{\sigma}>\bar{\sigma}_1\}\right)^{1/2}\left(\check{\mathbb{E}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t}\left[\delta^{2\bar{\sigma}_1}\right]\right)^{1/2} \\ &= \left(\check{\mathbb{P}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t}\left\{X_{\bar{\sigma}_1\in C_0}^{(i)}\right\}\right)^{1/2}\left(\check{\mathbb{E}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t}\left[\delta^{2\bar{\sigma}_1}\right]\right)^{1/2} \\ &\leq (1-\alpha_t)^{1/2}\left(\check{\mathbb{E}}_{\check{X}_{\bar{\sigma}_{j-1}}^{(i)}}^{t}\left[\delta^{2\bar{\sigma}_1}\right]\right)^{1/2} \\ &\leq (1-\alpha)^{1/2}\left\{\sup_{t,x\in C}\left(\check{\mathbb{E}}_{x\times\{0\}}^{t}\left[\delta^{2\bar{\sigma}_1}\right]\right)\right\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Остання нерівність є вірною для таких ω, що $\check{X}^{(i)}_{\bar{\sigma}_{j-1}} \in C \times \{0\}$, та $\alpha = \inf_t \alpha_t > 0$ визначені в **Умові (A)**.

З умови Теореми та (3.79) ми знаємо, що

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \check{\mathbb{E}}^t_{x \times \{0\}} \left[\beta^{\check{\sigma}_{\check{C}}}\right] < \infty,$$

отже, для всіх $n > 0$

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \check{\mathbb{E}}^t_{x \times \{0\}} \left[\beta^{\frac{\check{\sigma}_{\check{C}}}{n}}\right] \le \left(\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \check{\mathbb{E}}^t_{x \times \{0\}} \left[\beta^{\check{\sigma}_{\check{C}}}\right]\right)^{1/n} \to 1,\ n \to \infty,$$

що означає

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \check{\mathbb{E}}^t_{x \times \{0\}} \left[\delta^{\check{\sigma}_{\check{C}}}\right] \to 1,\ \delta \to 1.$$

Отже, ми повинні обрати таке δ, що

$$\gamma^2 := (1 - \alpha) \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left(\check{\mathbb{E}}^t_{x \times \{0\}} \left[\delta^{2\bar{\sigma}_1}\right]\right) < 1. \tag{3.61}$$

Підставивши δ та γ в (3.60), отримаємо

$$\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_j} \delta^{\bar{\sigma}_j}\right] \le \gamma \check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\mathbb{1}_{\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_{j-1}} \beta^{\bar{\sigma}_{j-1}}\right] \le \gamma^j \check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\delta^{\bar{\sigma}_1}\right]. \tag{3.62}$$

Підставивши (3.62) та (3.59) в (3.58), отримаємо

$$\begin{aligned}
\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\sum_{j=0}^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1} - 1} \delta^j\right] &\le \sup_{x \in C} \check{\mathbb{E}}^t_{x \times \{0\}} \left[\sum_{l=0}^{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} - 1} \delta^l\right] \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j \check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\delta^{\bar{\sigma}_1}\right] \\
&\le \frac{\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\delta^{\bar{\sigma}_1}\right]}{(1 - \gamma)} \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left\{\frac{1}{1 - \alpha_t} \left(\mathbb{E}^t_x \left[\sum_{l=0}^{\sigma^{(i)}_C - 1} \delta^l\right] - \alpha_t \mathbb{E}^t_{\nu_t} \left[\sum_{l=0}^{\sigma^{(i)}_C - 1} \delta^l\right]\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Помітимо, що попередня нерівність справедлива для $\mu \times \{0\}$ та $\mu \times \{1\}$, що означає, що ми можемо замінити μ_d на μ (звідки $(1 - \alpha_t)\mu \times \{0\} + \alpha_t \mu \times \{1\}$). Із (3.56) ми знаємо, що $\check{\mathbb{E}}^t_{\mu} \left[\delta^{\bar{\sigma}_1}\right] = \mathbb{E}^t_{\mu} \left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right]$, що доводить (3.52).

Нарешті

$$\begin{aligned}
\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right] &= 1 + (\delta - 1) \check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\sum_{l=0}^{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}}} \delta^l\right] \\
&\le \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}}}\right] \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left\{\frac{1}{1 - \alpha_t} \left(\mathbb{E}^t_x \left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right] - \alpha_t \mathbb{E}^t_{\nu_t} \left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right]\right)\right\} \\
&= \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} M_0 \check{\mathbb{E}}^t_{\mu_d} \left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}}}\right],
\end{aligned}$$

де M_0 визначено в (3.53). Поклавши $\mu_d = \delta_x \times \{1\}$, $x \in C$, отримаємо (3.51), оскільки з означень (3.41) та (3.42) випливає $\check{\mathbb{P}}^t_{\delta_x\times\{1\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > n\right\} = \mathbb{P}^t_{\nu_t}\left\{\sigma^{(i)}_C > n\right\}$. Поклавши $\mu_d = \mu \times \{0\}$, а потім $\mu_d = \mu \times \{1\}$, отримаємо

$$\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right] \le \frac{1+\gamma}{1-\gamma}M_0\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}}}\right] = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}M_0\mathbb{E}^t_\mu\left[\delta^{\sigma^{(i)}_C}\right],$$

де остання рівність випливає з (3.56). Отже ми довели (3.50). Твердження (3.54) випливає з вибору δ в (3.61). □

Доведена теорема встановлює зв'язок між $\mathbb{E}^t_\mu\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right]$ та $\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\delta^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right]$, де C_1 є атомом розщепленого ланцюга $\check{X}^{(i)}$. Однак, нашою кінцевою метою є доведення існування експоненційного моменту для часу одночасного потрапляння у множину C пари ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$. Це і є предметом наступної теореми.

Теорема 3.6. *Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ два ланцюги Маркова, визначені вище (тобто задовільняють* ***Умову (A)****) та $\check{X}^{(1)}, \check{X}^{(2)}$ відповідний розщеплений ланцюг, випадкові величини $\sigma^{(1)}_C$, $\sigma^{(2)}_C$ визначені в (3.47) та $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$. Покладемо $\check{\mu}_i = (1-\alpha_t)\mu_i \times \{0\} + \alpha_t\mu_i \times \{1\}$. Припустимо, що існує $\beta > 1$ таке, що для всіх $i \in \{1, 2\}$*

$$\mathbb{E}^t_{\mu_i}\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right] < \infty,$$

та

$$S_i(\beta) = \sup_{t,x\in C}\left\{\frac{1}{1-\alpha_t}\left(\mathbb{E}^t_x\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right] - \alpha_t\mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\beta^{\sigma^{(i)}_C}\right]\right)\right\} < \infty.$$

Тоді існують сталі $\delta_0, \delta_1 > 1$, $\varepsilon > 0$ та $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ такі, що

$$\mathbb{E}^t_{\mu_1,\mu_2}\left[\delta_1^{\sigma_{C\times C}}\right] \le M\left(\mathbb{E}^t_{\mu_1}\left[\delta_0^{\sigma^{(1)}_C}\right]S_1(\delta_0) + \mathbb{E}^t_{\mu_2}\left[\delta_0^{\sigma^{(2)}_C}\right]S_2(\delta_0)\right) < \infty, \tag{3.63}$$

де

$$M = \left(1 + \frac{1}{1-\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\gamma_1)}}\right)\left(\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\right).$$

Доведення. З Теореми 3.8 отримаємо існування $\delta_0 > 1$ та $\gamma_0 > 0$ таких, що для $i \in \{1, 2\}$

$$\check{\mathbb{E}}^t_{\mu_i}\left[\delta_0^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right] \le \frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\mathbb{E}^t_{\mu_i}\left[\delta_0^{\sigma^{(i)}_C}\right]S_i(\delta_0) < \infty. \tag{3.64}$$

Тоді множина C_1 є атомом для кожного з $\check{X}_t^{(1)}$ та $\check{X}_t^{(2)}$. Отже, з Теореми 3.2 випливає існування $\delta_1 > 1$, $\varepsilon > 0$ та $\gamma_1 > 0$ таких, що

$$\check{\mathbb{E}}^t_{\check{\mu}_1,\check{\mu}_2}\left[\delta_1^{\check{\sigma}_{C_1\times C_1}}\right] \leq \left(1 + \frac{1}{1-\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\gamma_1)}}\right)\left(\check{\mathbb{E}}^t_{\check{\mu}_1}\left[\delta_0^{\check{\sigma}^{(1)}_{C_1}}\right] + \check{\mathbb{E}}^t_{\check{\mu}_2}\left[\delta_0^{\check{\sigma}^{(2)}_{C_1}}\right]\right). \tag{3.65}$$

Скомбінувавши (3.64) та (3.65), отримаємо

$$\check{\mathbb{E}}^t_{\check{\mu}_1,\check{\mu}_2}\left[\delta_1^{\check{\sigma}_{C_1\times C_1}}\right] \leq M\left(\mathbb{E}^t_{\mu_1}\left[\delta_0^{\sigma^{(1)}_{C}}\right] S_1(\delta_0) + \mathbb{E}^t_{\mu_2}\left[\delta_0^{\sigma^{(2)}_{C}}\right] S_2(\delta_0)\right) < \infty, \tag{3.66}$$

де M визначено в (3.63).

Введемо додатнє ціле число m та $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$

$$\check{A}_{k_1,\ldots,k_m} = \left\{\check{\sigma}^{(1,1)}_{\check{C}} = k_1, \check{\sigma}^{(1,2)}_{\check{C}} = k_2, \ldots, \check{\sigma}^{(1,m)}_{\check{C}} = k_m, \right\},$$

$$\check{B}_{k_1,\ldots,k_m} = \left\{\check{X}^{(2)}_{k_1} \notin \check{C}, \check{X}^{(2)}_{k_2} \notin \check{C}, \ldots, \check{X}^{(2)}_{k_m} \notin \check{C}\right\},$$

$$A_{k_1,\ldots,k_m} = \left\{\sigma^{(1,1)}_{C} = k_1, \sigma^{(1,2)}_{C} = k_2, \ldots, \sigma^{(1,m)}_{C} = k_m, \right\},$$

$$B_{k_1,\ldots,k_m} = \left\{X^{(2)}_{k_1} \notin C, X^{(2)}_{k_2} \notin C, \ldots, X^{(2)}_{k_m} \notin C\right\}.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\check{\mathbb{P}}^t_{\check{\mu}_1,\check{\mu}_2}\left\{\check{\sigma}_{\check{C}\times\check{C}} > n\right\} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1<\ldots<k_j\leq n} \check{\mathbb{P}}^t_{\check{\mu}_1,\check{\mu}_2}\left\{\check{A}_{k_1,\ldots,k_j}, \check{B}_{k_1,\ldots,k_j}\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1<\ldots<k_j\leq n} \check{\mathbb{P}}^t_{\check{\mu}_1}\left\{\check{A}_{k_1,\ldots,k_j}\right\}\check{\mathbb{P}}^t_{\check{\mu}_2}\left\{\check{B}_{k_1,\ldots,k_j}\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1<\ldots<k_j\leq n} \mathbb{P}^t_{\mu_1}\left\{A_{k_1,\ldots,k_j}\right\}\mathbb{P}^t_{\mu_2}\left\{B_{k_1,\ldots,k_j}\right\} \\
&= \mathbb{P}^t_{\mu_1,\mu_2}\left\{\sigma_{C\times C} > n\right\},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

тут друга рівність випливає з незалежності $\check{X}^{(1)}$ та $\check{X}^{(2)}$, а третя з означень (3.41), (3.42), використовуючи той факт, що обидві події $\check{A}_{k_1,\ldots,k_m}$ та $\check{B}_{k_1,\ldots,k_m}$ не залежать від другої координати d процесу $\check{X}^{(i)}_n = (x^{(i)}_n, d)$.

Нарешті, з (3.67) та включення $C_1 \subset \check{C}$ отримаємо

$$\mathbb{E}^t_{\mu_1,\mu_2}\left[\delta_1^{\sigma_{C\times C}}\right] = \check{\mathbb{E}}^t_{\check{\mu}_1,\check{\mu}_2}\left[\delta_1^{\check{\sigma}_{\check{C}\times\check{C}}}\right] \leq \check{\mathbb{E}}^t_{\check{\mu}_1,\check{\mu}_2}\left[\delta_1^{\check{\sigma}_{C_1\times C_1}}\right],$$

що завершує доведення теореми. □

Далі оцінимо параметри $\delta_0, \delta_1, \varepsilon, \gamma_0$ та γ_1 з Теореми 3.6. Головним інструментом, який дозволить нам побудувати такі оцінки, буде стохастична мажоранта.

Будемо казати, що послідовність невід'ємних чисел $\{G_n,\ n \geq 0\}$ є стохастичною мажорантою для $\sigma_C^{(i)}$, якщо

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0, x\in C} \mathbb{P}_x^t \left\{\sigma_C^{(i)} > k\right\} \leq G_k,\ \forall k \geq 0. \tag{3.68}$$

Будемо казати, що стохастична мажоранта $\{G_n,\ n \geq 0\}$ є експоненційною мажорантою зі сталими $C > 0$ та $\beta > 1$, якщо

$$G_k \leq C\beta^{-k},\ \forall k \geq 0. \tag{3.69}$$

Помітимо, що з умови

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}_\mu^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right] < \infty$$

випливає існування експоненційно мажоруючої послідовності зі сталими $C = \sup_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}_\mu^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right]$ та довільним $\delta \in (1, \beta]$ завдяки нерівності Чернова

$$\mathbb{P}_\mu^t \left\{\sigma_C^{(i)} > k\right\} \leq e^{-uk} \mathbb{E}_\mu^t \left[e^{u\sigma_C}\right], \forall u > 0.$$

Зокрема, ми можемо покласти $u = \ln \beta$ та отримати

$$\mathbb{P}_\mu^t \left\{\sigma_C^{(i)} > k\right\} \leq \beta^{-k} \mathbb{E}_\mu^t \left[\beta^{\sigma_C}\right] \leq \beta^{-k} \sup_{t\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}_\mu^t \left[\beta^{\sigma_C}\right].$$

Однак знайти точне значення $\mathbb{E}_\mu^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right]$ може бути складно, тоді як отримати його оцінку часто можливо. Саме тому припущення про існування експоненційної стохастичної мажоранти є природнім та не обмежує використання отриманих результатів у практичних застосуваннях.

У наступній теореми покажемо, як оцінити параметри в Теоремі 3.6.

Теорема 3.7. *Нехай $X^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, – ланцюги Маркова, які задовільняють **Умову (A)**), та $\check{X}^{(i)}$ відповідні розщеплені ланцюги. Розглянемо $\sigma_C^{(i)}$, $\check{\sigma}_{\check{C}}^{(i)}$ та $\check{\sigma}_{C_1}^{(i)}$, визначені в (3.47) та (3.48).*

1. Припустимо існування експоненційної стохастичної мажоранти, сталих $D > 0$, $\beta_0 > 1$ та вимірної функції $V_t^{(i)} : E \to \mathbb{R}_+$ таких, що

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0, x\in C} \mathbb{P}_x^t \left\{\sigma_C^{(i)} > n\right\} \leq G_n = D\beta_0^{-n},$$

та для всіх $x \in E \setminus C$

$$\mathbb{P}_x^t \left\{\sigma_C^{(i)} > n\right\} \leq G_n(x) = V_t^{(i)}(x)\beta_0^{-n}.$$

2. Для кожного $t \in \mathbb{N}_0, x \in C, i \in \{0, 1\}$ *визначимо ймовірнісну міру* $q_{t,x}^{(i)}(\cdot) \in \mathbb{M}_1$ *таку, що*

$$q_{t,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{t,i}(x, A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1 - \alpha_t}.$$

Припустимо, що

$$\hat{Q} = \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C, i \in \{1,2\}} q_{t,x}^{(i)}(V_t^{(i)}) = \sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C,\ i \in \{1,2\}} \int_E q_{t,x}^{(i)}(dy) V_t^{(i)}(y) < \infty.$$

3. Припустимо

$$\inf_{t \in \mathbb{N}_0} \nu_t(C) > 0.$$

Якщо умови 1-3 виконані, то сталі $\delta_0 > 1, \delta_1 > 1, \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0$ *та* $\varepsilon > 0$ *можуть бути вибрані наступним чином*

$$\delta_0 < \sqrt{1 + \frac{\alpha(\beta_0 - 1)}{(1 - \alpha)\beta_0 \hat{Q} + \alpha}},$$

$$\gamma_0 = \left\{(1 - \alpha)\left(1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0^2}\hat{Q}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ε *- довільна мала стала,*

$$\gamma_1 = \left(\alpha \inf_t \nu_t(C)\right)^m \exp\left(\ln\left(1 - \check{D}\delta^{-m}\right)\left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0 - 1} - 1\right)\right),$$

$$\delta_1 = (1 + \varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

де

$$\check{D} = D\frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0}\left(1 + \frac{(\delta_0 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0}\hat{Q}\right)\left(1 + \frac{\delta_0(\beta_0 - 1)}{\beta_0 - \delta_0}\right),$$

$$m = \min\left\{n \geq 1 | \check{D}\delta_0^{-n} < 1\right\},$$

$$n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\varepsilon(\delta_0 - \beta_0)}{2\check{D}\beta_0^{m+1}}\right) / \ln\left(\frac{\beta_0}{\delta_0}\right)\right\rfloor + 3,$$

та α *з* ***Умови (A)****.*

Доведення. Покажемо спочатку, що виконані умови Теореми 3.8.

Зрозуміло, що для кожного $x \in C$ та $\beta \in (1, \beta_0)$

$$\mathbb{E}_x^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right] - 1 \leq D(\beta - 1) \sum_{k \geq 0} (\beta/\beta_0)^k = D\frac{(\beta - 1)\beta_0}{\beta_0 - \beta} < \infty.$$

Аналогічно для $\mu \in \mathbb{M}_1$, такого, що $\mu(V) < \infty$

$$\mathbb{E}_\mu^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right] - 1 \leq \mu(V)\frac{(\beta - 1)\beta_0}{\beta_0 - \beta} < \infty.$$

Зауважимо, що виконана наступна рівність

$$\frac{1}{1 - \alpha_t}\left(\mathbb{E}_x^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right] - \alpha_t \mathbb{E}_{\nu_t}^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right]\right) = \mathbb{E}_{q_{t,x}^{(i)}}^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right].$$

Отже, умова

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \left\{\frac{1}{1 - \alpha_t}\left(\mathbb{E}_x^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right] - \alpha_t \mathbb{E}_{\nu_t}^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right]\right)\right\} < \infty$$

еквівалентна

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \mathbb{E}_{q_{t,x}^{(i)}}^t \left[\beta^{\sigma^{(i)}}\right] < \infty,$$

оскільки з умов 1 та 2

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \mathbb{E}_{q_{t,x}^{(i)}}^t \left[\beta^{\sigma_C^{(i)}}\right] \leq 1 + \frac{(\beta - 1)\beta_0}{\beta_0 - \beta}\hat{Q} < \infty. \tag{3.70}$$

Тепер, відповідно до Теореми 3.8 ми оберемо δ_0 таке, що

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0, x \in C} \mathbb{E}_{q_{t,x}^{(i)}}^t \left[\delta_0^{2\sigma_C^{(i)}}\right] < \frac{1}{1 - \alpha},$$

де α визначено в **Умові (A)**. З нерівності (3.70) зробимо висновок, що достатньо обрати δ_0 таке, що

$$1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0^2}\hat{Q} < \frac{1}{1 - \alpha},$$

звідки

$$\delta_0 < \sqrt{1 + \frac{\alpha(\beta_0 - 1)}{(1 - \alpha)\beta_0\hat{Q} + \alpha}}.$$

З Теореми 3.8 випливає, що γ_0 може бути визначено як

$$\gamma_0 = \left\{(1 - \alpha)\left(1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0^2}\hat{Q}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Щоб обчислити вирази для інших сталих, ми використаємо результати Розділу 3.3. Помітимо, що з умови 3

$$\check{\mathbb{P}}^t_{C_1}\left\{\check{X}^{(i)}_1 \in C_1\right\} \geq \alpha \inf_{t\in\mathbb{N}_0} \nu_t(C) > 0,$$

що означає, виконання умов Лем 3.2 - 3.4 для кожного $m \geq 1$. Скориставшись нерівністю Чернова, формулами (3.51) та (3.70), побудуємо експоненційну стохастичну мажоранту

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{P}}^t_{C_1}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1} > n\right\} &\leq \check{\mathbb{E}}^t_{C_1}\left[\delta_0^{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1}}\right]\delta_0^{-n} \leq \frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}M_0\mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\delta_0^{\sigma_C}\right]\delta_0^{-n}\\ &= D_1\mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\delta_0^{\sigma_C}\right]\delta_0^{-n} \leq D_1 D\left(1+\frac{\delta_0(\beta_0-1)}{\beta_0-\delta_0}\right)\delta_0^{-n},\end{aligned}$$

де M_0 визначено в (3.53) та

$$D_1 = \frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\left(1+\frac{(\delta_0-1)\beta_0}{\beta_0-\delta_0}\hat{Q}\right).$$

Отже, можемо визначити експоненційну стохастичну мажоранту для $\check{\mathbb{P}}^t_{C_1}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{C_1} > n\right\}$ через

$$\check{G}_n = \check{D}\delta_0^{-n},$$

де

$$\check{D} = D\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\left(1+\frac{(\delta_0-1)\beta_0}{\beta_0-\delta_0}\hat{Q}\right)\left(1+\frac{\delta_0(\beta_0-1)}{\beta_0-\delta_0}\right).$$

Тепер оберемо

$$m = \min\left\{n \geq 1 | \check{G}_n < 1\right\}.$$

Вираз для γ_1 та δ_1 отримаємо з Лем 3.2 - 3.4.

$$\gamma_1 = \left(\alpha \inf_t \nu_t(C)\right)^m \exp\left(\ln\left(1-\check{D}\delta^{-m}\right)\left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0-1}-1\right)\right),$$

$$\delta_1 = (1+\varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

де ε є довільною додатньою сталою, а

$$n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\varepsilon(\delta_0-\beta_0)}{2\check{D}\beta_0^{m+1}}\right)/\ln\left(\frac{\beta_0}{\delta_0}\right)\right\rfloor + 3.$$

$\square$

Завершимо цей розділ прикладом, який ілюструє дані результати, зокрема Теорему 3.9 застосовано до неоднорідного ланцюга Маркова. Ми побачимо, що незважаючи на громіздкі формули, ми можемо використовувати стандартні підходи з теорії однорідних ланцюгів Маркова.

Неоднорідна ARCH(1) модель. Розглянемо спочатку ланцюг Маркова

$$X_k = \sqrt{a_k + b_k X_{k-1}^2} Z_k,\ a_k \in (a_{min}, a_{max}),\ b_k \in (b_{min}, b_{max}),$$

де $a_{min}, a_{max}, b_{min}, b_{max} > 0$ - дійсні числа, $\{Z_k,\ k \geq 1\}$ послідовність незалежних випадкових величин таких, що

1. кожна Z_k має щільність g_k відносно міри Лебега μ,
2. існує стала $c > 0$ та інтервал $[-c_0, c_0] \in \mathbb{R}$ такий що, для всіх $k \geq 1$

$$g_k(x) \geq c\mathbb{1}_{[-c_0,c_0]}(x),\ x \in \mathbb{R},$$

3. існує $s \in (0, 1]$ таке, що

$$\lambda_0 := \sup_k \left\{b_k^s \mathbb{E}[Z_k^{2s}]\right\} = \sup_k \left\{ b_k^s \int_{-\infty}^{+\infty} z^{2s} g_k(z) dz \right\} < 1.$$

Позначимо $\mathbb{E}[Z_k^{2s}]$ через m_k. З теорії однорідних ланцюгів Маркова добре відомо, що функція $V(x) = 1 + x^{2s}$ є пробною функцією, тобто

$$P_k V(x) \leq 1 + a_k^s m_k + b_k^s m_k x^{2s} \leq \lambda_k V(x) + (1 - \lambda_k + a_k^s m_k),$$

де $\lambda_k = b_k^s m_k \leq \lambda_0 < 1$. Також добре відомо, що кожен замкнений інтервал $[-c_1, c_1] \in \mathbb{R}, c_1 > 0$ є “малою множиною” в сенсі

$$P_k(x, A) \geq \alpha_k \nu_k(A),\ x \in [-c_1, c_1],$$

де

$$\alpha_k = 2c_0 c\sqrt{a_k}(a_k + b_k(1 - \lambda_k + a_k^s m_k)^2)^{-1/2},$$

$$\nu_k(A) = \frac{1}{2c_0\sqrt{a_k}} \mu(A \cap [-c_0\sqrt{a_k}, c_0\sqrt{a_k}]).$$

Зрозуміло, що $\inf_k \alpha_k > 0$, оскільки a_k та b_k відділені і від 0, і від ∞. Оберемо

$$\lambda = (1 + \lambda_0)/2 \in (\lambda_0, 1),$$

та покладемо $C = [-c_2, c_2]$ так щоб $x \in \mathbb{R}$ при $|x| > c_2$ та $k > 0$

$$(\lambda_k - \lambda)(1 + x^{2s}) + (1 - \lambda_k + a_k^s m_k) < 0,$$

зрозуміло, що такий вибір завжди можливий за виконання умов 1-3. Отже, отримаємо для всіх $k \geq 1$

$$P_k V(x) \leq \lambda V(x) + \tilde{b}\mathbb{1}_C(x), \tag{3.71}$$

де $\tilde{b} = \sup_{x \in C} \left\{(\lambda_k - \lambda)(1 + x^{2s}) + (1 - \lambda_k + a_k^s m_k)\right\}$. Скориставшись Теоремою 3.1, отримаємо

$$\mathbb{E}_x^k \left[\lambda^{-\sigma_C}\right] \leq V(x) + \frac{\tilde{b}}{\lambda}\mathbb{1}_C(x), \tag{3.72}$$

що є аналогом добре відомого класичного результату з теорії однорідних ланцюгів Маркова. Тепер перевіримо умови Теореми 3.7 для ланцюга $(X_n,\ n \geq 0)$. Умова 1 Теореми 3.7 виконана з $\beta_0 = \lambda$ та $D = (1 + c_2^{2s}) + \tilde{b}/\lambda$. Умови 2 та 3 Теореми 3.7 очевидні.

Тепер можемо роглянути два незалежних ланцюги у формі

$$X_k^{(i)} = \sqrt{a_k^{(i)} + b_k^{(i)} \left(X_{k-1}^{(i)}\right)^2} Z_k^{(i)},\ a_k^{(i)} \in (a_{min}, a_{max}),\ b_k^{(i)} \in (b_{min}, b_{max}),$$

де $i \in \{1, 2\}$. Припустивши виконання умов 1-3 для кожного з ланцюгів (можливо з різними наборами сталих), отримаємо, що $V(x) = 1 + 2x^{2s}$ є пробною функцією для обох ланцюгів з різними $\lambda^{(i)} < 1$ та існування множини C, що задовільняє **Умову (A)** для обох ланцюгів, а також нерівність (3.72), можливо з різними $\lambda^{(i)}$ та $\tilde{b}^i$, $i \in \{1, 2\}$. Таким чином, скориставшись Теоремами 3.6 та 3.7, отримаємо безпосередні формули для оцінки експоненційного моменту часу одночасного потрапляння у множину C парою ланцюгів $\sigma_{C \times C}$.

3.4.3 Допоміжні леми

Лема 3.7. *Нехай $i \in \{1, 2\}$ фіксоване, $C \in \mathcal{E}$ деяка множина, та випадкові величини $\check{\sigma}_{\check{C}}^{(i)}$, $\sigma_C^{(i)}$ визначені в (3.47) та (3.48). Припустимо виконання наступних умов.*

1. Для довільного $x \in E \setminus C$, $d \in \{0, 1\}$

$$\mathbb{P}_x^t \left\{\sigma_C^{(i)} > k\right\} = \check{\mathbb{P}}_{x \times \{d\}}^t \left\{\check{\sigma}_{\check{C}}^{(i)} > k\right\}, \tag{3.73}$$

2. Для довільного $x \in C$

$$\check{\mathbb{P}}_{x \times \{0\}}^t \left\{\check{\sigma}_{\check{C}}^{(i)} > k\right\} = \frac{1}{1 - \alpha_t} \left(\mathbb{P}_x^t \left\{\sigma_C^{(i)} > k\right\} - \alpha_t \mathbb{P}_{\nu_t}^t \left\{\sigma_C^{(i)} > k\right\}\right). \tag{3.74}$$

Доведення. Нехай x фіксований елемент з E, тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^t_x\{\sigma^{(i)}_C > k\} &= \mathbb{P}^t_x\{X^{(i)}_l \notin C, 1 \le l \le k\} \\ &= \int\limits_{C^c} \dots \int\limits_{C^c} P_{t,i}(x, dx_1) \dots P_{t+k-1,i}(x_{t+k-1}, dx_{t+k}).\end{aligned} \tag{3.75}$$

З (3.41) отримаємо для $x \in E \setminus C$

$$P_{t+j,i}(x, dy) = \check{P}_{t+j,i}((x,d), dy \times \{0,1\}) = \check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{d\}}\{\check{X}^{(i)}_1 = dy \times \{0,1\}\}. \tag{3.76}$$

Скомбінувавши (3.75) та (3.76), отримаємо для $x \in E \setminus C$

$$\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} = \check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{d\}}\left\{\check{X}^{(i)}_l \notin \check{C},\ 1 \le l \le k\right\} = \check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{d\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\},$$

що доводить твердження 1.

Тепер застосуємо рівність (3.75) до правої частини формули (3.74).

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} - \alpha_t \mathbb{P}^t_{\nu_t}\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\}}{1-\alpha_t} &= \int\limits_{C^c}\left(\frac{P_{t,i}(x, dx_1) - \alpha_t \nu(dx_1)}{1-\alpha_t}\right)\times \\ &\quad\times \mathbb{P}^{t+1}_{x_1}\left\{\sigma^{(i)}_C > k-1\right\}.\end{aligned}$$

Оскільки $x_1 \notin C$, скористаємось доведеною формулою (3.73) та означенням (3.42), щоб отримати

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} - \alpha_t \mathbb{P}^t_{\nu_t}\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\}}{1-\alpha_t} &= \int\limits_{C^c} \check{P}((x,0), (dx_1 \times \{0,1\})\times \\ &\quad\times \check{\mathbb{P}}^t_{x_1}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k-1\right\} \\ &= \check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{0\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\}.\end{aligned}$$

що і завершує доведення твердження 2.

□

Наслідок 3.2. *Припустимо, що* $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$ *– деяка ймовірнісна міра. Тоді*

$$\mathbb{P}^t_\mu\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} = \check{\mathbb{P}}^t_\mu\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\}.$$

Доведення. Спершу покажемо, що для всіх $x \in E$

$$\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} = \check{\mathbb{P}}^t_x\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\}. \tag{3.77}$$

Твердження 1 з Леми 3.8 дозволяє записати для $x \in E \setminus C$

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{P}}^t_x\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\} &= (1-\alpha_t)\check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{0\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\} + \alpha_t\check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{1\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\}\\ &= (1-\alpha_t)\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} + \alpha_t\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} = \mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\}.\end{aligned}$$

У випадку $x \in C$ матимемо

$$\check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{1\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\} = \mathbb{P}^t_{\nu_t}\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\}$$

за побудовою (див. (3.41) та (3.42)). Комбінуючи це з твердженням 2 з Леми 3.8, для $x \in C$ отримаємо

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{P}}^t_x\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\} &= (1-\alpha_t)\check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{0\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\} + \alpha_t\check{\mathbb{P}}^t_{x\times\{1\}}\left\{\check{\sigma}^{(i)}_{\check{C}} > k\right\}\\ &= (1-\alpha_t)\frac{1}{1-\alpha_t}\left(\mathbb{P}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} - \alpha_t\mathbb{P}^t_{\nu_t}\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\}\right)\\ &+ \alpha_t\mathbb{P}^t_{\nu_t}\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\} = \check{\mathbb{P}}^t_x\left\{\sigma^{(i)}_C > k\right\}.\end{aligned}$$

Тепер проінтегруємо (3.77) по відношенню до μ та отримаємо твердження Наслідку.

□

Наслідок 3.3. *Нехай $\beta > 1$ деяка стала. Тоді*

$$\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\beta^{\check{\sigma}_{\check{C}}}\right] = \mathbb{E}^t_\mu\left[\beta^{\sigma_C}\right], \tag{3.78}$$

та

$$\check{\mathbb{E}}^t_{x\times\{0\}}\left[\beta^{\check{\sigma}_{\check{C}}}\right] = \frac{1}{1-\alpha_t}\left(\mathbb{E}^t_x\left[\beta^{\sigma_C}\right] - \alpha_t\mathbb{E}^t_{\nu_t}\left[\beta^{\sigma_C}\right]\right). \tag{3.79}$$

Доведення. Взявши до уваги Наслідок 3.2, запишемо

$$\begin{aligned}(\beta-1)^{-1}\left(\mathbb{E}^t_\mu\left[\beta^{\sigma_C}\right] - 1\right) &= \mathbb{E}^t_\mu\left[\sum_{k=0}^{\sigma_C-1}\beta^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}^t_\mu\left[\beta^k\mathbb{1}_{\sigma_C>k}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\beta^k\mathbb{1}_{\check{\sigma}_{\check{C}}>k}\right] = \check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\sum_{k=0}^{\check{\sigma}_c-1}\beta^k\right]\\ &= (\beta-1)^{-1}\left(\check{\mathbb{E}}^t_\mu\left[\beta^{\check{\sigma}_{\check{C}}}\right] - 1\right).\end{aligned}$$

Отже, формула (3.78) доведена. Доведення рівності (3.79) повторює аналогічні міркування із застосуванням формули (3.74) замість Наслідку 3.2. □

3.5 Геометрична рекурентність та стійкість для неоднорідних авторегресійних ланцюгів Маркова

У цьому розділі ми розглядатимемо неоднорідні за часом ланцюги Маркова у формі:

$$X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1}, n \geq 0,$$

де α_n - це деякі константи, а W_n - деякі незалежні випадкові величини. Якщо всі α_n сталі і, скажімо, менші за одиницю, а W_n - мають однаковий нормальний розподіл, то ми матимемо справу зі стандартною гаусівською авторегресійною моделлю. Відповідний однорідний ланцюг Маркова є добре вивченим і, зокрема, відомо, що він буде геометрично рекурентним.

Якщо ж величини α_n не є сталими і не є відділеними від одиниці, а W_n необов'язково однаково розподілені, то ми отримаємо неоднорідну авторегресійну модель. Вивченню її властивостей і присвячено даний розділ.

3.5.1 Геометрична рекурентність неоднорідного автрегресійного ланцюга Маркова

У цьому розділі ми розглядатимемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова $(X_n)_{n\geq 1}$ зі значеннями в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, де $\mathcal{B}$ є Борелівською σ-алгеброю.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 3.8. *Розглянемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова $(X_n)_{n\geq 0}$ зі значеннями в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, що стартує з фіксованого $x_0 \in \mathbb{R}$ та має вигляд*

$$X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1}, n \geq 0,$$

де $\alpha_n \geq 0$, W_n, $n \geq 1$ це незалежні центровані випадкові величини, визначені на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Позначимо їхні функції розподілу та розподіл хвостів через $\Gamma_n(x)$ та $\bar{\Gamma}_n(x) = 1 - \Gamma_n(x) = \int_x^\infty \Gamma_n(dy)$ відповідно. Припустимо виконання наступних умов.

1. Існує таке $\delta > 0$, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k} \max\{\alpha_j + \delta, 1\} \right)^{-1} (1 - \alpha_k - \delta)^+ = \infty,$$

2. $G := \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}W_n^+ < \infty$.

Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ *та для всіх* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\mathbb{E}_x^n\left[\prod_{j=1}^{\sigma_C}\frac{1}{\alpha_j+\delta}\right] \leq 1+|x|+(2G+1-\delta)\,\mathbb{1}_{[-c,c]}(x). \tag{3.80}$$

Тут

$$c := \max\left\{\frac{2G+1}{\delta}-1, 1\right\}, \tag{3.81}$$

$\sigma_C = \inf\{n \geq 1 | X_n \in C\}$ *– це перший час повернення до множини* $C = [-c, c]$ *(вважатимемо, що* $\inf\emptyset = \infty$*).*

Доведення. Основним інструментом доведення є умова зсуву. В якості пробної функції оберемо

$$V(x) = 1 + |x|.$$

Будемо використовувати цю функцію для всіх $n \geq 1$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} P_nV(x) &= \int_{\mathbb{R}}(1+|\alpha_n x+y|)\Gamma_n(dy) \\ &= 1-\int_{(-\infty,-\alpha_n x]}(\alpha_n x+y)\Gamma_n(dy)+\int_{(-\alpha_n x,\infty)}(\alpha_n x+y)\Gamma_n(dy). \end{aligned}$$

Для $x \geq 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} P_nV(x) &= 1-2\int_{(-\infty,-\alpha_n x]}(\alpha_n x+y)\Gamma_n(dy)+\int_{\mathbb{R}}(\alpha_n x+y)\Gamma_n(dy) \\ &= 1+\alpha_n x-2\alpha_n x\Gamma_n(-\alpha_n x)+2\int_{(-\infty,-\alpha_n x]}(-y)\Gamma_n(dy) \\ &\leq \alpha_n(1+|x|)+(1-\alpha_n)+2\mathbb{E}W_n^- = \alpha_nV(x)+(1-\alpha_n)+2G, \end{aligned}$$

де ми скористалися рівністю $\mathbb{E}W_n^+ - \mathbb{E}W_n^- = \mathbb{E}W_n = 0$ та Умовою 2.

Покладемо

$$\lambda_n = \alpha_n + \delta,$$

та запишемо

$$\begin{aligned} P_nV(x) &\leq \lambda_nV(x)+(1-\alpha_n)+2G-(\lambda_n-\alpha_n)V(x) \\ &= \lambda_nV(x)+(1-\alpha_n)+2G-\delta\,(1+|x|)\,. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Тепер оберемо сталу c так, щоб

$$(1-\alpha_n)+2G-\delta(1+c)\leq 0,$$

наприклад

$$c=\max\left\{\frac{2G+1}{\delta}-1,1\right\}.$$

Таким чином, ми прийшли до наступної нерівності для всіх $x\geq 0$:

$$P_nV(x)\leq\lambda_nV(x)+(2G+1-\delta)\mathbb{1}_{[-c,c]}(x), \tag{3.83}$$

З аналогічних міркувань, застосованих до $x\leq 0$, отримаємо виконання нерівності (3.83) для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Умова 1 разом із нерівністю (3.83) гарантують виконання умов Теореми 3.1 із множиною $C=[-c,c]$. Шуканий результат тепер випливає з Теореми 3.1. □

Зауваження 3.4. Умова 1 в Теоремі 3.8 є ослабленою умовою відділення від одиниці

$$\sup_n\alpha_n<1.$$

Очевидно, що в цьому випадку ми можемо обрати $\delta=(1-\sup_n\alpha_n)/2$ так, щоб $\alpha_n+\delta<1$ для всіх n, та Умова 1 еквівалентна

$$\sum_{n\geq 1}(1-\alpha_n-\delta)=\infty,$$

що очевидно виконано, оскільки $1-\alpha_n-\delta\geq(1-\sup_n\alpha_n)/2>0$. Новизна отриманого результату полягає у тому, що α_n можуть бути більшими ніж 1 час від часу.

Зауваження 3.5. Оскільки випадкові величини W_n центровані, Умова 2 еквівалентна

$$\sup_n\mathbb{E}|W_n|<\infty.$$

Наступний Наслідок може бути корисним у практичних застосуваннях.

Наслідок 3.4. *Припустимо виконання умов Теореми 3.8 та існування двох сталих* $\psi>1$ *та* $C_0>0$ *таких, що*

$$\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+\delta)\leq C_0\psi^{-n}.$$

Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x^n\left[\psi^{\sigma_C}\right] \leq C_0\left(1+|x|+(2G+1-\delta)\,\mathbb{1}_{[-c,c]}(x)\right).$$

Зауваження 3.6. В теорії однорідних ланцюгів Маркова з геометричної рекурентності випливає позитивність та геометрична ергодичність відповідного ланцюга. Однак у неоднорідному випадку такий висновок є взагалі кажучи невірним, оскільки суттєво неоднорідні ланцюги (у яких неоднорідність не вироджується з часом) як правило не мають стаціонарного розподілу.

3.5.2 Стійкість у загальній авторегресійній моделі

У цьому розділі розглянемо послідовність незалежних випадкових величин $W_n^{(i)}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ з розподілами $\Gamma_n^{(i)}(A) = \mathbb{P}\{W_n^{(i)} \in A\}$ та пару ланцюгів Маркова

$$X_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} X_{n-1}^{(i)} + W_n^{(i)}, \tag{3.84}$$

$n \geq 1, i \in \{1,2\}, x_0^{(i)} \in \mathbb{R}$.

Нашою метою є демонстрація

$$\sup_n \left\| \mathbb{P}\left\{X_n^{(1)} \in \cdot\right\} - \mathbb{P}\left\{X_n^{(2)} \in \cdot\right\} \right\|_{TV} \longrightarrow 0, \varepsilon \longrightarrow 0,$$

де ε визначає наскільки “близькими” є сім'ї $\left\{\Gamma_n^{(1)}, n \geq 0\right\}$ та $\left\{\Gamma_n^{(2)}, n \geq 1\right\}$.

Визначимо ε наступним чином

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}, n\geq 1, A\in\mathcal{B}} \left| \Gamma_n^{(1)}\left(A - \alpha_n^{(1)}x\right) - \Gamma_n^{(2)}\left(A - \alpha_n^{(2)}x\right) \right|. \tag{3.85}$$

Важливо підкреслити, що перехідні ймовірності за один крок для обох ланцюгів не зближуються більше ніж на ε навіть при $n \longrightarrow \infty$. Строго кажучи, ε це внутрішня характеристика пари процесів, та “заміна” ε означає перехід до іншої пари процесів. Це може бути проілюстровано на прикладі, який ми будемо використовувати в подальшому для того, щоб підкреслити залежність від ε:

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{(1)} &= (1-\tilde{\varepsilon})\Gamma_n + \tilde{\varepsilon} R_n^{(1)}, \\ \Gamma_n^{(2)} &= (1-\tilde{\varepsilon})\Gamma_n + \tilde{\varepsilon} R_n^{(2)}, \end{aligned} \tag{3.86}$$

де $\tilde{\varepsilon}$ мала стала. Тут ми можемо вважати Γ_n “спільною частиною” $\Gamma_n^{(1)}$ та $\Gamma_n^{(2)}$, а $R_n^{(i)}$ відповідають за “різницеву частину”. Цей приклад можна також розглядати як двокрокову модель, де на першому кроці ми підкидаємо монету із ймовірністю "успіху" $1-\tilde{\varepsilon}$, та у випадку "успішного" підкидання ми генеруємо наступне $W_n^{(i)}$ зі спільного розподілу Γ_n, інакше з розподілу $R_n^{(i)}$. В цій моделі $\tilde{\varepsilon}$ безпосередньо пов'язано з ε із (3.85)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sup_{x\in R, n\geq 1, A\in\mathcal{B}} \left| \tilde{\varepsilon} R_n^{(1)}(A-\alpha_n^{(1)}x) - \tilde{\varepsilon} R_n^{(2)}(A-\alpha_n^{(2)})x) \right| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Будемо шукати умови, які забезпечать близькість перехідних ймовірностей за n кроків при всіх n, якщо відомо, що лише однокрокові перехідні ймовірності близькі. Додатково, ми прагнемо показати, що така близькість є порядку ε, та отримані оцінки можуть бути пораховані у практичних застосуваннях.

Для цього побудуємо склеювання для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$. Спершу припустимо, що умови Теореми 3.10 виконані та $C = [-c, c]$ відповідна множина. Розглянемо наступну умову.

Умова M (Умова мінорризації). Припустимо, що існує послідовність дійсних чисел $\{a_n, n \geq 1\}, a_n \in (0,1)$ та послідовність ймовірнісних мір ν_n на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ такі, що

$$\inf_{x\in C} \Gamma_n(A-\alpha_n^{(i)}x) \geq a_n \nu_n(A),\ i \in \{1,2\},$$

$$\inf_n \nu_n(C) > 0,$$

$$0 < a_* := \inf_n a_n \leq a_n \leq a^* := \sup_n a_n < 1,$$

для всіх $A \in \mathcal{B}$ та $n \geq 1$.

Зауваження 3.7. В подальшому ми вимагатимемо виконання Умови M для обох $\left\{\Gamma_n^{(1)}, n \geq 1\right\}$ та $\left\{\Gamma_n^{(2)}, n \geq 1\right\}$ з однаковими $\{a_n, n \geq 1\}$ та ν_n. У той же час, у моделі (3.86) досить вимагати виконання Умови M лише для "спільної частини" Γ_n. Таким чином, ми бачимо, що параметри $\{a_n, n \geq 1\}$ та міри ν_n не залежать від ε.

Далі введемо субстохастичні ядра

$$Q_n(x, \cdot) = \min_i \left\{\Gamma_n^{(i)}\left(\cdot - \alpha_n^{(i)}x\right)\right\}, \tag{3.87}$$

де min слід розуміти як мінімум двох мір (див. [111], Proposition D.2.8 для формального визначення мінімуму двох мір).

Зауважимо, що за означенням ε та елементарною рівністю $a \wedge b = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

$$Q_n(x, \mathbb{R}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Позначимо різницеві ядра як

$$R_n^{(i)}(x, A) = \Gamma_n^{(i)}\left(A - \alpha_n^{(i)} x\right) - Q_n(x, A),$$

так, що

$$R_n^{(i)}(x, \mathbb{R}) \leq \varepsilon.$$

Тут, Q_n це узагальнений аналог “спільної частини” з моделі (3.86).

Щоб довести головний результат нам знадобляться деякі додаткові умови регулярності на Q_n.

Умова T (Умова на хвости (Tails)). Покладемо $A_m = \{y \in \mathbb{R} : |y| \in [m, m+1)\}$. Припустимо існування послідовностей $\{\hat{S}_n, n \geq 1\}$, $\{\hat{r}_n, n \geq 1\}$, таких, що

$$Q^{t,k}(x, A_m) \leq Q^{t,k}(x, \mathbb{R})\hat{S}_m, \ x \in C,$$

$$\nu_t Q^{t,k}(A_m) \leq \nu_t Q^{t,k}(x, \mathbb{R})\hat{S}_m,$$

$$\hat{m} = \sum_{m \geq 1} \hat{S}_m < \infty,$$

$$\sup_{i,k,x \in A_m} \int_{\mathbb{R}} R_k^{(i)}(x, dy)|y| \leq \hat{r}_m,$$

$$\Delta = \sum_{m \geq 1} \hat{r}_m \hat{S}_m < \infty,$$

Така умова продиктована наступними міркуваннями. Ми можемо уявити $\tilde{Q}^{t,k}(x, \cdot) = \frac{Q^{t,k}(x, \cdot)}{Q^{t,k}(x, \mathbb{R})}$ як коректну перехідну ймовірність за k кроків, що, зокрема, є вірним в моделі (3.86). В загальному випадку це не так і нам потрібні додаткові умови, щоб переконатися, що функція $x \mapsto Q_t(x, \mathbb{R})$ не “осцилює дуже сильно” (в моделі (3.86) $Q_t(x, \mathbb{R}) = 1 - \tilde{\varepsilon}$ взагалі не залежить від x). Однак нам не потрібно, щоб $\tilde{Q}_t = \tilde{Q}^{t,1}$ була правильною перехідною ймовірністю у доведенні основних результатів, тому ми не накладатимемо додаткових умов. Однак інтуїція, за якої $\tilde{Q}_t$ є марковським перехідним ядром та $\tilde{Q}^{t,k}$ є перехідною ймовірністю за k кроків, буде дуже корисною, щоб зрозуміти мотивацію для введення **Умови T**. Отже, уявімо, що $\tilde{Q}_t(x, \cdot)$ є перехідною ймовірністю деякого однорідного ланцюга Маркова, що відповідає за “склеєний ланцюг”, так, що $\tilde{Q}_t(x, \cdot) = \tilde{Q}(x, \cdot)$. Припустимо, що це ядро є незвідним та геометрично рекурентним (а отже позитивним), так, що існує інваріантна ймовірнісна міра, скажімо π. Покладемо $\bar{\pi}_m = \pi(A_m)$. Тоді запишемо

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 0}\tilde{Q}^k(x,A_m) &= \sum_{m\geq 0}\tilde{Q}^k(x,A_m) - \bar{\pi}_m + \bar{\pi}_m \leq \sum_{m\geq 0}|\tilde{Q}^k(x,\cdot) - \pi|(A_m) + \bar{\pi}_m \\ &\leq 1 + |\tilde{Q}^k(x,\cdot) - \pi|(\mathbb{R}) = 1 + ||\tilde{Q}^k(x,\cdot) - \pi||_{TV} \\ &\leq 1 + \sum_{k\geq 1}||\tilde{Q}^k(x,\cdot) - \pi||_{TV} < \infty.\end{aligned}$$

Припустивши, що C є геометрично рекурентною множиною, ми прийдемо до висновку

$$\sup_{x\in C, k\geq 1}\sum_{m\geq 0}\tilde{Q}^k(x,A_m) \leq 1 + \sup_{x\in C}\sum_{k\geq 1}||\tilde{Q}^k(x,\cdot) - \pi||_{TV} < \infty.$$

Це демонструє, що умова $\frac{Q^{t,k}(x,A_m)}{Q^{t,k}(x,\mathbb{R})} \leq \hat{S}_m$, $x \in C$ є природньою.

Далі обговоримо умову на $R_k^{(i)}(x,dy)$. Ця умова вимагає, щоб "зсунутий" залишковий процес не відхилявся дуже сильно від свого початкового значення. Наприклад, якщо $R_k^{(i)}$ також центровані та мають авторегресійний вигляд $R_k^{(i)}(x,dy) = F_k^{(i)}(dy - x)$, викладки з Розділу 3.5.1 демонструють, що ми можемо очікувати, що $\hat{r}_n = O(n)$. У цьому випадку, умова $\Delta < \infty$ зводиться до

$$\sup_{x\in C}\sum_{n\geq 1} n||Q^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_{TV} < \infty,$$

та

$$\int_{\mathbb{R}} |y|\pi(dy) < \infty,$$

що також є розумними умовами, які виконані, зокрема, для геометрично ергодичних авторегресійних ланцюгів. Більше того, з однорідної теорії ми знаємо, що існування малої множини C в сенсі Умови M зі скінченим другим моментом часу першого повернення є достатнім для виконання означеної умови.

Легко бачити, що аналогічна мотивація залишається вірною і для неоднорідних авторегресійних моделей. Припустимо, що $\tilde{Q}_n(x,\cdot) = \tilde{\Gamma}_n(\cdot - \alpha_n x)$, так, що ми можемо побудувати ланцюг $(Y_n)_{n\geq 0}$ у вигляді $Y_{n+1} = \alpha_{n+1}Y_n + U_{n+1}$, $n \geq 0$, де $U_n \sim \tilde{\Gamma}_n$ незалежні та центровані випадкові величини. Перехідні ймовірності ланцюга (Y_n) це $\tilde{Q}_n$. Тоді з нерівності Чебишева ми отримаємо

$$\tilde{Q}^{t,k}(x,A_m) \leq \mathbb{P}_x^t\{|Y_k| \geq m\} \leq \frac{\mathbb{E}_x^t[|Y_k|^2]}{m^2}.$$

Далі, запишемо

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=k+1}^{n} \alpha_j \right) U_k,$$

тут $U_0 \in [-c, c]$ є фіксованим невипадковим початковим станом та $\prod_{n+1}^{n} = 1$. Припустимо, що $U_n, n \geq 1$ мають рівномірно обмежений другий момент, що оцінюється зверху величиною μ_2. Тоді покладемо

$$\hat{S}_m = \frac{\max\{\mu_2, c^2\}}{m^2} \sup_n \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2.$$

Отже, можемо зробити висновок, що існування рівномірно обмеженого другого моменту (або моментів вищого порядку) для розподілів $\tilde{\Gamma}_n$ та виконання умови

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2 < \infty \tag{3.88}$$

є достатніми умовами для побудови послідовності $\{\hat{S}_n, n \geq 1\}$. Зауважимо, що Умова 1 Теореми 3.8 вимагає, щоб множина $\{n \geq 1 : \alpha_n > 1 - \delta\}$ (для деяких $\delta < 1$) була дуже розрідженою, так що природньо очікувати

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2 \leq \frac{M}{1 - \delta^\gamma},$$

для деяких сталих M та $\gamma > 0$. Звичайно, для того, щоб переконатися, що $\sum\limits_m \hat{r}_m \hat{S}_m < \infty$, ми маємо накласти більш сильну умову на U_n, наприклад, існування рівномірно обмеженого четвертого або експоненційного моментів.

Взагалі кажучи, **Умова T** вимагає, щоб "залишкове середнє" повільніше ніж $\tilde{Q}_n$-ланцюг "просувалось у просторі", тобто, ймовірність потрапляння у віддалені регіони фазового простору досить мала, щоб компенсувати зростання "залишкового середнього" при віддаленні початкової точки x від нуля. Очевидно, що для найбільш типової авторегресії - Гаусівської, ця умова виконана, якщо всі дисперсії рівномірно обмежені.

Зауваження 3.8. У попередньому обговоренні ми показали, що можна очікувати $\hat{r}_n = O(n)$, що своєю чергою означає, що $\hat{m} < A\Delta$, де A - деяка стала. Однак, ми формально не довели, що $\hat{r}_n \geq 1$, отже ми зберігаємо обидві умови $\hat{m} < \infty$ та $\Delta < \infty$, не дивлячись на те, що за звичайних обставин перша умова є наслідком другої.

Нарешті, ми б хотіли зауважити, що Δ по факту є $\Delta(\varepsilon)$ (ми показали, що $R_k^{(i)}(x, \mathbb{R}) \leq \varepsilon$), що означає, що Δ має бути малим при $\varepsilon \to 0$. В моделі (3.86) ми явно маємо $\Delta = O(\varepsilon)$.

Припустивши, що **Умова М** виконана, визначимо наступний оператор "несклеювання"

$$T_t^{(i)}(x, A) = \frac{\Gamma_t^{(i)}(A - a_t x) - a_t \nu_t(A)}{1 - a_t},$$
$$T_{xy}^{(t)}(A, B) = T_t^{(1)}(x, A) T_t^{(2)}(y, B).$$

Визначимо тепер ланцюг Маркова $\bar{Z}_n = \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, d_n\right)$ зі значеннями в $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{0, 1, 2\})$, визначивши його перехідні ймовірності як

$$\bar{P}_n(x, y, 1; A \times B \times \{2\}) = \mathbb{1}_{x=y} Q_n(x, A \cap B),$$

$$\bar{P}_n(x, y, 1; A \times B \times \{0\}) = \mathbb{1}_{x=y} \frac{R_n^{(1)}(x, A) R_n^{(2)}(y, B)}{1 - Q_n(x, \mathbb{R})}.$$

Вважатимемо, що остання ймовірність рівна нулю, якщо $Q_n(x, \mathbb{R}) = 1$.

$$\begin{aligned}\bar{P}_n(x, y, 0; A \times B \times \{0\}) &= (1 - a_n) \mathbb{1}_{C \times C}(x, y) T_n^{(1)}(x, A) T_n^{(2)}(y, B) \\ &\quad + (1 - \mathbb{1}_{C \times C}(x, y)) \Gamma_n^{(1)}(A - \alpha_n^{(1)} x) \Gamma_n^{(2)}(A - \alpha_n^{(2)} y)\end{aligned}$$

$$\bar{P}_n(x, y, 0; A \times B \times \{1\}) = \mathbb{1}_{C \times C}(x, y) a_n \nu_n(A \cap B).$$

$$\bar{P}_n(x, y, 2; \cdot) = \bar{P}_n(x, y, 1; \cdot).$$

Всі інші ймовірності покладемо рівними нулю.

Очевидно, що маргінальні розподіли процесу $\bar{Z}_n$ співпадають з розподілами $X_n^{(i)}$.

Ми використовуватимемо канонічні ймовірності $\bar{P}_{x,y,d}^t$ та математичні сподівання $\bar{E}_{x,y,d}^t$, $x, y \in \mathbb{R}$, $d \in \{0, 1, 2\}$ у той же спосіб, що і раніше.

Позначимо через

$$\bar{\sigma}_{C \times C} = \bar{\sigma}_{C \times C}(1) = \inf\left\{n \geq 1 : \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right) \in C \times C\right\},$$

$$\bar{\sigma}_{C \times C}(m) = \inf\left\{n \geq \bar{\sigma}_{C \times C}(m - 1) : \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right) \in C \times C\right\}, m \geq 2,$$

перший та m-час повернення в $C \times C$ парою ланцюгів $\left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right)$.

Нам також знадобиться спеціальне позначення для множин

$$\begin{aligned} &D_n = \{d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0\}, \\ &D_{nk} = \{d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0, \bar{\sigma}_{C\times C}(k) = n\}, \\ &B_{nk} = \{d_k \in \{1,2\}, d_{k+1} = 0, \ldots d_n = 0\}, \end{aligned} \tag{3.89}$$

та для величин

$$\rho_{nk} = \sup_{x,y\in C,t} \bar{P}^t_{x,y,0}\left(D_{nk}\right). \tag{3.90}$$

Теорема 3.9. *Нехай* $X^{(i)}$ *– це два ланцюги Маркова, що визначені в (3.84), які одночасно задовільняють* ***Умову M***, ***Умову T*** *та умови Наслідку 3.4 з* $\psi > 1$, *та* $C = [-c, c]$ *відповідна множина.*

Тоді існують сталі $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, *такі, що для всіх* $x \in C$

$$\left\|\mathbb{P}^t_x\left\{X^{(1)}_n \in \cdot\right\} - \mathbb{P}^t_x\left\{X^{(2)}_n \in \cdot\right\}\right\| \le \varepsilon\hat{m}M_1 + \Delta M_2, \tag{3.91}$$

де $\hat{m}$ *та* Δ *визначені в* ***Умові T***.

Для довільного $x \notin C$ *виконана наступна нерівність*

$$\left\|\mathbb{P}^t_x\left\{X^{(1)}_n \in \cdot\right\} - \mathbb{P}^t_x\left\{X^{(2)}_n \in \cdot\right\}\right\| \le \varepsilon(2\hat{m}M_1 + \hat{\mu}(x)) + 2\Delta M_2, \tag{3.92}$$

де

$$\hat{\mu}(x) = \sup_t \sum_{k\ge 1}\left(\prod_{j=0}^{k-1} Q_{t+j}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus C}\right)(x, \mathbb{R}\setminus C).$$

Зауваження 3.9. Під $Q_t\mathbb{1}_A$ ми розумітимемо ядро, що рівне $Q_t(x,\cdot)$, якщо $x \in A$ та нулю інакше. Отже, маємо

$$\left(\prod_{j=0}^{n-1} Q_{t+j}\mathbb{1}_A\right)(x, B)$$

$$= \mathbb{1}_A(x)\int\limits_A \ldots \int\limits_A Q_t(x, dy_1)Q_{t+1}(y_1, dy_2)\ldots Q_{t+n-1}(y_{n-1}, B).$$

Зауваження 3.10. Нагадаємо, що процес $\bar{Z} = (Z^{(1)}_n, Z^{(2)}_n, d_n)_{n\ge 0}$ визначено вище. Ми можемо інтерпретувати $\hat{\mu}(x)$ як

$$\hat{\mu}(x) = \sup_t \sum_{n\ge 1} \bar{P}^t_{x,x,1}\{d_1 = \ldots = d_n = 2, Z^{(1)}_j = Z^{(2)}_j \notin C, j \le n\}.$$

Ми можемо уявити $\hat{\mu}(x)$ як "сподівання" першого часу, коли "склеєний ланцюг" потрапляє у C. Складнощі з обчисленням $\hat{\mu}$ у практичному застосуванні визначаються конкретною моделлю. Однак, як правило, можна очікувати, що "спільна частина" наслідує поведінку оригінальних процесів, що в контексті даного розділу означає геометричну рекурентність.

Покажемо, як провести такі обчислення для оцінки $\hat{\mu}(x)$ в моделі (3.86). У цьому випадку ми можемо розділити спроби розклеювання та просування процесу у просторі. Нехай $(Y_n)_{n\geq 0}$ це канонічний авторегресійний процес, утворений сім'єю $\{\Gamma_n, n \geq 1\}$, та $\tilde{P}_x^t$ відповідна ймовірність. Без втрати загальності припустимо, що $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$.

Нехай

$$\tilde{\sigma} = \inf\{t \geq 1 : Y_t \in C\}$$

та припустимо, що існує таке $\psi > 1$, що

$$g(x) = \sup_t \tilde{E}_x^t \left[\psi^{\tilde{\sigma}}\right] < \infty.$$

Тоді запишемо

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(x) &= \sup_t \sum_{n\geq 1} \bar{P}_{x,x,1}^t\{d_1 = \ldots = d_n = 2, Z_j^{(1)} = Z_j^{(2)} \notin C, j \leq n\} \\
&= \sup_t \sum_{n\geq 1} (1-\varepsilon)^n \tilde{P}_x^t\left(\tilde{\sigma} \geq n\right) \leq \sup_t \sum_{n\geq 1} (1-\varepsilon)^n \psi^{-n} g(x) \\
&= g(x)\frac{(1-\varepsilon)\psi^{-1}}{1-(1-\varepsilon)\psi^{-1}} \to \frac{g(x)}{\psi - 1}, \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Нарешті, $g(x)$, як правило, можна оцінити, побудувавши функцію Фостера-Ляпунова, що задовільняє умову зсуву для $(Y_n)_{n\geq 0}$.

Зауваження 3.11. Зауважимо, що всі сталі, включені у (3.91), можуть бути безпосередньо обчислені в термінах величин $G, \delta, a_*, a^*, \inf_n \nu_n(C), \psi$, що визначені в Теоремі 3.8, Наслідку 3.4 та **Умові M** (див. приклад 3.1).

Доведення. Скориставшись стандартними для методу склеювання перетвореннями, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{P}_x^t\left\{X_n^{(1)} \in A\right\} - \mathbb{P}_x^t\left\{X_n^{(2)} \in A\right\}\right| \\
&= \left|\bar{P}_{x,x,1}^t\left\{\bar{Z}_n \in (A, \mathbb{R}, \{0,1,2\})\right\} - \bar{P}_{x,x,1}^t\left\{\bar{Z}_n \in (\mathbb{R}, A, \{0,1,2\})\right\}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{\bar{Z}_n \in (A, \mathbb{R}, \{0\})\right\} - \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{\bar{Z}_n \in (\mathbb{R}, A, \{0\})\right\}\right| \\
&\leq \max\left\{\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{\bar{Z}_n \in (A, \mathbb{R}, \{0\})\right\}, \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{\bar{Z}_n \in (\mathbb{R}, A, \{0\})\right\}\right\} \\
&\leq \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_n = 0\right\}.
\end{aligned}
$$

Введемо ядро

$$\Lambda^t_k(x, A) = \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_k \in \{1, 2\}, Z^{(1)}_k = Z^{(2)}_k \in A\right\},$$

та множини

$$A_m = \{y \in \mathbb{R} : |y| \in [m, m+1)\}.$$

Помітимо, що оскільки $\bar{P}_n(x, y, 1; \cdot) = \bar{P}_n(x, y, 2; \cdot)$, то

$$
\begin{aligned}
\bar{P}^t_{x,x,1}(B_{nk}) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_k = 1, Z^{(1)}_k = Z^{(2)} = dy\right\}\bar{P}^{t+k}_{y,y,1}(D_{n-k}) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_k = 2, Z^{(1)}_k = Z^{(2)}_k = dy\right\}\bar{P}^{t+k}_{y,y,2}(D_{n-k}) \\
&= \Lambda^t_k(x, dy)\bar{P}^{t+k}_{y,y,1}(D_{n-k}).
\end{aligned}
$$

Застосуємо цю рівність до часу останнього розклеювання

$$
\begin{aligned}
\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_n = 0\} &= \sum_{k=1}^{n-1}\bar{P}^t_{x,x,1}(B_{nk}) = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\Lambda^t_k(x, dy)\bar{P}^{t+k}_{y,y,1}(D_{n-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m\geq 0}\int_{A_m}\Lambda^t_k(x, dy)\bar{P}^{t+k}_{y,y,1}(D_{n-k}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m\geq 0}\Lambda^t_k(x, A_m)\sup_{y\in A_m}\bar{P}^{t+k}_{y,y,1}(D_{n-k}). \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

Далі ми плануємо замінити $\Lambda^t_k(x, A_m)$ на $\hat{S}_m$ та застосувати Лему 3.15. Однак це можна зробити лише для $x \in C$. Справді:

$$\Lambda^t_k(x, A_m) = \sum_{j=0}^{k-1}\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_j = 1\}\bar{P}^{t+j}_{\nu_j,1}\{d_l = 2, l \in \overline{1, k-j}, Z^{(1)}_{k-j} = Z^{(2)}_{k-j} \in A_m\}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_j = 1\}\nu_j Q^{t+j,k-j}(A_m) \leq \sum_{j=0}^{k-1}\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_j = 1\}\nu_j Q^{t+j,k-j}(\mathbb{R})\hat{S}_m$$

$$= \hat{S}_m \sum_{j=0}^{k-1} \bar{P}^t_{x,x,1}\{d_j = 1, d_{j+1} = \ldots d_k = 2\} = \hat{S}_m \mathbb{P}^t_{x,x,1}\{d_k = 2\} \leq \hat{S}_m.$$

Тут нам допоміг той факт, що $\nu_j(du, dv) = \mathbb{1}_{du=dv}(\mathbb{1}_{\{j=0\}}\delta_x + \mathbb{1}_{\{j>0\}}\nu(du))$, включаючи $j = 0$ (тобто у випадку, коли ланцюги жодного разу не розклеїлись з самого початку). Застосувавши цю оцінку та Лему 3.15 до (3.93), отримаємо для $x \in C$:

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_n = 0\} \leq \sum_{m\geq 0} \hat{S}_m(\varepsilon M_1 + \hat{r}_m M_2) = \varepsilon \hat{m} M_1 + \Delta M_2. \tag{3.94}$$

Тепер перейдемо до випадку $x \notin C$. Покладемо

$$\bar{\sigma} = \inf\{t > 0 : Z^{(1)}_t = Z^{(2)}_t \in C, d_1 = \ldots = d_t = 2\} \leq \infty.$$

Для $x \notin C$ маємо

$$\Lambda^t_k(x, A_m) = \sum_{j=1}^{k-1} \bar{P}^t_{x,x,1}\{d_j = 1\}\bar{P}^{t+j}_{\nu,1}\{d_l = 2, l \in \overline{1, k-j}, Z^{(1)}_{k-j} = Z^{(2)}_{k-j} \in A_m\}$$

$$+\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_2 = \ldots = d_{k-1} = 2, Z^{(1)}_{k-1} = Z^{(2)}_{k-1} \in A_m\} \leq \hat{S}_m$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1} \bar{P}^t_{x,x,1}\{d_2 = \ldots = d_{k-1} = 2, \bar{\sigma} = j, Z^{(1)}_{k-1} = Z^{(2)}_{k-1} \in A_m\}$$

$$+\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_2 = \ldots = d_{k-1} = 2, \bar{\sigma} \geq k, Z^{(1)}_{k-1} = Z^{(2)}_{k-1} \in A_m\}$$

$$\leq \hat{S}_m + \hat{S}_m \bar{P}^t_{x,x,1}(d_1 = \ldots = d_{k-1} = 2, \bar{\sigma} < k) + q_{k,m}(x) \leq 2\hat{S}_m + q_{k,m}(x),$$

де

$$q_{k,m}(x) = \bar{P}^t_{x,x,1}\{d_2 = \ldots = d_{k-1} = 2, \bar{\sigma} \geq k, Z^{(1)}_{k-1} = Z^{(2)}_{k-1} \in A_m\}.$$

Позначимо

$$q_k(x) = \sum_{m\geq 0} q_{k,m}(x).$$

Застосувавши цей результат та очевидну нерівність $\bar{P}^{t+k}_{y,y,1}(D_{n-k}) \leq \varepsilon$ до (3.93), отримаємо для $x \notin C$

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\{d_n = 0\} \leq 2\varepsilon \hat{m} M_1 + 2\Delta M_2 + \varepsilon \sum_{k\geq 0} q_k(x) \leq \varepsilon(2\hat{m} M_1 + \hat{\mu}(x)) + 2\Delta M_2.$$

Тут ми скористались тим фактом, що

$$\sum_{k\geq 0} q_k(x) = \hat{\mu}(x).$$

□

Приклад 3.1. У цьому прикладі ми продемонструємо, як обчислити сталі величини, які фігурують в оцінці з Теореми 3.9.

Спершу помітимо, що оцінка в Теоремі 3.9 залежить від сталих M_1 та M_2, які визначені в Лемі 3.15. Ці сталі своєю чергою залежать від Ξ_0, Ξ_1, що визначені в Теоремі 3.10, та S, що визначена в Лемі 3.10. Стала Ξ_1 відома, якщо ми знаємо Ξ_0 (див. (3.97)). Отже, ми маємо обчислити Ξ_0 та S.

Почнемо з Ξ_0. З (3.96)

$$\Xi_0 = \frac{MC_0^2(2 + 2G + c - \delta)}{1 - a^*},$$

ми бачимо, що єдиною невідомою сталою є M. Вона визначена в Теоремі 3.6 як

$$M = \left(1 + \frac{1}{1 - \sqrt{(1+\varepsilon)(1-\gamma_1)}}\right)\left(\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\right),$$

де ε довільна стала така, що $(1+\varepsilon)(1-\gamma_1) < 1$. Отже, нам достатньо порахувати γ_0 та γ_1. Це може бути зроблено за допомогою Теореми 3.7. Основна умова Теореми 3.7 зводиться до експоненційної малості хвостів $\sigma_C^{(i)}$:

$$\mathbb{P}_x^t\left\{\sigma_C^{(i)} > n\right\} \le (V(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus C}(x) + D\mathbb{1}_C(x))\psi^{-n},$$

для деяких $\psi > 0$ та $V(x)$. За умов Теореми 3.9 (а отже і Наслідка 3.4) це вірно з $V(x) = C_0(1 + |x|)$ та $D = C_0(c + 2 + 2G - \delta)$.

Почнемо з обчислення

$$C_0 \sup_{t,x\in C,i} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_{t,i}(x,dy) - a_t\nu_t(dy)}{1 - a_t}(1 + |y|) \le C_0\left(1 + \frac{1 + 2G + c - \delta}{1 - a^*}\right).$$

Визначимо $\hat{Q}$ як

$$\hat{Q} = C_0\left(1 + \frac{1 + 2G + c - \delta}{1 - a^*}\right).$$

З Теореми 3.7 отримаємо

$$\delta_0 = \sqrt{1 + \theta\frac{a_*(\psi - 1)}{(1 - a_*)\psi\hat{Q} + a_*}},$$

де θ є довільним числом з $(0, 1)$.

$$\gamma_0 = \left(\frac{\theta a_*}{\psi + a_*(1-\theta)(\psi\hat{Q}(1 - a_*))^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\hat{D} = D\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\left(1+\frac{\delta_0-1}{\psi-\delta_0}\psi\hat{Q}\right)\left(1+\frac{\delta_0(\psi-1)}{\psi-\delta_0}\right),$$
$$m = \min\{n \geq 1 |\ \hat{D}\delta_0^{-1} < 1\},$$
$$\gamma_1 = (a_* \inf_t \nu_t(C))^m \exp\left(\ln\left(1-\hat{D}\delta_0^{-m}\right)\left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0-1}-1\right)\right).$$

Отже, ми обчислили γ_0 та γ_1, що дозволяє нам отримати вираз для M, Ξ_0 та Ξ_1 в термінах відомих величин.

Нарешті обчислимо S із Леми 3.10.

$$S = (1-a_*) \sup_{x,y,\in C,t} \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T_{xy}^{(t)}(du,dv)h(u,v)$$
$$\leq (1-a_*) \sup_t \int\limits_{\mathbb{R}} \left(T_t^{(1)}(x,du)\Xi_0|u| + T_t^{(2)}(y,dv)\Xi_0|v| + \Xi_1\right)$$
$$\leq \frac{1-a_*}{1-a^*}\left(2\Xi_0(1+2G+c-\delta)+\Xi_1(1-a^*)\right).$$

3.5.3 Допоміжні результати

У цьому розділі ми припустимо, що виконана Умова C, а також умови Теореми 3.8, та будемо використовувати відповідні позначення.

Почнемо з того, що доведемо важливий результат, який дозволить нам виразити математичне сподівання експоненційного моменту $\sigma_{C\times C}$ через окремі моменти $\sigma_C^{(i)}$.

Теорема 3.10. *Нехай*

$$X_{n+1}^{(1)} = \alpha_n^{(1)}X_n^{(1)} + W_n^{(1)}$$

та

$$X_{n+1}^{(2)} = \alpha_n^{(2)}X_n^{(2)} + W_n^{(2)}$$

є двома ланцюгами Маркова. Нехай $\Gamma_n^{(i)}$ – це розподіл $W_n^{(i)}$ та всі $W_n^{(i)}$ незалежні. Припустимо, що обидва ланцюга задовільняють умови Наслідку 3.4 та ***Умови M*** *для множини $C = [-c, c]$, де c визначене в (3.81).*

Тоді існують сталі $\psi_1 > 1$ та $\Xi_0, \Xi_1 \in \mathbb{R}$, такі що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та $n \geq 0$

$$\mathbb{E}_{x,y}^n\left[\psi_1^{\sigma_{C\times C}}\right] \leq \Xi_0(|x|+|y|)+\Xi_1.$$

Зауваження 3.12. Сталі Ξ_0, Ξ_1 можуть бути обчислені за допомогою результатів з Розділу 3.4.

Доведення. З Теореми 3.6 отримаємо

$$\mathbb{E}^n_{x,y}\left[\psi_1^{\sigma_{C\times C}}\right] \le M\left(\mathbb{E}^n_x\left[\psi_0^{\sigma_C^{(1)}}\right] S_1(\psi_0) + \mathbb{E}^n_y\left[\psi_0^{\sigma_C^{(2)}}\right] S_2(\psi_0)\right),$$

де $\psi_0, \psi_1 \in (1, \psi)$ та $M \in \mathbb{R}$ деякі сталі,

$$S_i(u) = \sup_{n,x\in C}\left\{\frac{1}{1-a_n}\left(\mathbb{E}^n_x\left[u^{\sigma_C^{(i)}}\right] - a_n\mathbb{E}^n_{\nu_n}\left[u^{\sigma_C^{(i)}}\right]\right)\right\}.$$

Оскільки $\psi_0 < \psi$, то з Наслідку 3.4 отримаємо

$$S_i(\psi_0) \le \frac{1}{1-a^*}\sup_{n,x\in C}\mathbb{E}^n_x\left[\psi^{\sigma_C^{(i)}}\right] \le \frac{C_0(2+2G+c-\delta)}{1-a^*}.$$

Далі застосуємо Наслідок 3.4 до $\mathbb{E}^n_x\left[\psi_0^{\sigma_C^{(i)}}\right]$ та отримаємо

$$\mathbb{E}^n_{x,y}\left[\psi_1^{\sigma_{C\times C}}\right] \le \Xi_0(|x|+|y|) + \Xi_1, \tag{3.95}$$

$$\Xi_0 = \frac{MC_0^2(2+2G+c-\delta)}{1-a^*}, \tag{3.96}$$

$$\Xi_1 = \Xi_0(2 + (1+2G-\delta)(\mathbb{1}_C(x) + \mathbb{1}_C(y))). \tag{3.97}$$

□

Далі позначимо

$$h(x,y) = \sup_n \mathbb{E}^n_{x,y}\left[\psi_1^{\sigma_{C\times C}}\right] \tag{3.98}$$

та

$$H_t(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} \frac{R_t^{(1)}(x,dy)R_t^{(2)}(x,dz)}{1-Q_t(x,\mathbb{R})}h(y,z). \tag{3.99}$$

В подальшому будемо використовувати позначення з Теореми 3.8, Наслідку 3.4, Теореми 3.10 та **Умови М**. Далі представимо ряд результатів, які відіграють важливу роль у доведенні основного результату.

Лема 3.8. *Для всіх* $(x,y) \notin C\times C$

$$\bar{P}^t_{x,y,0}\left\{\sigma_{C\times C} \ge n\right\} \le \psi_1^{-n}h(x,y).$$

Доведення. Для всіх $(x, y) \notin C \times C$

$$\bar{P}^t_{x,y,0}\left\{\sigma_{C\times C} \geq n\right\} = \mathbb{P}\left\{\sigma^{(t)}_{C\times C} \geq n \middle| X^{(1)}_t = x, X^{(2)}_t = y\right\} \leq \delta_1^{-n}\mathbb{E}^t_{x,y}\left[\delta_1^{-\sigma_{C\times C}}\right]$$
$$= \psi_1^{-n}h(x, y). \tag{3.100}$$

Перша рівність випливає з означення $\bar{P}^t_{x,y,0}$, після чого ми скористалися нерівністю Чернова та означенням (3.98). ☐

Зауваження 3.13. Зауважимо, що для подальших викладок важливо, що $(x, y) \notin C \times C$. У цьому випадку розподіл пари $\left(Z^{(1)}, Z^{(2)}\right)$ співпадає із розподілом $\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$ на проміжку часу $[0, \bar{\sigma}_{C\times C} - 1]$? завдяки чому перша рівність є вірною, що дозволяє нам перейти від ймовірнісної міри $\bar{P}$ до $\mathbb{P}$, та скористатись геометричною рекурентністю пари ланцюгів.

Лема 3.9.

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} \geq n\right\} \leq \psi_1^{n-1}H_t(x),$$

де $H_t(x)$ *визначено в (3.99) та* $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Скористаємось 3.8 та означенням ймовірності $\bar{P}$ щоб отримати

$$\begin{aligned}
&\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} \geq n\right\}\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} \frac{R^{(1)}_t(x, dy)R^{(2)}_t(x, dz)}{1 - Q_t(x, \mathbb{R})}\bar{P}^t_{y,z,0}\left\{\bar{\sigma}_{C\times C} \geq n - 1\right\}\\
&\leq \psi_1^{n-1}\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} \frac{R^{(1)}_t(x, dy)R^{(2)}_t(x, dz)}{1 - Q_t(x, \mathbb{R})}h(y, z)\\
&= \psi_1^{n-1}H_t(x).
\end{aligned}$$

☐

Тепер розглянемо ситуацію? коли пара $\left(Z^{(1)}_k, Z^{(2)}_k\right)$ потрапляє в $C \times C$ в точності один раз.

Лема 3.10.

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_j = 0, j = \overline{1, n}, \bar{\sigma}_{C\times C} \leq n < \bar{\sigma}_{C\times C}(2)\right\} \leq \frac{S\left((n-1)H_t(x) + \varepsilon\right)}{\psi_1^{n-1}}, \tag{3.101}$$

де

$$S = (1-a_*) \sup_{x,y\in C, t\geq 0,} \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T^{(t)}_{x,y}(du,dv)h(u,v).$$

Доведення. Для довільного $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_j = 0, j=\overline{1,n}, \bar\sigma_{C\times C} \leq n < \bar\sigma_{C\times C}(2)\right\}\\
&\quad= \sum_{k=1}^{n} \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_j = 0, j=\overline{1,n},\ \bar\sigma_{C\times C} = k, \bar\sigma_{C\times C}(2) > n\right\}\\
&\quad= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C\times C} \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar\sigma_{C\times C} = k, \left(Z^{(1)}_k, Z^{(2)}_k, d_k\right) = (du,dv,0)\right\}\times\\
&\quad\times \bar{P}^{t+k}_{u,v,0}\left\{\bar\sigma_{C\times C} > n-k\right\} \leq \sum_{k=1}^{n} \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar\sigma_{C\times C} = k, d_k = 0\right\}\times\\
&\quad\times \sup_{x,y\in C} \bar{P}^{t+k}_{x,y,0}\left\{d_1 = 0, \bar\sigma_{C\times C} > n-k\right\}.
\end{aligned}$$

Помітимо, що ми не можемо застосувати Лему 3.8 до останнього доданку, оскільки початкове значення $(x,y) \in C\times C$, а отже розподіл першого кроку для ланцюга $\bar{Z}$ за міри $\bar{P}$ відрізняється від розподілу пари $(X^{(1)}, X^{(2)})$ за міри $\mathbb{P}$. Таким чином, маємо для всіх $(x_0,y_0) \in C\times C$

$$\begin{gathered}
\bar{P}^{t+k}_{x_0,y_0,0}\left\{d_1 = 0, \bar\sigma_{C\times C} > n-k\right\}\\
= (1-a_{t+k}) \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T^{(1)}_{t+k}(x_0,dx)T^{(2)}_{t+k}(y_0,dy)\bar{P}^{t+k+1}_{x,y,0}\left\{\bar\sigma_{C\times C} \geq n-k\right\}.
\end{gathered}$$

Тепер застосуємо Лему 3.8 до $\bar{P}^{t+k+1}_{x,y,0}\left\{\bar\sigma_{C\times C} \geq n-k\right\}$ та отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
\sup_{x_0,y_0\in C} &\bar{P}^{t+k}_{x_0,y_0,0}\left\{d_1 = 0, \bar\sigma_{C\times C} \geq n-k\right\}\\
&\leq \frac{1-a_*}{\psi_1^{(n-k)}} \sup_{x_0,y_0\in C} \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T^{(t+k)}_{x_0,y_0}(dx,dy)h(x,y)\\
&= S\psi_1^{-(n-k)}.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Скориставшись Лемою 3.9 для $k \geq 2$, отримаємо

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, d_k = 0, \bar\sigma_{C\times C} = k\right\} \leq \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar\sigma_{C\times C} \geq k\right\}$$

$$\leq \psi_1^{-(k-1)} H_t(x). \tag{3.103}$$

Зрозуміло, що $k = 1$

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} = 1\right\} = \frac{R_t^{(1)}(x,C)R_t^{(2)}(x,C)}{1 - Q_t(x,\mathbb{R})} \leq \varepsilon. \tag{3.104}$$

Скомбінувавши(3.102)-(3.104), отримаємо, що

$$\begin{aligned}
&\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_j = 0, j = \overline{1,n}, \bar{\sigma}_{C\times C} \leq n < \bar{\sigma}_{C\times C}(2)\right\} \\
&\quad \leq S\sum_{k=1}^{n} \bar{P}^t_{x,x,1}\left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} = k, d_k = 0\right\}\psi_1^{-(n-k)} \\
&\quad \leq S\left(\sum_{k=2}^{n} H_t(x)\psi_1^{-(k-1)}\psi_1^{-(n-k)} + \varepsilon\psi_1^{-(n-1)}\right) \\
&\quad = S\left(\psi_1^{-(n-1)}(n-1)H_t(x) + \varepsilon\psi_1^{-(n-1)}\right) \\
&\quad = S\psi_1^{-(n-1)}\left((n-1)H_t(x) + \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

□

Нарешті розглянемо ситуацію, за якої пара $\left(Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}\right)$ відвідує $C\times C$ в точності $k \geq 2$ разів.

Лема 3.11. *Для всіх $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}
&\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{D_n, \bar{\sigma}_{C\times C}(k) \leq n < \bar{\sigma}_{C\times C}(k+1)\right\} \\
&\quad \leq SH_t(x)\sum_{i=2}^{n-k+1}\delta_1^{-(i-1)}\sum_{j=k-1}^{n-i}\rho_{j,k-1}\delta_1^{-(n-i-j)} \\
&\quad + \varepsilon S\sum_{j=k-1}^{n-1}\rho_{j,k-1}\delta_1^{-(n-j-1)},
\end{aligned}$$

де ρ_{nk} визначено в (3.90), та S з Леми 3.10.

Доведення. Скориставшись розкладом за першим входом-останнім виходом та Марковською властивістю, отримаємо наступне представлення для шуканої ймовірності

$$\bar{P}^t_{x,x,1}\left\{D_n, \bar{\sigma}_{C\times C}(k) \leq n < \bar{\sigma}_{C\times C}(k+1)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i+k-1}^{n} \int\limits_{C\times C} \bar{P}^{t}_{x,x,1} \left\{D_{i1}, \left(Z^{(1)}_{i}, Z^{(2)}_{i}\right) = (dy_1, dy_2)\right\} \times \\
&\times \int\limits_{C\times C} \bar{P}^{t+i}_{x,y,0} \left\{D_{j-i,k-1}, \left(Z^{(1)}_{j-i}, Z^{(2)}_{j-i}\right) = (dz_1, dz_2)\right\} \\
&\times \bar{P}^{t+j}_{z_1,z_2,0} \left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} > n - j\right\}.
\end{aligned}
$$

Тут індекс i позначає перше відвідування. Оскільки протягом перших n кроків відбулось рівно k відвідувань, то перше відвідування не могло трапитись пізніше за $n - k$, інакше часу, що залишилось, не вистачить для решти $k - 1$ відвідувань. Аналогічні міркування застосовуються до j, що є часом останнього відвідування. Оскільки відбулось рівно $k - 1$ відвідувань на інтервалі часу $(i, j]$, то j не може бути ближче ніж $k - 1$ до i, інакше $k - 1$ відвідувань не вмістяться у інтервал. Тепер взявши супремум по $x, y \in C$ та $t \geq 0$ у другому та третьому доданках ми прийдемо до нерівності

$$
\begin{aligned}
&\bar{P}^{t}_{x,x,1} \left\{D_n, \bar{\sigma}_{C\times C}(k) \leq n < \bar{\sigma}_{C\times C}(k+1)\right\} \leq \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i+k-1}^{n} \bar{P}^{t}_{x,x,1} \left\{D_{i1}\right\} \times \\
&\times \sup\nolimits_{x,y\in C,t} \bar{P}^{t}_{x,y,0} \left\{D_{j-i,k-1}\right\} \sup\nolimits_{x,y\in C,t} \bar{P}^{t}_{x,y,0} \left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} > n - j\right\}
\end{aligned} \tag{3.105}
$$

Помітимо, що другий множник це точно $\rho_{j-i,k-1}$.

Застосувавши міркування, аналогічні до доведення Леми 3.10 (див. нерівність (3.102)), отримаємо оцінку для третього множника

$$
\sup_{x,y\in C,t} \bar{P}^{t}_{x,y,0} \left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} > n - j\right\} \leq S\psi_1^{-(n-j)}.
$$

Скориставшись Лемою 3.9, отримаємо оцінку для першого множника при $i \geq 2$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^{t}_{x,x,1} \left\{d_1 = d_i = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} = i\right\} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{P}^{t}_{x,x,1} \left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} \geq i\right\} \\
&\leq \psi_1^{-(i-1)} H_t(x).
\end{aligned}
$$

Для $i = 1$ матимемо

$$
\mathbb{P}^{t}_{x,x,1} \left\{d_1 = 0, \bar{\sigma}_{C\times C} = 1\right\} = \frac{R^{(1)}_{t}(x, C) R^{(2)}_{t}(x, C)}{1 - Q_t(x, \mathbb{R})} \leq \varepsilon. \tag{3.106}
$$

Підставивши оцінки для першого та третього множинків у (3.105), отримаємо

$$
\bar{P}^{t}_{x,x,1} \left\{D_n, \bar{\sigma}_{C\times C}(k) \leq n < \bar{\sigma}_{C\times C}(k+1)\right\}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=2}^{n-k+1} \sum_{j=i+k-1}^{n} H_t(x)\psi_1^{-(i-1)}\rho_{j-i,k-1}S\psi_1^{-(n-j)} \\
&+ \sum_{j=k}^{n} \varepsilon\rho_{j-1,k-1}S\psi_1^{-(n-j)} \\
&= SH_t(x) \sum_{i=2}^{n-k+1} \psi_1^{-(i-1)} \sum_{j=i+k-1}^{n} \rho_{j-i,k-1}\psi_1^{-(n-j)} \\
&+ \varepsilon S \sum_{j=k}^{n} \rho_{j-1,k-1}\psi_1^{-(n-j)} \\
&= SH_t(x) \sum_{i=2}^{n-k+1} \delta_1^{-(i-1)} \sum_{j=k-1}^{n-i} \rho_{j,k-1}\delta_1^{-(n-i-j)} \\
&+ \varepsilon S \sum_{j=k-1}^{n-1} \rho_{j,k-1}\delta_1^{-(n-j-1)}.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

□

Нам буде важливо, щоб ймовірності з Леми 3.11 були сумовані за парою індексів n, k. Помітимо, що оскільки $\rho_{jk} = 0$ при $j < k$ (оскільки $\bar{\sigma}_{C\times C}(k) = j < k$ є неможливою рівністю), подвійна сума в правій частині нерівності з Леми 3.11 є згорткою геометричної послідовності (ψ_1^{-n}) з ρ_{jk} (як функції j при фіксованому k), що обчислена в момент $n - k + 1$. Таким чином для того, щоб встановити скінченність шуканої суми, необхідно показати, що подвійна послідовність $\{\rho_{nk}, n \geq 1, k = \overline{1, n}\}$ сумована. З цією метою ми доведемо наступні три леми.

Лема 3.12.

$$\rho_{nk} = \sup_{x,y\in C,t} \bar{P}^t_{x,y,0}\left\{D_{nk}\right\} \leq (1 - a_*)^k. \tag{3.108}$$

Доведення. Проведемо доведення за індукцією. Нехай $n = 1$ та $k = 1$. Тоді

$$\mathbb{P}^t_{x,y,0}\left\{D_{11}\right\} = \mathbb{P}^t_{x,y,0}\left\{\bar{Z}_1 \in (C \times C \times 0)\right\}$$

$$= (1 - a_t)T_t^{(1)}(x, C)T_t^{(2)}(y, C) \leq (1 - a_*),$$

оскільки $T_t^{(i)}(x, C) \leq T_t^{(i)}(x, \mathbb{R}) = 1$.

Розглянемо тепер $n \geq 2$, $k = 1$:

$$\bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{D_{n1}\right\} = (1 - a_t) \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T^{(1)}_t(x_0, dx)T^{(2)}_t(y_0, dy)\bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left\{\bar{\sigma}_1 = n\right\}$$

$$\leq (1 - a_t) \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T^{(1)}_t(x_0, dx)T^{(2)}_t(y_0, dy) \leq (1 - a_*).$$

Отже, ми показали, що для всіх натуральних n та $k = 1$ нерівність (3.108) є справедливою.

У подальшому ми скористаємось спрощеними позначеннями

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{C\times C}(i).$$

Припустимо, що твердження виконанується для всіх додатніх n та k; перевіримо його для $k + 1$.

Очевидно, при $n < k+1$ відповідна ймовірність рівна нулю, отже твердження вірне. Нехай $n \geq k + 1$. Запишемо

$$\bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{D_{n,k+1}\right\} = \sum_{s=1}^{n-k} \bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{\bar{\sigma}_1 = s, D_{n,k+1}\right\}.$$

Тепер візьмемо умовне математичне сподівання при $\mathcal{F}_s$, скористаємось марковською властивістю та тим фактом, що

$$\left\{\bar{\sigma}_1 = s, D_{n,k+1}\right\} = \left\{D_{s1}, d_{s+1} = \ldots = d_n = 0, \bar{\sigma}_{k+1} = n\right\}$$

$$= D_{s1} \cap \theta_s\left(\left\{d_1 = \ldots = d_{n-s} = 0, \bar{\sigma}_k = n - s\right\}\right) = D_{s1} \cap \theta_s D_{n-s,k},$$

де θ_s це оператор зсуву. За допомогою очевидного включення $D_s \in \mathcal{F}_s$ та припущення кроку індукції отримаємо

$$\sum_{s=1}^{n-k} \bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{\bar{\sigma}_1 = s, D_{n,k+1}\right\} = \sum_{s=1}^{n-k} \bar{E}^t_{x_0,y_0,0}\left\{D_{s1}, \bar{P}^{t+s}_{\bar{Z}_s}\left\{D_{n-s,k}\right\}\right\}$$

$$\leq \sum_{s=1}^{n-k} \sup_{x,y\in C,t} \bar{P}^t_{x,y}\left\{D_{n-s,k}\right\} \bar{P}^t_{x_0,y_0,0}(D_{s1})$$

$$\leq (1 - a_*)^k \sum_{s=1}^{n-k} \bar{P}^t_{x_0,y_0,0}(D_{s1}) = (1 - a_*)^k \sum_{s=1}^{n-k} \bar{P}^t_{x_0,y_0,0}(d_1 = 0, \bar{\sigma}_1 = s)$$

$$= (1 - a_*)^k \bar{P}^t_{x_0,y_0,0}(d_1 = 0, \bar{\sigma}_1 \leq n - k)$$

$$\begin{aligned}
&= (1-a_*)^k(1-a_t)\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus C\times C} T_t^{(1)}(x_0,dx)T_t^{(2)}(y_0,dy)\times \\
&\times \bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\{\bar{\sigma}_1 \le n-k-1\} + (1-a_*)^k(1-a_t)T_t^{(1)}(x_0,C)T_t^{(2)}(y_0,C) \\
&\le (1-a_*)^{k+1}\int\limits_{\mathbb{R}^2} T_t^{(1)}(x_0,dx)T_t^{(2)}(y_0,dy) = (1-\alpha)^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Отже (3.108) доведено для всіх n, k. □

Лема 3.13. *Нехай $m \ge 2$ ціле, k довільне натуральне число та $j \in \{0,\dots,k-1\}$. Тоді*

$$\rho_{mk+j,k} \le (1-a_*)^{k-1}S\psi_1^{-(m-1)},$$

де S визначено в Лемі 3.10.

Доведення. В цій лемі використовуватимемо наступні позначення

$$n = mk + j,$$

$$\bar{\sigma}_0 = 0,$$

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{C\times C}(i), i \ge 0,$$

$$\bar{\Delta}_i = \bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_{i-1},\ i \ge 1,$$

$$\bar{\zeta}_k = \max_{1\le i\le k}\{\bar{\Delta}_i\},$$

$$\bar{\tau}_n = \min\{l \ge 0 : \bar{\Delta}_l = \bar{\zeta}_k\} \le k,$$

$$D = D_{mk+j,k.}$$

Легко бачити, що

$$D \subset \{\bar{\zeta}_k \ge m\}. \tag{3.110}$$

Справді, нехай $D \cap \{\bar{\zeta}_k < m\} \ne \emptyset$ та нехай $\omega \in D \cap \{\bar{\zeta}_k < m\}$. Тоді

$$\bar{\sigma}_k(\omega) = \sum_{j=1}^{k}\bar{\Delta}_j(\omega) \le k\bar{\zeta}_k(\omega) < mk.$$

Це суперечить означенню $D = D_{mk+j,k}$, що і доводить (3.110).

Припустимо спершу, що $\bar{\tau}_n = 1$. Це означає, що період перед першим відвідуванням є найдовшим, або іншими словами, всі подальші інтервали між відвідуванням $C \times C$ менші або рівні за найперший. Помітимо, що оскільки $m \geq 2$ та $\bar{\zeta}_k(\omega) \geq m$, $\omega \in D$, ми можемо зробити висновок, що відвідування не відбулось на першому кроці. Це спостереження дозволяє нам записати наступне представлення для $x_0, y_0 \in C$

$$\begin{aligned}
&\bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{D_{nk}, \bar{\tau}_n = 1\right\} \\
&\qquad = (1 - a_t) \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus C \times C} T^{(t)}_{x_0 y_0}(dx, dy) \bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left\{\bar{\sigma}_1 \geq m - 1, D_{n-1,k}\right\},
\end{aligned} \tag{3.111}$$

де ми скористались позначенням $T^{(t)}_{xy}(A, B) = T^{(1)}_t(x, A) T^{(2)}_t(y, B)$, введеним у попередньому розділі.

Тепер, скориставшись аналогічними до доведення Леми 3.12 міркуваннями, ми помітимо, що для $s \geq m$

$$\bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left\{\bar{\sigma}_1 = s, D_{n-1,k}\right\} = \bar{E}^{t+1}_{x,y,0}\left[\bar{\sigma}_1 = s, D_s, \bar{P}^{t+s}_{\bar{Z}_s}\left\{D_{n-s,k-1}\right\}\right]$$

$$\leq \rho_{n-s,k-1} \bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left\{\bar{\sigma}_1 = s, D_s\right\} \leq (1 - a_*)^{k-1} \bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left\{\bar{\sigma}_1 = s, D_s\right\},$$

де ми використали Лему 3.12.

Підставивши цю оцінку в (3.111), отримаємо

$$\begin{aligned}
\bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{D_{nk}, \bar{\tau}_n = 1\right\} &\leq (1 - a_*)^k \sum_{s \geq m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus C \times C} T^{(t)}_{x_0 y_0}(dx, dy) \bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left[\bar{\sigma}_1 = s, D_s\right] \\
&= (1 - a_*)^k \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus C \times C} T_{x_0 y_0}(dx, dy) \bar{P}^{t+1}_{x,y,0}\left\{\bar{\sigma}_1 \geq m - 1\right\} \\
&\leq \frac{(1 - a_*)^k}{\psi_1^{m-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus C \times C} T_{x_0 y_0}(dx, dy) h(x, y) \\
&= \frac{(1 - a_*)^{k-1} S}{\psi_1^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Нарешті маємо оцінку

$$\bar{P}^t_{x_0,y_0,0}\left\{D_{nk}, \bar{\tau}_n = 1\right\} \leq \frac{S_1 (1 - a_*)^k}{\psi_1^{m-1}}. \tag{3.112}$$

Тут ми ввели позначення $S_1 = S/(1 - a_*)$, щоб не втрачати множник $(1 - a_*)^k$.

Тепер ми використаємо (3.110) та (3.112), щоб записати розклад за $\bar{\tau}_n$:

$$
\begin{aligned}
&\bar{P}^t_{x,y,0}\left\{D_{nk}\right\} = \bar{P}^t_{x,y,0}\left\{D_{nk}, \bar{\zeta}_k \ge m\right\} = \sum_{j=1}^{k} \bar{P}^t_{x,y,0}\left\{D_{nk}, \bar{\zeta}_k \ge m, \bar{\tau}_n = j\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{s} \bar{E}^t_{x,y,0}\left[\bar{P}^{t+j}_{Z_j^{(1)},Z_j^{(2)},0}\left\{\bar{\tau}_{n-s} = 1, D_{n-s,k-j+1}\right\}; D_{s,j-1}, \bar{\tau}_n = j, \bar{\sigma}_{j-1} = s\right] \\
&\le \frac{S_1}{\psi_1^{m-1}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s} (1-a_*)^{k-j+1} \bar{P}^t_{x,y,0}\left[D_{s,j-1}, \bar{\tau}_n = j, \bar{\sigma}_{j-1} = s\right] \\
&= \frac{S_1}{\psi_1^{m-1}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s} (1-a_*)^{k-j+1} \bar{P}^t_{x,y,0}\left[D_{s,j-1}, \bar{\tau}_n = j, \bar{\sigma}_{j-1} = s\right] \\
&\le \frac{S_1}{\psi_1^{m-1}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s} (1-a_*)^{k-j+1} \bar{P}^t_{x,y,0}\left[\bar{\tau}_n = j, \bar{\sigma}_{j-1} = s\right] \sup_{u,v \in C,t} \bar{P}^t_{u,v,0}\{D_{s,j-1}\} \\
&= \frac{S_1}{\psi_1^{m-1}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s} (1-a_*)^{k-j+1} \bar{P}^t_{x,y,0}\left[\bar{\tau}_n = j, \bar{\sigma}_{j-1} = s\right] \rho_{s,j-1} \\
&\le \frac{S_1}{\psi_1^{m-1}} \sum_{j=1}^{k} (1-a_*)^{k-j+1} (1-a_*)^{j-1} \bar{P}^t_{x,y,0}\left[\bar{\tau}_n = j\right] = \frac{S_1(1-a_*)^k}{\psi_1^{m-1}}.
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що ми скористались Лемою 3.12 в останній нерівності. □

Нарешті ми покажемо, що послідовність $\{\rho_{nk}\}$ сумована.

Лема 3.14.

$$
\rho := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_{nk} \le \frac{1-a_*}{(a_*)^2}\left(1 + \frac{S}{(1-a_*)(\psi_1 - 1)}\right) < \infty.
$$

Доведення. Як і в попередній лемі, покладемо $S_1 = S/(1-a_*)$ так, щоб множник $(1-a_*)^k$ залишався незмінним. Тоді отримаємо наступну оцінку

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_{nk} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \rho_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{mk+j,k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{k+j,k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{mk+j,k}\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{k+j,k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} k(1-a_*)^k \psi_1^{-(m-1)} S_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}(1-a_*)^k k + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k(1-a_*)^k \psi_1^{-m} S_1 \\
&= \frac{1-a_*}{(a_*)^2} + S_1 \sum_{k=1}^{\infty} k(1-a_*)^k \sum_{m=1}^{\infty} \psi_1^{-m} \\
&= \frac{1-a_*}{(a_*)^2} + S_1 \frac{1-a_*}{(\psi_1-1)(a_*)^2} = \frac{1-a_*}{(a_*)^2}\left(1 + S_1 \frac{1}{\psi_1 - 1}\right).
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що ми скористались Лемою 3.13 у першій нерівності. □

Лема 3.15.

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[m,m+1),t} \mathbb{P}^t_{x,x,1}\{D_n\} \leq \varepsilon M_1 + \hat{r}_m M_2$$

де ρ *визначено в Лемі 3.14 та*

$$M_1 = \Xi_0 \left(\frac{\psi_1 S(1+\rho\psi_1)}{(\psi_1-1)^2} + \frac{\psi_1(1+S)}{\psi_1 - 1} \right),$$

$$M_2 = 2\Xi_0 \left(S\frac{\psi_1(1+\rho+\Xi_1(1+S))}{\psi_1-1} + \Xi_1 \frac{\psi_1 S(1+\rho\psi_1)}{(\psi_1-1)^2} \right),$$

Ξ_0, Ξ_1 *з Теореми 3.10.*

Доведення. Покладемо

$$H_t^{(m)}(x) = \sup_{|x|\in[m,m+1)} H_t(x).$$

Скориставшись Лемами 3.9, 3.10, 3.11 та 3.13, отримаємо

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \sup_{|x|\in[m,m+1)} \mathbb{P}^t_{x,x,1}\{D_n\} &\leq \sum_{n\geq 1} \left(\frac{H_t^{(m)}(x)}{\psi_1^{n-1}} + \frac{S((n-1)H_t^{(m)}(x)+\varepsilon)}{\psi_1^{n-1}} \right) \\
&+ \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2} S H_t^{(m)}(x) \sum_{i=2}^{n-k+1} \psi_1^{-(i-1)} \sum_{j=k-1}^{n-i} \rho_{j,k-1}\psi_1^{-(n-i-j)} \\
&+ \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2} \varepsilon S \sum_{j=k-1}^{n-1} \rho_{j,k-1}\psi_1^{-(n-j-1)} = A_1 + A_2 + \varepsilon S A_3.
\end{aligned}
$$

Роз почнемо з A_1:

$$A_1 = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{H_t^{(m)}(x)}{\psi_1^{n-1}} + \frac{S((n-1)H_t^{(m)}(x)+\varepsilon)}{\psi_1^{n-1}} \right) = \frac{\psi_1(H_t^{(m)}(x)+\varepsilon S)}{\psi_1 - 1}$$

$$+\frac{\psi_1 SH_t^{(m)}(x)}{(\psi_1-1)^2}.$$

Перед тим як перейти до A_2, спочатку поглянемо на суму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\geq 2}\sum_{i=1}^{n-k+1}\psi_1^{-(i-1)}\sum_{j=k-1}^{n-i}\rho_{j,k-1}\psi_1^{-(n-i-j)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{n-k}\psi_1^{-(i-1)}\sum_{j=k}^{n-i}\rho_{jk}\psi_1^{-(n-i-j)}.$$

Зрозуміло, що k не може перевищувати n, та $\rho_{jk}=0$, якщо $j<k$. Покладемо $p_n=\psi_1^{-(n-1)}$, $n\geq 1$, $p_0=0$ та $q_j(k)=\rho_{j+k,k}$ для фіксованих k, $j\geq 0$. Тоді ми можемо переставити місцями n та k та переписати попередню суму наступним чином

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\geq k}\sum_{i=1}^{n-k}\psi_1^{-(i-1)}\sum_{j=k}^{n-i}\rho_{jk}\psi_1^{-(n-i-j)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\geq k}\sum_{i=1}^{n-k}\psi_1^{-(i-1)}\sum_{j=0}^{n-k-i}q_j(k)\psi_1^{-(n-k-i-j)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\geq k}(p\star q(k)\star p)_{n-k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_n\right)^2\left(\sum_{j\geq 0}q_j(k)\right)\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_1^{-(n-1)}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{jk}=\left(\frac{\psi_1}{\psi_1-1}\right)^2\rho.\end{aligned}$$

Тепер обчислимо A_2.

$$\begin{aligned}A_2&=\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2}SH_t^{(m)}(x)\sum_{i=2}^{n-k+1}\psi_1^{-(i-1)}\sum_{j=k-1}^{n-i}\rho_{j,k-1}\psi_1^{-(n-i-j)}\\&=SH_t^{(m)}(x)\rho\left(\frac{\psi_1}{\psi_1-1}\right)^2-SH_t^{(m)}(x)A_3.\end{aligned}$$

Для A_3 маємо

$$\begin{aligned}A_3&=\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2}\sum_{j=k-1}^{n-1}\rho_{j,k-1}\psi_1^{-(n-j-1)}=\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\sum_{j=k}^{n-1}\rho_{j,k}\psi_1^{-(n-j-1)}\\&=\left(\sum_{n\geq 0}\psi_1^{-n}\right)\left(\sum_{j,k}\rho_{j,k}\right)=\frac{\rho\psi_1}{\psi_1-1}.\end{aligned}$$

Тепер маємо

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \sup_{|x|\in[m,m+1)} \mathbb{P}^{t}_{x,x,1}\{D_n\} \leq{}& \frac{\psi_1(H_t^{(m)}(x)+\varepsilon S)}{\psi_1-1} \\
&+ \frac{\psi_1 S H_t^{(m)}(x)}{(\psi_1-1)^2} + SH_t^{(m)}(x)\rho\left(\frac{\psi_1}{\psi_1-1}\right)^2 \\
&+ (\varepsilon S - SH_t^{(m)}(x))\frac{\rho\psi_1}{\psi_1-1} = \frac{\psi_1 S H_t^{(m)}(x)(1+\rho\psi_1)}{(\psi_1-1)^2} \\
&+ \frac{\psi_1(H_t^{(m)}(x)+\varepsilon S + SH_t^{(m)}(x) + \rho\varepsilon S - \rho S H_t^{(m)}(x))}{\psi_1-1} \\
&\leq \varepsilon S\frac{\psi_1(1+\rho)}{\psi_1-1} + H_t^{(m)}(x)\left(\frac{\psi_1 S(1+\rho\psi_1)}{(\psi_1-1)^2} + \frac{\psi_1(1+S)}{\psi_1-1}\right).
\end{aligned}$$

Ми можемо скористатись Теоремою 3.10 та **Умовою T**, щоб отримати

$$H_t^{(m)}(x) \leq \sup_{|x|\in[m,m+1)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{R_t^{(1)}(x,dy)R_t^{(2)}(x,dz)}{1-Q_t(x,\mathbb{R})}\left(\Xi_0(|y|+|z|)+\Xi_1\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Xi_0\left(\sup_{|x|\in[m,m+1)}\int_{\mathbb{R}} R_t^{(1)}(x,dy)|y| + \sup_{|x|\in[m,m+1)}\int_{\mathbb{R}} R_t^{(2)}(x,dy)|y|\right) + \varepsilon\Xi_1 \\
&\leq 2\Xi_0\hat{r}_m + \varepsilon\Xi_1
\end{aligned}$$

Нарешті запишемо

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \sup_{|x|\in[m,m+1)} \mathbb{P}^{t}_{x,x,1}\{D_n\} \leq{}& 2\hat{r}_m\Xi_0\left(\frac{\psi_1 S(1+\rho\psi_1)}{(\psi_1-1)^2} + \frac{\psi_1(1+S)}{\psi_1-1}\right) \\
&+ \varepsilon\left(S\frac{\psi_1(1+\rho+\Xi_1(1+S))}{\psi_1-1} + \Xi_1\frac{\psi_1 S(1+\rho\psi_1)}{(\psi_1-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

□

3.6 Оцінки стійкості для випадкового блукання на півпрямій

Будемо використовувати позначення $\mathbb{R}^{+}$ для множини невід'ємних дійсних чисел, та $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{+})$ позначатиме борельову σ-алгебру на цій множині.

Розглядаємо два незалежні ланцюги Маркова $\{X_n^{(1)}, n \geq 0\}$ та $\{X_n^{(2)}, n \geq 0\}$, зі значеннями в $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, задані на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наступним чином:

$$X_n^{(1)} = \left(X_{n-1}^{(1)} + W_n\right)^+, n \geq 1$$

$$X_n^{(2)} = \left(X_{n-1}^{(2)} + Z_n\right)^+, n \geq 1,$$

де величини $W_n, Z_n, n \geq 0$ є незалежними в сукупності, задані на тому ж ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ та мають розподіли:

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n \in dx\},$$

$$G_n(x) = \mathbf{P}\{Z_n \in dx\}.$$

Таким чином, обидва ланцюги є неоднорідними за часом.

Нехай

$$P_{i,n} \colon \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \to [0,1],$$

це перехідні ймовірності на n-тому кроці для i-того ланцюга, $i \in \{1, 2\}$. Тоді

$$P_{i,n}(x, A) = \mathbf{P}\left\{X_{n+1}^{(i)} \in A | X_n^{(i)} = x\right\}.$$

Будемо позначати через $\mathbf{P}_{i,x}$, $i \in \{1, 2\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ міру, асоційовану з ланцюгом $X^{(i)}$, що стартує з точки $x \in \mathbb{R}^+$. Іншими словами:

$$\mathbf{P}_{i,x}\{A\} = \mathbf{P}\left\{X^{(1)} \in A | X_0^{(1)} = x\right\},$$

де $A \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))^\infty$ - множина з циліндричної σ-алгебри на множині $(\mathbb{R}^+)^\infty$. Відповідне математичне сподівання позначатимемо через $\mathbb{E}_{i,x}$. Будемо також використовувати позначення $\mathbf{P}_{x,y}$ та $\mathbb{E}_{x,y}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ для позначення аналогічної ймовірності та математичного сподівання, породжених парою ланцюгів $\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$.

Нехай $c > 0$ - константа, визначимо

$$\begin{aligned} \sigma_c^{(i)} &= \min\left\{t \geq 1 : X_t^{(i)} \in [0, c]\right\}, \\ \sigma_c &= \min\left\{t \geq 1 : \left(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}\right) \in [0, c] \times [0, c]\right\}, \end{aligned} \tag{3.113}$$

як час першого повернення у множину $[0, c]$ та час першого спільного потрапляння у цю множину для обох ланцюгів відповідно.

Задача полягає у тому, щоб з'ясувати за яких умов існують такі $c > 0$ та $\beta > 1$, що

$$\mathbb{E}_{i,x}\left[\beta^{\sigma_c^{(i)}}\right] < \infty,$$

та

$$\mathbb{E}_{x,y}\left[\beta^{\sigma_c}\right] < \infty,$$

для всіх $i \in \{1, 2\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, а також отримати оцінки для вищеозначених математичних сподівань. Зауважимо, що $\sigma_c^{(i)}$ та σ_c можна вважати як випадковими величинами заданими на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, так і величинами на просторі $((\mathbb{R}^+)^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)^\infty)$ з мірами $\mathbf{P}_{i,x}$ та $\mathbf{P}_{x,y}$. Тому в подальшому ми будемо вільно використовувати як символ $\mathbf{P}$, так і $\mathbf{P}_{i,x}$ для роботи з цими величинами та будь-якими іншими, що є функціями від $X^{(i)}$. Зауважимо також, що β може бути різним у першій та другій нерівностях вище. Як ми побачимо далі, саме так і буде.

3.6.1 Умова зсуву для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$

Розглянемо наступні умови, які, як ми побачимо далі, запезпечують скінченість експоненційних моментів та дозволяють отримати їх оцінки.

Умова (A) Нехай існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} xF_n(dx) < -\varepsilon,$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} xG_n(dx) < -\varepsilon,$$

для всіх $n \geq 0$.

Іншими словами,

$$\sup_{n\geq 1}\left\{\mathbb{E}\left[Z_n\right], \mathbb{E}\left[W_n\right]\right\} < -\varepsilon < 0.$$

Умова (B) Нехай існують такі $\rho_0 > 0$, та $M > 0$, що

$$\sup_{n\geq 0}\{\mathbb{E}\left[\exp\left(\rho_0 W_n\right)\right], \mathbb{E}\left[\exp\left(\rho_0 Z_n\right)\right]\} < M.$$

Іншими словами, існують скінчені експоненційні моменти для величин W_n та Z_n.

Основним існтрументом дослідження буде умова зсуву у формі:

$$P_{i,n}V(x) \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

де $V\colon \mathbb{R}^+ \to [1,\infty]$- деяка пробна функція, $\lambda \in (0,1)$, $b < \infty$ - деякі константи. Ми покажемо, що за умов (A) та (B) виконується умова зсуву для обох ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, та обчислимо величини λ та b.

Теорема 3.11. *Нехай для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, визначених вище, виконані умови (A) та (B). Тоді*

1. існує таке число $c > 0$, що для всіх $n \geq 0$

$$\int\limits_{-c}^{\infty} xF_n(dx) < -\varepsilon/2,$$

та

$$\int\limits_{-c}^{\infty} xG_n(dx) < -\varepsilon/2.$$

2. Існує таке $\rho > 0$, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1|\, F_n(dy) \leq \rho\varepsilon/4,$$

та

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1|\, G_n(dy) \leq \rho\varepsilon/4,$$

для всіх $n > 0$.

3. Для функції $V(x) = e^{\rho x}$, $n \geq 0$, $i \in \{1,2\}$ та довільного $x \geq 0$ має місце наступна нерівність

$$\mathbb{E}\left[V\left(X_{n+1}^{(i)}\right)|X_n^{(i)} = x\right] \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

де

$$\lambda = 1 - \rho\varepsilon/4 < 1,$$

$$b = \sup_{i\in\{1,2\},0\leq x\leq c,n\geq 0} \mathbb{E}\left[V\left(X_{n+1}^{(i)}\right)|X_n^{(i)} = x\right] < \infty.$$

Доведення. Очевидно, умова (A) гарантує існування $c > 0$, що задовільняє твердження 1 теореми. Помітимо тепер, що

$$|e^{\rho y} - \rho y - 1| = \rho \left(\frac{e^{\rho y} - 1}{\rho} - \rho y \right) \to 0,\ \rho \to 0.$$

Окрім того,

$$|e^{\rho y} - \rho y - 1| \leq e^{\rho y} + \rho |y| + 1 \in L_1(F_n),$$

в силу умови (B). Отже існує таке $\rho < \rho_0$, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1|\, F_n(dy) \leq \rho\varepsilon/4.$$

З умови (B) також випливає рівномірна інтегровність сімейств величин $\{W_n,\ n \geq 0\}$ та $\{Z_n,\ n \geq 0\}$. Таким чином константу ρ можна вибрати не залежною від n і такою, що задовільняє твердження 2 теореми для F_n та G_n.

Розглянемо пробну функцію $V(x)$ у формі

$$V(x) = e^{\rho x}, \rho < \rho_0,$$

де ρ взято із 2. Розглянемо умову зсуву для $X^{(1)}$. Для довільних $n \geq 0$ та $x > c$ маємо

$$\begin{aligned} P_{1,n}V(x)/V(x) &= e^{-\rho x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\rho (x+y)^+} F_n(dy) \\ &= e^{-\rho x} \left(F_n(-\infty, -x] + \int\limits_{-x+0}^{\infty} e^{\rho(x+y)} F_n(dy) \right) \\ &= F_n(-\infty, -x] e^{-\rho x} + \int\limits_{-x+0}^{\infty} e^{\rho y} F_n(dy) \\ &= F_n(-\infty, -x] e^{-\rho x} + \int\limits_{-x+0}^{\infty} \left(e^{\rho y} - \rho y - 1\right) F_n(dy) \\ &\quad + \int\limits_{-x+0}^{\infty} (\rho y + 1) F_n(dy) \\ &\leq F_n(-\infty, -x] e^{-\rho x} + \int\limits_{-x+0}^{\infty} \left(e^{\rho y} - \rho y - 1\right) F_n(dy) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\rho \int_{-c}^{\infty} y F_n(dy) + F(-x,\infty) \\
&\le 1 - \rho\varepsilon/2 - F_n(-\infty,-x](1-e^{-\rho x}) \\
&+ \int_{-x+0}^{\infty} (e^{\rho y} - \rho y - 1)\, F_n(dy) \\
&\le 1 - \rho\varepsilon/2 - F_n(-\infty,-x](1-e^{-\rho x}) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1|\, F_n(dy) \le \\
&\le 1 - \rho\varepsilon/2 - F_n(-\infty,-x](1-e^{-\rho x}) + \rho\varepsilon/4 \\
&\le 1 - \rho\varepsilon/4 = \lambda < 1.
\end{aligned}
$$

Очевидно, що аналогічні міркування справедливі також для G_n. Оскільки ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ феллерові, та $\rho < \rho_0$, то функція $\phi(x) = \mathbb{E}[V(X_{n+1}^{(i)})|X_n^{(i)} = x]$ є скінченною для кожного x та неперервною. А отже, є обмеженою на компакті $[0,c]$. □

3.6.2 Експоненційний момент для часу спільного попадання у множину $[0,c]$

Тепер скористаємось результатими Розділів 3.2-3.4, щоб встановити скінченість експоненційних моментів для $\sigma_c^{(i)}$ та σ_c.

Теорема 3.12. *Для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, визначених вище, та для констант ρ, c, λ, b з Теореми 3.11 має місце нерівність*

$$E_x\left[\lambda^{-\sigma_c^{(i)}}\right] \le e^{\rho x} + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

для всіх $x \ge 0$, $i \in \{1,2\}$.

Доведення. Дане твердження є прямим наслідком Теореми 3.1. □

Для встановлення оцінки для експоненційного момента для σ_c скористаємось Теоремою 3.3.

Спочатку покажемо, що множина $C = [0, c]$ є малою множиною для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$. Цей результат гарантується теоремою, наведеною нижче.

Але перед цим нам потрібно ввести поняття мінімуму двох мір. Нехай μ, ν – дві міри, задані на деякому ймовірнісному просторі. Нехай

$$f = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \; f' = \frac{\nu}{\mu + \nu},$$

тоді мінімумом двох мір μ та ν (або мінімальною мірою) називається ймовірнісна міра:

$$\mu \wedge \nu = (f \wedge f') \cdot (\mu + \nu),$$

де знак $\cdot$ слід розуміти як:

$$\mu \wedge \nu(A) = \int\limits_A (f \wedge f')(x)(\mu + \nu)(dx),$$

для довільної вимірної A.

Аналогічним чином можна визначити мінімальну міру для зліченої сім'ї мір $\{\mu_n, n \geq 0\}$.

Лема 3.16. *Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ ланцюги, які визначені вище. Припустимо, що для них виконані умови (A) та (B). Нехай $\tilde{\nu}$ - мінімальна міра для сім'ї ймовірнісних мір $\{P_{i,n}(x, \cdot), i \in \{1, 2\}, \; x \in [0, c]\}$. Тоді*

$$\alpha := \tilde{\nu}(\mathbb{R}^+) > 0,$$

та для $i \in \{1, 2\}, x \in [0, c]$ та $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ має місце нерівність:

$$P_{i,n}(x, A) \geq \alpha \nu(A),$$

де $\nu(A) = \tilde{\nu}(A)/\alpha$ - ймовірнісна міра, причому $\nu([0, c]) > 0$.

Доведення. В силу умови (B):

$$\inf_{n \geq 0} \{F_n(-\infty, 0], G_n(-\infty, 0]\} > 0.$$

тоді для $x \in [0, c]$

$$\begin{aligned} \inf_{n \geq 0} P_{1,n}(x, [0, c]) &= \inf_{n \geq 0} F_n(-\infty, c - x] \\ &\geq \inf_{n \geq 0} F_n(-\infty, 0] > 0, \end{aligned}$$

та аналогічна нерівність виконана для $P_{2,n}(x, [0, c])$. Таким чином, міра $\tilde{\nu}$ ненульова та $\tilde{\nu}([0, c]) > 0$. Тоді, очевидно, ν коректно визначена ймовірнісна міра, для якої $\nu([0, c]) > 0$. □

Тепер ми готові почати перевірку умов Теореми 3.3. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\alpha < \rho$ визначене вище в Теоремі 3.11.

В якості функцій $V_t(x)$ з умови 1 Теореми 3.3 будемо використовувати функції $V(x) = e^{\alpha x}$. Зауважимо, що вони не залежать від t і є однаковими для всіх моментів часу. Скориставшись нерівністю Чернова, отримаємо

$$\mathbf{P}_x\{\sigma_c^{(i)} > n\} \leq e^{\alpha x}\lambda^n,$$

для $x > c$, та

$$\mathbf{P}_x\{\sigma_c^{(i)} > n\} \leq (\lambda e^{\alpha c} + b)\lambda^n,$$

для $x \in [0, c]$. Отже умова 1 Теореми 3.3 виконана, з константами

$$\beta_0 = \lambda^{-1},$$

$$D = \lambda e^{\alpha c} + b,$$

де константи c та b визначені в Теоремі 3.11. Перевіримо умову 2. Для цього треба розглянути

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{i,n}(x, A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1 - \alpha_t}.$$

Оскільки в нашому випадку α та ν не залежать від n, маємо:

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{i,n}(x, A) - \alpha\nu(A)}{1 - \alpha}.$$

Для $i = 1$ маємо

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{\int_{A\cap[0,\infty)} F_n(dy - x) - \alpha\nu(A)}{1 - \alpha} + \frac{\mathbb{1}_A(0)F_n(-\infty, -x]}{1 - \alpha}.$$

Тоді

$$q_{n,x}^{(1)}(V) = \frac{\int_{0+}^{\infty} (F_n(dy - x) - \alpha\nu(dy))\, e^{\alpha y}}{1 - \alpha} + \frac{F_n(-\infty, -x]}{1 - \alpha}.$$

Очевидно, що аналогічна рівність має місце і для $q^{(2)}_{n,x}(V)$, якщо замінити, F_n на G_n. Тоді, скориставшись умовою (B), отримаємо:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\hat{Q} &= (1-\alpha)\sup_{n\geq 0, 0\leq x\leq c, i\in\{0,1\}} q^{(i)}_{n,x}(V)\\ &\leq \left(M-\alpha\int_0^\infty e^{\alpha y}\nu(dy)\right)+\\ &\sup_n\left\{F_n(-\infty,0],G_n(-\infty,0]\right\}<\infty\end{aligned} \tag{3.114}$$

Зокрема, маємо таку грубу оцінку для $\hat{Q}$

$$\hat{Q}\leq\frac{M+1}{1-\alpha},$$

де M визначено в умові (B).

Умова 3 Теореми 3.3 гарантується Теоремою 3.12.

Таким чином всі умови Теореми 3.3 виконані, і ми можемо сформулювати основний результат даної роботи.

Теорема 3.13. *Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ два ланцюги Маркова, визначені вище, що задовільняють умови (A) та (B). Нехай $\lambda,\varepsilon,\rho,c$ - константи з Теореми 3.12 а α,ν - константа на міноризаційна міра з Леми 3.16. Тоді для довільних $x,y\in\mathbb{R}^+$*

$$E_{x,y}[\delta_1^{\sigma_c}]\leq M_0\left(E_x\left[\delta_0^{\sigma_c^{(1)}}\right]S_1+E_y\left[\delta_0^{\sigma_c^{(2)}}\right]S_2\right),$$

де

$$\delta_0=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\alpha(\lambda^{-1}-1)}{(1-\alpha)\hat{Q}\lambda^{-1}+\alpha}}\right),$$

$$\gamma_0=\left\{(1-\alpha)\left(1+\frac{(\delta_0^2-1)\lambda^{-1}}{\lambda^{-1}-\delta_0^2}\hat{Q}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$\hat{\varepsilon}$ - довільна мала константа

$$\gamma_1=(\alpha\nu[0,c])^m\times,$$

α, ν визначено у Теоремі 3.12,

$$\times\exp\left(\ln\left(1-\check{D}\delta^{-m}\right)\left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0-1}-1\right)\right),$$

$$\delta_1=(1+\hat{\varepsilon}/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

$$\check{D} = D\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\left(1+\frac{(\delta_0-1)\lambda^{-1}}{\lambda^{-1}-\delta_0}\hat{Q}\right)\times,$$
$$D = \lambda e^{\alpha c} + b,$$

α, c та b з Теореми 3.11,

$$\times\left(1+\frac{\delta_0(\lambda^{-1}-1)}{\lambda^{-1}-\delta_0}\right),$$
$$m = \min\left\{n \geq 1 | \check{D}\delta_0^{-n} < 1\right\},$$
$$n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\hat{\varepsilon}(\delta_0-\lambda^{-1})}{2\check{D}\lambda^{-m-1}}\right)/\ln\left(\frac{\lambda^{-1}}{\delta_0}\right)\right\rfloor + 3,$$
$$M_0 = \left(1+\frac{1}{1-\sqrt{(1+\hat{\varepsilon})(1-\gamma_1}}\right)\left(\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\right),$$

S_1 та S_2 визначено в Теоремі 3.2, та вони задовільняють нерівність

$$\max\{S_1, S_2\} \leq D(1-\alpha)^{-1},$$

$\hat{Q}$ визначено у (3.114).

Доведення. Зауважимо, що попередньо ми перевірили всі умови Теореми 3.3, та знайшли вираз для $\hat{Q}$. Оскільки отримані δ_0 та δ_1 менші за $\beta_0 = \lambda^{-1}$, то очевидно також виконані умови Теореми 3.2.

Тоді нерівність

$$E_{x,y}[\delta_1^{\sigma_c}] \leq M_0\left(E_x\left[\delta_0^{\sigma_c^{(1)}}\right]S_1 + E_y\left[\delta_0^{\sigma_c^{(2)}}\right]S_2\right),$$

та вираз для M_0 випливають з Теореми 3.2, а формули для констант з Теореми 3.3 та попередніх міркувань. ☐

Розділ 4

Оцінки середнього часу склеювання за умови стохастичного мажорування

4.1 Вступ

Дана частина дисертаційної роботи присвячена аналізу середнього часу відновлення – під яким ми розуміємо перший момент часу, в який пара ланцюгів одночасно потрапляє у деяку множину C. Зауважимо, що основний інструмент для дослідження подібних задач в однорідному випадку – теорія відновлення (див. наприклад [8] та [112]) – не може бути застосований для аналізу неоднорідних ланцюгів Маркова, оскільки основні результати теорії відновлення не можуть бути перенесені на неоднорідний випадок. Для того, щоб обійти цю проблему, ми будемо накладати ряд умов, які дозволять частково скористатися теорією відновлення у неоднорідному випадку (див. також [149]).

Перша така умова – це відділення від нуля послідовності відновлення. В однорідному випадку, якщо виконується Основна Теорема Відновлення, ця умова виконана автоматично.

Друга умова – це існування стохастичної мажоранти зі скінченими першим або другим моментом. Таке припущення дозволить нам отримати практичні оцінки для середнього часу відновлення. Ми покажемо, яким чином стохастична мажоранта може бути побудована на практиці.

У наступному розділі ми отримаємо результат, який гарантуватиме скінченність середнього часу відновлення, узагальнивши відому теорему Ліндвалла (див. [106]). Однак ми побачимо, що отриманий результат гарантує лише скінченність шуканого моменту склеювання, що викликає труднощі у практичних застосуваннях, які часто вимагають оцінки такого моменту.

Тому в подальших розділах ми скористаємось стохастичною мажорантою для побудови оцінок такого математичного сподівання. Ми побачимо, що різні види стохастичної мажоранти дозволять нам отримати різні оцінки для середнього часу відновлення.

Щодо застовування склеювання у теорії відновлення див. також [121]).

4.2 Інтегровність середнього часу відновлення для неоднорідних ланцюгів Маркова

4.2.1 Послідовність відновлення, асоційована з неоднорідним ланцюгом Маркова

Якщо A – це атом фазового простору для деякого ланцюга Маркова, то послідовність часових інтервалів між відвідуваннями заданим ланцюгом множини A утворює послідовність відновлення. Однак між такими послідовностями, згенерованими однорідними та неоднорідними ланцюгами, є одна принципова відмінність. Вона полягає у тому, що елементи послідовності відновлення для неоднорідного ланцюга Маркова виявляються залежними, а розподіл $k+1$-го моменту відновлення залежить виключно від значення k-того відновлення (див. також роботу [17], яка присвячена дослідженню процесів відновлення, що породжені залежними змінними, та роботу [48], де вивчаються згортки, пов'язані з неоднорідними послідовностями).

Розглянемо задачу, що призводить до поняття послідовності відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова.

Розглянемо деякий неоднорідний дискретний ланцюг Маркова $(X_t, t \geq 0)$ зі значеннями в $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Перехідні ймовірності задаються так:

$$P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P_t(i, j) = p_{ij}^{(t)}, \ t \geq 0, \tag{4.1}$$

Нехай в нульовий момент часу ланцюг знаходиться в нулі. Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \inf\{t > 0 : X_t = 0\} \\ \theta_2 &= \inf\{t > \theta_1 : X_t = 0\} \\ &\dots \\ \theta_m &= \inf\{t > \theta_{m-1} : X_t = 0\}, \ m > 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Тут θ_1 - час до першого повернення в нуль, θ_2 - час від першого до другого повернення, і т.д. Тоді

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{k} \theta_k \tag{4.3}$$

- момент k-того повернення.

Послідовність $\{\theta_m, \ m \geq 1\}$ і є послідовністю відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова X_t. В загальному випадку, якщо ланцюг стартує не з нуля, можемо ще розглядати θ_0 - час, що потрібен до першого попадання в нульовий стан.

Розглянемо тепер питання залежності величин θ_m. В однорідному випадку ці величини є незалежними. Якщо ж ланцюг Маркова є неоднорідним, то між величинами θ_m буде деяка залежність, як буде показано нижче.

Величина θ_1 має наступний розподіл:

$$P\{\theta_1 = k\} = P\{X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, \dots, X_1 \neq 0, X_0 = 0\} \tag{4.4}$$

$$= \sum_{i_0=0, i_1\neq 0, i_2\neq 0, \dots, i_{k-1}\neq 0, i_k=0} \ \prod_{j=0}^{k-1} p^{(j)}_{i_j i_{j+1}},$$

Таким чином, розподіл θ_1 потенційно залежить від усіх X_t, $t \leq k$.

Розподіл величини θ_2:

$$\begin{gathered} P\{\theta_2 = k\} = \sum_{j=1}^{k-1} P\{\theta_2 = k, \theta_1 = j\} \\ = \sum_j P\{X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, X_{j+1} \neq 0, X_j = 0, X_{j-1} \neq 0, \dots, X_1 \neq 0, X_0 = 0\} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Зауважимо, що для кожного доданку з попередньої суми має місце рівність:

$$\sum P\{X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, X_{j+1} \neq 0 | X_j = 0\} P\{\theta_1 = j\}$$

$$= \sum P\{X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, X_{j+1} \neq 0 | X_j = 0\} P\{\tau_1 = j\}.$$

Отже, розподіл величини θ_2 залежить від τ_1 та всіх X_t, $t > \tau_1$. Покажемо, що ця тенденція зберігається і надалі.

Розглянемо:

$$P\{\theta_m = k\} = \sum P\{X_k = 0, X_{k-1} \neq 0, \ldots, X_{j+1} \neq 0 | X_j = 0\} P\{\tau_{m-1} = j\}. \tag{4.6}$$

Таким чином, розподіл θ_m визначається величинами $p_{ij}^{(t)}$ для номерів $t \geq \tau_{m-1}$, або, іншими словами, для того щоб записати розподіл θ_m, потрібно мати значення τ_{m-1}, у той час як окремі значення величин $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ (при фіксованому τ_{m-1}) на шуканий розподіл не впливають.

Далі маємо:

$$P\{\theta_m = i, \theta_{m-1} = j | \tau_{m-1} = t\}$$

$$= P\{\theta_m = i, \theta_{m-1} = j | X_t = 0, X_l = 0, \text{рівно m-2 рази, l<t}\}$$

$$= P\{X_i = 0, X_{i-1} \neq 0, \ldots, X_{t+1} \neq 0, X_t = 0, X_{t-1} \neq 0, \ldots, X_{t-j} = 0, X_{t-j-1} \neq 0, A\} / P(A)$$

$$= P\{X_i = 0, X_{i-1} \neq 0, \ldots, X_{t+1} \neq 0 | X_t = 0, X_{t-1} \neq 0, \ldots, X_{t-j} = 0, X_{t-j-1} \neq 0, A\}$$

$$\times P\{X_t = 0, X_{t-1} \neq 0, \ldots, X_{t-j} = 0, X_{t-j-1} \neq 0 | A\}$$

$$= P\{X_i = 0, X_{i-1} \neq 0, \ldots, X_{t+1} \neq 0 | X_t = 0\} P\{\theta_{m-1} = j | \tau_{m-1} = t\}$$

$$= P\{X_i = 0, X_{i-1} \neq 0, \ldots, X_{t+1} \neq 0 | X_t = 0, \text{відбулось рівно m-1 попадання в 0 за час t-1}\}$$

$$\times P\{\theta_{m-1} = j | \tau_{m-1} = t\}$$

$$= P\{\theta_m = i | \tau_{m-1} = t\} P\{\theta_{m-1} = j | \tau_{m-1} = t\},$$

де множина $A = \{X_t = 0, X_l = 0, \text{рівно m-2 рази, l<t}\} = \{\tau_{m-1} = t\}$

Отже, доведено, що :

$$P\{\theta_m = i, \theta_{m-1} = j | \tau_{m-1} = t\} = P\{\theta_m = i | \tau_{m-1} = t\} P\{\theta_{m-1} = j | \tau_{m-1} = t\}, \tag{4.7}$$

що означає, що величини θ_m та θ_{m-1} умовно незалежні при τ_{m-1}.

Зауважимо також, що з формули (4.6) випливає, що розподіл величини θ_m параметризується лише одним параметром j - значенням τ_{m-1}, і не залежить від індексу m. Таким чином можна записати:

$$g_n^j = P\{\theta_m = n | \tau_{m-1} = j\}.$$

Дане спостереження наштовхує нас на думку щодо необхідності введення випадкові величини $\theta(t)$, що має розподіл $(g_n^t)_{n \geq 0}$. Цю величину можна інтерпретувати як момент першого після t повернення в нуль, якщо відомо, що в момент t ланцюг знаходиться в нулі.

Розглянемо тепер два неоднорідних ланцюги Маркова $(X_t^1, t \geq 0)$ та $(X_t^2, t \geq 0)$ зі значеннями в просторі $E = \{0, 1, \ldots\}$. Ланцюги задаються своїми перехідними ймовірностями на s-тому кроці $P_s(x, A, 1)$, $P_s(x, A, 2)$ - відповідно для ланцюгів X_t^1, X_t^2. Визначимо ймовірності переходу за $n > 0$ кроків:

$$P^{t,n}(x, A, l) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{t+k} \right)(x, A, l). \tag{4.8}$$

Маючи даний набір перехідних ймовірностей, а також початкові розподіли $\mu^l(\cdot)$, можна побудувати ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на якому визначено обидва ланцюги (X_t^l), $l \in \{0, 1\}$, і крім того:

$$\mathbb{P}\{X_s^l \in A\} = \int\limits_E \mu^l(dx) P^{0,s}(x, A, l),\ \mathbb{P}\{X_{s+1}^l \in A | X_s^l = x\} = P_s(x, A, l).$$

Визначимо послідовності інтервалів відновлення $(\theta_k^l), l \in \{0, 1\}$:

$$\theta_0^l = \inf\{t \geq 0 :\ X_t = 0\},\ \theta_m^l = \inf\{t > \theta_{m-1} :\ X_t = 0\},\ m > 1, \tag{4.9}$$

заданих на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Класи величин $\{\theta_k^1\}_{k \geq 0}$ та $\{\theta_k^2\}_{k \geq 0}$ незалежні, θ_k^l для кожного $l = \overline{1, 2}$ та $k > 0$ приймають цілі додатні значення, та цілі невід'ємні для θ_0^l. Визначимо послідовності відновлення наступним чином:

$$\tau_n^l = \sum_{k=0}^{n} \theta_k^l,\ l = \overline{1, 2}. \tag{4.10}$$

Вище ми показали, що сусідні величини всередині кожного класу є умовно незалежними при фіксованому τ, тобто для всіх k, t, l виконана наступна рівність:

$$E[f(\theta_k^l) g(\theta_{k+1}^l) | \tau_k^l] = E[f(\theta_k^l) | \tau_k^l] E[g(\theta_{k+1}^l) | \tau_k^l], \tag{4.11}$$

для довільних обмежених борельових функцій f та g.

Введемо позначення для умовного розподілу величин θ_k^l (даний розподіл не залежить від k):

$$g_n^{t,l} = P\{\theta_k^l = n | \tau_{k-1} = t\},\ l = \overline{1, 2},\ n \geq 0, \tag{4.12}$$

будемо вважати, що $g_0^{t,l} = P\{\theta_k^l = 0 | \tau_{k-1} = t\} = 0$. Величини θ_k^l, $k \geq 1$ будемо інтерпретувати як крок відновлення, а θ_0^l - як затримку.

Будемо казати, що $T > 0$ це момент склеювання, якщо:

$$T = \min\{t > 0 : \exists m, n : \ t = \tau^1_m = \tau^2_n\}. \tag{4.13}$$

Наша мета – знайти умови, за яких $T < \infty$ майже напевно, або $E[T] < \infty$.

Через $u_n^{(t,l)}$ позначимо послідовність відновлення, для процесу τ^l. Іншими словами, $u_n^{(t,l)}$ - це ймовірність того, що в момент часу $t+n$ відбулось відновлення за умови, що відновлення відбулось в момент часу t. Формально $u_n^{(t,l)}$ визначається наступним чином:

$$u_0^{(t,l)} = 1, u_n^{(t,l)} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t,l)} g_{n-k}^{t+k,l} \tag{4.14}$$

Як ми бачили раніше, розподіл $k+1$-го інтервалу відновлення повністю визначається значенням величини τ_k, тобто моментом, коли відбулось попереднє відновлення, і не залежить від індексу k. Тому ми і ввели позначення $g_n^{t,l}$, та $u_n^{(t,l)}$. Наша мета визначити випадкові величини $\theta^l(t)$ та похідні від них так, щоб $g_n^{t,l}$ був розподілом $\theta^l(t)$.

Для побудови такої конструкції тимчасово опустимо індекс l. Припустимо, що (X_t) деякий неоднорідний ланцюг Маркова, з перехідними ймовірностями на t-тому кроці $P_t(x, A)$. Як і раніше визначимо:

$$P^{t,n}(x, A) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{t+k}\right)(x, A),$$

перехідну ймовірність за час від t до $t+n$.

Для кожного t визначимо ймовірнісний простір $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)$ як канонічний простір для ланцюга Маркова $(X_{t+n})_{n\geq 0}$, що стартує з нуля (тобто початкова міра зосереджена в нулі). Тоді, позначимо:

$$\theta(t) = \min\{j > 0 : X_{t+j} = 0\} \tag{4.15}$$

Позначимо $g_n^t = \mathbb{P}_t\{\theta(t) = n\}$ - розподіл величини $\theta(t)$. Тоді:

$$g_n^t = \int\limits_{(E\backslash\{0\})^{n-1}} P_t(0, dx_0) P_{t+1}(x_0, dx_1) \dots P_{t+n-1}(x_{n-1}, \{0\}) \tag{4.16}$$

Визначимо $\theta^l(t)$ як момент першого повернення в нуль для ланцюга $(X^l_{t+k}, \ k \geq 0)$, що стартує з нуля, тоді величина $\theta^l(t)$ має розподіл $(g_n^{t,l})_{n\geq 0}$.

Визначимо недострибок:

$$D_n(t) = \min\{j \geq 0 : X_{t+n+j} = 0\}. \tag{4.17}$$

Величину $D_n(t)$ слід розуміти як час, що залишився до попадання в $\{0\}$ після моменту $t + n$, якщо відомо, що $X_t = 0$. Зауважимо, що $D_n(t), \theta(t)$ визначені на спільному просторі $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)$.

Для доведення основної теореми ключове значення відіграватиме наступне твердження (яке буде доведене пізніше).

Лема 4.1. *Якщо сім'я розподілів g_n^t (або випадкових величин $\theta(t)$) є рівномірно інтегровною, то для кожного $\rho \in (0, 1)$ знайдеться стала $C = C(\rho) \geq 0$, така, що для кожного t виконується наступна нерівність:*

$$\mathbb{E}_t[D_n(t)] \leq \rho n + C.$$

Основним результатом даного розділу є наступна Теорема.

Теорема 4.1. *Нехай в означеннях, введених вище,*

1) набір випадкових величин $\theta^l(t)$ є рівномірно інтегровним (або, іншими словами, сім'я ймовірнісних мір $\{g_n^{t,l}, n \geq 0\}$ є рівномірно інтегровною),

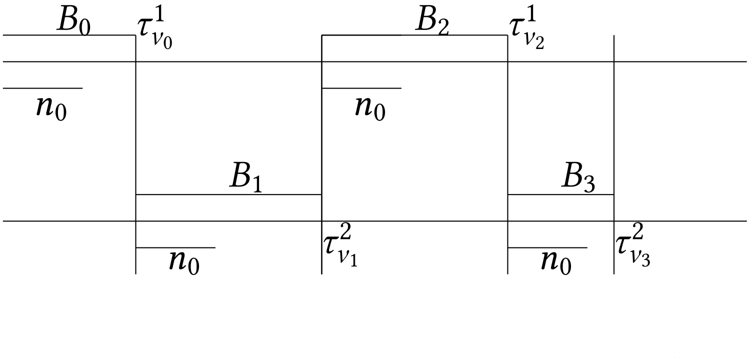
2) існує така стала $\gamma > 0$ та натуральне число $n_0 > 0$, що для всіх t, l та $n \geq n_0$: $u_n^{(t,l)} \geq \gamma$.

Тоді момент склеювання є інтегровним:

$$E[T] < \infty.$$

4.2.2 Доведення теореми 4.1

Слідуючи за Ліндвалом (див. [106], ст. 27), введемо наступну конструкцію.



$$\nu_0 := \min\{j \geq 1 : \tau_j^1 > n_0\},$$

$$B_0 := \tau^1_{\nu_0},$$

$$\nu_1 := \min\{j \geq \nu_0 : \tau^2_j - \tau^1_{\nu_0} > n_0, \text{ або } \tau^2_j - \tau^1_{\nu_0} = 0\},$$

$$B_1 := \tau^2_{\nu_1} - \tau^1_{\nu_0},$$

і так далі:

$$\nu_{2m} := \min\{j \geq \nu_{2m-1} : \ \tau^1_j - \tau^2_{\nu_{2m-1}} > n_0,, \text{ або } \tau^1_j - \tau^2_{\nu_{2m-1}} = 0\},$$

$$B_{2m} := \tau^1_{\nu_{2m}} - \tau^2_{\nu_{2m-1}},$$

$$\nu_{2m+1} := \min\{j \geq \nu_{2m} : \ \tau^2_j - \tau^1_{\nu_{2m}} > n_0 \, , \text{ або } \tau^2_j - \tau^1_{\nu_{2m}=0},$$

$$B_{2m+1} := \tau^2_{\nu_{2m+1}} - \tau^1_{\nu_{2m}}.$$

ν_k - будемо називати спробами склеювання (coupling trials). Позначимо, через $\tau = \min\{n \geq 1 : B_n = 0\}$.

Визначимо послідовність сигма-алгебр $\mathfrak{B}_n$, $n \geq 0$ наступним чином:

$$\mathfrak{B}_n = \sigma[B_k, \nu_k, \tau^l_j, \ k \leq n, \ j \leq \nu_n].$$

Визначимо випадкові величини:

$$D^{k,l}_n = \min\{j : \exists m, \ \tau^l_m = \tau^l_k + n + j\}.$$

Спочатку припустимо, що $\theta^2_0 = 0$.

Має місце наступна нерівність:

$$T \leq \theta^1_0 + \sum_{n=0}^{\tau} B_n = \theta^1_0 + \sum_{n\geq 0} B_n \mathbb{1}_{\tau \geq n}. \tag{4.18}$$

Згідно з лемою 4.5 для кожних $n \geq 0$, $\rho \in (0,1)$ має місце нерівність:

$$E[B_n | \mathfrak{B}_{n-1}] \leq \rho B_{n-1} + C, \tag{4.19}$$

звідки маємо наступне:

$$E[B_k \mathbb{1}_{\tau \geq k} | \mathfrak{B}_{k-1}] = E[B_k \prod_{n=0}^{k-1} \mathbb{1}_{B_k \neq 0} | \mathfrak{B}_{k-1}] = \mathbb{1}_{\tau \geq n} E[B_n | \mathfrak{B}_{n-1}]$$

$$\leq \mathbb{1}_{\tau \geq n}(\rho B_{n-1} + C) = \rho B_{n-1} \mathbb{1}_{\tau \geq n} + C \mathbb{1}_{\tau \geq n}$$

$$\leq \rho B_{n-1} \mathbb{1}_{\tau \geq n-1} + C \mathbb{1}_{\tau \geq n},$$

де остання рівність випливає з того, що $\{\tau \geq n\} \subset \{\tau \geq n-1\}$ а отже $\mathbb{1}_{\tau\geq n} \leq \mathbb{1}_{\tau\geq n-1}$.

Отже доведена наступна нерівність:

$$E[B_n \mathbb{1}_{\tau\geq n}] \leq \rho E[B_{n-1}\mathbb{1}_{\tau\geq n-1}] + CP\{\tau \geq n\}. \tag{4.20}$$

За Лемою 4.6:

$$P\{\tau \geq n\} \leq (1-\gamma)^n.$$

Позначимо через $a_n = E[B_n \mathbb{1}_{\tau\geq n}]$. Тоді з (4.20):

$$a_n \leq \rho a_{n-1} + C(1-\gamma)^n \leq C\sum_{k=0}^{n} \rho^k (1-\gamma)^{n-k} \leq Cn \max(\rho, (1-\gamma))^n.$$

Зауважимо, що оскільки ρ вибирається довільним чином, можемо вибрати його рівним $(1-\gamma)$. Тоді:

$$a_n \leq Cn(1-\gamma)^n.$$

А отже:

$$E[T] \leq E[\theta_0^1] + \sum_{n\geq 0} a_n \leq E[\theta_0^1] + \frac{C}{\gamma^2} < \infty. \tag{4.21}$$

Нагадаємо, що ми припустили на початку, що $\theta_0^2 = 0$. Відмовимось від цього припущення зараз. Позначимо через T' момент склеювання для процесу з наступними затримками:

$$\theta_0'^1 = \max(\theta_0^1, \theta_0^2) - \min(\theta_0^1, \theta_0^2),$$

$$\theta_0'^2 = 0.$$

Зауважимо, що $T = T' + \min(\theta_0^1, \theta_0^2)$. А отже

$$E[T] \leq E[\min(\theta_0^1, \theta_0^2)] + E[T'] < \infty.$$

Зауважимо, що

$$E[T'] \leq E[\theta_0'^1] + \frac{C}{\gamma^2},$$

або

$$E[T] \leq E[\max(\theta_0^1, \theta_0^2)] + \frac{C}{\gamma^2}.$$

□

4.2.3 Допоміжні леми

Лема 4.2. *Нехай $x_n^{(t)}$, $y_n^{(t)}$ – деякі неоднорідні послідовністі, $u_n^{(t)}$ – неоднорідна послідовність відновлення, визначена формулами (4.14), $g_0^{(t)} = 0$, для всіх t. Нехай також виконані умови:*

$$x_n^{(t)} = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(t)} x_{n-k}^{(t+k)} + y_n^{(t)}, \tag{4.22}$$

$$x_n^0 \geq \sum_{k=0}^{n} g_k^{(t)} x_{n-k}^0 + y_n^{(t)}. \tag{4.23}$$

Тоді для довільних t, n:

$$x_n^{(t)} \leq x_n^0.$$

Доведення.

Покажемо, що

$$x_n^{(t)} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} y_{n-k}^{(t+k)}. \tag{4.24}$$

Зробимо це за індукцією.

Для $n = 0$: $x_0^{(t)} = g_0^{(t)} x_0^{(t)} + y_0^{(t)} = y_0^{(t)} = u_0^{(t)} y_0^{(t)}$.

Нехай твердження виконане для всіх $k \leq n$, покажемо для $n + 1$.

$$x_{n+1}^{(t)} = \sum_{k=0}^{n+1} g_k^{(t)} x_{n+1-k}^{(t+k)} + y_{n+1}^{(t)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} g_k^{(t)} \sum_{j=0}^{n+1-k} u_j^{(t+k)} y_{n+1-k-j}^{(t+k+j)} + g_0^{(t)} x_{n+1}^{(t)} + y_{n+1}^{(t)} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k^{(t)} y_{n-k}^{(t+k)} + y_n^{(t)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} u_k^{(t)} y_{n-k}^{(t+k)}$$

Тоді для довільних t, n:

$$y_n^{(t)} \leq x_n^{(0)} - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(t)} x_{n-k}^0,$$

$$x_n^{(t)} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} x_{n-k}^{(0)} - \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} \sum_{j=0}^{n-k} g_j^{(t+k)} x_{n-k-j}^{(0)}. \tag{4.25}$$

Розпишемо другий доданок:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} \sum_{j=0}^{n-k} g_j^{(t+k)} x_{n-k-j}^{(0)} = x_0^0 \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} g_{n-k}^{(t+k)} + x_1^0 \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{(t)} g_{n-1-k}^{(t+k)} + \ldots + x_n^0 u_0^{(t)} g_0^{(t)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x_k^0 u_{n-k}^{(t)} = \sum_{k=1}^{n} u_k^{(t)} x_{n-k}^0.$$

Підставивши в (4.25), отримаємо:

$$x_n^{(t)} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} x_{n-k}^{(0)} - \sum_{k=1}^{n} u_k^{(t)} x_{n-k}^0 = u_0^{(t)} x_n^0 = x_n^0.$$

□

Лема 4.3. *Нехай A деяка подія, що визначається величинами $\tau_{\nu_k}^l, \nu_k, k < n$. Тоді:*

$$E[D_{k+n_0}^{m,l} | B_{n+1} = k, \tau_{\nu_n}^l = t, \nu_n = m, A] = \mathbb{E}_t[D_{k+n_0}^l(t)].$$

Доведення.

Позначимо $t + k + n_0 = q$. Тоді:

$$P\{D_{k+n_0}^{m,l} = r, B_{n+1} = k, \tau_{\nu_n}^l = t, \nu_n = m, A\}$$

$$= \mathbb{P}\{X_{q+r}^l = 0, X_{q+s}^l \neq 0, s = \overline{0, r-1}, X_t^l = 0, \tau_{\nu_n}^l = t, \nu_n = m, B_{n+1} = k, A\}$$

$$= \left(\int\limits_{(E\backslash 0)^r} P^{t,k+n_0}(0, dx_0, l) P_q(x_0, dx_1, l) \ldots P_{q+r-1}(x_{r-1}, dx_r, l) P_{q+r}(x_r, 0, l) \right)$$

$$\times \mathbb{P}\{X_t = 0, \tau_{\nu_n}^l = t, \nu_n = m, B_{n+1} = k, A\}$$

$$= \mathbb{P}_t\{D_{k+n_0}^l(t) = r\} \mathbb{P}\{\tau_{\nu_n}^l = t, \nu_n = m, B_{n+1} = k, A\}.$$

□

Лема 4.4.

$$E[B_{2n} | \mathfrak{B}_{2n-1}] = \sum_{t,k} \mathbb{E}_t[D_{k+n_0}^1(t)] \mathbb{1}_{\tau_{\nu_{2n-2}}^1 = t} \mathbb{1}_{B_{2n-1} = k},$$

$$E[B_{2n+1} | \mathfrak{B}_{2n}] = \sum_{t,k} \mathbb{E}_t[D_{k+n_0}^2(t)] \mathbb{1}_{\tau_{\nu_{2n-1}}^2 = t} \mathbb{1}_{B_{2n} = k}.$$

Доведення.

Спочатку зауважимо, що сигма-алгебра $\mathfrak{B}_m$ утворена скінченною кількістю випадкових величин, кожна з яких приймає не більш ніж злічену кількість значень. Отже, для кожного m, $\mathfrak{B}_m$ породжена зліченою кількістю подій.

Нехай $\{A_n(i), i \in \mathfrak{I}_n\}$ набір множин виду: $A_n(i) = \{\tau^l_{\nu_k} = t_{lk}, \nu_k = n_k, k \leq n\}$, причому $\mathfrak{I}_n$ - злічена множина. Введемо також позначення:

$$C_n(s, t, m, k) = \{\tau^2_k = t, \tau^1_m = s, \nu_{2n-1} = k, \nu_{2n-2} = m, A_{2n-3}(i)\}$$

Помітимо далі, що з означення B_{2n} випливає наступне зображення:

$$B_{2n} = D^{\nu_{2n-2},1}_{B_{2n-1}+n_0} + n_0, \tag{4.26}$$

звідки маємо:

$$E[B_{2n} - n_0|\mathfrak{B}_{2n-1}]$$
$$= \sum_{s<t,m,k,i\in\mathfrak{I}_{2n-3}} E[D^{m,1}_{t-s+n_0}|C_n(s,t,m,k), A_{2n-3}(i)]\mathbb{1}_{C_n(s,t,m,k)}\mathbb{1}_{A_{2n-3}(i)}.$$

Скориставшись лемою 4.3, отримаємо, що останній вираз рівний:

$$\sum_{s<t,m,k,i\in\mathfrak{I}_{2n-3}} \mathbb{E}_s[D^1_{t-s+n_0}(s)]\mathbb{1}_{C_n(s,t,m,k)}\mathbb{1}_{A_{2n-3}(i)}$$

$$= \sum_{s<t,m,k} \mathbb{E}_s[D^1_{t-s+n_0}(s)]\mathbb{1}_{C_n(s,t,m,k)} = \sum_{s<t} \mathbb{E}_s[D^1_{t-s+n_0}(s)]\mathbb{1}_{\tau^2_{\nu_{2n-1}}=t}\mathbb{1}_{\tau^1_{\nu_{2n-2}}=s}$$

$$= \sum_{s,k} \mathbb{E}_s[D^1_{k+n_0}]\mathbb{1}_{\tau^1_{\nu_{2n-2}}=s}\mathbb{1}_{B_{2n-1}=k},$$

де в останній рівності ми скористалися тим, що $B_{2n-1} = \tau^2_{\nu_{2n-1}} - \tau^1_{\nu_{2n-2}}$.

Твердження для $E[B_{2n+1}|\mathfrak{B}_{2n}]$ виводиться аналогічно.

□

Лема 4.5. *В умовах теореми 4.1 для кожного* $\rho \in (0, 1)$ *існує така стала* $C \in (0, \infty)$, *що для кожного* $n \geq 0$ *виконано:*

$$E[B_n|\mathfrak{B}_{n-1}] \leq \rho B_{n-1} + C.$$

Доведення.

З лем 4.4 та 4.1 маємо

$$E[B_{2n}|\mathfrak{B}_{2n-1}] = \sum_{t,k} \mathbb{E}_t[D^1_{k+n_0}(t)]\mathbb{1}_{\tau^1_{\nu_{2n-2}}=t}\mathbb{1}_{B_{2n-1}=k}$$

$$\le \sum_{t,k} (\rho(k+n_0)+C)\mathbb{1}_{\tau^1_{\nu_{2n-2}}=t}\mathbb{1}_{B_{2n-1}=k} = \rho B_{2n-1} + C'.$$

Аналогічне твердження має місце для $E[B_{2n+1}|\mathfrak{B}_{2n}]$.

□

Лема 4.6. *Має місце таке співвідношення:*

$$P\{\tau > n\} \le (1-\gamma)^n.$$

Доведення.

Нагадаємо, що $\tau = \min(n : B_n = 0)$.

Подія $\{\tau > n\} = \{\prod_{k=0}^{n} B_k \neq 0\}$.

$$E[\mathbb{1}_{\prod_{k=0}^{n} B_k \neq 0}] = E[\mathbb{1}_{\prod_{k=0}^{n-1} B_k \neq 0} E[\mathbb{1}_{B_n \neq 0}|\mathfrak{B}_{n-1}]] = E[\mathbb{1}_{\prod_{k=0}^{n-1} B_k \neq 0}] P\{\theta^l_\eta > B_n + B_{n-1}\}$$

$$\le E[\mathbb{1}_{\prod_{k=0}^{n-1} B_k \neq 0}] P\{\theta^l_\eta > n_0\} \le E[\mathbb{1}_{\prod_{k=0}^{n-1} B_k \neq 0}](1-\gamma) \le (1-\gamma)^n,$$

де η – це номер наступного після B_{n-1} відновлення в l-тій серії.

□

Доведення леми 4.1.

Розглянемо випадкову величину $D_n(t)\mathbb{1}_{\theta(t)=j}$, $j \le n$. Безпосередньою перевіркою легко переконатися в наступній рівності:

$$\mathbb{P}_t\{D_n(t) = k, \theta(t) = j\} = \mathbb{P}_t\{\theta(t) = j\}\mathbb{P}_{t+j}\{D_{n-j}(t+j) = k\}. \tag{4.27}$$

Також очевидною є наступна рівність:

$$D_n(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n} = (\theta(t) - n)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}. \tag{4.28}$$

Тоді з урахуванням нерівностей (4.27) та (4.28) маємо:

$$\mathbb{E}_t[D_n(t)] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_t[D_n(t)\mathbb{1}_{\theta(t)=j}] + \mathbb{E}_t[D_n(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}_t\{D_n(t) = k, \theta(t) = j\} \right) + \mathbb{E}_t[(\theta(t) - n)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_t\{\theta(t) = j\} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}_{t+j}\{D_{n-j}(t+j) = k\} \right) + \mathbb{E}_t[(\theta(t) - n)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g_j^t \mathbb{E}_{t+j}[D_{n-j}(t+j)] + \mathbb{E}_t[(\theta(t)-n)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}].$$

Отже, отримали наступну рівність:

$$\mathbb{E}_t[D_n(t)] = \sum_{j=1}^{n} g_j^t \mathbb{E}_{t+j}[D_{n-j}(t+j)] + \mathbb{E}_t[(\theta(t)-n)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}]. \tag{4.29}$$

Далі скористаємось лемою 4.2. Покладемо:

$$x_n^{(t)} = \mathbb{E}_t[D_n(t)],$$

$$y_n^{(t)} = \mathbb{E}_t[\mathbb{1}_{\theta(t)>n}(\theta(t)-n)],$$

тоді з виразу (4.29) отримаємо умову (4.22).

Покладемо

$$x_n^0 = \rho n + C.$$

Доведемо, що виконується умова (4.23) леми 4.2. Для цього слід показати, що для для довільного $\rho \in (0,1)$ існує таке $C = C(\rho)$, що:

$$\rho n + C \geq \sum_{j=0}^{n} g_j^t(\rho(n-j)+C) + \sum_{j>n}(j-n)g_j^t, \tag{4.30}$$

Перетворимо вираз (4.30):

$$(4.30) \Leftrightarrow \rho n + C \geq n\rho \sum_{j=0}^{n} g_j^t + C\sum_{j=0}^{n} g_j^t - \rho \sum_{j=0}^{n} j g_j^t + \sum_{j>n} j g_j^t - nG_n^t \Leftrightarrow$$

$$n\rho G_n^t + CG_n^t \geq \mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}] - \rho\mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)\leq n}] - nG_n^t \Leftrightarrow$$

$$n(\rho+1)G_n^t + CG_n^t + \rho\mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)\leq n}] \geq \mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}] \Leftrightarrow$$

$$n(\rho+1)G_n^t + CG_n^t + \rho\mathbb{E}_t[\theta(t)] \geq (1+\rho)\mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}] \tag{4.31}$$

Отже, нерівність (4.30) еквівалентна (4.31). Зауважимо, що у випадку $G_n^t = 0$ рівність (4.31) виконана автоматично. Тому припустимо надалі, що $G_n^t > 0$.

Але $\mathbb{E}_t[\theta(t)] \geq 1$, а в силу рівномірної інтегровності знайдеться такий номер n_0, що для всіх $t > 0, n \geq n_0$: $\mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}] \leq \rho/(1+\rho)$. Тоді сталу C підберемо так, щоб рівність (4.31) виконувалась для $n \leq n_0$.

Покажемо тепер, що C можна вибрати незалежною від t. Для цього для $\varepsilon = \rho/(1+\rho)$ знайдемо таке $\delta > 0$, що для кожної множини A такої, що $\mathbb{P}(A) < \delta$

маємо $\mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_A] < \varepsilon$. Це можна зробити в силу рівномірної інтегровності величин $\theta(t)$. Тоді покладемо

$$C := \frac{(1+\rho)sup_t\mathbb{E}_t[\theta(t)] - \rho}{\delta}.$$

Зрозуміло, що при $G_n^t < \delta$ нерівність (4.31) виконана автоматично. Якщо ж, $G_n^t \geq \delta$, то:

$$n(\rho+1)G_n^t + CG_n^t + \rho\mathbb{E}_t[\theta(t)] > (1+\rho)\sup_t \mathbb{E}_t[\theta(t)] \geq (1+\rho)\mathbb{E}_t[\theta(t)]$$

$$\geq (1+\rho)\mathbb{E}_t[\theta(t)\mathbb{1}_{\theta(t)>n}].$$

□

4.3 Нерівності для моменту склеювання двох неоднорідних ланцюгів Маркова

В даному розділі розглядається питання практичного застосування Теореми 4.1. Представлено декілька наслідків до цієї теореми, які дозволяють отримувати практичні умови, що гарантують існування скінченного математичного сподівання з Теореми 4.1. За допомогою цих умов отримані оцінки для середнього часу першого відновлення для кількох конкретних ланцюгів Маркова.

Для однорідних ланцюгів Маркова в даному розділі представлено сильніший результат, а саме Теорема 4.5. Ця теорема дещо ослабляє типову для однорідних ланцюгів умову сильної неперіодичності $g_1^1+g_1^2 > 0$, що використовується, зокрема в роботі [98]. Теорема, доведена в даній роботі, показує, що для однорідних процесів відновлення за умови існування других моментів та дещо слабшої умови неперіодичності (порівняно з умовою $g_1^1 + g_1^2 > 0$) стала, що фігурує в оцінці моменту склеювання, може бути легко обчислена.

Розпочнемо з наслідку до Теореми 4.1.

Наслідок 4.1. *Нехай* X_t^1, X_t^2 *– два однорідних неперіодичних ланцюги Маркова такі, що:* $\max\{E[\theta_0^1], E[\theta_0^2], E[\theta_1^1], E[\theta_1^2]\} < \infty$. *Тоді*

$$E[T] < \infty.$$

Доведення.

Оскільки розподіли всіх θ_k^1, $k \geq 1$ однакові, як і розподіли θ_k^2, $k \geq 1$, то серед розподілів $\{g_n^{t,l}, n \geq 1\}$ не більше чотирьох різних, а тому дана сім'я рівномірно інтегровна.

Оскільки ланцюги неперіодичні та мають скінчені моменти повернення, то за теоремою відновлення $u_n^{(t,1)} \to 1/E[\theta_1^1] > 0$, $u_n^{(t,2)} \to 1/E[\theta_1^2] > 0$, $n \to \infty$. Отже обидві послідовності відділені від нуля, починаючи з деякого номера.

Таким чином, виконані умови теореми 4.1. □

Зауваження 4.1. Перевіряти умови теореми 4.1 на практиці може бути технічно досить складно. Тому доцільно розглянути деякі спеціальні випадки, які простіше перевіряти і які гарантуватимуть виконання умов теореми 4.1.

Наступні декілька теорем дають умови, за яких виконана умова (2) теореми 4.1. Варто зауважити, що фрагмент доведення наступних двох теорем повторює ідею доведення відповідного твердження з монографії [93].

Теорема 4.2. *Нехай θ_n - послідовність відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, і $(g_n^{(t)})$ – сім'я її умовних розподілів. Нехай також виконані наступні умови.*

1. Існує такий набір з m номерів $l_1, \ldots, l_m$, з НСД=1, що

$$\inf_{t,i} g_{l_i}^{(t)} > 0.$$

2. Послідовність θ_n стохастично мажорована, $G_n^{(t)} \leq \hat{G}_n \to 0$, $n \to \infty$, причому $\hat{g}_{l_1} > 0$ та існує скінченний момент $\hat{\mu} = \sum\limits_{n\geq 0} \hat{G}_n$.

Тоді існують такий номер n_0 та стала $\gamma > 0$, що для всіх $n \geq n_0$, $t > 0$ маємо $u_n^{(t)} > \gamma$.

Теорема 4.3. *Нехай в позначеннях теореми 4.1*

a) Існує таке n_0, що для довільних t, l та $n \geq n_0$: $g_n^{(t,l)} > 0$.

b) Існують такі $\gamma_i > 0$, $i = \overline{0, n_0 - 1}$, що для кожних t, l - $g_{n_0+i}^{(t,l)} \geq \gamma_i$, для кожного $i = \overline{0, n_0 - 1}$.

Тоді виконана умова (2) теореми 4.1

Наслідок 4.2. *Нехай* $(\hat{g}_n)$ *- стохастична мажоранта для сім'ї розподілів* $(g_n^{t,l})$, *тобто* $G_n^{t,l} \leq \hat{G}_n$. *Якщо* $\hat{g}_1 > 0$, *то виконана умова* (2) *теореми 4.1, з* $n_0 = 1$.

Теорема 4.4. *Якщо серед розподілів* $\{g_n^{t,l}, n \geq 0\}$ *лише скінченна кількість різних, причому кожен розподіл неперіодичний, тоді виконана умова (2) теореми 4.1, з деяким* n_0.

Щодо умови рівномірної інтегровності існує декілька загальновідомих умов, які забезпечують рівномірну інтегровність сім'ї випадкових величин. Зокрема:

1) сім'я θ_n рівномірно інтегровна тоді і лише тоді θ_n стохастично мажоровані деякою величиною ζ зі скінченим математичним сподіванням;

2) якщо $\sup_n E[\theta_n^p] < \infty$, для деякого $p > 1$, то сім'я θ_n рівномірно інтегровна. Для перевірки скінченності моментів на практиці можна використовувати метод пробних функцій.

Наступна теорема містить значно сильніші умови, ніж були до цього, але натомість дає оцінку математичного сподівання моменту склеювання.

Теорема 4.5. *Розглянемо два однорідні незалежні неперіодичні процеси відновлення* $\theta^{(l)}$, $l \in \{1, 2\}$. *Припустимо виконання наступних умов.*

1) Існують скінчені другі моменти $\mu_2^{(l)}$,

2) Існують такі $\gamma > 0$, *та* n_0, *що для всіх* l *та* $n > n_0$: $u_n^{(l)} \geq \gamma$.

Тоді:

$$E[T] \leq E\left[\max(\theta_0^1, \theta_0^2)\right] + \gamma^{-1} \max\left\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right\}.$$

Зауваження 4.2. Зауважимо, що з умов теореми 4.5 випливають умови 4.1, однак доведення теореми 4.5 суттєво відрізняється від доведення теореми 4.1, використовуючи нерівність Дейлі (див. [25]), що має місце для однорідних ланцюгів (тому теорема сформульована лише для однорідного випадку).

4.3.1 Приклади застосувань для однорідних ланцюгів Маркова

Обернений ланцюг відновлення.

Розглянемо спочатку два однорідних ланцюги Маркова, що задаються наступними перехідними матрицями:

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & 1-b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & 0 & 1-b_1 & 0 & \dots \\ b_2 & 0 & 0 & 1-b_2 & \dots \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & 1-b_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} c_0 & 1-c_0 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & 0 & 1-c_1 & 0 & \dots \\ c_2 & 0 & 0 & 1-c_2 & \dots \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & 1-c_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Обчислимо послідовності G^l_n, g^l_n:

$$G^1_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-b_k),\ G^2_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-c_k), n \geq 1,$$

$$g^1_1 = b_0, g^1_n = \prod_{k=0}^{n-2}(1-b_k)b_{n-1},\ n \geq 2,$$

$$g^2_1 = c_0, g^2_n = \prod_{k=0}^{n-2}(1-c_k)c_{n-1},\ n \geq 2.$$

Обчислимо m^l_j – математичне сподівання часу досягнення стану 0 з точки j.

$$m^1_j = 1 + \sum_{k\geq 1}\prod_{i=0}^{k-1}(1-b_{j+i}),\ m^2_j = 1 + \sum_{k\geq 1}\prod_{i=0}^{k-1}(1-c_{j+i}).$$

Обчислимо другі моменти повернення в нуль:

$$m^{1,2} = b_0 + \sum_{n\geq 2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}(1-b_k)b_{n-1},$$

$$m^{2,2} = c_0 + \sum_{n\geq 2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}(1-c_k)c_{n-1}.$$

Тепер ми готові сформулювати різні умови, за яких будуть скінченими математичні сподівання моменту склеювання.

Теорема 4.6. *Нехай незалежні ланцюги X_n^1, X_n^2 з перехідними ймовірностями P, Q знаходяться в початкових станах i, j відповідно. Нехай виконані наступні умови:*

1) $b_n > 0,\ c_n > 0, n \geq 1.$

2) $max\{m_i^1, m_j^2, m_0^l\} < \infty.$

Тоді існує інтегровний момент спільного потрапляння в нуль: $E[T] < \infty.$

Доведення.

Умова (1) гарантує неперіодичність ланцюгів X^1 та X^2, а умова (2) – скінченість моментів $\theta_j^l,\ j \geq 0$. Таким чином, за наслідком до теореми 4.1, отримаємо скінченість математичного сподівання моменту склеювання.

□

Зауваження 4.3. Зазначимо, що теорема 4.6 не вимагає $b_0 > 0$, або $g_1^l > 0$.

Якщо посилити умови даної теореми до існування других моментів, то можна отримати оцінку математичного сподівання моменту склеювання.

Теорема 4.7. *Нехай однорідні незалежні неперіодичні ланцюги (X_n^1) та (X_n^2) з перехідними ймовірностями P та Q відповідно знаходяться в початкових станах i, j відповідно. Нехай виконані наступні умови:*

1) $b_n > 0,\ c_n > 0, n \geq 1.$

2) $max\{m_i^1, m_j^2, m^{l,2}\} < \infty.$

Тоді має місце наступна нерівність для моменту склеювання:

$$E[T] < m_i^1 + m_j^2 + \gamma^{-1} \max\left\{\frac{m^{1,2}}{m_0^1}, \frac{m^{2,2}}{m_0^2}\right\},$$

де

$$\gamma = \gamma_0(1 - \hat{G}_1)^{\frac{\max\{m_0^1, m_0^2\} - \hat{G}_1}{\hat{G}_1}},$$

$$\hat{G}_1 = \max\{G_1^1, G_1^2\},$$

$$\gamma_0 = \min\{(1 - b_0)b_1,\ (1 - b_0)(1 - b_1)b_2,\ (1 - c_0)c_1,\ (1 - c_0)(1 - c_1)c_2\}.$$

Доведення.

Скористаємось теоремою 4.5.

Спочатку помітимо, що:

$$E\left[max\{\theta_0^1, \theta_0^2\}\right] \leq E[\theta_0^1] + E[\theta_0^2] = m_i^1 + m_j^2.$$

Для завершення слід перевірити умову (2) теореми 4.5.

Для цього скористаємось теоремою 4.3. Для цього покажемо, що $\min\{g_2^l, g_3^l\} > 0$, дійсно:

$$g_2^1 = (1 - b_0)b_1,\; g_3^1 = (1 - b_0)(1 - b_1)b_2,$$

$$g_2^2 = (1 - c_0)c_1,\; g_3^3 = (1 - c_0)(1 - c_1)c_2.$$

Тоді з умови (1) даної теореми випливає $\gamma_0 = \min\left\{g_2^l, g_3^l\right\} > 0$. Вираз для γ випливає з теореми 4.3.

□

Зауваження 4.4. Зауважимо, що оцінки для моментів стають особливо простими, якщо існує деяке $\gamma > 0$ таке, що $b_n > \gamma,\; c_n > \gamma$. Однак ця умова є аналогом рівномірної ергодичності для неоднорідних ланцюгів Маркова, а в такому випадку має місце сильніший результат (див. [50]).

Зауваження 4.5. В роботі [98] доведена теорема, аналогічна до теореми 4.5, за умови $g_1^1 + g_1^2 > 0$. Теорема 4.5 дещо послаблює умови теореми зі статті [98], припускаючи, що обидві величини g_1^1, g_1^2 можуть бути рівними нулю, приклад чого ми побачили в теоремі 4.7. Варто зазначити, що оцінки моменту склеювання в роботі [98] та теоремі 4.5 дуже схожі.

Випадкове блукання.

Розглянемо два однорідних ланцюги Маркова, що задаються наступними перехідними матрицями:

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ 0 & p & 0 & 1-p & \dots \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 1-q & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & 1-q & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & 1-q \\ \dots \end{pmatrix}$$

Обчислимо ймовірності першого повернення в нуль. Для цього скористаємось теоремою 2, ст. 86 з [41].

$$g_1^1 = p,\ g_{2n}^1 = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}p^n(1-p)^n,\ n \geq 1,$$

$$g_1^2 = 1,\ g_{2n}^1 = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}q^n(1-q)^n,\ n \geq 1.$$

Обчислимо моменти повернення в нуль:

$$m_0^1 = p + 2p(1-p)\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n,$$

$$m_0^2 = 1 + 2q(1-q)\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}q^n(1-q)^n.$$

Обчислимо тепер момент попадання в нуль з деякого стану $j > 0$. Для цього порахуємо кількість шляхів, що не проходять через 0, зі стану j в 0 за час n. Зауважимо, що кількість таких шляхів рівна кількості шляхів, що не проходять через 0, з 0 в j за час n, а за теоремою 1, ст 85 з [41] вона рівна: $\frac{j}{n}\binom{n}{(n+j)/2}$ Тоді:

$$m_j^1 = j\sum_{k\geq j}\binom{k}{(k+j)/2}p^{(k+j)/2}(1-p)^{(k-j)/2},$$

$$m_j^2 = j\sum_{k\geq j}\binom{k}{(k+j)/2}q^{(k+j)/2}(1-q)^{(k-j)/2}.$$

І нарешті запишемо вирази для других моментів повернення в нуль:

$$m_0^{1,2} = p + 2p(1-p)\sum_{n\geq 0}(n+1)\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n,$$

$$m_0^{2,2} = 1 + 2q(1-q)\sum_{n\geq 0}(n+1)\binom{2n}{n}q^n(1-q)^n.$$

Теорема 4.8. *Нехай (X_n^1) та (X_n^2) – два ланцюги Маркова з перехідними ймовірностями P та Q, для яких $p > 1/2$ та $q > 1/2$. Тоді існує інтегровний момент склеювання для цих ланцюгів, що стартують зі станів i та j відповідно, причому має місце наступна оцінка:*

$$E[T] \leq m_i^1 + m_j^1 + \gamma^{-1}\max\left\{\frac{m^{1,2}}{m_0^1}, \frac{m^{2,2}}{m_0^2}\right\},$$

де в якості γ можна вибрати $\min\left\{\frac{1}{m_0^1}, \frac{1}{m_0^2}\right\} - \delta$, для довільного $\delta > 0$ (достатньо малого, щоб виконувалось $\gamma > 0$).

Доведення.

Покажемо, що за умови $p > 1/2$ існують перші та другі моменти. Для цього скористаємось еквівалентністю:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

тоді $4p(1-p) < 1$, а отже ряд m_0^1 еквівалентний геометричному, а тому збіжний.

Аналогічно можна показати скінченість других моментів.

Отже, всі математичні сподівання для обох ланцюгів існують. Неперіодичність випливає з того факту, що $g_1^l > 0$.

В якості γ можна вибрати $\min\left\{\frac{1}{m_0^1}, \frac{1}{m_0^2}\right\} - \delta$, для довільного $\delta > 0$. Тоді з теореми відновлення випливатиме, що всі u_n^l будуть більшими за γ, починаючи з деякого номера.

□

4.3.2 Приклади застосувань для неоднорідних ланцюгів Маркова

В цьому розділі розглянемо неоднорідні аналоги прикладів з попередніх розділів.

Обернений ланцюг відновлення.

Розглянемо два неоднорідних ланцюга Маркова, що задаються наборами матриць перехідних ймовірностей на t-тому кроці:

$$P_t = \begin{pmatrix} b_0^{(t)} & 1-b_0^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ b_1^{(t)} & 0 & 1-b_1^{(t)} & 0 & \dots \\ b_2^{(t)} & 0 & 0 & 1-b_2^{(t)} & \dots \\ b_3^{(t)} & 0 & 0 & 0 & 1-b_3^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} c_0^{(t)} & 1-c_0^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ c_1^{(t)} & 0 & 1-c_1^{(t)} & 0 & \dots \\ c_2^{(t)} & 0 & 0 & 1-c_2^{(t)} & \dots \\ c_3^{(t)} & 0 & 0 & 0 & 1-c_3^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Обчислимо послідовності $G_n^{t,l}, g_n^{t,l}$. Як і в однорідному випадку, їх можна обчислити явно:

$$G_n^{t,1} = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - b_k^{(t+k)}),\ G_n^{t,2} = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - c_k^{(t+k)}), n \geq 1,$$

$$g_1^{t,1} = b_0^{(t)}, g_n^{t,1} = \prod_{k=0}^{n-2}(1 - b_k^{(t+k)})b_{n-1}^{t+n-1},\ n \geq 2,$$

$$g_1^{t,1} = c_0^{(t)}, g_n^{t,2} = \prod_{k=0}^{n-2}(1 - c_k^{(t+k)})c_{n-1}^{(t+n-1)},\ n \geq 2.$$

Обчислимо m_j^l - математичне сподівання часу досягнення стану 0 з точки j.

$$m_j^{t,1} = 1 + \sum_{k\geq 1}\prod_{i=0}^{k-1}(1 - b_{j+i}^{(t+i)}),\ m_j^{t,2} = 1 + \sum_{k\geq 1}\prod_{i=0}^{k-1}(1 - c_{j+i}^{(t+i)}).$$

Зауважимо, що в неоднорідному випадку теорема про оцінку математичного сподівання моменту склеювання не доведена, і окрім того для того, щоб гарантувати скінченість цього математичного сподівання, треба перевіряти більш складні умови теореми 4.1. В нашому випадку для перевірки рівномірної інтегровності скористаємось тим фактом, що послідовність рівномірно інтегровна, якщо другі моменти рівномірно обмежені. Тому, як і раніше, обчислимо другі моменти.

Другі момент повернення в нуль:

$$m^{1,2,t} = b_0^{(t)} + \sum_{n\geq 2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}(1 - b_k^{(t+k)})b_{n-1}^{(t+n-1)},$$

$$m^{2,2,t} = c_0^{(t)} + \sum_{n\geq 2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}(1 - c_k^{(t+k)})c_{n-1}^{(t+n-1)}.$$

Тепер ми готові сформулювати теорему про скінченість математичного сподівання момента склеювання.

Теорема 4.9. *Нехай незалежні та неоднорідні за часом ланцюги Маркова* (X_n^1), (X_n^2) *з перехідними ймовірностями на* t*-тому кроці* P_t, Q_t *знаходяться в початкових станах* i, j *відповідно. Нехай виконані наступні умови:*

1) $\inf_{t,n}\{b_n^{(t)}, c_n^{(t)}\} > 0, n \geq 1.$

2) $\sup_{t,l}\{m_i^{t,1}, m_j^{t,2}, m_0^{t,l}, m_2^{t,l}\} < \infty$.

Тоді існує скінчене математичне сподівання моменту спільного потрапляння в нуль: $E[T] < \infty$.

Доведення.

Умова (1) гарантує відділеність від нуля величин $g_n^{t,l}$, $n \geq 2$, а отже за теоремою 4.2 виконана умова (2) теореми 4.1. Умова (2) даної теореми, гарантує рівномірну інтегровність розподілів $g_n^{t,l}$.

Таким чином, за теоремою 4.1 математичне сподівання моменту першого попадання в нуль скінчене.

□

Зауваження 4.6. Зазначимо, що як і раніше, ми не вимагаємо $b_0^{(t)} > 0$, або $g_1^{t,l} > 0$.

Випадкове блукання.

Розглянемо два неоднорідних ланцюги Маркова, що задаються наступними матрицями перехідних ймовірностей на t-тому кроці:

$$P_t = \begin{pmatrix} p^{(t)} & 1-p^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ p^{(t)} & 0 & 1-p^{(t)} & 0 & \dots \\ 0 & p^{(t)} & 0 & 1-p^{(t)} & \dots \\ 0 & 0 & p^{(t)} & 0 & 1-p^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} q^{(t)} & 1-q^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ q^{(t)} & 0 & 1-q^{(t)} & 0 & \dots \\ 0 & q^{(t)} & 0 & 1-q^{(t)} & \dots \\ 0 & 0 & q^{(t)} & 0 & 1-q^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що в даному випадку ймовірнісний розподіл послідовності відновлення явно обчислити не можна. Але за певних умов його, а також математичні сподівання моментів повернення в нуль, можна оцінити, що і зроблено в наступній теоремі.

Теорема 4.10. *Нехай* (X_n^1) *та* (X_n^2) *- два неоднорідних за часом ланцюги Маркова з перехідними ймовірностями на* t*-тому кроці* P_t *та* Q_t*, для яких існують* $p > 1/2$,

$q > 1/2$ такі, що $p^{(t)} \geq p$ та $q^{(t)} \geq q$. Тоді існує скінченний момент склеювання для цих ланцюгів, що стартують зі станів i, та j відповідно:

$$E[T] < \infty.$$

Доведення.

Зауважимо, що якщо $p^{(t)} \geq p > 1/2$, то $p^{(t)}(1-p^{(t)}) < p(1-p)$, тому мають місце наступні оцінки:

$$g_1^{t,1} = p^{(t)},\ g_{2n}^{t,1} \leq \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}p^n(1-p)^n,\ n \geq 1,$$

$$g_1^{t,2} = 1,\ g_{2n}^{t,1} \leq \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}q^n(1-q)^n,\ n \geq 1.$$

Оцінимо моменти повернення в нуль:

$$m_0^{t,1} \leq p + 2p(1-p)\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n,$$

$$m_0^{t,2} \leq 1 + 2q(1-q)\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}q^n(1-q)^n.$$

Обчислимо тепер момент попадання в нуль з деякого стану $j > 0$. Для цього порахуємо кількість шляхів, що не проходять через 0, зі стану j в 0 за час n. Зауважимо, що кількість таких шляхів рівна кількості шляхів, що не проходять через 0, з 0 в j за час n, а за теоремою 1, ст 85 з [41] вона рівна: $\frac{j}{n}\binom{n}{(n+j)/2}$ Тоді:

$$m_j^{t,1} \leq j\sum_{k\geq j}\binom{k}{(k+j)/2}p^{(k+j)/2}(1-p)^{(k-j)/2},$$

$$m_j^{t,2} \leq j\sum_{k\geq j}\binom{k}{(k+j)/2}q^{(k+j)/2}(1-q)^{(k-j)/2}.$$

І нарешті запишемо оцінки для других моментів повернення в нуль:

$$m_0^{1,2,t} = p + 2p(1-p)\sum_{n\geq 0}(n+1)\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n,$$

$$m_0^{2,2,t} = 1 + 2q(1-q)\sum_{n\geq 0}(n+1)\binom{2n}{n}q^n(1-q)^n.$$

Скориставшись еквівалентністю:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

а також тим, що $4p(1-p) < 1$, отримаємо рівномірну обмеженість других моментів, а отже і рівномірну інтегровність.

З умови $p^{(t)} \geq p > 1/2$ випливає, що $g_1^{t,1} > 1/2$, а з умови $q^{(t)} \geq q > 1$, що $g_1^{t,2} > 1/2$. Отже, за наслідком до теореми 4.3 отримаємо виконання умови (2) теореми 4.1.

Враховуючи доведену вище рівномірну інтегровність, отримаємо скінченість математичного сподівання моменту спільного попадання в нуль.

□

4.3.3 Доведення інших теорем

Доведення теореми 4.2

Має місце наступне твердження з теорії чисел: якщо $l_1, \ldots, l_m$ - взаємно прості, то існує такий номер n_1, що довільне $n \geq n_1$ зображується у вигляді суми $n = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k l_k$, де a_k деякі натуральні числа. А це означає, що для кожного $n \geq n_1$: $u_n^{(t)} \geq \prod_{k=1}^{m} (g_{l_k}^{(t)})^{a_k} > 0$.

Також з умови випливає, що існує такий номер l, що $\inf_t g_l^{(t)} > 0$, не втрачаючи загальності вважаємо $l < n_1$.

Позначимо, через $\gamma_0 := \inf_t min\{u_n^{(t)},\ n_1 < n \leq n_1 + l\} > 0$.

Тоді маємо:

$$u_{n_1+l+1}^{(t)} = \sum_{n=0}^{n_1+l+1} g_n^{(t)} u_{n_1+l+1-n}^{(t+n)} \geq \sum_{n=0}^{l} g_n^{(t)} u_{n_1+l+1-n}^{(t+n)} \geq \gamma_0(1 - G_l^{(t)}) \geq \gamma_0(1 - \hat{G}_l).$$

Отже, для кожного $t > 0$ та $n > n_1 + l$, маємо:

$$u_n^{(t)} \geq \gamma_0 \prod_{n \geq l} (1 - \hat{G}_n).$$

Розглянемо функціонал $F(G) = \prod\limits_{n \geq l} (1 - G_l)$, що заданий на послідовностях G_n, $n \geq l$, що задовільняють умовам:

1) G_n спадає до нуля,

2) $0 \leq G_n \leq \hat{G}_l$,

3) $\sum\limits_{n \geq l} G_l = \hat{\mu} - \hat{G}_{l-1}$.

Цей функціонал є угнутим, а множина допустимих G – опукла, тому функціонал досягає інфімуму на крайових точках, отже

$$\inf_G F(G) = (1 - \hat{G}_l)^{\frac{\hat{\mu} - \hat{G}_l}{\hat{G}_l}}.$$

Тоді $\gamma = \gamma_0 (1 - \hat{G}_l)^{\frac{\hat{\mu} - \hat{G}_l}{\hat{G}_l}}$ - і є шуканим γ.

□

Доведення теореми 4.3

Доведення проведемо за індукцією, починаючи з $2n_0$.

$$u_{2n_0}^{(k)} \geq (g_{n_0}^{(k)})^2 > \gamma_0^2.$$

Нехай тепер твердження виконане для всіх k та для всіх $j = \overline{2n_0, n}$. Покажемо, що воно має місце і для $n+1$, де $n+1 \geq 3n_0$.

$$u_{n+1}^{(k)} = \sum_{j=0}^{n+1} g_j^{(k)} u_{n+1-j}^{k+j} \geq \sum_{j=n_0}^{n+1} g_j^{(k)} u_{n+1-j}^{k+j}$$

$$\geq \sum_{j=n_0}^{n+1-2n_0} g_j^{(k)} u_{n+1-j}^{k+j} \geq \gamma^{(n)} \left(G_{n_0}^{(k)} - G_{n+1-2n_0}^{(k)} \right)$$

$$\geq \gamma^{(n)} \left(G_{n_0}^{(k)} - \hat{G}_{n+1-2n_0} \right) \geq \gamma^{(n)} \left(a - \hat{G}_{n+1-2n_0} \right),$$

де

$$a := inf_k (G_{n_0}^{(k)}) \geq \sum_{i=0}^{n_0 - 1} \gamma_i > 0.$$

А отже маємо зв'язок: $\gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)} \left(a - \hat{G}_{n+1-2n_0} \right)$.

Покажемо, що

$$\prod_{i \geq n_0} \left(a - \hat{G}_i \right) > 0.$$

Для цього розглянемо функціонал:

$$F(G) = \prod_{i \geq 1} (a - G_i),$$

визначений на множині таких послідовностей G_i, що

$$0 \leq G_i \leq a - \gamma_0, \sum_i G_i \leq \hat{m}.$$

Цей функціонал є опуклим, а отже досягає свого мінімуму на межі, тобто на такій послідовності, що:

$$\sum_i G_i = \hat{m}, G_i \in \{0, a - \gamma_0\},$$

В цьому випадку, $\hat{m}/(a-\gamma_0)$ елементів будуть рівними $a-\gamma_0$, а всі інші рівними 0.

Тоді:

$$F(G) \geq \gamma_0^{\hat{m}/(a-\gamma_0)} = \exp\left(\frac{\hat{m}\ ln\gamma_0}{a-\gamma_0}\right) \tag{4.32}$$

$$= \exp\left(\frac{\hat{m}\ ln\gamma_0}{\sum\limits_{i=1}^{n_0-1}\gamma_i}\right)$$

□

Доведення наслідку до теореми 4.3 Якщо послідовність мажорована і $\hat{g}_1 > 0$, то для кожного k: $g_1^{(k)} \geq \hat{g}_1 > 0$, а отже теорема 4.3 виконана з $n_0 = 1$, $\gamma_0 = \hat{g}_1$.

□

Доведення теореми 4.4

Ясно, що скінченний набір різних розподілів мажорований. Оскільки кожен з розподілів неперіодичний, то існує таке n_0, що всі $g_{n_0}^{(k)} > 0$. Оскільки серед $g_n^{(k)}$ не більше ніж k різних, то виберемо $\gamma_i = \min_k g_{n_0+i}^{(k)}$, $i = \overline{0, n_0 - 1}$.

□

Доведення теореми 4.5 Як і раніше припустимо спочатку, що $\theta_0^2 = 0$.

Зауважимо, що в цьому випадку для довільного однорідного процесу відновлення мають місце такі нерівності (див. Lindvall, [106], ст. 26, та Daley, [25]):

$$E[D_n] \leq \mu E[U_n] - n, \tag{4.33}$$

$$E[U_n] \leq n/\mu + \mu_2/(\mu)^2, \tag{4.34}$$

де U_n – кількість відновлень за час n, μ – середній час відновлення. Скомбінувавши нерівності (4.33) та (4.34), отримаємо наступну оцінку:

$$E[B_n|\mathfrak{B}_{n-1}] \leq C := \max\left\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right\}. \tag{4.35}$$

А отже:

$$T \leq \theta_0^1 + \sum_{n=0}^{\tau} B_n = \theta_0^1 + C \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\tau\geq n}, \tag{4.36}$$

$$E[T] = E[\theta_0^1] + CE[\tau] \leq E[\theta_0^1] + C/\gamma 0E[\theta_0^1] + \gamma^{-1}\max\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\}.$$

Відмовившись від припущення: $\theta_0^2 = 0$, отримаємо оцінку:

$$E[T] \leq \max\{E[\theta_0^1], E[\theta_0^2]\} + \gamma^{-1}\max\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\}.$$

□

4.4 Властивості стохастичної мажоранти

4.4.1 Стохастичне мажорування неоднорідних послідовностей

У цьому розділі ми займемось вивченням властивостей стохастичної мажоранти для неоднорідних послідовностей, що передбачає деяке розширення класичного означення. Класичне означення стохастичного мажорування виглядає таким чином. Кажуть, що випадкова величина ξ стохастично домінує над випадковою величиною η, якщо $P\{\xi > x\} \geq P\{\eta > x\}$ для всіх x. Або іншими словами, якщо функція розподілу ξ поточково менша за функцію розподілу η.

Для невід'ємних дискретних випадкових величин, які є основним об'єктом розгляду роботи, це означення можна переформулювати таким чином: нехай ξ має розподіл p_i, а η має розподіл g_i. Тоді ξ буде стохастично мажорувати η, якщо $\sum\limits_{k\geq n} p_k \geq \sum\limits_{k\geq n} g_k$.

Історично стохастична мажорованість зустрічається у різних застосуваннях, зокрема, у фінансовій математиці та математичній економіці як спосіб порівняння лотерей.

Однак, стохастична мажоранта також відіграє велику роль при аналізі неоднорідних ланцюгів Маркова та послідовностей відновлення, що породжені цими ланцюгами. Якщо розглядати послідовность θ_k - час до наступного попадання ланцюга Маркова в деяку множину, то для неоднорідних ланцюгів така послідовність звичайно не є однорідною, крім того розподіл кожної наступної θ_k залежить від значення суми $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \theta_j$. У попередньому розділі ми побудували послідовність відновлення, яка мала саме таку властивість. У тому ж розділі ми використовували термін "склеювання" для першого часу спільного відвідування двома ланцюгами деякої множини (або атому) фазового простору. Це було зручно для викладок, однак з точки зору формальної теорії склеювання ланцюгів Маркова має дещо складнішу структуру. Склеюванню однорідних ланцюгів присвячено роботу [106], а конструкцію для склеювання неоднорідних ланцюгів буде представлено у наступних розділах. Варто зазначити, що час першого спільного потрапляння у множину залишається ключовою величиною в конструкції такого формального склеювання, і найскладнішим етапом побудови оцінок для часу склеювання є саме оцінки для часу першого відвідування множини парою ланцюгів. Для побудови останніх у неоднорідному випадку важливу роль відіграє стохастичне мажорування. Цей розділ можна розглядати як підготовчий до наступних розділів, де будуть викладені основні результати та побудовані практичні оцінки середнього часу склеювання. Ці оцінки у свою чергу дозволять отримати оцінки стійкості.

Особливістю стохастичного мажорування, яке ми будемо використовувати у цій дисертаційній роботі, є те, що повна маса мажоруючої послідовності може бути більше 1. У такому випадку, звичайно, не можна говорити про те, що одна випадкова величина мажорує іншу, натомість йтиметься про послідовність, яка мажорує розподіл випадкової величини.

Однак виявилось, що властивості стохастичної мажоранти, які добре відомі для стандартного випадку (коли мажоруюча послідовність є розподілом), потребують окремого доведення у випадку, коли повна сума мажоруючої послідовності може бути більше 1.

Окрім того, як ми побачимо у наступних розділах, при дослідженні стійкості збуреного ланцюга Маркова виникає необхідність побудови стохастичної мажоранти для сум випадкової кількості залежних випадкових величин, де структура залежності така, як описано в попередньому розділі.

Вивченню вказаних питань і присвячений цей розділ.

Будемо казати, що послідовність $\{s_n, n \geq 0\}$ стохастично мажорує розподіл $\{g_n, n \geq 0\}$, якщо $\sum\limits_{k>n} s_k \geq \sum\limits_{k>n} g_k$.

"Хвости" розподілів позначимо великими буквами: $S_n = \sum\limits_{k>n} s_k$, $G_n = \sum\limits_{k>n} g_k$, тут $n \geq -1$, і S_{-1} або G_{-1} – це повна сума елементів із відповідної послідовності. Для мажоруючої послідовності $\{s_n, n \geq 0\}$ будемо вимагати, щоб $1 \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n < \infty$.

Для двох сумованих послідовностей $\{g_n, n \geq 0\}$ та $\{p_n, n \geq 0\}$ визначимо згортку:

$$(g \star p)_n = \sum_{k=0}^{n} g_k p_{n-k}.$$

Визначимо також згортку послідовності із самою собою:

$$g_n^{\star 2} = \sum_{k=0}^{n} g_k g_{n-k}.$$

Ітеративно можна визначити згортку m-го порядку:

$$g_n^{\star m} = (g^{\star m-1} \star g)_n.$$

Символом $G_n^{\star 2}$ будемо позначати "хвіст" розподілу згортки:

$$G_n^{\star 2} = \sum_{k>n} g_k^{\star 2}.$$

Зауважимо, що n-й елемент згортки послідовності з одиницею рівний сумі послідовності до n:

$$(g \star 1)_n = \sum_{k=0}^{n} g_k.$$

4.4.2 Стохастична мажоранта для сум випадкових величин

Доведемо, що згортка мажорант є мажорантою для суми. Ми сформулюємо результат для послідовностей, припустивши, що всі послідовності можуть мати суму більшу за 1.

Окремо розглянемо випадки невід'ємних та знакозмінних випадкових величин, оскільки доведення трішки відрізняються, а в подальшому нас цікавитимуть властивості невід'ємних випадкових величин. Деякі формули, отримані при доведенні, можуть бути корисними для подальших посилань.

Теорема 4.11. *Розглянемо чотири невід'ємні послідовності:*

$$\{s_n, n \geq 0\},\ \{r_n, n \geq 0\},$$

$$\{g_n, n \geq 0\},\ \{p_n, n \geq 0\}$$

такі, що:

$$1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} s_n = S, 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} r_n = R < \infty,$$

$$1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} g_n = G < \infty, 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_n = P < \infty.$$

Причому для кожного $n \geq -1$*:*

$$S_n = \sum_{k>n} s_n \geq G_n = \sum_{k>n} g_n,$$

$$R_n = \sum_{k>n} r_n \geq P_n = \sum_{k>n} p_n.$$

Тоді згортка $\{(s \star r)_n, n \geq 0\}$ *є мажорантою для згортки* $\{(g \star p)_n, n \geq 0\}$*, а саме, для довільного* $n \geq -1$*:*

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k \geq \sum_{k>n} (g \star p)_k.$$

Доведення.

Запишемо різницю $\sum\limits_{k>n} \sum\limits_{j=0}^{k} (s \star r)_j - \sum\limits_{k>n} \sum\limits_{j=0}^{k} (g \star p)_j$ і скористаємось лемою 4.7.

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k - \sum_{k>n} (g \star p)_k = \sum_{k=0}^{n} s_k R_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} g_k P_{n-k} + S_n R - G_n P, \tag{4.37}$$

врахуємо, що згідно з умовою $R_{n-k} \geq P_{n-k}$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n} s_k R_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} g_k P_{n-k} + S_n R - G_n P \geq \sum_{k=0}^{n} (s_k - g_k) P_{n-k} + S_n R - G_n P =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(S_{k-1} - S_k - (G_{k-1} - G_k)\right) P_{n-k} + S_n R - G_n P =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(S_{k-1} - G_{k-1})P_{n-k} - \sum_{k=0}^{n}(S_k - G_k)P_{n-k} + S_n R - G_n P =$$

$$(S_{-1} - G_{-1})P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)(P_{n-k} - P_{n-k+1}) - (S_n - G_n)P_0 + S_n R - G_n P.$$

Зауважимо, що згідно з умовою: $S_{-1} = S \geq G = G_{-1}$, а також $R > P$. Тоді

$$(S_{-1} - G_{-1})P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)(P_{n-k} - P_{n-k+1}) - (S_n - G_n)P_0 + S_n R - G_n P \geq$$

$$(S - G)P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)p_{n-k} - (S_n - G_n)P_0 + S_n P - G_n P =$$

$$(S - G)P_n + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)p_{n-k} + (S_n - G_n)(P - P_0) =$$

$$(S - G)P_n + (S_n - G_n)p_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - G_k)p_{n-k} \geq 0,$$

оскільки для кожного $n \geq 0$: $S_n \geq G_n$, отже другий і третій доданки невід'ємні, а невід'ємність першого доданка випливає з того, що $S \geq G$. Підставивши отриману нерівність у формулу (4.37), отримаємо шуканий результат.

□

Доведемо тепер аналогічну теорему для двосторонніх послідовностей.

Теорема 4.12. *Розглянемо чотири невід'ємні, двосторонні послідовності:*

$$\{s_n, -\infty < n < \infty\},\ \{r_n, -\infty < n < \infty\},$$

$$\{g_n, -\infty < n < \infty\},\ \{p_n, -\infty < n < \infty\}$$

такі, що:

$$1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_n = S < \infty, 1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_n = R < \infty,$$

$$1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_n = G < \infty, 1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n = P < \infty.$$

Причому для кожного $n \geq -\infty$:

$$S_n = \sum_{k>n} s_n \geq G_n = \sum_{k>n} g_n,$$

$$R_n = \sum_{k>n} r_n \geq P_n = \sum_{k>n} p_n.$$

Тоді згортка $\{(s \star r)_n, n \geq 0\}$ *є мажорантою для згортки* $\{(g \star p)_n, n \geq 0\}$, *а саме, для довільного* $n \geq -\infty$:

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k \geq \sum_{k>n} (g \star p)_k.$$

Доведення.

Запишемо вираз для згортки:

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k = \sum_{k>n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j r_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j R_{n-j}. \tag{4.38}$$

Тоді запишемо різницю:

$$\sum_{k>n} (s \star r)_k - \sum_{k>n} (g \star p)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j R_{n-j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j P_{n-j} =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=-N}^{N} (s_j R_{n-j} - g_j P_{n-j}) \right),$$

оскільки $R_{n-j} \geq P_{n-j}$, то останній вираз не перевищує

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=-N}^{N} (s_j - g_j) P_{n-j} \right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=-N}^{N} (S_{j-1} - S_j - (G_{j-1} - G_j)) P_{n-j} \right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=-N}^{N} (S_{j-1} - G_{j-1}) P_{n-j} - \sum_{j=-N}^{N} (S_j - G_j) P_{n-j} \right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=-N+1}^{N-1} (S_j - G_j)(P_{n-j} - P_{n-j+1}) \right) +$$

$$\lim_{N\to\infty} \big((S_{-N-1} - G_{-N-1}) P_{-N-j} - (S_N - G_N) P_{N-j} \big) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_j - G_j)p_{n-j} + (S_{-\infty} - G_{-\infty})P_{-\infty} - (S_{\infty} - G_{\infty})P_{\infty} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(S_j - G_j)p_{n-j} + (S - G)P - 0 \geq 0.$$

Останній вираз невід'ємний, оскільки всі доданки невід'ємні.

□

Наслідок 4.3. *Якщо дві дискретні незалежні випадкові величини ξ та η мажоруються відповідно послідовностями $\{s_n\}$ та $\{r_n\}$, то їх сума $\xi + \eta$ мажорована згорткою $(s \star r)_n$.*

Наслідок 4.4. *Нехай маємо послідовність незалежних випадкових величин $\xi_n, n \geq 0$. Нехай ξ_i мажорована послідовністю $\{s_n^{(i)}\}$, тоді сума $\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j$ мажорована згорткою $(s^{(0)} \star s^{(1)} \star \ldots \star s^{(n)})$.*

Лема 4.7. *Нехай $\{a_n, n \geq 0\}$ та $\{b_n, n \geq 0\}$ – дві сумовані невід'ємні послідовності. $A_n = \sum\limits_{k>n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k>n} b_k$. Нехай також $A = A_{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$, $B = B_{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n$.*

Тоді місце зображення:

$$\sum_{k>n}(a \star b)_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} + A_n B = \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + A_{n+1} B. \tag{4.39}$$

Доведення.

$$\sum_{k>n}(a \star b)_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \sum_{j=n+1-k}^{\infty} b_j + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{\infty} b_j =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + \sum_{k>n+1} a_k B = \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + A_{n+1} B.$$

Таким чином доведено другу рівність у (4.39). Для доведення першої рівності помітимо, що останній доданок у сумі $\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k}$ має вигляд: $a_{n+1} B_{n-(n+1)} = a_{n+1} B_{-1} = a_{n+1} B$.

Підставиши його у вже доведену формулу, отримаємо

$$\sum_{k>n}(a \star b)_k = \sum_{k=0}^{n+1} a_k B_{n-k} + A_{n+1} B = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} + a_{n+1} B + A_{n+1} B =$$

$$\sum_{k>n} a_k B_{n-k} + (a_{n+1} + A_{n+1})B = \sum_{k>n} a_k B_{n-k} A_n B.$$

Отже, перша рівність у (4.39) теж доведена.

□

4.4.3 Стохастична мажоранта для випадкових сум.

Побудуємо мажоранту для випадкових сум, причому величини, що входять у випадкову суму, необов'язково будуть незалежними. Нижче буде побудована конструкція такої випадкової суми. Зауважимо, що подібні випадакові суми виникають при аналізі послідовностей відновлення, породжених неоднорідними ланцюгами Маркова.

Нехай $(\mathcal{U}, \mathbb{U})$ – деякий параметричний вимірний простір, і $\xi(u)$, $u \in \mathcal{U}$ – деяка сім'я незалежних випадкових величин, індексована значеннями із $\mathcal{U}$. Нехай $\{\nu_n, n \geq 0\}$ - послідовність випадкових величин зі значеннями у просторі $(\mathcal{U}, \mathbb{U})$, причому $\xi(u)$ не залежить від ν_n для всіх n та u.

Введемо позначення:

$$\xi_n = \xi(\nu_n).$$

Зауважимо, що ми не припускаємо незалежність ні сім'ї величин $\{\xi_i, i \geq 0\}$, ні елементів послідовності $\{\nu_n, n \geq 0\}$ як усередині груп, так і між собою.

Нехай ζ – деяка випадкова величина, що не залежить ні від ξ_i, ні від ν_n, і $p_m = \mathbb{P}\{\zeta = m\}$. Наша мета побудувати мажоранту для суми

$$\sum_{k=0}^{\zeta} \xi_k. \tag{4.40}$$

Вважатимемо, що всі випадкові величини задано на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Будемо позначати символом $\mathbb{E}$ математичне сподівання за мірою $\mathbb{P}$.

Теорема 4.13. *Нехай $\{s_n(u), n \geq 0\}$ – послідовність, що мажорує випадкову величину $\xi(u)$, $u \in \mathcal{U}$, причому виконана умова*

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \sum_{j\geq 0} s_j(u) < \infty. \tag{4.41}$$

Тоді послідовність

$$\hat{s}_n = \mathbb{E}[(s(\nu_0) \star s(\nu_1) \star \ldots \star s(\nu_\zeta))_n], \tag{4.42}$$

є стохастичною мажорантою для випадкової суми (4.40).

Доведення.

Розглянемо суму

$$S = \sum_{k=0}^{\zeta} \xi_k = \sum_{k=0}^{\zeta} \xi(\nu_k).$$

Нехай $\hat{i}(m) = (\hat{i}_0, \hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_m)$ - деякий цілочисельний вектор розмірності $m + 1$. Введемо множину

$$A(\hat{i}(m)) = \{\nu_0 = \hat{i}_0, \nu_1 = \hat{i}_1, \ldots, \nu_m = \hat{i}_m\}.$$

Тоді

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\hat{i}(m)} S \mathbb{1}_{A(\hat{i}(m))} \right) p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\hat{i}(m)} \left(\sum_{k=0}^{m} \xi(\hat{i}_k) \right) \mathbb{1}_{A(\hat{i}(m))} \right) p_m.$$

Розглянемо ймовірність:

$$\mathbb{P}\{S > n\} = \sum_{m} \sum_{\hat{i}(m)} \mathbb{P}\{S > n | \zeta = m, A(\hat{i}(m))\} \mathbb{P}\{A(\hat{i}(m)), \zeta = m\}. \tag{4.43}$$

Зауважимо, що ζ та величини ν_i – незалежні, тож

$$\mathbb{P}\{\zeta = m, A(\hat{i}(m))\} = \mathbb{P}\{\zeta = m\} \mathbb{P}\{A(\hat{i}(m)\} = \mathbb{P}\{A(\hat{i}(m))\} p_m. \tag{4.44}$$

Окрім того, випадкові величини $\xi(u)$ при кожному u не залежать від ζ та від усіх ν_n, а отже і від $A(\hat{i}(m))$. Тому

$$\begin{gathered} \mathbb{P}\{S > n | \zeta = m, A(\hat{i}(m))\} = \mathbb{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi(\hat{i}_k(m)) > n | \zeta = m, A(\hat{i}(m)) \right\} = \\ \mathbb{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi(\hat{i}_k(m)) > n \right\}. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Підставивши (4.44) та (4.45) у (4.43), отримаємо

$$\mathbb{P}\{S > n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\hat{i}(m)} \mathbb{P}\left\{ \sum_{k=0}^{m} \xi(\hat{i}_k(m)) > n \right\} \mathbb{P}\{A(\hat{i}(m))\} p_m. \tag{4.46}$$

Але $\xi(\hat{i}_k)$ – незалежні випадкові величини, а отже за наслідком до теореми про мажорування суми незалежних величин вони мажоруються згорткою:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=0}^{m}\xi(\hat{i}_k(m)) > n\right\} \leq \sum_{j>n}(s(\hat{i}_0) \star \ldots \star s(\hat{i}_m))_j. \tag{4.47}$$

Підставивши (4.47) у (4.46), отримаємо

$$\mathbb{P}\{S > n\} \leq \sum_{m\geq 0}\left[\sum_{\hat{i}(m)}\left(\sum_{j>n}(s(\hat{i}_0) \star \ldots \star s(\hat{i}_m))_j\right)\mathbb{P}\{A(\hat{i}(m))\}\right]p_m =$$

$$\sum_{m\geq 0}\left[\sum_{j>n}\left(\sum_{\hat{i}(m)}(s(\hat{i}_0) \star \ldots \star s(\hat{i}_m))_j\mathbb{P}\{A(\hat{i}(m))\}\right)\right]p_m =$$

$$\sum_{j>n}\left[\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{\hat{i}(m)}(s(\hat{i}_0) \star \ldots \star s(\hat{i}_m))_j\mathbb{P}\{A(\hat{i}(m))\}\right)p_m\right] =$$

$$\sum_{j>n}\left(\sum_{m\geq 0}\mathbb{E}\left[s(\nu_0) \star \ldots \star s(\nu_m))_j|\zeta = m\right]p_m\right) = \sum_{j>n}\mathbb{E}\left[s(\nu_0) \star \ldots \star s(\nu_m))_j\right].$$

Що і доводить шукане твердження.

Зауважимо, що зміна порядку інтегрування можлива в силу умови (4.41).

□

Очевидним наслідком щойно доведеної теореми є така.

Теорема 4.14. *Нехай $\xi_n, n \geq 0$ послідовність дискретних незалежних випадкових величин. Нехай також ζ інша невід'ємна дискретна випадкова величина, що не залежить від усіх $(\xi_n, n \geq 0)$. Розподіл ζ позначимо $p_n = P\{\zeta = n\}$, $n \geq 0$. Нехай ξ_i мажорована послідовністю $\{s_n^{(i)}\}$. Тоді $\sum_{j=0}^{\zeta}\xi_j$ мажорована послідовністю*

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty}p_k(s^{(0)} \star \ldots \star s^{(k)})_n.$$

Доведення.

Шукане твердження випливає з теореми 4.13, якщо покласти

$$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

а $\nu_n = n$.

□

4.4.4 Мажорування послідовності відновлення, породженої неоднорідним ланцюгом Маркова

Конструкція, описана в попередньому розділі, є актуальною для побудови склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова. При цьому виникає необхідність аналізу послідовності відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, а також мажорування випадкової кількості таких відновлень.

У цьому розділі ми побудуємо таку послідовність відновлення та покажемо, яким чином теорема 4.13 дозволяє отримати мажоранту для випадкової кількості відновлень.

Нехай задано деякий імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Усі подальші випадкові величини вважаємо визначеними на цьому ймовірнісному просторі.

Розглянемо деякий неоднноднорідний за часом ланцюг Маркова (X_n) зі значеннями у вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Нехай $P_t(x, A)$ - це його перехідна ймовірність на t-му кроці. Вважатимемо, що ланцюг стартує з початковим розподілом μ_0.

Нехай також задано набір імовірнісних мір $\mu_{t,x}(\cdot),\ x \in E,\ t > 0$.

Нехай $C \in \mathcal{E}$ - деяка множина. Тоді побудуємо послідовність відновлення, породжену неоднорідним ланцюгом X_n, таким чином:

$$\theta_0 = \inf_t \{t > 0 : X_t \in C\}.$$

Спочатку визначимо величину θ_1. Розглянемо ланцюг Маркова $X_t^{(1)} = X_{\theta_0+t},\ t \geq 0$, із початковим розподілом $\mu_{\theta_0, X_{\theta_0}}(\cdot)$.

Тоді:

$$\theta_1 = \inf_t \{t > 0 : X_t^{(1)} \in C\}.$$

Покладемо

$$\tau_k = \sum_{j=0}^{k} \theta_k, k \geq 0.$$

Аналогічним чином визначимо ланцюги $X_n^{(k)} = X_{\tau_{k-1}+t}^{(k-1)}, k \geq 1$, із початковим розподілом $\mu_{\tau_{k-1}, X_{\theta_{k-1}}^{(k-1)}}$.

Нехай $s_n^{(t)}(x)$ - стохастична мажоранта для ланцюга, що стартує в момент t зі стану x. Позначимо

$$s_n^{(t)}(\mu, x) = \int_E s^{(t)}(y)\mu_{t,x}(dy).$$

Нехай також

$$S_n^{(t)}(x) = \sum_{k>n} s_k^{(t)}(x),\ S_n^{(t)}(\mu, x) = \sum_{k>n} s_k^{(t)}(\mu, x).$$

Для кожного $k \geq 0$ визначимо ітеративно послідовність: $\hat{s}_n^{(k)}(x), n \geq 0$.

Нехай $\hat{s}_n^{(1)}(x) = s_n^{(0)}(x)$ і дано послідовність $\hat{s}_n^{(k)}(x)$, тоді визначимо послідовність $\hat{s}_n^{(k+1)}(x)$ таким чином:

$$\hat{s}_n^{(k+1)}(x) = \mathbb{E}[\hat{s}^{(k)}(x) \star s^{(\tau_k)}_{\mu, X_0^{(k+1)}}]. \tag{4.48}$$

Тоді для введених вище позначень справедлива наступна теорема.

Теорема 4.15. *Послідовність* $\{\hat{s}_n^{(k)}(x), n \geq 0\}$ *є стохастичною мажорантою для суми* $\sum\limits_{j=0}^{k} \theta_j$ *за умови, що ланцюг стартує з точки* $x \in E$.

Доведення.

Для доведення скористаємось теоремою 4.13.

Як множину $\mathcal{U}$ виберемо множину всіх можливих пар (t, x), $t \geq 0$, $x \in E$. Випадкова величина $\nu_n = (t, x)$, якщо n-те попадання у множину C трапилось у момент t, і ланцюг потрапив у точку $x \in C$.

Тоді твердження теореми випливає безпосередньо із теореми 4.13.

□

4.5 Оцінка математичного сподівання ексцесу послідовності відновлення, породженої неоднорідним ланцюгом Маркова

Основною метою цього розділу є доведення неоднорідного аналога нерівності Дейлі, яка використовувалась при доведенні Теореми 4.5. Цей результат дозволить отримати неоднорідний аналог Теореми 4.5 і таким чином побудувати придатну до практичного використання оцінку для середнього часу одночасного відвідування множини парою ланцюгів, за умови існування другого моменту для часу повернення у множину для кожного ланцюга окремо.

В цьому розділі ми будемо слідувати позначенням, введеним в розділі 4.2. Там же була визначена послідовність відновлення породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, а також визначені деякі її властивості. Коротко нагадаємо основні позначення тут, а за більш детальним описом відсилаємо читача до розділу 4.2.

Нехай $(X_t)_{t\geq 0}$ – деякий неоднорідний за часом ланцюг Маркова у дискретному часі зі значеннями у фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$. Позначимо перехідні ймовірності на t-тому кроці такого ланцюга через $P_t(x, A)$.

Будемо позначати буквами $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ – ймовірність та математичне сподівання, породженні цим ланцюгом.

Нехай C – деяка множина, $C \in \mathcal{E}$. Основним об'єктом для вивчення в даній роботі є послідовність моментів повернень у множину C. Припустимо, що $X_0 \in C$. В даному розділі, на відміну від розділу 4.2, ми не робимо припущень щодо того, що C складається з одного елемента. Одноелементність C не є принциповою умовою і, як буде видно нижче, лише трохи спрощує загальну конструкцію.

Ми будемо використовувати величини θ_i, введені в (4.2). Нагадаємо, що θ_k – це час, який пройшов між $k-1$ та k-тим поверненням в C. Нам також знадобляться позначення для самих моментів повернення:

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{k} \theta_j,\ k > 0 \tag{4.49}$$

- момент k-того повернення, $\tau_0 = 0$.

Зауважимо, що в даній роботі ми розглядаємо процес “без затримки”, тобто $\theta_0 = \tau_0 = 0$, або іншими словами $X_0 \in C$. Дане припущення не є принциповим.

Розглянемо потік сигма-алгебр, що породжені послідовностями θ_n та τ_n та значеннями процесу в моменти відновлення:

$$\mathcal{F}_n = \sigma[\theta_k, X_{\tau_k}, 1 \leq k \leq n] = \sigma[\tau_k,\ X_{\tau_k},\ 1 \leq k \leq n]. \tag{4.50}$$

Також нагадаємо, що величини θ_k є залежними у неоднорідному випадку, як було показано в Розділі 4.2. Тим не менше, розподіл величини θ_k повністю визначається моментом попереднього відновлення (та значенням ланцюга в момент відновлення, якщо C складається з більш ніж одного елемента). Математично це можна записати таким чином:

$$E[\theta_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[\theta_{n+1}|\tau_n, X_{\tau_n}]. \tag{4.51}$$

Цікаво, що розподіл величин θ_{n+1} не залежить від індексу n, а лише від значення τ_n - моменту попереднього відновлення, а також від значення процесу в момент відновлення. Останнє є наслідком того, що C не обов'язково одноелементна.

Іншими словами, не важливо скільки було відновлень до моменту, який нас цікавить, важливий лише сам момент останнього відновлення і значення процесу в цей момент.

Ми будемо розглядати двопараметричне сімейство розподілів

$$g_k^{(s,x)} = P\{\theta_{n+1} = k|\tau_n = s, X_s = x\}. \tag{4.52}$$

Зауважимо, що в Розділі 4.2 аналогічні розподіли були однопараметричні, оскільки там припускалось, що множина C – одноелементна.

Надалі нам знадобиться наступна:

(A) Умова стохастичної мажорованості.

Припустимо, що для кожних s, x розподіл $\{g_n^{(s,x)}, n \geq 1\}$ (а отже і умовний розподіл θ_n) мажорований деякою послідовністю невід'ємних величин $\hat{g} = (\hat{g}_k)_{k\geq 1}$, тобто, для довільного $k > 0$:

$$\sum_{i\geq k} g_i^{(s,x)} \leq \sum_{i\geq k} \hat{g}_i,$$

причому $\sum\limits_{k\geq 1} \hat{g}_k < \infty$.

Введемо позначення:

$$\hat{G}_n = \sum_{k\geq n} \hat{g}_k. \tag{4.53}$$

Послідовність $\{\hat{g}_k, k \geq 1\}$, як правило, називається стохастичною мажорантою, і є ймовірнісним розподілом. Але для даної роботи ця властивість не є суттєвою.

Для доведення основного результату цього розділу знадобиться більш сильна умова ніж просто існування мажоранти, а саме - скінченість другого моменту мажоруючого розподілу:

(A2) Нехай для послідовності θ_n виконана умова стохастичної мажорованості (A). Припустимо, що для послідовності $\{\hat{g}_n, n \geq 1\}$ існує скінченний другий момент:

$$\hat{\mu}_2 = \sum_{k \geq 1} k^2 \hat{g}_k < \infty.$$

Очевидно, що в цьому разі перший момент також буде скінченим, позначимо його

$$\hat{\mu} = \sum_{k \geq 1} k g_k.$$

Далі введемо величину $R_t = \inf\{\tau_k > t\} - t$ - це час який залишається з моменту t до наступного повернення в множину C, а також визначимо номер наступного відновлення для кожного $t \geq 0$:

$$N(t) = \inf\{k \geq 1 : \tau_k > t\},$$

довизначимо також $N(-1) = 0$.

Зауваження 4.7. Умови (A) та (A2) виконані для широкого класу ланцюгів Маркова. По своїй суті це умова того, що послідовність відновлення квадратично інтегровна. Ця умова виконана, наприклад, для скінченного неперіодичного ланцюга.

Таким чином, має місце формула:

$$R_t + t = \tau_{N(t)}.$$

Введемо також події A_k - що полягають у тому, що відновлення відбулось в момент k:

$$A_k = \{X_k \in C\} = \{\exists m : \tau_m = k\}, \tag{4.54}$$

а також події B_k, $B_{k,n}$, які полягають у тому, що відновлення не відбулось в момент k та між моментами k та n відповідно:

$$B_k = \{X_k \notin C\} = \overline{A}_k, \tag{4.55}$$

$$B_{k,n} = \{X_k \notin C, \ldots, X_n \notin C\} = \overline{A}_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \ldots \overline{A}_n, \tag{4.56}$$

будемо вважати, що $\mathbb{1}_{B_{k,n}} = 1$, якщо $k > n$.

Розглянемо умову:

(B) існують такі $\gamma > 0$ та $n_0 \geq 0$, що для всіх $n \geq k$, таких що $n - k \geq n_0$ виконана рівність:

$$P\{B_{k,n}\} \leq (1-\gamma)^{(n-k-n_0)^+}.$$

Тут $x^+ = \max\{x, 0\}$.

Зауваження 4.8. Умова (B) насправді є умовою відділеності від нуля для послідовності відновлення. Тобто, якщо позначити через u_n – ймовірність того, що відновлення відбулось в момент n, то умова (B) випливатиме з того, що існує таке $\gamma > 0$ та $n_0 \geq 0$, що $\inf_{n \geq n_0} u_n > \gamma$.

Зауваження 4.9. Відділеність від нуля для послідовності відновлення є певним далеким аналогом теореми відновлення в однорідному випадку, яка гарантує, що $u_n \longrightarrow 1/m > 0$, а отже послідовність u_n відділена від нуля, починаючи з деякого номера. На практиці навіть для неоднорідних ланцюгів Маркова ця умова виконується досить часто, як ми бачили у попередніх розділах.

4.5.1 Оцінки для математичного сподівання ексцесу

Теорема 4.16. *Нехай виконані умови (A), (A1) та (B). Тоді математичне сподівання для R_t задовільняє нерівність*

$$\mathbb{E}[R_t] \leq \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0). \tag{4.57}$$

Доведення. Для доведення нам знадобиться декілька допоміжних лем, які доведені нижче.

Скориставшись лемою 4.10, запишемо формулу (4.61):

$$R_{t+1} \leq \sum_{k=0}^{t+1} \theta_{N(k-1)+1} \mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}.$$

Далі розглянемо вираз $\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{B_{k+2,t}}$, при деякому $t \geq k+2$. Розпишемо його наступним чином:

$$\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{B_{k+2,t}} = \theta_{N(k)+1} (\mathbb{1}_{A_{k+1}} + \mathbb{1}_{B_{k+1}}) \mathbb{1}_{B_{k+2,t}}$$

$$= \theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{A_{k+1}} \mathbb{1}_{B_{k+2,t}} + \theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{B_{k+1,t}}.$$

Тепер розглянемо подію:

$$A_{k+1} \cap B_{k+2,t}.$$

Вона означає, що в момент $k+1$ відбулось відновлення, а наступного відновлення не відбулось аж до моменту t. Але номер наступного відновлення при цьому $N(k)+1$, оскільки $\tau_{N(k)} = k+1$. Отже

$$\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{A_{k+1}\cap B_{k+2,t}} \le \theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1>t-k-2}}. \tag{4.58}$$

Тоді візьмемо математичне сподівання від обох частин у формулі (4.61), та, підставивши вирази з (4.63) та (4.58), отримаємо:

$$\mathbb{E}[R_{t+1}] \le \sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}]$$

$$\le \sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{A_k}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}] + \sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k,t+1}}]$$

$$\le \sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{\theta_{N(k-1)+1>t-k-2}}] + \sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k,t+1}}]$$

$$\le \hat{\mu}_2 + \sum_{k=0}^{t+1} \hat{\mu}(1-\gamma)^{(t-k+1-n_0)^+} \le \hat{\mu}_2 + \hat{\mu} \sum_{k=-n_0}^{\infty} (1-\gamma)^{k^+} =$$

$$= \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(n_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(1-\gamma)^k) = \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0).$$

□

Наслідок 4.5. *Позначимо* $\mu_- = \inf_{n,s,x} \mathbb{E}[\theta_n|\tau_{n-1} = s, X_{\tau_{n-1}} = x] \ge 1$. *Тоді в умовах попередньої теореми, для середньої кількості відновлень за час* t *справедлива нерівність:*

$$\mathbb{E}[N(t)] \le \hat{\mu}_2/\mu_- + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0)/\mu_- + t + 1 \le \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}(1/\gamma + n_0) + t + 1.$$

Доведення. Зауважимо, що в однорідному випадку виконане рівняння Вальда: $\mathbb{E}[S_{N(t)}] = E\theta_1 EN(t)$. Але в неоднорідному випадку ця рівність не є вірною. Натомість мають місце наступні нерівності:

$$\mathbb{E}R_t + t = \mathbb{E}[\tau_{N(t)}] = \sum_{k\ge1} \mathbb{E}[\tau_k\mathbb{1}_{N(t)=k}] = \sum_{k\ge1} \mathbb{E}[\tau_{k-1}\mathbb{1}_{N(t)=k}\mathbb{E}[\theta_k|\tau_{k-1}, X_{\tau_{k-1}}]] \ge$$

$$\sum_{k\geq 1}\mu_{-}\mathbb{E}[\tau_{k-1}\mathbb{1}_{N(t)=k}]] \geq \sum_{k\geq 1}\mu_{-}\mathbb{E}[(k-1)\mathbb{1}_{N(t)=k}] = \mu_{-}(\mathbb{E}[N(t)]-1).$$

Звідки маємо:

$$\mathbb{E}[N(t)] \leq (ER_t+t)/\mu_{-}+1 \leq (\hat{\mu}_2+\hat{\mu}(1/\gamma+n_0)+t)/\mu_{-}+1 \leq \hat{\mu}_2+\hat{\mu}(1/\gamma+n_0)+t+1.$$

□ □

Лема 4.8. *Для випадкової величини R_t справедлива наступна рівність:*

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}}\theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}(R_t-1). \tag{4.59}$$

Доведення.

Очевидно, що якщо відновлення відбулось в момент $t+1$, то його номер $N(t)$ і до наступного відновлення чекати рівно $\theta_{N(t)+1}$ одиниць часу. Якщо ж відновлення не було в момент $t+1$, то чекати його на 1 менше, ніж відновлення після моменту t. Формально це можна записати так:

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}}R_{t+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}}\theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}(R_t-1).$$

□

Лема 4.9. *Має місце наступна нерівність:*

$$R_{t+1} \leq \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_t + \theta_{N(t)+1}. \tag{4.60}$$

Доведення.

Скориставшись лемою 4.8, отримаємо рівність:

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}}\theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}(R_t-1) = \mathbb{1}_{A_{t+1}}\theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_t - \mathbb{1}_{B_{t+1}}.$$

Далі відкинемо від'ємний доданок $-\mathbb{1}_{B_{t+1}}$ та скористаємось тим, що $\mathbb{1}_{A_{t+1}} \leq 1$:

$$R_{t+1} = \mathbb{1}_{A_{t+1}}\theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_t - \mathbb{1}_{B_{t+1}} \leq \theta_{N(t)+1} + \mathbb{1}_{B_{t+1}}R_t.$$

□

Лема 4.10. *Для всіх $t \geq 0$ має місце наступна нерівність:*

$$R_{t+1} \leq \sum_{k=0}^{t+1}\theta_{N(k-1)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}}, \tag{4.61}$$

де $N(-1)=0$ а $\mathbb{1}_{B_{t+2,t+1}}=1$, як було визначено вище.

Доведення.

Доведення проведемо методом математичної індукції.

Розглянемо $t = 0$.

Зауважимо, по-перше, що: $N(0) = 1$, а $\tau_{N(0)} = \tau_1 = \theta_1$. Окрім того, завжди виконана рівність $R_0 = \theta_1$. Тоді можливо два випадки. Або відновлення сталося в момент $t = 1$ або ні.

Якщо відновлення в момент $t = 1$ трапилось, то $\theta_1 = 1$, а $R_1 = \theta_2$.

Якщо відновлення не було, то $\theta_1 > 1$ а $R_1 = \theta_1 - 1$. Окрім того, якщо відновлення в момент $t = 1$ не було, то додатково маємо: $N(0) = N(1) = 1$.

Врахувавши все вищесказане, можна записати:

$$R_1 = \mathbb{1}_{A_1} R_1 + \mathbb{1}_{B_1} R_1 = \mathbb{1}_{A_1} \theta_2 + \mathbb{1}_{B_1}(\theta_1 - 1)$$

$$= \mathbb{1}_{A_1} \theta_{N(0)+1} + \mathbb{1}_{B_1}(\theta_1 - 1) \leq \theta_{N(0)+1} + \mathbb{1}_{B_1}\theta_1$$

$$= \theta_{N(0)+1} + \mathbb{1}_{B_1}\theta_{N(-1)+1},$$

де $N(-1) = 0$.

Нехай тепер рівність виконана для $t + 1$; перевіримо її для $t + 2$. За формулою (4.60) маємо:

$$R_{t+2} \leq \mathbb{1}_{B_{t+2}} R_{t+1} + \theta_{N(t+1)+1},$$

скориставшись припущенням індукції, отримаємо:

$$R_{t+2} \leq \mathbb{1}_{B_{t+2}} \sum_{k=0}^{t+1} \theta_{N(k-1)+1} \mathbb{1}_{B_{k+1,t+1}} + \theta_{N(t+1)+1}$$

$$= R_{t+2} \leq \sum_{k=0}^{t+1} \theta_{N(k-1)+1} \mathbb{1}_{B_{k+1,t+1} \cap B_{t+2}} + \theta_{N(t+1)+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{t+2} \theta_{N(k-1)+1} \mathbb{1}_{B_{k+1,t+2}}.$$

□

Лема 4.11. *Нехай виконані умови (A), (A1) та (B). Тоді має місце наступна нерівність:*

$$\mathbb{E}[\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{B_{k+1,t}}] \leq \hat{\mu}(1 - \gamma)^{(t-k-1-n_0)^+} \tag{4.62}$$

Доведення.

Наведемо спочатку якісні пояснення щодо цієї нерівності.

Розглянемо випадкову величину $\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}$ для деякого $t \geq k+1$. Подія $B_{k+1,t}$ означає, що відновлення не відбулося за період від моменту $k+1$ до t, а це означає, що наступне після k відновлення відбулося після моменту t, або іншими словами $\tau_{N(k)} > t$. Але це означає, що подія $B_{k+1,t}$ належить сигма-алгебрі $\mathcal{F}_t$, а подія $\tau_{N(k)} > t$ належить сигма-алгебрі $\mathcal{F}_{N(k)}$. Але $\theta_{N(k)+1}$ залежить від сигма-алгебри $\mathcal{F}_{N(k)}$ лише через значення $\tau_{N(k)}$, причому умовне математичне сподівання $\theta_{N(k)+1}$ за будь-якого значення $\tau_{N(k)}$ мажорується $\hat{\mu}$.

В той же час ймовірність того, що відновлення не було на відрізку від $k+1$ до t, не перевищує $(1-\gamma)^{(t-k-1-n_0)^+}$, як це випливає з умови (B).

Тепер запишемо це формально:

$$\mathbb{E}[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}] = \sum_{s>t}\mathbb{E}[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_{N(k)}=s}]$$

$$= \sum_{j\geq 0}\sum_{s>t}\mathbb{E}[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}].$$

Зауважимо, що $N(k)$ – це момент зупинки, а отже подія $\{N(k)=j\} \in \mathcal{F}_j$, тоді маємо:

$$\mathbb{E}[\theta_{N(k)+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}] = \sum_{j\geq 0}\sum_{s>t}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{j+1}\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}|\mathcal{F}_j]]$$

$$= \sum_{j\geq 0}\sum_{s>t}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{j+1}|\mathcal{F}_j]\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}]$$

$$= \sum_{j\geq 0}\sum_{s>t}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{j+1}|\tau_j, X_{\tau_j}]\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{\tau_j=s}\mathbb{1}_{N(k)=j}]$$

$$= \sum_{j\geq 0}\sum_{s>t}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{j+1}|\tau_j = s, X_s]\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{N(k)=j}\mathbb{1}_{\tau_j=s}]$$

$$\leq \hat{\mu}\sum_{j\geq 0}\sum_{s>t}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_{k+1,t}}\mathbb{1}_{N(k)=j}\mathbb{1}_{\tau_j=s}] = \hat{\mu}\mathbb{P}\{B_{k+1,t}\} \leq \hat{\mu}(1-\gamma)^{(t-k-1-n_0)^+}.$$

Тут ми використали рівність (4.51), а також умову стохастичної мажорованості.

□

Лема 4.12. *Має місце наступна нерівність:*

$$\sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1} > t-k-2}] \le \hat{\mu}_2. \tag{4.63}$$

Доведення.

Запишемо для початку:

$$\mathbb{E}[\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1} > t-k-2}] = \sum_{j,s} \mathbb{E}[\theta_{j+1} \mathbb{1}_{\theta_{j+1} > t-k-2} \mathbb{1}_{\tau_j = s} \mathbb{1}_{N(k)=j}]$$

$$= \sum_{j,s} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{j+1} \mathbb{1}_{\theta_{j+1} > t-k-2} | \tau_j = s, X_s] \mathbb{1}_{\tau_j = s} \mathbb{1}_{N(k)=j}].$$

Далі:

$$\mathbb{E}[\theta_{j+1} \mathbb{1}_{\theta_{s+1} > t-k-2} | \tau_j = s, X_s] = \sum_{i > t-k-2} i g_i^{(s,X_s)} = \sum_{i > t-k-2} G_i^{(s,X_s)} \le \sum_{i > t-k-2} \hat{G}_i.$$

Підставивши це в попередню рівність:

$$\mathbb{E}[\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1} > t-k-2}] = \sum_{j,s} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{j+1} \mathbb{1}_{\theta_{j+1} > t-k-2} | \tau_j = s, X_s] \mathbb{1}_{\tau_j = s} \mathbb{1}_{N(k)=j}]$$

$$\le \sum_{i > t-k-2} \hat{G}_i.$$

Розглянемо тепер суму:

$$\sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E}[\theta_{N(k)+1} \mathbb{1}_{\theta_{N(k)+1} > t-k-2}] \le \sum_{k=0}^{t+1} \sum_{i > t-k-2} \hat{G}_i = \sum_{k=0}^{t-2} \sum_{j=k}^{\infty} \hat{G}_j$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \hat{G}_j = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \hat{G}_k = \hat{\mu}_2.$$

□.

4.6 Оцінка математичного сподівання для одночасного відновлення пари неоднорідних за часом ланцюгів Маркова

У цьому розділі ми скористаємось результатами попереднього розділу, щоб узагальнити Теорему 4.5 на неоднорідний випадок та отримати оцінку середнього часу відновлення для пари ланцюгів за умови існування других моментів для кожного з ланцюгів окремо.

Будемо розглядати пару незалежних неоднорідних за часом ланцюгів Маркова у дискретному часу зі значеннями у загальному просторі станів $(E, \mathcal{E})$. Ми припустимо, що обидва ланцюги визначені на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Позначимо ланцюги через $\left(X_n^{(1)}\right), \left(X_n^{(2)}\right), n \geq 0$. Позначимо їхні перехідні ймовірності за один крок через

$$P_{lt}(x, A) = \mathbb{P}\{X_{t+1}^{(l)} \in A | X_t^{(l)} = x\}, \tag{4.64}$$

де $x \in E$ довільне, $l \in \{1, 2\}$, та $A \in \mathfrak{F}$ довільна множина.

Ми будемо використовувати позначення із Розділу 4.2 з поправкою на те, що зараз ми маємо справу з двома ланцюгами.

Розглянемо деяку множну $C \in \mathcal{E}$ та поставимо за мету обчислити оцінку зверху для математичного сподівання часу першого відвідування множини C обома ланцюгами одночасно. Всі подальші позначення будуть зроблені із припущення, що C є атомом (тобто, ми не будемо відслідковувати окремі стани $x \in C$, як це було в розділі 4.5). Однак, як ми бачили в розділі 4.5, припущення щодо того, що C є атомом не є принциповим і може бути замінене умовою мінориразації, яку ми будемо використовувати в подальшому.

Для зручності нагадаємо позначення із розділу 4.2. Визначимо інтервали відновлення для кожного ланцюга

$$\begin{gathered} \theta_0^{(l)} = \inf\{t \geq 0, X_t^{(l)} \in C\}, \\ \theta_n^{(l)} = \inf\{t \geq \theta_{n-1}^{(l)}, X_t^{(l)} \in C\}, \end{gathered} \tag{4.65}$$

де $l \in \{1, 2\},\ n \geq 1$, та моменти відновлення

$$\tau_n^{(l)} = \sum_{k=0}^{n} \theta_k^{(l)},\ l \in \{1, 2\},\ n \geq 1. \tag{4.66}$$

Далі визначимо ймовірності відновлення для кожного ланцюга, аналогічно до (4.12)

$$g_n^{(t,l)} = \mathbb{P}\{\theta_k^{(l)} = n | \tau_{k-1}^{(l)} = t\},\ l \in \{1, 2\},\ n \geq 1. \tag{4.67}$$

Варто зазначити, що якщо C не є атомом, то $g_n^{(t,l)}$ також залежать від значення x ланцюга $X_t^{(l)}$, коли він потрапляє в C (тобто $g_n^{(t,l)}$ це насправді $g_n^{(t,x,l)}$, якщо слідувати позначенням попереднього розділу). Як було зазначено вище, ми вважатимемо, що C є атомом, але отримані результати залишаються вірними і якщо C атомом не є.

Визначимо послідовність відновлення рекурентно

$$\begin{gathered} u_0^{(t,l)} = 1, \\ u_n^{(t,l)} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{(t,l)} g_{n-k}^{(t+k,l)}. \end{gathered} \tag{4.68}$$

Час першого відвідування множини C парою ланцюгів позначимо як

$$T = \inf\{t > 0 : \ \exists m, n, \ t = \tau_m^{(1)} = \tau_n^{(2)}\}. \tag{4.69}$$

Введемо поняття ексцесу

$$R_n^{(l)} = \inf\{t > n : \ X_t^{(l)} \in C\}, l \in \{1, 2\}. \tag{4.70}$$

Ексцес можна розуміти як найближчий момент часу після n, коли $X^{(l)}$ відвідує C.

Спочатку ми накладемо умову, яка гарантуватиме відділення $u_n^{(t,l)}$ від 0. В однорідному випадку така умова не потрібна, оскільки відділеність від нуля випливає з Теореми Відновлення. Але для неоднорідних ланцюгів Теорема Відновлення взагалі кажучи не виконується, тому нам необхідна додаткова умова.

Умова A

Існують сталі $\gamma > 0$ та число $n_0 \geq 0$, такі що для всіх t, l та $n \geq n_0$

$$u_n^{(t,l)} \geq \gamma. \tag{4.71}$$

Важливо зазначити, що така умова також гарантує неперіодичність відповідного ланцюга Маркова.

Також нам знадобиться умова стохастичного мажорування для того, щоб застосувати Теорему 4.16 з розділу 4.5.

Умова B

Розподіли $(g_n^{(t,l)})$ стохастично мажоруються деякою послідовністю $(\hat{g}_n)$, $\hat{g}_n \geq 0$, тобто

$$G_n^{(t,l)} = \sum_{k>n} g_k^{(t,l)} \leq \hat{G}_n = \sum_{k>n} \hat{g}_k. \tag{4.72}$$

Окрім того, стохастична мажоранта $(\hat{g}_n)$ має скінченний другий (а отже і перший) момент

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \sum_{k\geq 1} k\hat{g}_k = \sum_{k\geq 0} \hat{G}_k < \infty, \\ \hat{\mu}_2 &= \sum_{k\geq 1} k^2\hat{g}_k < \infty \end{aligned} \tag{4.73}$$

Послідовність $\hat{G}_n$ є незростаючою, оскільки $\hat{g}_n \geq 0$.

Зауважимо, що ми не вимагаємо, щоб послідовність $(\hat{g}_n)$ була ймовірнісним розподілом, або, іншими словами, $\sum\limits_{k\geq 1} \hat{g}_k$ необов'язково має бути рівною 1.

Теорема 4.17. *Припустимо, що для ланцюгів* $(X_n^{(l)})$, $l \in \{1, 2\}$, *визначених вище, виконані умови (A) та (B). Тоді математичне сподівання часу першого одночасного відвідування множини C задовільняє нерівності*

$$\mathbb{E}[T] \leq \mathbb{E}[\theta_0^{(1)}] + \mathbb{E}[\theta_0^{(2)}] + \frac{M}{\gamma}, \tag{4.74}$$

де

$$M = \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1(\gamma^{-1} + n_0). \tag{4.75}$$

Доведення. Згадаємо позначення із доведення Теореми 4.1 (підрозділ 4.2.2).

$$\nu_0 := \min\{j \geq 1 : \tau_j^1 > n_0\},$$

$$B_0 := \tau_{\nu_0}^1,$$

$$\nu_1 := \min\{j \geq \nu_0 : \tau_j^2 - \tau_{\nu_0}^1 > n_0, \text{ or } \tau_j^2 - \tau_{\nu_0}^1 = 0\},$$

$$B_1 := \tau_{\nu_1}^2 - \tau_{\nu_0}^1,$$

та

$$\nu_{2m} := \min\{j \geq \nu_{2m-1} : \ \tau_j^1 - \tau_{\nu_{2m-1}}^2 > n_0,, \text{ or } \tau_j^1 - \tau_{\nu_{2m-1}}^2 = 0\},$$

$$B_{2m} := \tau_{\nu_{2m}}^1 - \tau_{\nu_{2m-1}}^2,$$

$$\nu_{2m+1} := \min\{j \geq \nu_{2m} : \ \tau_j^2 - \tau_{\nu_{2m}}^1 > n_0 \, , \text{ or } \tau_j^2 - \tau_{\nu_{2m}=0}^1,$$

$$B_{2m+1} := \tau_{\nu_{2m+1}}^2 - \tau_{\nu_{2m}}^1.$$

Моменти ν_k називаються спробами склеювання. Визначимо $\tau = \min\{n \geq 1 : B_n = 0\}$ та послідовність σ-алгебр $\mathfrak{B}_n$, $n \geq 0$ наступним чином

$$\mathfrak{B}_n = \sigma[B_k, \nu_k, \tau_j^l, \ k \leq n, \ j \leq \nu_n].$$

Будемо використовувати підхід аналогічний до доведення Теореми 4.1, але з використанням оцінок для ексцесу, отриманих у попередньому розділі.

Спершу припустимо, що $\theta_0^{(2)} = 0$, що означає, що другий ланцюг стартує з множини C.

Далі, представимо T як

$$T \le \theta_0^{(1)} + \sum_{n=0}^{\tau} B_n = \theta_0^{(1)} + \sum_{n\ge 0} B_n \mathbb{1}_{\tau>n}. \tag{4.76}$$

Скориставшись Лемою 4.13 та тим фактом, що $\{\tau > n-1\} \in \mathfrak{B}_{n-1}$, отримаємо наступну нерівність

$$\begin{gathered} E[B_n \mathbb{1}_{\tau>n} | \mathfrak{B}_{n-1}] = E[B_n \mathbb{1}_{\tau\ge n} | \mathfrak{B}_{n-1}] + E[0 \mathbb{1}_{\tau=n} | \mathfrak{B}_{n-1}] = \\ \mathbb{1}_{\tau\ge n} E[B_n | \mathfrak{B}_{n-1}] \le \mathbb{1}_{\tau\ge n} M. \end{gathered} \tag{4.77}$$

З Леми 4.6 отримаємо

$$\mathbb{P}\{\tau > n\} \le (1-\gamma)^n, \tag{4.78}$$

Взявши безумовне математичне сподівання від обох частин у (4.77), матимемо

$$\mathbb{E}[B_n \mathbb{1}_{\tau>n}] \le M\mathbb{P}\{\tau > n\} \le M(1-\gamma)^n. \tag{4.79}$$

Застосуємо цю нерівність до (4.100)

$$\begin{gathered} \mathbb{E}[T] \le \mathbb{E}[\theta_0] + \mathbb{E}[\textstyle\sum_{n=0}^{\tau} B_n] = \mathbb{E}[\theta_0] + \sum_{n\ge 0} \mathbb{E}[B_n \mathbb{1}_{\tau>n}] \le \\ \mathbb{E}[\theta_0] + \sum\limits_{n\ge 0} M(1-\gamma)^n = \mathbb{E}[\theta_0] + \tfrac{M}{\gamma}. \end{gathered} \tag{4.80}$$

Тепер там потрібно позбавитись припущення $\theta_0^{(2)} = 0$. Використавши такі ж міркування, як і в доведенні Теореми 4.1, отримаємо

$$\mathbb{E}[T] \le \mathbb{E}\left[\max\left\{\theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}\right\}\right] + \frac{M}{\gamma} \le \mathbb{E}\left[\theta_0^{(1)}\right] + \mathbb{E}\left[\theta_0^{(2)})\right] + \frac{M}{\gamma}.$$

□

4.6.1 Застосування до процесу народження та загибелі

Розглянемо два неоднорідні процеси $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ з наступними перехідними ймовірностями на t-тому кроці

$$P_t = \begin{pmatrix} \alpha_{t0} & 1-\alpha_{t0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{t1} & 0 & 1-\alpha_{t1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{t2} & 0 & 1-\alpha_{t2} & \dots \\ \dots \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

та

$$Q_t = \begin{pmatrix} \beta_{t0} & 1-\beta_{t0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_{t1} & 0 & 1-\beta_{t1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_{t2} & 0 & 1-\beta_{t2} & \dots \\ \dots \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

Ми хочемо оцінити математичне сподівання, застосовуючи Теорему 4.17. Для цього нам потрібно перевірити умову регулярності (A) та умову мажорування (B).

Нам потрібно побудувати квадратично-інтегровну мажоруючу послідовність. Зробити це одразу для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ складно, тому ми побудуємо таку послідовінсть для деякого добре вивченого однорідного ланцюга і покажемо, що вона також буде мажорантою для потрібних нам ланцюгів. Для цього оберемо випадкове блукання на півпрямій.

Така мажоруюча послідовність побудована в Лемі 4.14. А з Леми 4.15 ми отримаємо її другий момент, який ми використаємо в Теоремі 4.17.

Далі ми перевіримо умову регулярності (A). Спершу припустимо, що для всіх $t > 0$, $g_1^{(l)} = \alpha_{t0} > 0$

$$\gamma_0 = \inf_t \{\alpha_{t0}, \beta_{t0}\} > 0. \tag{4.83}$$

Ми скористаємось Наслідком 4.2 для того, щоб перевірити умову (A). З Наслідку випливає, що для виконання умови (A) достатньо $g_1^{(t)} > 0$ та існування мажоруючої послідовності. Більше того, доведення Теореми 4.3 (див. нерівність (4.32)) містить оцінку для γ:

$$\gamma = \exp\left(\hat{\mu} ln(\gamma_0)/\gamma_0\right). \tag{4.84}$$

Нарешті можемо сформулювати теорему.

Теорема 4.18. *Припустимо, що для ланцюгів із перехідними ймовірностями P_t, Q_t, визначеними вище, виконана умова (4.83), та існує таке p, що задовільняє умову*

(4.91) для обох ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$. Якщо обидва ланцюги стартують із нульового стану, математичне сподівання часу наступного одночасного відвідування нуля задовільняє нерівності

$$\mathbb{E}[T] \leq \hat{\mu}_2/\gamma + \hat{\mu}_1/\gamma^2, \tag{4.85}$$

де $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ визначені в Лемі 4.15, та γ визначено в (4.109).

Доведення. Твердження теореми випливає з Теореми 4.17, застосованої до ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ з послідовностями відновлення, побудованими в Лемі 4.14, та сталою γ, визначеною вище. Величини $\hat{\mu}_1$ та $\hat{\mu}_2$ обчислені в Лемі 4.15. □

4.6.2 Допоміжні результати

Лема 4.13. *Має місце наступна нерівність*

$$\mathbb{E}[B_n|\mathfrak{B}_{n-1}] \leq M, \tag{4.86}$$

де $n \geq 1$, та M визначені в (4.75).

Доведення. З Леми 4.5 отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{2n+1}|\mathfrak{B}_{2n}] &= \sum_t \mathbb{E}[R^{(2)}_{t+n_0}]\mathbb{1}_{\tau^{(1)}_{\nu_{2n}}=t}, \\ \mathbb{E}[B_{2n}|\mathfrak{B}_{2n-1}] &= \sum_t \mathbb{E}[R^{(1)}_{t+n_0}]\mathbb{1}_{\tau^{(2)}_{\nu_{2n-1}}=t} \end{aligned} \tag{4.87}$$

В той же час, з Теореми 4.16 маємо наступну нерівність

$$\mathbb{E}[R^{(l)}_m] \leq M, \ \forall m \geq 0, \ l \in \{0, 1\}, \tag{4.88}$$

де ми взяли до уваги умову мажорування (B).

Підставивши (4.88) у формули (4.87), отримаємо шуканий результат (4.86). □

Лема 4.14. *Розглянемо наступний неоднорідний за часом ланцюг народження та загибелі Z_t з перехідними ймовірностями на t-му кроці*

$$P_t = \begin{pmatrix} \alpha_{t0} & 1-\alpha_{t0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{t1} & 0 & 1-\alpha_{t1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{t2} & 0 & 1-\alpha_{t2} & \dots \\ \dots, \end{pmatrix} \tag{4.89}$$

та неоднорідне випадкове блукання $\hat{Z}_t$ з матрицею перехідних ймовірностей

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ \dots, & & & & & \end{pmatrix} \tag{4.90}$$

Покладемо

$$C = \{0\},$$

та нехай $g_n^{(t)}$ – це розподіл першого після t часу повернення в 0 для ланцюга Z, що стартує з нуля в момент часу t.

Припустимо, що існує деяке p таке, що для всіх t, i, s, j виконані наступні нерівності

$$\begin{gathered} p > 1/2, \\ p(1-p) \geq (1-\alpha_{ti})\alpha_{sj}, \forall t, s, i, j. \end{gathered} \tag{4.91}$$

Позначимо через f_n послідовність відновлення для ланцюга $\hat{Z}_t$ (f_n - це ймовірність першого повернення до нуля для ланцюга $\hat{Z}$, що стартує в нулі):

$$f_n = \hat{P}\{\hat{Z}_0 = 0, \hat{Z}_1 \neq 0, \dots, \hat{Z}_{n-1} \neq 0, \hat{Z}_n = 0\}, \tag{4.92}$$

та $\hat{g}_n = f_n/p$, $n > 1$ та $\hat{g}_1 = 1$.
Тоді послідовність $(\hat{g}_n)_{n\geq 1}$ стохастично мажорує $g_n^{(t)}$, або, іншими словами

$$G_k^{(t)} \leq \hat{G}_k, \tag{4.93}$$

де $G_n^{(t)} = \sum\limits_{k>n} g_k^{(t)}$, $\hat{G}_n = \sum\limits_{k>n} \hat{g}_k$, та $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ та $\hat{P}$, $\hat{E}$ це ймовірності та математичні сподівання на канонічному ймовірнісному просторі, породженому ланцюгами Z та $\hat{Z}$ відповідно.

Доведення. Спершу помітимо, що $(\hat{g}_n)$ не є ймовірнісним розподілом. Але це не є великою проблемою, оскільки у нашій побудові мажоруюча послідовність не обов'язково повинна бути ймовірнісним розподілом.

Покажемо, що

$$\hat{g}_n \geq g_n^{(t)}, \tag{4.94}$$

для всіх t, n.

Почнемо з $n = 1$

$$g_1^{(t)} = \alpha_{t0} < 1 = \hat{g}_1.$$

Розглянемо $n > 1$. Розглянемо подію

$$A_{(2n)t} = \{Z_t = 0, Z_{t+1} \neq 0, \ldots, Z_{t+2n-1} \neq 0, Z_{t+2n} = 0\}.$$

Її може бути інтерпретовано як множину траєкторій $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{2n})$, $\omega_i \in \{+1, -1\}$, де $\omega_i = +1$, якщо Z_{t+i} рухається вгору, та $\omega_i = -1$ інакше. Зрозуміло, що для повернення в нуль в момент часу $2n$ має відбутися в точності n кроків вгору (перший крок має бути кроком вгору) та рівно n кроків вниз. Варто зазначити, що множина $A_{(2n)t}$ не обов'язково включає будь-яку траєкторію довжини $2n$ з n кроками вгору та n кроками вниз, оскільки така траєкторія може вперше досягати нуля раніше, що недопустимо для події $A_{(2n)t}$. Точна кількість траєкторій в $A_{(2n)t}$ невідома, і для даного доведення не є важливою. Що є важливим, так це той факт, що будь-яка $\omega \in A_{(2n)t}$ відповідає аналогічній траєкторії ланцюга $\hat{Z}$. Це означає, що сума по всім $\hat{P}\{\omega\}$ для $\omega \in A_{(2n)t}$ дасть ймовірність f_{2n}. Строго кажучи, ланцюги Z та $\hat{Z}$ визначені на різних ймовірнісних просторах, але існує очевидна відповідність між траєкторіями, тоді як власне ймовірності відрізняються. Отже, ми можемо використовувати символ ω для обох ланцюгів.

Оскільки ω має рівно n кроків вгору та n кроків вниз, її ймовірність рівна добутку n різних $(1 - \alpha_{t_i n_i})$ та n різних α_{t_j, n_i+1}, для $i, j = \overline{1, n}$. Помітимо, що деякі n_i можуть співпадати.

Це означає, що після зміни порядку ймовірність такої ω можна представити як

$$\mathbb{P}\{\omega\} = \prod \Big((1 - \alpha_{t_i n_i}) \alpha_{t_j n_i + 1} \Big), \tag{4.95}$$

для деяких t_i, n_i, t_j. Ми знову підкреслюємо, що множники у добутку можуть повторюватися, але це не відіграє суттєвої ролі в доведенні.

В той же час з умови (4.91), випливає, що для будь-яких індексів $\alpha_{tn}(1 - \alpha_{sm}) < p(1 - p)$ та

$$\mathbb{P}\{\omega\} \leq (p(1 - p))^{n-1} = \hat{P}\{\omega\}/p. \tag{4.96}$$

Якщо ми підсумуємо ймовірності всіх таких ω, то отримаємо (4.94) для $n > 1$. ☐

Лема 4.15. *Послідовність* $(\hat{g}_n)$*, визначена в Лемі 4.14, має скінчені перший та другий моменти*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= 2/(2p-1)+1, \\ \hat{\mu}_2 &= (2p-1)^{-1}\left(2+\tfrac{8(1-p)}{1-4p}\right)+2/(2p-1)+1. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Доведення. Спершу помітимо, що оскільки $\hat{g}_n = f_n/p$, $n > 1$ та $\hat{g}_1 = 1 = 1 + f_1$, то $\hat{\mu}_1 = \mu_1/p + 1$ та $\hat{\mu}_2 = \mu_2/p + 1$, де μ_1 та μ_2 є математичним сподіванням та другим моментом ймовірнісного розподілу $f_n, n \geq 1$.

Генератриса $F(z)$ розподілу f_n рівна (див. наприклад [41], розділ XIII)

$$F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)s^2}}{2(1-p)}. \tag{4.98}$$

Отже, $\mu_1 = F'(1)$, $\mu_2 = F''(1) + \mu_1$. □

4.7 Оцінка математичного сподівання середнього часу відновлення для неоднорідних ланцюгів Маркова за умови стохастичного мажорування

У даному розділі ми отримаємо оцінки середнього часу відновлення для пари ланцюгів без припущення про скінченість других моментів для відновлення окремих ланцюгів та мажоруючої послідовності. Зауважимо, що у випадку існування других моментів оцінки, отримані в попередньому розділі, є зручнішими для практичного використання. Ми будемо дотримуватись позначень з попереднього розділу.

Модифікуємо умову мажорування із попереднього розділу.

Умова М

Існує неспадна послідовність $G_n,\ n \geq 0$, така, що

$$G_n^{(t,l)} \leq G_n,$$

$$\sum_{n\geq 0} G_n = m < \infty.$$

Для спрощення подальших викладок ми дозволимо індексу n в G_n бути від'ємним. У цьому разі покладемо $G_n = G_0,\ n < 0$.

Ми також будемо використовувати умову A з розділу 4.6 та позначення $\nu_k, B_k, \tau^1_k, \tau^2_k$, введені при доведенні Теореми 4.1 (див. підрозділ 4.2.2).

Введемо наступні величини

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} B_k.$$

Зауважимо, що $S_{2n} = \tau^1_{\nu_{2n}}, S_{2n+1} = \tau^2_{\nu_{2n+1}}$, однак використання S_n значно покращує читабельність викладок.

Теорема 4.19. *Припустимо, що ланцюги* $\left(X^{(l)}_n\right)$, $l \in \{1,2\}$ *мають початкові розподіли* λ_1 *та* λ_2, *та що математичне сподівання першого часу потрапляння у множину* C *для кожного з ланцюгів скінченне. Позначимо їх через* $m_1(\lambda_1)$ *and* $m_2(\lambda_2)$ *відповідно. Припустимо також, що виконано умови (A) (з розділу 4.6) та (M). Тоді існує мажоруюча послідовність* $\hat{S}_n$, *та математичне сподівання* T *задовільняє нерівності*

$$\mathbb{P}(T > n) \leq \hat{S}_n,$$

та

$$\mathbb{E}[T] \leq \sum_{n\geq 0} \hat{S}_n \leq m_1(\lambda_1) + m_2(\lambda_2) + (n_0 G_0 + m)(1+\gamma)/\gamma. \tag{4.99}$$

Доведення. Спершу припустимо, що $\theta^{(2)}_0 = 0$, що означає що другий ланцюг стартує з множини C.

Наступна оцінка зверху для T була введена при доведенні Теореми 4.1 (і вона є очевидним наслідком означення)

$$T \leq \theta^{(1)}_0 + \sum_{n=0}^{\tau} B_n = \theta^{(1)}_0 + \sum_{n\geq 0} B_n \mathbb{1}_{\tau > n}. \tag{4.100}$$

Розглянемо змінну

$$T' = \sum_{n=0}^{\tau} B_n.$$

$\theta^{(1)}_0 + T'$ є поточково більшою за T, а тому вона стохастично домінує T.

Отже, ми зосередимось на побудові стохастичної мажоранти для T' та оцінки її моментів.

Розглянемо

$$\mathbb{P}\{T' > n\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{S_k \le n < S_{k+1}\} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}\{S_k = j, B_{k+1} > n - j\}.$$

Зауважимо, що деякі доданки рівні нулю, оскільки кожна спроба відновлення потребує не менше ніж n_0 кроків, але цей факт не вплине на подальші викладки.

З Леми 4.16 отримаємо нерівність

$$\mathbb{P}\{S_k = j, B_{k+1} > n - j\} \le \mathbb{P}\{S_k = j, \tau \ge k\} G_{n-j-n_0},$$

яка дозволяє побудувати оцінку зверху для $\mathbb{P}\{T' > n\}$:

$$\mathbb{P}\{T' > n\} \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}\{S_k = j, \tau \ge k\} G_{n-j-n_0}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} G_{n-j-n_0} \sum_{k=0}^{j} P(S_k = j, \tau \ge k).$$

Отже, можемо покласти

$$\hat{S}'_n = \sum_{j=0}^{n} G_{n-j-n_0} \sum_{k=0}^{j} P(S_k = j, \tau \ge k),$$

що і завершує побудову стохастичної мажоранти для $\mathbb{P}\{T' > n\}$.

Оцінимо її момент

$$\mathbb{E}[T'] = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}\{T' > n\} \le \sum_{n \ge 0} \hat{S}'_n$$

$$= \sum_{n \ge 0} \left(\sum_{j=0}^{n} G_{n-j-n_0} \sum_{k=0}^{j} P(S_k = j, \tau \ge k) \right)$$

$$= \left(\sum_{n \ge 0} G_{n-n_0} \right) \times \left(\sum_{n \ge 0} \sum_{k \ge n} \mathbb{P}\{S_n = k, \tau \ge n\} \right)$$

$$= (n_0 G_0 + m) \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}\{\tau \ge n\}.$$

З Леми 4.6 отримаємо нерівність

$$\mathbb{P}\{\tau > n\} \le (1 - \gamma)^n,$$

яка в свою чергу дозволяє оцінити математичне сподівання T' як

$$\mathbb{E}[T'] \leq (n_0 G_0 + m)(1 + 1/\gamma) = (n_0 G_0 + m)(1 + \gamma)/\gamma. \tag{4.101}$$

Тепер ми позбавимось припущення $\theta_0^{(2)} = 0$. Як і в доведенні Теореми 4.1, маємо

$$T \leq \theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)} + T',$$

звідки випливає існування стохастичної мажоранти $\hat{S}_n \geq \mathbb{P}\{T > n\}$ та оцінка

$$\mathbb{E}[T] \leq \sum_{n \geq 0} \hat{S}_n \leq m_1(\lambda_1) + m_2(\lambda_2) + (n_0 G_0 + m)(1 + \gamma)/\gamma.$$

□

Лема 4.16. *Припустимо, що ланцюг* $X^{(2)}$ *стартує з* $x \in C$. *Тоді для всіх* $k, j, t \geq 0$ *виконана наступна нерівність*

$$\mathbb{P}\{S_k = j, B_{k+1} > t\} \leq P(S_k = j, \tau \geq k) G_{t-n_0}.$$

Доведення. Почнемо з припущення, що k парне. Тоді запишемо

$$\mathbb{P}\{S_k = j, B_{k+1} > t\} = \mathbb{P}\{S_k = j, X_n^{(2)} \notin C, n \in \{j, j + n_0, \ldots, j + t\}\}.$$

Позначимо через η останній час відновлення ланцюга $X^{(2)}$ перед моментом часу $j + n_0$. За побудовою послідовності B_k:

$$\eta \geq S_k - B_k = S_{k-1}.$$

Справді, якщо $k > 0$, то $S_{k-1} = S_k - B_k > 0$ є часом відновлення ланцюга $X^{(2)}$. Якщо $k = 0$, покладемо $S_{-1} = S_0 - B_0 = 0$, але ланцюг $X^{(2)}$ стартував із C, отже $\eta > 0$ за умовами Леми. Тому, за побудовою, маємо

$$S_k - B_k \leq \eta < j + n_0.$$

Позначимо

$$A_l(s, t) = \{X_m^{(l)} \notin C, m \in \{s, \ldots, t\}\},\ l \in \{1, 2\}$$

та проаналізуємо траєкторії ланцюга $X^{(2)}$ після η:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}\{S_k = j, B_{k+1} > t\} = \mathbb{P}\{S_k = j, X_j^{(2)} \notin C, A_2(j + n_0, j + t)\} = \\ \sum_{u,v} \mathbb{P}\{S_{k-1} = u, \tau \geq k, A_1(u + n_0, j - 1), X_j^{(1)} \in C, X_v^{(2)} \in C, A_2(v + 1, j + t)\},\end{gathered} \tag{4.102}$$

де $u < j$, та $v \geq u$ це значення η. Зауважимо, що

$$\{S_{k-1} = u, X_u^{(1)} \notin C\} = \{S_{k-1} = u, \tau > k - 1\} = \{S_{k-1} = u, \tau \geq k\}.$$

Згадаємо, що ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ незалежні, та ми можемо розкласти ймовірність у формулі (4.102) у добуток

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{S_{k-1} = u, \tau \geq k, A_1(u + n_0, j - 1), X_j^{(1)} \in C, X_v^{(2)} \in C,\ A_2(v + 1, j + t)\} \\
&= \int\limits_{E\times C} \mathbb{P}\{S_{k-1} = u, A_1(u + n_0, v), (X_v^{(1)}, X_v^{(2)}) = (dx, dy)\} \\
&\times\mathbb{P}\{A_1(v + 1, j - 1), X_j^{(1)} \in C, A_2(v + 1, j + t)|(X_v^{(1)}, X_v^{(2)}) = (x, y)\} \\
&= \int\limits_{E\times C} \mathbb{P}\{S_{k-1} = u, \tau \geq k, A_1(u + n_0, v), (X_v^{(1)}, X_v^{(2)}) = (dx, dy)\} \\
&\times\mathbb{P}\{A_1(v + 1, j - 1), X_j^{(1)} \in C|X_v^{(1)} = x\}\mathbb{P}\{A_2(v + 1, j + t)|X_v^{(2)} = y\}.
\end{aligned}$$

Але $\mathbb{P}\{A_2(v + 1, j + t)|X_v^{(2)} = y\}, y \in C$ це не що інше як ймовірність того, що наступне відновлення після v не трапиться до моменту часу $j + t$. Отже

$$\sup_{y\in C} \mathbb{P}\{A_2(v + 1, j + t)|X_v^{(2)} = y\} = G_{j+t-v}^{(v,2)} \leq G_{j+t-v}, \tag{4.103}$$

де остання нерівність випливає з Умови M.

Викладки, наведені вище, залишаються справедливими для $\eta < j$, однак при $\eta \in \{j+1, j+n_0-1\}$ отримаємо аналогічний результат. Максимально можливим значенням v є $j + n_0$, отже, скориставшись тим, що G_n незростаюча, та (4.103), отримаємо

$$\sup_{y\in C} \mathbb{P}\{A_2(v + 1, j + t)|X_v^{(2)} = y\} \leq G_{j+t-v} \leq G_{t-n_0}, \tag{4.104}$$

звідки маємо оцінку, що не залежить від v.

Взявши до уваги нерівність (4.104), запишемо

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}\{S_k = j, B_{k+1} > t\} \leq \\
\sum_{u,v} \int_{E\times C} \mathbb{P}\{S_{k-1} = u, \tau \geq k, A_1(u + n_0, v), (X_v^{(1)}, X_v^{(2)}) = (dx, dy)\}\times \\
\mathbb{P}\{A_1(v + 1, j - 1), X_j^{(1)} \in C|X_v^{(1)} = x\}G_{t-n_0} \leq \mathbb{P}\{S_k = j, \tau \geq k\}G_{t-n_0}.
\end{gathered} \tag{4.105}$$

Для завершення доведення розглянемо випадок, коли k непарне. У цьому випадку $k > 0$, що означає $k - 1 \geq 0$, та ми не маємо проблем із $k = 0$, як у попередньому випадку. Отже, при непарних k аналогічні міркування приводять нас до бажаного результату. □

4.7.1 Застосування до процесу народження та загибелі

У розділі 4.6 ми отримали оцінки для одночасного відновлення двох неоднорідних за часом ланцюгів народження та загибелі $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ з наступними перехідними ймовірностями на t-тому кроці

$$P_t = \begin{pmatrix} \alpha_{t0} & 1-\alpha_{t0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{t1} & 0 & 1-\alpha_{t1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{t2} & 0 & 1-\alpha_{t2} & \dots \\ \dots & & & & & \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

та

$$Q_t = \begin{pmatrix} \beta_{t0} & 1-\beta_{t0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_{t1} & 0 & 1-\beta_{t1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_{t2} & 0 & 1-\beta_{t2} & \dots \\ \dots & & & & & \end{pmatrix} \tag{4.107}$$

Множина C у даному випадку складається лише з нуля:

$$C = \{0\}.$$

Оцінка з розділу 4.6 включає в себе другий момент мажоруючої послідовності. Тому ми порівняємо її з оцінкою з Теореми 4.19.

Почнемо з побудови γ. Як і в розділі 4.6 ми помітимо, що для довільних $t > 0$, $g_1^{(l)} = \alpha_{t0} > 0$, та припустимо, що

$$\gamma_0 = \inf_t \{\alpha_{t0}, \beta_{t0}\} > 0. \tag{4.108}$$

Ми бачили, що γ може бути обрано наступним чином

$$\gamma = \exp\left(\hat{\mu} ln(\gamma_0)/\gamma_0\right) = \gamma_0^{\hat{\mu}/\gamma_0}. \tag{4.109}$$

де $n_0 = 0$.

Ми скористаємось тією ж послідовністю відновлення, що і в розділі 4.6. Для цього розглянемо стандарнтне випадкове блукання з праметром $p > 1/2$ та ймовірністю f_n першого повернення в нуль в момент часу n . Як показано у [41], в розділі XIII, генератриса $F(z)$ послідовності f_n має вигляд

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)s^2}}{2(1-p)}. \tag{4.110}$$

Ми показали в розділі 4.6, що $G_n = \sum\limits_{k>n} f_n/p$ є мажоруючою послідовністю (хоча вона і не відповідає ймовірнісному розподілу) для послідовності відновлення, згенерованої $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$,

$$p(1-p) \geq sup_{t,j}\{\alpha_{tj}(1-\alpha_{tj}), \beta_{tj}(1-\beta_{tj})\} \tag{4.111}$$

Оцінка математичного сподівання одночасного відновлення у випадку, коли обидва ланцюги стартують з C, має наступний вигляд

$$E_1 = \mathbb{E}[T] \leq \hat{\mu}_2/\gamma + \hat{\mu}_1/\gamma^2, \tag{4.112}$$

де

$$\begin{gathered} \hat{\mu}_1 = 2/(2p-1) + 1, \\ \hat{\mu}_2 = (2p-1)^{-1}\left(2 + \frac{8(1-p)}{1-4p}\right) + 2/(2p-1) + 1. \end{gathered} \tag{4.113}$$

У нашому випадку оцінка має вигляд

$$E_2 = \mathbb{E}[T] \leq \hat{\mu}_1(1+\gamma)/\gamma.$$

Отже, бачимо, що

$$E_2 = (E_1 - \hat{\mu}_2/\gamma)(1+\gamma)\gamma,$$

для всіх $\gamma \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $\gamma(1+\gamma) < 1$. Це означає, зокрема, що E_2 є кращою оцінкою за E_1. У той же час, γ_0 як правило є малим числом, що робить γ дуже малим числом. Отже, покращення оцінки для практичних застосувань може бути суттєвим.

Розділ 5

Застосування максимального склеювання для оцінювання стійкості дискретних ланцюгів Маркова

5.1 Вступ

У цій частині дисертаційної роботи ми дослідимо задачу оцінки стійкості двох ланцюгів Маркова дискретних як за простором, так і за часом. Почнемо наш розгляд із однорідного випадку та покажемо, як отримані результати можуть бути перенесені на неоднорідний.

Під стійкістю будемо розуміти близькість перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній та зваженій нормах за умови, що перехідні ймовірності за один крок є близькими. При цьому ми не будемо припускати, що з часом різниця перехідних ймовірностей за один крок прямує до нуля.

Ми розглядатимемо ланцюги Маркова, які задовільняють умову рівномірного перемішування. В однорідному випадку це еквівалентно рівномірній ергодичності. Така умова є досить обтяжуючою, однак вона дозволяє отримати рівномірні оцінки стійкості. Для оцінки близькості перехідних ймовірностей будемо використовувати рівномірну норму на просторі скінчених знакозмінних мір (зарядів). Також покажемо, як змінюється результат, якщо замість рівномірної норми розглядати зважену, так звану V-норму.

Для оцінки близькості перехідних ймовірностей за один крок введемо умову рівномірної стійкості за один крок, яка полягатиме у тому, що для кожного стану i норма різниці перехідних ймовірностей зі стану i є рівномірно малою за

i.

Основним інструментом, який дозволить нам отримати шукані оцінки, є метод склеювання. Завдяки дискретності фазового простору ми зможемо побудувати склеювання, яке матиме певні оптимальні властивості, а також якісно описати структуру та властивості траєкторій склеєного процесу.

Наприкінці розділу ми покажемо, як отримані результати можуть бути застосовані до оцінки так званого стрес-фактору в актуарній моделі для сумісного страхування подружжя.

Розглянемо дискретний простір $E = \{i, j, k, ...\}$ із сигма-алгеброю всіх підмножин $\mathcal{E} = 2^E$. Основним вихідним об'єктом дослідження є пара стохастичних матриць $P = (P_{ij}, i, j \in E)$, $P' = (P'_{ij}, i, j \in E)$. Зауважимо, що в цьому розділі ми будемо активно використовувати символи i, j, k для позначення можливих станів відповідних ланцюгів, тому нам буде зручно відійти від позначень, прийнятих у попередніх розділах (де ми позначали різні об'єкти, що стосуються різних ланцюгів, верхніми індексами, наприклад $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$), і використовувати позначення без верхніх індексів для першого ланцюга і штрих для другого.

5.2 Оцінки стійкості для однорідних ланцюгів Маркова

Позначимо через $\mathbb{P}_i, \mathbb{E}_i$ умовні ймовірності та математичні сподівання на ймовірнісному просторі, де заданий ланцюг Маркова $X = (X_n, n \geq 0)$ з перехідною матрицею P за один крок, з початковою умовою $X_0 = i$. Аналогічний зміст мають позначення $\mathbb{P}'_i, \mathbb{E}'_i$ для ланцюга $X' = (X'_n, n \geq 0)$ з перехідною матрицею P'.

Надалі підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину індексів поширюється на простір E. Для матриці $Q = (Q_{ij})$ запис $Q^{(n)}$ є n-м степенем, а $Q_{i\bullet} = (Q_{ij}, j \in E)$ означає i-й рядок матриці Q. Позначення $x^{\pm}$ є додатною та від'ємною частиною числа x, $\delta_{ij} = 1_{i=j}$ - символи Кронекера.

5.2.1 Максимальне склеювання для однорідних ланцюгів Маркова з дискретним простором станів

У цьому розділі ми наведемо конструкцію максимального склеювання для двох різних однорідних ланцюгів Маркова (див. також [79]). Сама конструкція представляє певний інтерес, а також буде використана при доведенні основних результатів цього розділу.

Вважаємо, що задано дві перехідні ймовірності P та P', що діють на E. Позначимо множину $D = \{0, 1\}$ та визначимо ймовірність переходу за крок та траєкторії "склеєного" ланцюга Маркова $\overline{X}$ зі станами вигляду $\overline{X}_n = (X_n, X'_n, d_n) \in E{\times}E{\times}D$ так, щоб його координати X_n, X'_n були ланцюгами Маркова з перехідними матрицями P, P' та мали б найбільшу ймовірність склеювання $\{X_n = X'_n\}$. Умовні ймовірності та умовні сподівання для такого ланцюга за умови $\overline{X}_0 = (i, k, d)$ будемо позначати через $\mathbb{P}_{ikd}$, $\mathbb{E}_{ikd}$ відповідно.

У наведених нижче означеннях може зустрітися розподіл на E вигляду a_j/a, де $a = 0$. За означенням оберемо його рівним фіксованому розподілу, наприклад, δ_{oj}, $j \in E$. Цей вибір не впливає на результат, оскільки гарантується, що $a = \sum a_j$, тобто відповідні події не відбудуться м.н.

Визначимо початковий стан $\overline{X}_0 = (i, k, \delta_{ik})$.

1. Розклеювання за крок.

Визначимо субстохастичну матрицю $Q = (Q_{ij})$ та вектор вагів:

$$Q_{ij} = \min(P_{ij},\ P'_{ij}),\ \ q_i = \sum\nolimits_j Q_{ij}. \tag{5.1}$$

Розглянемо субстохастичні матриці

$$R = (R_{ij}) = P - Q,\ \ R' = (R'_{ij}) = P' - Q,$$

$$R_{ij} = (P_{ij} - P'_{ij})^+,\ \ \ R'_{ij} = (P'_{ij} - P_{ij})^+, \tag{5.2}$$

де використано тотожність $x = \min(x, y) + (x - y)^+$.

Визначимо також субстохастичну $E \times E^2$ матрицю

$$h_{i,jl} = R_{ij}R'_{il}\ /\ (1 - q_i),\ i, j, l \in E. \tag{5.3}$$

Оберемо перехідні ймовірності ланцюга $\overline{X}$ за один крок зі станів з $d_0 = 1$:

$$\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_1 = (j, l, 1)) = Q_{ij}\delta_{jl}, \quad j, l \in E, \tag{5.4}$$

$$\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_1 = (j, l, 0)) = h_{i,jl}, \quad j, l \in E. \tag{5.5}$$

Нескладний підрахунок показує, що

$$\mathbb{P}_{ii1}(X_1 = j, X_1' \in E, d_1 \in D) = P_{ij} = \mathbb{P}_i(X_1 = j),$$

$$\mathbb{P}_{ii1}(X_1 \in E, X_1' = l, d_1 \in D) = P_{il}' = \mathbb{P}_i'(X_1' = l), \tag{5.6}$$

тобто маргінальні ймовірності переходів для координат X_1, X_1' задаються матрицями P, P'. Крім того, з рівності $h_{i,jj} = 0$, що випливає з (5.2), виводимо, що при даному переході $\{d_1 = 1\} = \{X_1 = X_1'\}$.

2. Склеювання за крок

Визначимо при $i \neq k$ субстохастичні матриці та вектор вагів

$$g_{ik,j} = \min(P_{ij},\ P_{kj}'), \quad q_{ik} = \sum\nolimits_j g_{ik,j},$$

$$S_{ik,j} = P_{ij} - g_{ik,j} = (P_{ij} - P_{kj}')^+, \ \ S_{ik,l}' = P_{kl}' - g_{ik,l} = (P_{kl}' - P_{il})^+, \tag{5.7}$$

а також субстохастичну $E^2 \times E^2$ матрицю

$$T_{ik,jl} = S_{ik,j}\ S_{ik,l}' \ / \ (1 - q_{ik}). \tag{5.8}$$

Оберемо при $d_0 = 0, i \neq k$

$$\mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_1 = (j, l, 1)) = g_{ik,j}\delta_{jl}, \tag{5.9}$$

$$\mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_1 = (j, l, 0)) = T_{ik,jl}, \tag{5.10}$$

Як і вище, підсумовуванням знаходимо

$$\mathbb{P}_{ik0}(X_1 = j, X_1' \in E, d_1 \in D) = P_{ij} = \mathbb{P}_i(X_1 = j),$$

$$\mathbb{P}_{ik0}(X_1 \in E, X_1' = l, d_1 \in D) = P_{kl}' = \mathbb{P}_k'(X_1' = l). \tag{5.11}$$

З тотожності $T_{ik,jj} = 0$, що випливає з (5.7), виводимо, що $\{d_1 = 1\} = \{X_1 = X_1'\}$.

3. Побудова траєкторій.

Позначимо через $\mathfrak{P}$ злічленну сім'ю типів дискретних розподілів на E, склад якої визначається формулами (5.4), (5.5), (5.9), (5.10).

Розглянемо послідовність незалежних у сукупності випадкових величин $\mathfrak{C} = \cup_{n\geq 1}\mathfrak{C}_n$, де множина

$$\mathfrak{C}_n = \{(\chi_i^n, \varkappa_{ik}^n, i, k \in E),\ (\lambda_n(p), \lambda_n'(p), p \in \mathfrak{P})\}. \tag{5.12}$$

містить незалежні в сукупності випадкові величини такі, що

$$\chi_i^n, \varkappa_{ik}^n \in \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(\chi_i^n = 1) = q_i, \ \ \mathbb{P}(\varkappa_{ik}^n = 1) = q_{ik},$$

$$\mathbb{P}(\lambda_n(p) = j) = \mathbb{P}(\lambda_n'(p) = j) = p_j, \ j \in E. \tag{5.13}$$

Визначимо початковий стан $\overline{X}_0 = (X_0, X_0', d_0) = (i, k, \delta_{ik}), i, k \in E$, а далі за індукцією при $n \geq 1$:

(0) на множині $\{X_{n-1} = i, X_{n-1}' = i, d_{n-1} = 1\}$ оберемо

$$Y_n = \lambda_n(Q_{i\bullet} \ / \ q_i),$$

$$X_n = \chi_i^n Y_n + (1 - \chi_i^n)\lambda_n(R_{i\bullet} \ / \ (1 - q_i)),$$

$$X_n' = \chi_i^n Y_n + (1 - \chi_i^n)\lambda_n'(R_{i\bullet}' \ / \ (1 - q_i)),$$

$$d_n = \chi_i^n = 1_{\{X_n = X_n'\}}. \tag{5.14}$$

(1) на множині $\{X_{n-1} = i, X_{n-1}' = k, d_{n-1} = 0\}, i \neq k$, оберемо

$$Y_n = \lambda_n(g_{ik,\bullet} \ / \ q_{ik}),$$

$$X_n = \varkappa_{ik}^n Y_n + (1 - \varkappa_{ik}^n)\lambda_n(S_{ik,\bullet} \ / \ (1 - q_{ik})),$$

$$X_n' = \varkappa_{ik}^n Y_n + (1 - \varkappa_{ik}^n)\lambda_n'(S_{ik,\bullet}' \ / \ (1 - q_{ik})),$$

$$d_n = \varkappa_{ik}^n = 1_{\{X_n = X_n'\}}. \tag{5.15}$$

З цього означення випливає, що послідовність $\overline{X}$ задовольняє рекурентне рівняння вигляду $\overline{X}_n = f(\overline{X}_{n-1}, \mathfrak{C}_n)$ з невипадковою функцією f. Враховуючи незалежність величин у системі $\mathfrak{C}$ при різних n, звідси виводимо марковську властивість послідовності $\overline{X}$, а з однакової розподіленості векторів $\mathfrak{C}_n$ - однорідність за часом ланцюга $\overline{X}$. Нарешті, формули (5.4),(5.5),(5.9),(5.10) за означенням збігаються з імовірностями переходів за один крок у (5.14),(5.15).

Далі, з урахуванням (5.6),(5.11) за індукцією виводимо, що для всіх $n \geq 1$, $i, k, j, l \in E$, $d = \delta_{ik}$ мають місце рівності

$$\mathbb{P}_{ikd}(X_n = j, X_n' \in E, d_n \in D) = P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j),$$

$$\mathbb{P}_{ikd}(X_n \in E, X'_n = l, d_n \in D) = P'^{(n)}_{kl} = \mathbb{P}'_k(X'_n = l),$$

$$\mathbb{P}_{ikd}(\{X_n = X'_n\}\Delta\{d_n = 1\}) = 0. \tag{5.16}$$

З цих рівностей випливає таке твердження.

Зауваження 5.1. Послідовність $\widetilde{X} = (X_n, X'_n) \in E^2$ є ланцюгом Маркова, що належить класу ланцюгів $\widetilde{Y} = (Y_n, Y'_n)$ таких, що

$$\mathbb{P}(Y_1 = j \mid \widetilde{Y}_0 = (i,k)) = P_{ij}, \;\; \mathbb{P}(Y'_1 = l \mid \widetilde{Y}_0 = (i,k)) = P'_{kl}.$$

Максимальна властивість $\widetilde{X}$ полягає у тому, що при однакових початкових імовірностях $\mathbb{P}(\widetilde{Y}_0 = (i,k)) = \mathbb{P}(\widetilde{X}_0 = (i,k))$ виконуються нерівності

$$\mathbb{P}(Y_1 = Y'_1) \leq \mathbb{P}(X_1 = X'_1). \tag{5.17}$$

5.2.2 Стійкість у рівномірній нормі

Позначимо через $\|\mu\| = \sum_j |\mu_j|$ норму повної варіації на просторі сумованих послідовностей $l_1(E) = \{\mu = (\mu_j, j \in E) : \|\mu\| < \infty\}$, $\mu Q_j = \sum_i \mu_i Q_{ij}$ - добуток міри μ на матрицю Q.

Умова рівномірної стійкості за один крок полягає у зближенні перехідних матриць P та P' у рівномірній нормі:

$$\exists\, \varepsilon \in (0,1) : r(P,P') \equiv \sup_i \left\|P_{i\bullet} - P'_{i\bullet}\right\|/2 \leq \varepsilon. \tag{5.18}$$

Ця умова еквівалентна нерівності $\|\mu P - \mu P'\| \leq 2\varepsilon \|\mu\|$ для всіх мір μ.

У подальшому у схемі серій можна припускати, що $P' \longrightarrow P$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$, однак наведені нижче результати мають форму нерівностей та можуть бути застосовані і для фіксованих $\varepsilon > 0$.

Умова рівномірного перемішування зводиться до відділення від одиниці взаємного коефіцієнта перемішування:

$$\exists\, \rho \in (0,1) : \rho(P,P') \equiv \sup_{i \neq k} \left\|P_{i\bullet} - P'_{k\bullet}\right\|/2 \leq \rho. \tag{5.19}$$

Зауваження 5.2. Для виконання (5.19) при малих ε у (5.18) необхідно і достатньо виконання звичайної умови рівномірного перемішування на P вигляду $\rho(P,P) \leq \rho_0 < 1$, оскільки $|\rho(P',P) - \rho(P,P)| \leq r(P,P')$, та $\rho(P,P') \leq \rho_0 + \varepsilon < 1$ при достатньо малому $\varepsilon > 0$. У свою чергу, вказана умова на P еквівалентна нерівності операторного стискання

$$\|\mu P\| \leq \rho_0 \|\mu\|, \quad \forall \mu \in l_1^0(E) \equiv l_1(E) \cap \{\mu : \mu(E) = 0\}. \tag{5.20}$$

Доведення. Нерівність для приросту відстані ρ випливає з нерівності трикутника для норми $\|\|$. Нерівність стискання еквівалентна цій же нерівності для різниці точкових мір $\mu_j = \delta_{ij} - \delta_{kj}$, оскільки останні породжують простір мір з $\mu(E) = 0$ при замиканні лінійної оболонки. □

Теорема 5.1. *Нехай виконана умова стійкості за крок (5.18), рівномірного перемішування (5.19), та $\varepsilon < 1-\rho$. Тоді для кожного $n \geq 1$ рівномірно за $i \in E$ виконуються нерівності*

$$\sup_{B\subset E} \left|\mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_i(X'_n \in B)\right| \leq \varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho) < \varepsilon/(1-\rho). \tag{5.21}$$

Доведення. Застосуємо вигляд маргінальних розподілів (5.16) ланцюга $\overline{X}$ та Лему 5.4:

$$\begin{gathered}\left|\mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_i(X'_n \in B)\right| = \left|\mathbb{P}_{ii1}(X_n \in B) - \mathbb{P}_{ii1}(X'_n \in B)\right| = \\ \left|\mathbb{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 0) - \mathbb{P}_{ii1}(X'_n \in B, d_n = 0)\right| \leq \\ \mathbb{P}_{ii1}(\{X_n \in B\}\Delta\{X'_n \in B\}, d_n = 0) \leq \mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0). \end{gathered} \tag{5.22}$$

Для виводу оцінки (5.21) оберемо у Лемі 5.5 $B = B' = E, A_n = \Omega$:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0) = \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \sum\nolimits_k \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1))\ r_k^{(n-t)} \leq \\ \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \sup_k r_k^{(n-t)} \sum\nolimits_k \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1)) \leq \\ \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \sup_k r_k^{(n-t)} \leq \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \varepsilon\rho^{n-t} = \varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho), \end{gathered} \tag{5.23}$$

де враховані на підставі Лем 5.3, 5.5 співвідношення

$$\begin{gathered} r_k^{(s)} = \sum\nolimits_{j\neq l} h_{k,jl}(T^{(s)}1)_{jl} \leq \\ \left(\sum\nolimits_{j\neq l} h_{k,jl}\right) \sup_{j\neq l}(T^{(s)}1)_{jl} \leq (1-q_k)\rho^s \leq \varepsilon\rho^s. \end{gathered}$$

Підстановка (5.23) у (5.22) призводить до лівої нерівності у (5.21). Права нерівність очевидна. □

Наслідок 5.1. *В умовах Теореми 5.1 для кожного* $n \geq 1$

$$\sup_{i,k} \sup_{B \subset E} \left| \mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_k(X'_n \in B) \right| \leq \rho^n + \varepsilon(1 - \rho^n)/(1 - \rho). \tag{5.24}$$

Доведення. Обчислимо за строго марковською властивістю ланцюга $\overline{X}$:

$$\mathbb{P}_{ik0}(X_n \in B) =$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n, X_n \in B) + \sum_{1 \leq t \leq n} \sum_j \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j, j, 1), X_n \in B) =$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n, X_n \in B) + \sum_{1 \leq t \leq n} \sum_j \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j, j, 1)) \mathbb{P}_{jj1}(X_{n-t} \in B).$$

Шляхом віднімання аналогічної рівності для X'_n та підстановкою (5.16) і (5.21) звідси отримуємо при $i \neq k$

$$\left| \mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_k(X'_n \in B) \right| = \left| \mathbb{P}_{ik0}(X_n \in B) - \mathbb{P}_{ik0}(X'_n \in B) \right| \leq$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n, \{X_n \in B\} \Delta \{X'_n \in B\}) +$$
$$\sum_{t \leq n} \sum_j \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j, j, 1)) \left| \mathbb{P}_{jj1}(X_{n-t} \in B) - \mathbb{P}_{jj1}(X'_{n-t} \in B) \right| \leq$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n) + \sum_{t \leq n} \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t)\ \varepsilon/(1 - \rho) =$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n) + \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 \leq n) \varepsilon/(1 - \rho) = \varepsilon/(1 - \rho) + (1 - \varepsilon/(1 - \rho)) \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > n) =$$
$$\varepsilon/(1 - \rho) + (1 - \varepsilon/(1 - \rho)) T^{(n)} 1_{ik} \leq$$
$$\varepsilon/(1 - \rho) + (1 - \varepsilon/(1 - \rho)) \rho^n,$$

де враховані Леми 5.1 та 5.2. Оцінка (5.24) при $i = k$ випливає з (5.21). □

Наслідок 5.2. *В умовах Теореми 5.1 ланцюги* X, X' *є ергодичними з інваріантними та граничними мірами* π, π', *причому*

$$\sup_{B \subset E} |\pi(B) - \pi'(B)| \leq \varepsilon/(1 - \rho). \tag{5.25}$$

Доведення. Нехай μ - ймовірнісна міра на E. Розглянемо міру

$$\pi = \mu - \sum_{n \geq 0} \mu(I - P) P^{(n)}. \tag{5.26}$$

Оскільки $\mu(I - P) \in l_1^0(E)$, то внаслідок (5.20) ряд у (5.26) збігається у нормі повної варіації, оскільки $\left\| \mu(I - P) P^{(n)} \right\| \leq \rho^n \left\| \mu(I - P) \right\|$. Зокрема, має місце збіжність частинних сум:

$$\mu - \sum_{t < n} \mu(I - P) P^{(t)} = \mu P^{(n)} \longrightarrow \pi, n \longrightarrow \infty.$$

Звідси виводимо інваріантність $\pi = \pi P$, а з теореми про стискаюче відображення та з (5.20) отримуємо єдиність міри π. Далі, враховуючи умову $\varepsilon + \rho < 1$ та Зауваження 5.1, аналогічно виводимо ергодичність ланцюга X'.

Нарешті, нерівність (5.26) доводимо шляхом граничного переходу $n \longrightarrow \infty$ у оцінці (5.21) Теореми 5.1 □

У наступному твердженні наведено оцінку стійкості через дещо більш точний показник.

Теорема 5.2. *Нехай матриці T та h визначені при побудові склеєного ланцюга у (5.3), (5.8), ланцюг X має інваріанту міру π, та виконана умова мінімального перемішування*

$$\forall i, k \in E : \lim_{n\to\infty} T^{(n)} 1_{ik} = 0. \tag{5.27}$$

Тоді для всіх $n \geq 1$ виконуються нерівності

$$\sup_{B\subset E} \left| \mathbb{P}'_\pi(X'_n \in B) - \pi(B) \right| \leq$$

$$\sup_{B\subset E} \sum\nolimits_i \pi_i \left| \mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_i(X'_n \in B) \right| \leq \varepsilon_T, \tag{5.28}$$

де

$$\varepsilon_T \equiv \pi h (I - T)^{-1} 1. \tag{5.29}$$

В умовах Теореми 5.1 має місце (5.27) та з (5.28) випливають нерівності

$$\sup_{B\subset E} |\pi(B) - \pi'(B)| \leq \varepsilon_T \leq \varepsilon/(1-\rho). \tag{5.30}$$

Доведення. Застосуємо нерівність (5.22), тотожності Леми 5.5 при $A_n = \Omega$ та включення $\{\overline{X}_s = (k,k,0)\} \subset \{X_s = k\}$:

$$\left| \mathbb{P}'_\pi(X'_n \in B) - \pi(B) \right| = \left| \sum\nolimits_i \pi_i (\mathbb{P}'_i(X'_n \in B) - \mathbb{P}_i(X_n \in B)) \right| \leq$$

$$\sum\nolimits_i \pi_i \left| \mathbb{P}'_i(X'_n \in B) - \mathbb{P}_i(X_n \in B) \right| \leq \sum\nolimits_i \pi_i \mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0) =$$

$$\sum\nolimits_i \pi_i \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \sum\nolimits_k \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (k,k,0)) r_k^{(n-t)} \leq$$

$$\sum\nolimits_i \pi_i \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \sum\nolimits_k \mathbb{P}_i(X_{t-1} = k) r_k^{(n-t)} = \sum\nolimits_{1\leq t\leq n} \sum\nolimits_k \pi_k r_k^{(n-t)} =$$

$$\sum\nolimits_{0\leq s<n} \sum\nolimits_k \pi_k (hT^{(s)})_k \leq \sum\nolimits_{0\leq s} \pi h T^{(s)} 1 = \varepsilon_T.$$

Перша нерівність у (5.30) виводиться з урахуванням ергодичності граничним переходом $n \longrightarrow \infty$ у (5.28). Друга нерівність випливає з (5.23) □

Зауваження 5.3. Умова (5.27) означає, що склеювання відбувається майже напевне з кожного початкового розклеєного стану. Показник (5.29) дорівнює усередненому часу до склеювання на події, що полягає у розклеюванні за один крок. Внаслідок (5.18) можна очікувати на малість ε_T. Скінченність ε_T є достатньою умовою справедливості (5.28), а (5.27) - необхідною.

Приклад 5.1. Нехай $E = \{1, 2\}$, $P_{12} = \alpha_1$, $P_{21} = \alpha_2$, $\alpha_i \in (0, 1)$, та $P'_{12} = \alpha_1 - \varepsilon d_1$, $P'_{21} = \alpha_2 - \varepsilon d_2$. Для виконання умови (5.18) на $\varepsilon > 0$ необхідно і достатньо, щоб $|d_i| \leq 1$. Нерівність (5.25) з точністю до $O(\varepsilon^2)$ має вигляд

$$\varepsilon(d_2\alpha_1 - d_1\alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \leq \varepsilon/(1 - |1 - \alpha_1 - \alpha_2|).$$

Оцінка (5.25) у даному прикладі є точною за порядком ε (першого порядку), а при $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ стала при ε для максимально можливої похибки ($d_1 = -1, d_2 = 1$) також набуває точного значення $1/(\alpha_1 + \alpha_2)$.

У випадку ж, коли $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, відносна похибка у сталій може бути зроблена як завгодно великою при $\alpha_1 + \alpha_2 \uparrow 2$. Це свідчить про ту обставину, що нерівність (5.25) для граничних імовірностей не має самостійного значення, а є наслідком стійкості допграничних імовірностей (5.21). А остання якраз для перехідної матриці $P_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ з $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ порушується внаслідок періодичності: при збуренні $P'_{12} = 1 - \varepsilon < 1$ маємо

$$\sup_{n>0}(P_{11}^{(2n)} - P_{11}^{\prime(2n)}) = \sup_{n>0}(1 - (1 + (1 - \varepsilon)^{2n+1})/(2 - \varepsilon)) = (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon),$$

що не прямує до нуля при $\varepsilon \longrightarrow 0$, на відміну від перехідних імовірностей за один крок.

Отже, можливі похибки у сталій є наслідком неоптимальності використання коефіцієнта перемішування в оцінці стійкості саме граничних імовірностей. Більш точні аналітичні методи для цього викладені у [93].

Зауваження 5.4. Якщо умову рівномірного перемішування (5.19) замість матриць P, P' задовольняють їх степені $P^{(m)}, P'^{(m)}$, то нерівності Теореми 5.1 та Наслідків 5.1, 5.2 залишаються справедливими після заміни у їх правих частинах величини ε на показник $r(P^{(m)}, P'^{(m)}) \leq m\varepsilon$, та додавання до них поправки $(m - 1)\varepsilon$.

Доведення. Розглянемо для фіксованого n функції

$$f_i = \mathbb{P}_i(X_n \in B) = (P^{(n)} 1_B)_i, \quad f'_i = \mathbb{P}'_i(X'_n \in B) = (P'^{(n)} 1_B)_i.$$

За означенням $\mathbb{P}_i(X_{n+t} \in B) = P^{(t)} f_i$, $\mathbb{P}'_i(X'_{n+t} \in B) = P'^{(t)} f'_i$. Оскільки $|Pg_i - P'g_i| \leq \varepsilon \sup g$ для невід'ємних обмежених функцій g за умовою (5.18), то з тотожності

$$P^{(t)} f - P'^{(t)} f' = P^{(t)}(f - f') + \sum\nolimits_{0 \leq s < t} P^{(t-1-s)}(P - P')P'^{(s)} f'$$

з урахуванням стохастичності матриць P, P' виводимо при $t < m, t+n = 0 \ mod \ m$, що

$$\left|P^{(t)} f - P'^{(t)} f'\right| \leq \sup\nolimits_i \left|f_i - f'_i\right| + \sum\nolimits_{0 \leq s < t} \varepsilon \leq \sup\nolimits_i \left|f_i - f'_i\right| + (m-1)\varepsilon.$$

Оскільки нерівності (5.21) та (5.25) виконуються при $t + n = 0 \ mod \ m$, звідси отримуємо шукане.

Нерівність $r(P^{(m)}, P'^{(m)}) \leq m \, r(P, P')$ виводиться з наведеної вище тотожності після підстановки $f = f' = 1_B$ та $t = m$. □

Приклад 5.2. Нехай ланцюги X, X' задовольняють умову Колмогорова: існують $o \in E, m \geq 1, d > 0$ такі, що $P^{(m)}_{io} \geq d$, $P'^{(m)}_{io} \geq d$, для всіх $i \in E$. Тоді

$$\sup\nolimits_{n \geq 1} \sup\nolimits_i \sup\nolimits_{B \subset E} \left|\mathbb{P}_i(X_n \in B) - \mathbb{P}'_i(X'_n \in B)\right| \leq \varepsilon m/d + \varepsilon(m-1).$$

Доведення. Обчислимо показник (5.19)

$$\rho(P, P') = \sup\nolimits_{i \neq k} \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right| /2 = \sup\nolimits_{i \neq k} \left(1 - \sum\nolimits_j \min(P_{ij}, P'_{kj})\right) \leq$$
$$1 - \inf\nolimits_{i \neq k} \min(P_{io}, P'_{ko}) \leq 1 - d = \rho < 1.$$

Решта випливає з (5.21), (5.24) та Зауваження 5.4.

□

5.2.3 V-стійкість однорідних ланцюгів Маркова

Нехай $V = (V_j, j \in E)$ - деяка додатна пробна функція, обмежена чи необмежена. В подальшому будемо вважати, що

$$V_i \geq 1, \quad \sum\nolimits_j P_{ij} V_j < \infty, \quad \sum\nolimits_j P'_{ij} V_j < \infty, \quad i \in E. \tag{5.31}$$

Умова V-стійкості за один крок полягає у малості операторної норми [93]

$$\exists \, \varepsilon_V > 0 : \|P - P'\|_V \equiv \sup\nolimits_i V_i^{-1} \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{ij}\right| V_j \leq \varepsilon_V. \tag{5.32}$$

Замість умови рівномірного перемішування будемо використовувати *умову сильного перемішування* в термінах функції V :

$$\exists\ \rho_V < 1 : \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right| V_j \le \rho_V (V_i + V_k), \ \ \forall i \ne k \in E. \tag{5.33}$$

Зауваження 5.5. У загальному випадку умови (5.32) і (5.33) не випливають відповідно з (5.18), (5.19). Однак при $V \equiv 1$ ці пари умов еквівалентні. Крім того, наведене у Зауваженні 5.2 твердження залишається змістовним і у даному випадку: умову (5.33) можна при малих $\varepsilon_V > 0$ накладати лише на матрицю P.

Теорема 5.3. *Нехай виконуються умови V-стійкості за крок (5.32) та сильного перемішування (5.33). Тоді для всіх $i \in E$ та $n \ge 1$ виконується нерівність*

$$\sup\nolimits_{|f| \le V} \left|\mathbb{E}_i f(X_n) - \mathbb{E}'_i f(X'_n)\right| \le \varepsilon_V K_i^{(n)} (1 - \rho_V^n)/(1 - \rho_V), \tag{5.34}$$

де

$$K_i^{(n)} = \sup\nolimits_{t<n} \mathbb{E}_i V(X_t). \tag{5.35}$$

Доведення. Позначимо $W(j,l) \equiv V_j + V_l, j, l \in E$. Нехай $|f_i| \le V_i, i \in E$.

Проінтегруємо функцію $f = (f_i)$ на множинах $B \subset E$ у рівності (5.72) Леми 5.4 та отримаємо:

$$\mathbb{E}_{ii1}(f(X_n), d_n = 1) = \mathbb{E}_{ii1}(f(X'_n), d_n = 1). \tag{5.36}$$

Звідси

$$\left|\mathbb{E}_i f(X_n) - \mathbb{E}'_i f(X'_n)\right| = \left|\mathbb{E}_{ii1} f(X_n) - \mathbb{E}_{ii1} f(X'_n)\right| =$$
$$\left|\mathbb{E}_{ii1}(f(X_n), d_n = 0) - \mathbb{E}_{ii1}(f(X'_n), d_n = 0)\right| \le \mathbb{E}_{ii1}(W(X_n, X'_n), d_n = 0). \tag{5.37}$$

Скінченність правої частини доведена нижче, звідки випливає скінченність лівої.

Підсумуємо функцію $W(j,l)$ за мірами від множин $B \times B' \subset E \times E$ у рівності (5.73) Леми 5.5, матимемо з урахуванням означення (5.74)

$$\mathbb{E}_{ii1}(W(X_n, X'_n), d_n = 0) =$$

$$\sum\nolimits_{1 \le t \le n} \sum\nolimits_k \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (k, k, 1))(hT^{(n-t)}W)_k \le$$
$$\sum\nolimits_{1 \le t \le n} \sum\nolimits_k \mathbb{P}_{ii1}(X_{t-1} = k)(hT^{(n-t)}W)_k \le$$

$$\sum\nolimits_{1\le t\le n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_i(X_{t-1}=k)V_kC^{(n-t)}=$$
$$\sum\nolimits_{1\le t\le n}\mathbb{E}_iV(X_{t-1})C^{(n-t)}\le K_i^{(n)}\sum\nolimits_{s<n}C^{(s)},\tag{5.38}$$

де стала

$$C^{(s)}\equiv \sup\nolimits_k V_k^{-1}(hT^{(s)}W)_k=\sup\nolimits_k V_k^{-1}\sum\nolimits_{j\ne l}h_{k,jl}(T^{(s)}W)_{jl}=$$
$$\sup\nolimits_k V_k^{-1}\sum\nolimits_{j\ne l}h_{k,jl}W_{jl}W_{jl}^{-1}(T^{(s)}W)_{jl}\le$$
$$\sup\nolimits_k V_k^{-1}(hW)_k\ \sup\nolimits_{j\ne l}W_{jl}^{-1}(T^{(s)}W)_{jl}.\tag{5.39}$$

У правій частині (5.39) внаслідок означення (5.3) та Леми 5.1

$$V_k^{-1}(hW)_k=V_k^{-1}\sum\nolimits_{j\ne l}h_{k,jl}(V_j+V_l)=V_k^{-1}\sum\nolimits_{j\ne l}R_{kj}R'_{kl}(V_j+V_l)/(1-q_k)=$$
$$V_k^{-1}\left(\sum\nolimits_j R_{kj}V_j+\sum\nolimits_l R'_{kl}V_l\right)=V_k^{-1}\sum\nolimits_j\left|P_{kj}-P'_{kj}\right|V_j\le\varepsilon_V\tag{5.40}$$

за умовою (5.32).

Далі, за Лемою 5.1 та означеннями (5.7), (5.8)

$$TW_{ik}=\sum\nolimits_{j\ne l}T_{ik,jl}(V_j+V_l)=\sum\nolimits_j\sum\nolimits_l T_{ik,jl}V_j+\sum\nolimits_l\sum\nolimits_j T_{ik,jl}V_l=$$
$$\sum\nolimits_j(P_{ij}-g_{ik,j})V_j+\sum\nolimits_l(P'_{kl}-g_{ik,l})V_l=$$
$$\sum\nolimits_j(P_{ij}-P'_{kj})^+V_j+\sum\nolimits_j(P'_{kj}-P_{ij})^+V_j=$$
$$\sum\nolimits_j\left|P_{ij}-P'_{kj}\right|V_j\le\rho_V(V_i+V_k)=\rho_VW_{ik}\tag{5.41}$$

за умови (5.33). Звідси за індукцією виводимо, що

$$T^{(s)}W_{ik}\le\rho_V^sW_{ik},\ s\ge1,i\ne k\in E.\tag{5.42}$$

Шляхом підстановки цієї нерівності і (5.40) у (5.38) та (5.39), отримуємо

$$\mathbb{E}_{ii1}(W(X_n,X'_n),d_n=0)\le K_i^{(n)}\sum\nolimits_{0\le s<n}\varepsilon_V\rho_V^s,$$

що і доводить (5.34). □

Зауваження 5.6. З припущення (5.31) випливає, що ліва частина (5.21) не перевищує 1/2 від лівої (та правої) частини (5.34).

Приклад 5.3. Існують навіть скінченні ланцюги Маркова, для яких умова рівномірного перемішування (5.18) порушується, однак виконана умова сильного перемішування (5.33) при належному виборі пробної функції V. Так, для ланцюга з $E = \{0, 1, 2\}$ з перехідною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показник $r(P, P) = 1$, однак при виборі $V = (1, 1, v)$, де стала $v \in (1, 1 + 2\beta/\gamma)$, виконуються умова (5.33) при $P' = P$.

Доведення. Порушення умови рівномірного перемішування спричиняється сингулярністю першого та останнього рядків матриці P. Система (5.33) має вигляд

$$\begin{aligned} \alpha + 1 - \beta + \gamma v &< 1 + 1, \\ 1 + 1 &< 1 + v, \\ 1 - \alpha + \beta + \gamma v &< 1 + v \end{aligned}$$

та має розв'язок $v \in (1, 1 + 2\beta/\gamma)$ ⊡

□

Наслідок 5.3. *Нехай для ланцюга X з перехідною матрицею P знайдеться множина станів $O \subset E$ та стала $\rho_O < 1$ такі, що для деякої пробної функції $V = (V_j, j \in O \cup \overline{O})$ виконуються умови:*

$$\sum\nolimits_{j \in O} P_{ij} V_j + \sum\nolimits_{j \notin O} P_{ij} V_j \le \rho_O V_i, \;\; \forall i \notin O, \quad V_i \ge 1, \; i \in E, \tag{5.43}$$

$$\sum\nolimits_j \left| P_{ij} - P_{kj} \right| V_j \le \rho_O (V_i + V_k), \;\; \forall i \in E, k \in O, i \ne k. \tag{5.44}$$

Якщо виконується умова V-стійкості за крок (5.32) та $\varepsilon_V < 1 - \rho_O$, то для всіх $i \in E$ та $n \ge 1$ виконується нерівність

$$\sup\nolimits_{|f| \le V} \left| \mathbb{E}_i f(X_n) - \mathbb{E}'_i f(X'_n) \right| \le \varepsilon_V K_i^{(n)} / (1 - \rho_O - \varepsilon_V), \tag{5.45}$$

де

$$K_i^{(n)} = \sup\nolimits_{t<n} \mathbb{E}_i V(X_t) \le \max(V_i, \; \sup\nolimits_{i \in O} \sum\nolimits_j P_{ij} V_j / (1 - \rho_O)). \tag{5.46}$$

Доведення. Перевіримо умову сильного перемішування (5.33) при $\rho_V = \rho_O + \varepsilon_V$.

Нехай $i \notin O, k \notin O, i \neq k$. Тоді внаслідок (5.43)

$$\sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P_{kj}\right| V_j \leq \sum\nolimits_{j\in O} \left|P_{ij} - P_{kj}\right| V_j + \sum\nolimits_{j\notin O} (P_{ij} + P_{kj}) V_j \leq$$

$$\sum\nolimits_{j\in O} \left|P_{ij} - P_{kj}\right| V_j + \rho_O V_i - \sum\nolimits_{j\in O} P_{ij} V_j + \rho_O V_k - \sum\nolimits_{j\in O} P_{kj} V_j \leq$$

$$\rho_O(V_i + V_k). \tag{5.47}$$

Припустимо, що $i \neq k, k \in O$. Тоді нерівність (5.47) еквівалентна умові (5.44). Випадок $i \neq k, i \in O$ симетричний.

Отже, внаслідок доведених нерівностей вигляду (5.47) та (5.32) маємо при всіх $i \neq k$

$$\sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right| V_j \leq \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P_{kj}\right| V_j + \varepsilon_V V_k \leq$$

$$\rho_O(V_i + V_k) + \varepsilon_V V_k < (\rho_O + \varepsilon_V)(V_i + V_k).$$

Тому (5.45) випливає з (5.34).

Для виводу (5.46) з (5.35) позначимо $k_i^{(n)} \equiv \mathbb{E}_i V(X_n)$, $K_O \equiv \sup_{i\in O} PV_i$ та зауважимо, що $\mathbb{E}_i V(X_1) \leq \rho_O V_i$ при $i \notin O$ внаслідок (5.43).

За марковською властивістю ланцюга X

$$k_i^{(n)} = \mathbb{E}_i \left(1_{\{X_{n-1}\in O\}} \mathbb{E}_{X_{n-1}} V(X_1) + 1_{\{X_{n-1}\notin O\}} \mathbb{E}_{X_{n-1}} V(X_1)\right) \leq$$

$$\mathbb{E}_i(K_O + \rho_O V(X_{n-1})) = K_O + \rho_O k_i^{(n-1)}, \; n \geq 1.$$

Звідси за індукцією

$$k_i^{(n)} \leq K_O(1 - \rho_O^n)/(1 - \rho_O) + \rho_O^n V_i, \;\; n \geq 0.$$

та внаслідок монотонності правої частини за n

$$K_i^{(n)} \leq \sup\nolimits_{m\geq 0} k_i^{(m)} \leq \max(k_i^{(0)}, k_i^{(\infty)}) = \max(V_i, K_O/(1 - \rho_O)),$$

що і доводить (5.46).

□

Зауваження 5.7. У випадку, коли $E = \mathbb{Z}_+$, нерівності (5.43) перетворюються на рівності при $V_i = \mathbb{E}_i v^{\theta_0}, i \notin O$, для деякого $v > 1$, та $V_i = 1, i \in O$, де момент досягнення $\theta_0 = \inf(n \geq 1 : X_n \in O)$, а $\rho_O = v^{-1}$, у припущенні скінченності V_i. У загальному випадку форма умов (5.43), (5.44) обумовлена доцільним методом їх перевірки. На першому етапі фіксуємо значення $(V_i, i \in O)$, що входять у ліву частину, та розв'язуємо систему нерівностей (5.43) відносно $(V_i, i \notin O)$ - наприклад, через моменти першого досягнення множини O. А на другому етапі перевіряємо виконання (5.44), як це зроблено у наступному прикладі.

Приклад 5.4. Знайдемо достатні умови для виконання тверджень Наслідку 5.3 у випадку, коли $E = \mathbb{Z}_+$, а $O = \{0\}$.

Припустимо, ланцюг X має характер неоднорідного за простором випадкового блукання з мажорованими стрибками:

$$\exists\, \beta > 1 : \ \sup_{i \neq 0} \sum\nolimits_j P_{ij} \left(\beta^{j-i} + (i-j)^+\right) < \infty. \tag{5.48}$$

В такому разі можна розраховувати, що для часу досягнення $\theta_0 = \inf(n \geq 1 : X_n = 0)$ існує геометричний момент: $V_i(u) = \mathbb{E}_i u^{\theta_0} < \infty$ для деякого $u > 1$. Визначена функція задовольняє систему рівнянь $V_i(u)u^{-1} = P_{i0} + \sum_{j \neq 0} P_{ij} V_j(u), i \neq 0$. Якщо припустити також, що ланцюг однорідний за простором та неперервний знизу, то має місце зображення $V_i(u) = v^i, i \neq 0$, де $v = \mathbb{E}_1 u^{\tau_{10}}$, а моменти $\tau_{i,i-1}$ досягнення стану $i-1$ зі стану i незалежні однаково розподілені, причому $\theta_0 = \sum_{i=1}^{X_0} \tau_{i,i-1}$. Отже, функція $V = (V_i = v^i, i \neq 0)$ задовольняє умову (5.43) Наслідку 5.3 зі сталою $\rho_O = u^{-1} < 1$. З (5.43) виводимо, що $\sum_j P_{ij} V_j \leq \rho_O V_i$ для всіх $i \neq 0$, якщо обрати $V_0 = 1$. Замість усіх наведених припущень просто постулюємо, що

$$\exists\, \beta_0 > 1 : \ \sup_{i \neq 0} \beta_0^{-i} \sum\nolimits_j P_{ij} \beta_0^j < 1. \tag{5.49}$$

Для виконання (5.49) достатньо (див. [93]) щоб одночасно з (5.48) виконувалась умова

$$\sup_{i \neq 0} \Delta_i < 0, \quad \text{де} \quad \Delta_i \equiv \sum\nolimits_j (j-i) P_{ij}. \tag{5.50}$$

Внаслідок опуклості за β_0 виразу у (5.49) функція $V = (v^i, i \geq 0)$ задовольняє нерівності (5.49) при кожному $v \in (1, \beta_0]$.

Нарешті, припустимо, що при виході зі стану $i \neq 0$ ланцюг X повинен або рухатися до 0 з позитивною швидкістю, або ж відповідний розподіл виходу має "склеюватися" з розподілом виходу з 0 :

$$\sup_{i \neq 0} \min\left(\Delta_i + \Delta_0, \ \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P_{0j}\right| - 2\right) < 0. \tag{5.51}$$

За умов (5.48), (5.49), (5.50), (5.51) виконуються всі припущення Наслідку 5.3, та для всіх достатньо малих $v-1>0$ та деяких $\rho_v<1$ мають місце нерівності

$$\rho_i(v) \equiv (1+v^i)^{-1}\sum\nolimits_j \left|P_{ij}-P_{0j}\right| v^j \le \rho_v,\ i\neq 0. \tag{5.52}$$

Тому має місце стійкість (5.45).

Зокрема, згадані умови виконуються для однорідного за простором ланцюга народження та загибелі з м'яким відбиттям: $P_{00}=q$, $P_{01}=p=1-q$, при $q>2/3$, оскільки $\Delta_i+\Delta_0=2p-q<0, i>2$. Якщо ж має місце повне відбиття: $P_{00}=0$, $P_{01}=1, q\in(0,1)$, то умова (5.51) порушена: $\Delta_i+\Delta_0=p-q+1>0$. Пряма перевірка свідчить, що у кожному з зазначених випадків виконання (5.51) еквівалентне умові (5.33) Теореми 5.3.

Доведення. Для виведення умови (5.43) Наслідку 5.3 зауважимо, що функція у (5.49) є опуклою донизу від $\ln\beta_0$ та дорівнює 1 при $\beta_0=1$. Тому нерівність

$$\sum\nolimits_j P_{ij}v^{j-i}\le\rho<1,\quad i\neq 0,$$

виконується для кожного $v\in(1,\beta_0]$ при деяких $\rho<1$. Отже, $\rho v^i\ge\sum_j P_{ij}v^j=P_{i0}+\sum_{j\neq 0}P_{ij}v^j$, що доводить (5.43). Значення $V_0=1$ обрано за означенням.

Доведемо, що для всіх достатньо малих $v-1>0$ та для деяких $\rho_V<1$ мають місце оцінки (5.52).

Позначимо при $i\in E, v\in(1,\beta_0]$ функції

$$R_i(v)\equiv\left((1+v^i)^{-1}\sum(P_{ij}+P_{0j})v^j-1\right)/(v-1),$$

$$S_i(v)\equiv\sum\nolimits_j P_{ij}(v^{j-i}-1)/(v-1). \tag{5.53}$$

Зауважимо насамперед, що в умовах мажорування (5.48) за означенням Δ_i у (5.50)

$$S_i(v)-\Delta_i=o(1),\quad v\downarrow 1, \tag{5.54}$$

рівномірно за i.

Далі, за означеннями (5.53)

$$(1+v^i)R_i(v)-(v^i\Delta_i+\Delta_0)=$$

$$\sum\nolimits_j(P_{ij}(v^j-v^i)+P_{0j}(v^j-1))-(v^i\Delta_i+\Delta_0)=$$

$$v^i(S_i - \Delta_i) + S_0 - \Delta_0,$$

звідки внаслідок (5.54) рівномірно за $i \neq 0$

$$R_i(v) - (\Delta_i + \Delta_0)/2 = o(1), \quad v \downarrow 1. \tag{5.55}$$

Позначимо через $-2d < 0$ ліву частину (5.51).

(а) Нехай $i \neq 0$ такий стан, що мінімум у (5.51) досягається на першому показнику: $\Delta_i + \Delta_0 \leq -2d$. Тоді згідно з (5.53)

$$\rho_i(v) \leq (1 + v^i)^{-1} \sum\nolimits_j (P_{ij} + P_{0j}) v^j = 1 + (v-1)R_i(v) =$$

$$1 + (v-1)((\Delta_i + \Delta_0)/2 + o(1)) \leq$$

$$1 - (v-1)d + o(v-1) \leq 1 - (v-1)d/2 = \rho_v < 1,$$

починаючи з деякого $v - 1 > 0$ для всіх $i \neq 0$, оскільки $o(1)$ у (5.55) рівномірне за i.

(б) Нехай для $i \neq 0$ нерівність в умові (5.51) виконується за рахунок другого показника під знаком мінімуму: $\sum_j \left|P_{ij} - P_{0j}\right| - 2 \leq -2d$. Остання умова еквівалентна нерівності $\sum_j \min(P_{ij}, P_{0j}) \geq d$. Якщо обрати сталу N так, щоб $\sum_{j>N} P_{0j} < d/2$, то $\sum_{j \leq N} P_{ij} \geq \sum_{j \leq N} \min(P_{ij}, P_{0j}) \geq d/2$. Ця нерівність при фіксованому N суперечить умові (20) обмеженості сум $\sum_{j<i}(i-j)P_{ij} \geq (i-N)d/2 \longrightarrow \infty$ при $i \longrightarrow \infty$ по деякій послідовності станів i. Отже, має місце обмеженість $i \leq m$ для деякого фіксованого m при виконанні другої нерівності у (5.51).

Тому внаслідок (5.53), (5.55)

$$\rho_i(v) = (1 + v^i)^{-1} \left(\sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P_{0j}\right| + \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P_{0j}\right| (v^j - 1) \right) \leq$$

$$(1 + v^i)^{-1} \left(2 - 2d + \sum\nolimits_j (P_{ij} + P_{0j})(v^j - 1) \right) =$$

$$(1 + v^i)^{-1}(2 - 2d - 2 + (1 + v^i)(1 + (v-1)R_i(v))) =$$

$$1 - 2d(1 + v^i)^{-1} + (v-1)R_i(v) = 1 - d + o(1), \quad v \downarrow 1,$$

рівномірно за $i \leq m$. Отже, і в даному випадку $\rho_i(v) \leq 1 - d/2 = \rho_v$, починаючи з деякого достатньо малого $v - 1 > 0$, для всіх $i \leq m$.

$\square$

5.2.4 Стійкість скінченновимірних розподілів для однорідних ланцюгів Маркова

Наведені вище нерівності стосуються стійкості одновимірних маргінальних розподілів $P_i(X_n \in B)$. У загальному випадку суттєво розширити цей клас із збереженням стійкості без додаткових умов неможливо. Дійсно, нехай P, P' - різні перехідні матриці незвідних ланцюгів з рівномірним перемішуванням. Розглянемо випадкові події $A_{ij} = \{\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{t<n} 1_{\{X_t=j\}} = P_{ij}\}$, та аналогічні події A'_{ij} с заміною X_t на X'_t. Тоді $\mathbb{P}_i(A_{ij}) = 1$ та $\mathbb{P}'_i(A'_{ij}) = 0$ при $P_{ij} \neq P'_{ij}$. Отже, не можна розраховувати на стійкість імовірностей всіх подій $A \in \sigma[X_t, t \geq 1]$ при малих збуреннях (5.18) без додаткових умов.

Визначимо сигма-алгебри $\mathfrak{F}_n = \sigma[X_t, t \leq n]$, $\mathfrak{F}'_n = \sigma[X'_t, t \leq n]$ на просторах, де реалізовані траєкторії ланцюгів X, X'.

Нехай $(\mathfrak{F}_t)$-момент зупинки θ та $\mathfrak{F}_\theta$-вимірна величина φ задаються невипадковими множинами $B_n \subset E^n$ та функціями $\varphi_n : E^n \to \mathbb{R}$ так, що

$$\{\theta = n\} = \{(X_1, ..., X_n) \in B_n\}, \quad \varphi 1_{\{\theta=n\}} = \varphi_n(X_1, ..., X_n). \tag{5.56}$$

Означення 5.1. *Пара* (θ', φ') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та $\mathfrak{F}'_{\theta'}$-вимірної випадкової величини φ' відповідна до пари (θ, φ), якщо події $\{\theta' = n\}$ та величини $\varphi' 1_{\{\theta'=n\}}$ задаються тими самими B_n та φ_n, що і у (5.56). Аналогічно, пара (θ', A') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та події $A' \in \mathfrak{F}'_{\theta'}$ відповідна до пари (θ, A), якщо відповідними є пари $(\theta', 1_{A'})$ та $(\theta, 1_A)$.

Теорема 5.4. *Нехай виконується умова стійкості за крок (5.18), $\theta \geq 1$ - інтегрований $(\mathfrak{F}_t)$-момент зупинки, сталі $\alpha, \beta \geq 1$ - спряжені $(1/\alpha + 1/\beta = 1)$, а випадкова величина φ - невід'ємна, $\mathfrak{F}_\theta$-вимірна та $\varphi \in L_\alpha(\mathbb{P}_i)$. Якщо пара (θ', φ') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та $\mathfrak{F}'_{\theta'}$-вимірної випадкової величини φ' відповідна до пари (θ, φ), то*

$$\left|\mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}'_i\varphi'\right| \leq (\varepsilon \mathbb{E}_i\theta)^{1/\beta} K_i^{(\alpha)}(\varphi), \tag{5.57}$$

де

$$K_i^{(\alpha)}(\varphi) = \left(\max(\mathbb{E}_i\varphi^\alpha, \mathbb{E}'_i\varphi'^\alpha)\right)^{1/\alpha}.$$

Доведення. Розглянемо момент зупинки $\theta_1 \equiv \min(\theta, \tau_1^0)$ для ланцюга $\overline{X}$. Визначимо сталу

$$m \equiv \sup(n \geq 1 : \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n) > 0) + 1 \leq \infty.$$

З урахуванням розширеної марковської властивості $\overline{X}$ та нерівності $h1_i \leq \varepsilon 1_i$ Леми 5.1 виводимо при $n \geq 1$ тотожності

$$\mathbb{P}_{ii1}(\theta \geq \tau_1^0 = n) = \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1, \tau_1^0 = n) =$$

$$\sum\nolimits_j \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1, \tau_1^0 = n, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)) =$$

$$\sum\nolimits_j \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1))\mathbb{P}(\tau_1^0 = n \mid \theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1)) =$$

$$\sum\nolimits_j \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1))\mathbb{P}_{jj1}(\tau_1^0 = 1) \leq$$

$$\sum\nolimits_j \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1, \overline{X}_{n-1} = (j,j,1))\, \varepsilon = \varepsilon\, \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1). \tag{5.58}$$

Звідси отримуємо

$$\mathbb{P}_{ii1}(\theta \geq \tau_1^0) = \sum\nolimits_{1 \leq n < m} \mathbb{P}_{ii1}(\theta \geq \tau_1^0 = n) \leq$$

$$\varepsilon \sum\nolimits_{1 \leq n < m} \mathbb{P}_{ii1}(\theta_1 > n-1) = \varepsilon \mathbb{E}_{ii1}\theta_1. \tag{5.59}$$

Оскільки $\{\theta' \geq \tau_1^0\} = \{\theta \geq \tau_1^0\}$ внаслідок рівності $\theta = \theta'$ на множині $\{\theta' < \tau_1^0\} \cap \{\theta < \tau_1^0\}$, то

$$\mathbb{P}_{ii1}(\theta' \geq \tau_1^0) = \mathbb{P}_{ii1}(\theta \geq \tau_1^0) \leq \varepsilon \mathbb{E}_{ii1}\theta_1. \tag{5.60}$$

Для невід'ємної $(\mathfrak{F}_t)$–вимірної величини φ за означенням (5.56) наступні математичні сподівання однакові:

$$\mathbb{E}_{ii1}(\varphi 1_{\{\theta = n\}}, n < \tau_1^0) = \mathbb{E}_{ii1}(\varphi_n(X_1, ...X_n), n < \tau_1^0) =$$

$$\mathbb{E}_{ii1}(\varphi_n(X_1', ...X_n'), n < \tau_1^0) = \mathbb{E}_{ii1}(\varphi' 1_{\{\theta' = n\}}, n < \tau_1^0),$$

оскільки $(X_1, ...X_n) = (X_1', ...X_n')$ при $n < \tau_1^0$.

Тому

$$\mathbb{E}_{ii1}(\varphi, \theta < \tau_1^0) = \sum\nolimits_{n \geq 1} \mathbb{E}_{ii1}(\varphi 1_{\{\theta = n\}}, n < \tau_1^0) =$$

$$\sum\nolimits_{n \geq 1} \mathbb{E}_{ii1}(\varphi' 1_{\{\theta' = n\}}, n < \tau_1^0) = \mathbb{E}_{ii1}(\varphi', \theta' < \tau_1^0). \tag{5.61}$$

Звідси за нерівністю Гельдера

$$\mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}_i'\varphi' = \mathbb{E}_{ii1}\varphi - \mathbb{E}_{ii1}\varphi' = \mathbb{E}_{ii1}(\varphi, \theta \geq \tau_1^0) - \mathbb{E}_{ii1}(\varphi', \theta' \geq \tau_1^0) \leq$$

$$\mathbb{E}_{ii1}(\varphi 1_{\{\theta \geq \tau_1^0\}}) \leq (\mathbb{E}_{ii1}\varphi^\alpha)^{1/\alpha}(\mathbb{E}_{ii1}1^\beta_{\{\theta \geq \tau_1^0\}})^{1/\beta} \leq K_i^\alpha(\varphi)(\mathbb{P}_{ii1}(\theta \geq \tau_1^0))^{1/\beta}. \tag{5.62}$$

Аналогічно виводимо оцінку знизу

$$\mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}'_i\varphi' \geq -K_i^{\alpha}(\varphi)(\mathbb{P}_{ii1}(\theta' \geq \tau_1^0))^{1/\beta}. \tag{5.63}$$

Нарешті, застосуванням до (5.62) оцінки (5.59), а до (5.63) оцінки (5.60), з урахуванням нерівності $\mathbb{E}_{ii1}\theta_1 \leq \mathbb{E}_{ii1}\theta = \mathbb{E}_i\theta$, виводимо двосторонні нерівності (5.57) □

Наслідок 5.4. *Нехай виконується умова стійкості за крок (5.18), $\theta \geq 1$ - інтегрований $(\mathfrak{F}_t)$-момент зупинки, а подія $A \in \mathfrak{F}_\theta$. Якщо пара (θ', A') з $(\mathfrak{F}'_t)$-момента зупинки θ' та події $A' \in \mathfrak{F}'_{\theta'}$, відповідна до пари (θ, A), то*

$$\left|\mathbb{P}_i(A) - \mathbb{P}'_i(A')\right| \leq \varepsilon\mathbb{E}_i\theta. \tag{5.64}$$

Доведення. Після підстановки у (5.57) $\varphi = 1_A, \varphi' = 1_{A'}$ маємо $K_i^{\alpha}(\varphi) \leq 1$, а тому (5.64) виводиться з (5.107) спрямуванням $\beta \downarrow 1$. □

Приклад 5.5. Якщо виконується умова стійкості (5.18), $o \in E$ м.н. поглинаючий стан для ланцюгів X, X', а момент зупинки $\theta = \inf(t \geq 1 : X_t = o)$, то для всіх $A \in \mathfrak{F}_\infty$ та відповідних $A' \in \mathfrak{F}'_\infty$ має місце нерівність (5.64).

Доведення. Нехай $A \in \mathfrak{F}_\infty$, тобто $A = \{X_\infty \in B\}$, де $X_\infty = (X_n, n \geq 1) \in E^\infty$ - траєкторія ланцюга X, а $B \subset E^\infty$.

Визначимо для послідовності $x = (x_n, n \geq 1)$ проекцію $\pi_n(x) = (x_1, ...x_n)$.

Розглянемо множини $B_n = \cup_{x \in B}\{\pi_n(x)\}$,

$$B^n = B_n \times \{(o, o, ...)\} = \{(x_1, ...x_n, o, o...),\ (x_1, ...x_n) \in B_n\},$$

та подію $C_n = \cap_{t>n}\{X_t = o\}$.

Визначимо подію

$$\widetilde{A} = \cup_{n\geq 1}\{\theta = n\} \cap \{(X_1, ..., X_n) \in B_n\}.$$

За означенням $\widetilde{A} \in \mathfrak{F}_\theta$. Оскільки $\mathbb{P}_i(\theta = n, \overline{C_n}) = 0$ за властивістю поглинання м.н., то

$$\mathbb{P}_i(\theta = n,\ A\Delta\widetilde{A}) = \mathbb{P}_i(\theta = n,\ C_n,\ A\Delta\widetilde{A}) =$$

$$\mathbb{P}_i(\theta = n,\ C_n,\ \{X_\infty \in B\}\Delta\{(X_1, ...X_n) \in B_n\}) =$$

$$\mathbb{P}_i(\theta = n,\ C_n,\ X_\infty \in B\Delta B^n) = 0,$$

оскільки

$$\mathbb{P}_i(\theta = n,\ C_n,\ X_\infty \in B) = \mathbb{P}_i(\theta = n,\ C_n,\ X_\infty \in B^n)$$

за означенням множин B_n, B^n, C_n.

Отже, зі скінченності $\theta < \infty$ м.н. виводимо, що $\mathbb{P}_i(A\Delta\widetilde{A}) = 0$.

Застосуванням до події $\widetilde{A} \in \mathfrak{F}_\theta$ Теореми 5.4, отримуємо твердження прикладу.

□

Приклад 5.6. За умови (5.18) для $A \in \mathfrak{F}_m$ та відповідної події $A' \in \mathfrak{F}'_m$ виконується нерівність $\left|\mathbb{P}_i(A) - \mathbb{P}'_i(A')\right| \le \varepsilon m$.

Доведення. Марковська властивість $\widetilde{X}$ випливає з (5.16), оскільки $\overline{X}_n = (X_n, X'_n, d_n)$ - ланцюг Маркова, а $d_n = 1_{\{X_n = X'_n\}}$ м.н. Нерівність (5.17) виводиться з теореми Монжа (див [164] та [134]) внаслідок означень (5.1) та (5.7) для перехідних імовірностей ланцюга $\widetilde{X}$, куди входить мінімум з двох можливих маргінальних розподілів в кожному з двох можливих випадків: $i = k$ та $i \neq k$. □

5.2.5 Допоміжні леми

Лема 5.1. *У позначеннях розділу 5.2.1 (про максимальне склеювання) виконуються співвідношення*

$$R1_i = R'1_i = h1_i = 1 - q_i,\ \ r(P,P') = \sup\nolimits_i(1 - q_i), \tag{5.65}$$

$$S1_{ik} = S'1_{ik} = T1_{ik} = 1 - g1_{ik} = 1 - q_{ik},\ \ \rho(P,P') = \sup\nolimits_{i\neq k}(1 - q_{ik}). \tag{5.66}$$

Зокрема, за умов (5.18), (5.19)

$$R1_i = R'1_i = h1_i \le r(P,P') \le \varepsilon,$$

$$S1_{ik} = S'1_{ik} = T1_{ik} = 1 - g1_{ik} \le \rho(P,P') \le \rho,$$

$$T^{(s)}1_{ik} \le \rho^s \to 0,\ s \to \infty. \tag{5.67}$$

Доведення. З (5.2) виводимо:

$$R1_i = (P - Q)1_i = 1 - \sum\nolimits_j Q_{ij} = 1 - q_i,\ \ R'1_i = 1 - q_i,$$

$$h1_i = \sum\nolimits_{j,l} R_{ij}R'_{il}/(1-q_i) = \sum\nolimits_j R_{ij} \sum\nolimits_l R'_{il}/(1-q_i) = 1-q_i,$$

$$r(P,P') = \sup_i \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{ij}\right|/2 = \sup_i \sum\nolimits_j (R_{ij} + R'_{ij})/2 = \sup_i (1-q_i),$$

що доводить (5.65).

Аналогічно з (5.7), (5.8) виводимо (5.66)

$$S1_{ik} = (P-g)1_{ik} = 1 - g1_{ik} = 1 - q_{ik}, \quad S'1_{ik} = 1 - q_{ik},$$

$$T1_{ik} = \sum\nolimits_{j,l} S_{ik,j}S'_{ik,l}/(1-q_{ik}) = \sum\nolimits_j S_{ik,j} \sum\nolimits_l S'_{ik,l}/(1-q_{ik}) = 1-q_{ik},$$

$$\rho(P,P') = \sup_{i\neq k} \sum\nolimits_j \left|P_{ij} - P'_{kj}\right|/2 =$$

$$\sup_{i\neq k} \sum\nolimits_j (S_{ik,j} + S'_{ik,j})/2 = \sup_{i\neq k}(1-q_{ik}).$$

Застосуванням умов (5.105), (5.106) до рівностей (5.65),(5.66) виводимо перші дві нерівності у (5.67).

Нарешті, з другої нерівності (5.67) з урахуванням невід'ємності матриці T за індукцією виводимо

$$T^{(s)}1_{ik} = (T^{(s-1)}(T1))_{ik} \leq (T^{(s-1)}(\rho 1))_{ik} = \rho T^{(s-1)}1_{ik} \leq \ldots \leq \rho^s 1$$

□

Надалі покладемо за означенням $\inf(\varnothing) = \infty$.

Означення 5.2. Визначимо рекурентно моменти переключення для координати d_n склеєного процесу $\overline{X}$:

$$\tau_0^{d_0} = 0, \;\; \tau_m^d = \inf(n > \tau_{m-1}^{1-d} : d_n = d), \;\; d = mod(m - d_0, 2), \;\; m \geq 1. \tag{5.68}$$

Отже, при $d_0 = 1$ маємо послідовність марковських моментів

$$0 = \tau_0^1 < \tau_1^0 < \tau_2^1 < \tau_3^0 < \ldots \leq \infty,$$

а при $d_0 = 0$ маємо $0 = \tau_0^0 < \tau_1^1 < \tau_2^0 < \tau_3^1 < \ldots \leq \infty$.

Лема 5.2. *У позначеннях розділу 5.2.1 (про максимальне склеювання) виконуються співвідношення*

$$\mathbb{P}_{ii1}(\tau_1^0 > t, \overline{X}_t = (k,k,1)) = Q_{ik}^{(t)}, \; t \geq 1,$$

$$\mathbb{P}_{ii1}(\tau_1^0 = t, \overline{X}_t = (j,l,0)) = Q^{(t-1)}h_{i,jl}, \; t \geq 1, \tag{5.69}$$

$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 > t, \overline{X}_t = (j,l,0)) = T_{ik,jl}^{(t)}, \; t \geq 1,$$

$$\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t, \overline{X}_t = (j,j,1)) = T^{(t-1)}g_{ik,j}, \; t \geq 1. \tag{5.70}$$

Доведення. Твердження випливає з марковської властивості ланцюга $\overline{X}$, оскільки ймовірність переходу за кілька кроків дорівнює добутку ймовірностей переходу за один крок, а останні згідно з (5.4), (5.5), (5.9), (5.10) при переході координати d_n з 1 у 1 задається матрицею Q, з 1 до 0 - матрицею h, з 0 в 0 - T, з 0 до 1 - матрицею g. □

Лема 5.3. *Нехай виконується умова (5.27). Тоді* $\mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 < \infty) = 1$ *для всіх* $i \neq k$.

Доведення. З Леми 5.2 виводимо, що функція

$$\varphi_{ik} = \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 < \infty) = \sum\nolimits_{t\geq 1} \mathbb{P}_{ik0}(\tau_1^1 = t) =$$

$$\sum\nolimits_{t\geq 1} \sum\nolimits_{j} T^{(t-1)} g_{ik,j} = \sum\nolimits_{s\geq 0} T^{(s)} g1_{ik}$$

є мінімальним розв'язком рівняння $\varphi_{ik} = g1_{ik} + T\varphi_{ik}$. За Лемою 5.1 функція 1 задовольняє дане рівняння, а з (5.27) та Леми 1 з [97] випливає, що дана функція є мінімальним розв'язком □

Означення 5.3. Визначимо число повних циклів розклеювання - склеювання за початкової умови $d_0 = 1$:

$$\nu_n = \sup(m \geq 0 : \tau_{2m}^1 \leq n) < \infty, \quad n \geq 1,$$

$$\{\nu_n = m\} = \{\tau_{2m}^1 \leq n < \tau_{2m+2}^1\}. \tag{5.71}$$

Коректність означення випливає зі співвідношень $\tau_0^1 = 0$, $\tau_m^d \geq m$.

Зауваження 5.8. У загальному випадку події $\{\tau_{2m}^1 = \infty\}$ можуть мати додатні ймовірності. Однак зауважимо, що при $d_0 = 1$ з умови (5.27) випливає, що $\tau_{2m}^1 - \tau_{2m-1}^0 < \infty$ м.н. Отже, зі скінченності τ_{2m-1}^0 м.н. випливає скінченність τ_{2m}^1. Тому єдино можлива (з додатною ймовірністю) нескінченна серія однакових значень d_n має вигляд $d_n = 1$ при $n \geq \tau_{2\mu}^1$ на множині $\{\mu < \infty\}$, де $\mu = \sup_{n\geq 0} \nu_n$.

Лема 5.4. *Для всіх* $B \subset E, n \geq 1$ *виконуються тотожності*

$$\mathbb{P}_{ii1}(X_n \in B,\ d_n = 1) = \mathbb{P}_{ii1}(X_n' \in B,\ d_n = 1). \tag{5.72}$$

Доведення. Розглянемо випадкові події

$$C_{sk}^{nm} = \{\nu_n = m,\ \tau_{2m}^1 = s,\ \overline{X}_s = (k, k, 1)\},$$

що попарно несумісні при різних $m \geq 0$, $s \geq 0$, $k \in E$. Оскільки

$$\{d_n = 1\} = \cup_{m\geq 0}\{\nu_n = m, \tau^1_{2m} < \infty, d_n = 1\},$$

то

$$\mathbb{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 1) = \sum\nolimits_{m\geq 0}\sum\nolimits_{s\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(C^{nm}_{sk}, X_n \in B, d_n = 1) =$$
$$\sum\nolimits_{m\geq 0}\sum\nolimits_{s\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(C^{sm}_{sk}, X_n \in B, \tau^1_{2m} \leq n < \tau^0_{2m+1}),$$

де враховано, що $\{\nu_n = m\} = \{\nu_s = m\}$ на події $\{d_n = 1, \tau^1_{2m} = s\}$ при $s \leq n$, а також рівність

$$C^{nm}_{sk} \cap \{d_n = 1\} = C^{nm}_{sk} \cap \{\tau^1_{2m} \leq n < \tau^0_{2m+1}\}.$$

Отже, з урахуванням строго марковської властивості ланцюга $\overline{X}$

$$\mathbb{P}_{ii1}(X_n \in B, d_n = 1) =$$
$$\sum\nolimits_{m\geq 0}\sum\nolimits_{s\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(C^{sm}_{sk})\mathbb{P}(X_n \in B, s \leq n < \tau^0_{2m+1} \mid C^{sm}_{sk}) =$$
$$\sum\nolimits_{m\geq 0}\sum\nolimits_{s\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(C^{sm}_{sk})\mathbb{P}_{kk1}(X_{n-s} \in B, n-s < \tau^0_1) =$$
$$\sum\nolimits_{m\geq 0}\sum\nolimits_{s\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(C^{sm}_{sk})\mathbb{P}_{kk1}(X'_{n-s} \in B, n-s < \tau^0_1) =$$
$$\mathbb{P}_{ii1}(X'_n \in B, d_n = 1),$$

де передостання рівність випливає з тотожності $X_n = X'_n$ на множині $\{n < \tau^0_1\}$ за умови $d_0 = 1$, а остання рівність отримується аналогічними до попередніх викладками заміною X_n на X'_n □

Лема 5.5. *Для подій $A_n = \{X_n \in B\} \cap \{X'_n \in B'\}$, $B, B' \subset E$, має місце тотожність*

$$\mathbb{P}_{ii1}(A_n,\ d_n = 0) = \sum\nolimits_{1\leq t\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (k,k,1))\ r^{(n-t)}_k, \tag{5.73}$$

де функція

$$r^{(s)}_k \equiv \mathbb{P}_{kk1}(d_1 = 0,\ s+1 < \tau^1_2,\ A_{s+1}) =$$
$$(hT^{(s)}1_{B\times B'})_k,\ s \geq 0, k \in E, \quad (1_{B\times B'})_{jl} \equiv 1_{j\in B, l\in B'}. \tag{5.74}$$

Доведення. Оскільки $\{\nu_n = m, d_n = 0\} \subset \{\tau^0_{2m+1} \leq n\}$, то за формулою повної ймовірності

$$\mathbb{P}_{ii1}(A_n, d_n = 0) =$$
$$\sum\nolimits_{m\geq 0}\sum\nolimits_{0\leq s<t\leq n}\mathbb{P}_{ii1}(\nu_n = m, \tau^1_{2m} = s, \tau^0_{2m+1} = t, d_t = 0, d_n = 0, A_n) =$$

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k}\mathbb{P}_{ii1}(\nu_{t-1}=m,\tau^1_{2m}=s,\overline{X}_{t-1}=(k,k,1),d_t=0,n<\tau^1_{2m+1},A_n).$$

Справедливість останньої рівності випливає з того, що на множині

$$\{\nu_n=m,\tau^0_{2m}=s<t\leq n,d_n=0\}$$

виконуються тотожності $\{\nu_s=\nu_{t-1}=\nu_n=m\}$ та

$$\{\tau^0_{2m+1}=t\}=\cup_k\{d_t=0,\overline{X}_{t-1}=(k,k,1)\}.$$

Якщо визначити попарно несумісні події

$$D^{tm}_{sk}\equiv\{\nu_{t-1}=m,\tau^1_{2m}=s,\overline{X}_{t-1}=(k,k,1)\},$$

то зі вказаної рівності внаслідок марковської властивості ланцюга $\overline{X}$ у момент $t-1$ виводимо, що

$$\mathbb{P}_{ii1}(A_n,d_n=0)=$$

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k}\mathbb{P}_{ii1}(D^{tm}_{sk},d_t=0,n<\tau^1_{2m+1},A_n)$$

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k}\mathbb{P}_{ii1}(D^{tm}_{sk})\mathbb{P}(\nu_{t-1}=m,d_t=0,n<\tau^1_{2m+1},A_n\mid D^{tm}_{sk})=$$

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{0\leq s<t\leq n}\sum_{k}\mathbb{P}_{ii1}(D^{tm}_{sk})\mathbb{P}_{kk1}(d_1=0,n-t+1<\tau^1_2,A_{n-t+1})=$$

$$\sum\nolimits_{t\leq n}\sum\nolimits_{k}\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1}=(k,k,1))r^{(n-t)}_k,$$

де враховане означення (5.74) та попарна несумісність подій $\{\nu_{t-1}=m,\tau^1_{2m}=s\}$ по m,s.

Для доведення рівності у (5.74) скористаємося Лемами 5.1 і 5.2 та марковською властивістю ланцюга $\overline{X}$ у момент 1 :

$$r^{(s)}_k=\sum\nolimits_{j\neq l}\mathbb{P}_{kk1}(\overline{X}_1=(j,l,0))\mathbb{P}_{jl0}(s<\tau^1_1,\ (X_s,X'_s)\in B\times B',d_s=0)=$$

$$\sum\nolimits_{j\neq l}h_{k,jl}(T^{(s)}1_{B\times B'})_{jl}=(hT^{(s)}1_{B\times B'})_k$$

□

5.3 Стійкість неоднорідних за часом ланцюгів Маркова

5.3.1 Максимальне склеювання для неоднорідних ланцюгів Маркова

Конструкція максимального склеювання для неоднорідних ланцюгів Маркова є подібною до однорідної конструкції в 5.2.1, тому ми надамо скорочений виклад.

Позначення D, $\overline{X}$, P_{ikd}, E_{ikd} мають той же зміст, що і в 5.2.1. Матриці Q, R та h тепер матимуть додатковий індекс t:

$$Q_{ij}^{(t)} = \min(P_{ij}^{(t)},\ P_{ij}'^{(t)}),\ \ q_i^{(t)} = \sum_{j\in E} Q_{ij}^{(t)}. \tag{5.75}$$

$$R_t = (R_{ij}^{(t)}) = P_t - Q_t,\ \ R_t' = (R'^{(t)}_{ij}) = P_t' - Q_t,$$

$$R_{ij}^{(t)} = (P_{ij}^{(t)} - P_{ij}'^{(t)})^+,\quad R_{ij}'^{(t)} = (P_{ij}'^{(t)} - P_{ij}^{(t)})^+, \tag{5.76}$$

де використано рівність $x = \min(x, y) + (x - y)^+$.

$$h_{i,jl}^{(t)} = R_{ij}^{(t)} R_{il}'^{(t)} \ /\ (1 - q_i^{(t)}),\ i, j, l \in E. \tag{5.77}$$

Перехідні ймовірності для $\overline{X}$ визначаються аналогічно до відповідних ймовірностей в 5.2.1 з додаванням індексу t, скажімо

$$\mathbb{P}(\overline{X}_{t+1} = (j, l, 1) | \overline{X}_t = (i, i, 1)) = Q_{ij}^{(t)} \delta_{jl},\ \ j, l \in E, \tag{5.78}$$

$$\mathbb{P}(\overline{X}_{t+1} = (j, l, 0) | \overline{X}_t = (i, i, 1)) = h_{i,jl}^{(t)},\ \ j, l \in E. \tag{5.79}$$

Аналогічно до розділу 5.2.1 Визначимо для $i \neq k$ субстохастичні матриці та вектор вагів

$$g_{ik,j}^{(t)} = \min(P_{ij}^{(t)},\ P_{kj}'^{(t)}),\quad q_{ik}^{(t)} = \sum_{j\in E} g_{ik,j}^{(t)}, \tag{5.80}$$

$$S_{ik,j}^{(t)} = P_{ij}^{(t)} - g_{ik,j}^{(t)} = (P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)})^+,\ \ S_{ik,l}'^{(t)} = P_{kl}'^{(t)} - g_{ik,l}^{(t)} = (P_{kl}'^{(t)} - P_{il}^{(t)})^+, \tag{5.81}$$

та субстохастичну $E^2 \times E^2$ матрицю

$$T_{ik,jl}^{(t)} = S_{ik,j}^{(t)}\, S_{ik,l}'^{(t)} \ /\ (1 - q_{ik}^{(t)}). \tag{5.82}$$

Оскільки така конструкція не має принципових відмінностей від однорідної моделі, то всі властивості траєкторій, а також максимальна властивість склеювання зберігаються для склеювання неоднорідних ланцюгів також.

5.3.2 Стійкість у рівномірній нормі для неоднорідних ланцюгів Маркова

Введемо умови рівномірної стійкості за один крок та рівномірного перемішування за крок у неоднорідному випадку.

Умова рівномірної стійкості за один крок полягає у зближенні перехідних матриць $P^{(t)}$ та $P'^{(t)}$ у рівномірній нормі:

$$\exists\, \varepsilon \in (0,1),\ \forall t \geq 0 : r(P^{(t)}, P'^{(t)}) \equiv \sup_i \left\| P^{(t)}_{i\bullet} - P'^{(t)}_{i\bullet} \right\| /2 \leq \varepsilon. \tag{5.83}$$

Ця умова еквівалентна нерівності $\left\|\mu P^{(t)} - \mu P'^{(t)}\right\| \leq 2\varepsilon \left\|\mu\right\|$ для всіх мір μ.

У подальшому у схемі серій можна припускати, що $P'^{(t)}$ з часом нескінченно мало відрізняються від $P^{(t)}$, однак наведені нижче результати мають форму нерівностей та можуть бути застосовані і для фіксованих $\varepsilon > 0$.

Умова рівномірного перемішування зводиться до відділення від одиниці взаємного коефіцієнта перемішування:

$$\exists\, \rho \in (0,1), \forall t \geq 0 : m(P^{(t)}, P'^{(t)}) \equiv \sup_{i \neq k} \left\| P^{(t)}_{i\bullet} - P'^{(t)}_{k\bullet} \right\| /2 \leq \rho. \tag{5.84}$$

Зауваження 5.9. Для виконання (5.84) при малих ε у (5.83) необхідно і достатньо виконання звичайної умови рівномірного перемішування на $P^{(t)}$: вигляду $m(P^{(t)}, P^{(t)}) \leq \rho_0 < 1$, оскільки $\left|m(P'^{(t)}, P^{(t)}) - m(P^{(t)}, P^{(t)})\right| \leq r(P^{(t)}, P'^{(t)})$, та $m(P^{(t)}, P'^{(t)}) \leq \rho_0 + \varepsilon < 1$ при достатньо малому $\varepsilon > 0$. У свою чергу, вказана умова на $P^{(t)}$ еквівалентна нерівності операторного стискання

$$\left\|\mu P\right\| \leq \rho_0 \left\|\mu\right\|, \quad \forall \mu \in l_1^0(E) \equiv l_1(E) \cap \{\mu : \mu(E) = 0\}. \tag{5.85}$$

Теорема 5.5. *Нехай виконана умова стійкості за крок (5.83), рівномірного перемішування (5.84). Тоді для кожного $n \geq 1$ рівномірно за $i \in E$ виконуються нерівності*

$$\sup_{B \subset E} \left|\mathrm{P}_i(X_n \in B) - \mathrm{P}'_i(X'_n \in B)\right| \leq \varepsilon(1 - \rho^n)/(1 - \rho) < \varepsilon/(1 - \rho). \tag{5.86}$$

Доведення. Твердження теореми безпосередньо випливає із прямого застосування Леми 5.11.

$$|P_i(X_n \in B) - P'_i(X'_n \in B)| \le \mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0) \le \varepsilon\frac{1-\rho^n}{1-\rho} < \frac{\varepsilon}{1-\rho}.$$

□

Теорема 5.6. *В умовах Теореми 5.5 для кожного $n \ge 1$*

$$\sup_{i,k}\sup_{B\subset E}\left|\mathrm{P}_i(X_n \in B) - \mathrm{P}'_k(X'_n \in B)\right| \le \rho^n + \varepsilon(1-\rho^n)/(1-\rho). \tag{5.87}$$

Доведення. З Леми 5.8 маємо нерівність

$$|P_i(X_n \in B) - P'_k(X'_n \in B)| \le \mathbb{P}_{ik0}(d_n = 0).$$

Бачимо, що на відміну від Теореми 5.5, процес $\overline{X}$ знаходиться в розклеєному стані і в момент 0, і в момент n. Ідея доведення полягає у тому, щоб розбити подію $\{d_n = 0\}$ на дві несумісні події: $\{\forall t \le n,\ d_t = 0\}$ та $\{\exists\, 0 < t < n,\ d_t = 1,\ d_s = 0,\ s < t\}$. Тоді отримаємо:

$$\mathbb{P}_{ik0}(d_n = 0) = \mathbb{P}_{ik0}(d_t = 0, t = \overline{0,n}) +$$
$$\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{j\in E}\mathbb{P}_{ik0}(d_0 = \ldots = d_{t-1} = 0, \overline{X}_t = (j,j,1))\mathbb{P}(d_n = 0|\overline{X}_t = (j,j,1)).$$

З Леми 5.11 отримаємо

$$\mathbb{P}(d_n = 0|\overline{X}_t = (j,j,1)) \le \varepsilon\frac{1-\rho^{n-t}}{1-\rho} < \varepsilon(1-\rho)^{-1}.$$

Отже:

$$\mathbb{P}_{ik0}(d_n = 0) \le$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(d_t = 0, t = \overline{0,n}) + \varepsilon(1-\rho)^{-1}\sum_{t=1}^{n-1}\mathbb{P}_{ik0}(d_0 = \ldots = d_{t-1} = 0, d_t = 1) =$$
$$\mathbb{P}_{ik0}(d_t = 0, t = \overline{0,n}) + \varepsilon(1-\rho)^{-1}(1 - \mathbb{P}_{ik0}(d_t = 0, t = \overline{0,n})) =$$
$$\varepsilon(1-\rho)^{-1} + \mathbb{P}_{ik0}(d_t = 0, t = \overline{0,n})(1 - \varepsilon(1-\rho)^{-1}) \le$$
$$\varepsilon(1-\rho)^{-1} + \rho^n(1 - \varepsilon(1-\rho)^{-1}) = \rho^n + \varepsilon\frac{1-\rho^n}{1-\rho}.$$

Тут, в останній нерівності ми використали лему 5.10. □

Приклад 5.7. Розглянемо наступних два неоднорідних ланцюга Маркова, що задані ймовірностями переходу на t-тому кроці:

$$P^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1^{(t)} & \alpha_2^{(t)} & \alpha_3^{(t)} & \dots \\ \beta_1^{(t)} & 1-\beta_1^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ \beta_2^{(t)} & 0 & 1-\beta_2^{(t)} & 0 & \dots \\ \beta_3^{(t)} & 0 & 0 & 1-\beta_3^{(t)} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

$$P'^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1'^{(t)} & \alpha_2'^{(t)} & \alpha_3'^{(t)} & \dots \\ \beta_1'^{(t)} & 1-\beta_1'^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ \beta_2'^{(t)} & 0 & 1-\beta_2'^{(t)} & 0 & \dots \\ \beta_3'^{(t)} & 0 & 0 & 1-\beta_3'^{(t)} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}.$$

Дослідимо умови, за яких для цих ланцюгів будуть справедливими Теореми 5.5 та 5.6.

Умова рівномірної стійкості за один крок має вигляд:

$$\sum_{i\geq 1} |\alpha_i^{(t)} - \alpha_i'^{(t)}| \leq 2\varepsilon, \tag{5.88}$$

$$|\beta_i^{(t)} - \beta_i'^{(t)}| \leq \varepsilon. \tag{5.89}$$

Умова рівномірного перемішування має такий вигляд:

$$|\beta_i^{(t)} - \beta_k'^{(t)}| \leq \rho, \tag{5.90}$$

$$\beta_i^{(t)} + 1 + |\alpha_i'^{(t)} + 1 - \beta_i^{(t)}| - \alpha_i'^{(t)} \leq 2\rho, \tag{5.91}$$

$$\beta_i'^{(t)} + 1 + |\alpha_i^{(t)} + 1 - \beta_i'^{(t)}| - \alpha_i^{(t)} \leq 2\rho. \tag{5.92}$$

Зауважимо, що умова (5.90) виконана за класичної умови $\inf\{\beta_i^{(t)}, \beta_i'^{(t)}\} > 0$.

Отже, за умов (5.88), (5.89), (5.90), (5.91), (5.92), ймовірності переходу за n кроків для двох таких ланцюгів будуть близькими, не зважаючи на початкові стани.

5.3.3 Стійкість скінченновимірних розподілів для неоднорідних ланцюгів Маркова

У цьому розділі ми узагальнимо отримані результати стійкості скінченновимірних розподілів на неоднорідний випадок. Для зручності наведемо основні позначення для неоднорідного випадку.

Розглянемо два неоднорідні за часом ланцюги Маркова X та X' зі значеннями в дискретному ймовірнісному просторі $E = \{i, j, k, l, ...\}$, з перехідними ймовірностями на t-тому кроці (з моменту часу t в $t+1$) $P_t = (P_{ij}^{(t)})$ and $P'_t = (P'^{(t)}_{ij})$ відповідно. Ймовірнісні міри та математичні сподівання для ланцюгів X та X', що стартують у момент часу $t = 0$ зі стану i, ми позначатимемо через $\mathbb{P}_i$,$\mathbb{E}_i$ та $\mathbb{P}'_i$, $\mathbb{E}'_i$ відповідно.

Перехідні ймовірності за $n \geq 1$ кроків від моменту часу t до $t+n$ позначимо через

$$P^{(t,n)} = \prod_{s=t}^{t+n-1} P_s,\ P'^{(t,n)} = \prod_{s=t}^{t+n-1} P'_s,\ \ t \geq 0.$$

Введемо наступні індекси для відносних різниць та коефіцієнт рівномірного перемішування для перехідних матриць за один крок P_t, P'_t, де вважається, що $0/0 = 0$

$$\rho_t(i,j) = (P_{ij}^{(t)} - P'^{(t)}_{ij})^+ \ / \ P_{ij}^{(t)},\ \rho'_t(i,j) = (P'^{(t)}_{ij} - P_{ij}^{(t)})^+ \ / \ P'^{(t)}_{ij}, \tag{5.93}$$

$$\varepsilon_t(i,j) = \max(\rho_t(i,j),\ \rho'_t(i,j)), \quad \varepsilon_t \equiv \sup_{i,j\in E} \varepsilon_t(i,j),\ t \geq 0. \tag{5.94}$$

Розглянемо σ-алгебри $\mathfrak{F}_n = \sigma[X_t, t \leq n]$, $\mathfrak{F}'_n = \sigma[X'_t, t \leq n]$. Припустимо, що X_0, X'_0 є невипадковими та фіксованими.

Нехай $(\mathfrak{F}_n)$ – момент зупинки $\theta \geq 1$ та $\mathfrak{F}_\theta$ - вимірна функція φ визначені множинами $\{B_n, n \geq 1\}, B_n \subset E^n$, та функціями $\varphi_n : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, так що для довільних $n \geq 1$:

$$\{\theta = n\} = \{(X_1, \cdots, X_n) \in B_n\},\ \varphi 1_{\{\theta=n\}} = \varphi_n(X_1, \cdots, X_n). \tag{5.95}$$

Означення 5.4. Пара (θ', φ') разом з $(\mathfrak{F}'_n)$-моментом зупинки θ' та $\mathfrak{F}'_{\theta'}$-вимірною випадковою величиною φ' називається відповідною парі (θ, φ), якщо події $\{\theta' = n\}$ та випадкові величини $\varphi' 1_{\{\theta'=n\}}$ визначені $(X'_1, \cdots, X'_n)$ з тими ж B_n та φ_n, що і в (5.95).

Визначимо наступні малі параметри:

$$\varepsilon(\theta) \equiv 1 - \prod_{s=0}^{\theta-1}(1-\varepsilon_s) \le \sum_{s=0}^{\theta-1}\varepsilon_s \le \theta\ \sup\varepsilon_s. \tag{5.96}$$

Теорема 5.7. *Нехай $\theta \ge 1$ - це $(\mathfrak{F}_n)$-момент зупинки, та випадкова величина φ є невід'ємною та $\mathfrak{F}_\theta$-вимірною. Визначимо повне збурення $\varepsilon(\theta)$ через (5.94) та (5.96). Якщо пара (θ', φ') є відповідною до пари (θ, φ), то мають місце наступні нерівності*

$$|\mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}'_i\varphi'| \ \le\ \max\{\mathbb{E}_i[\varphi\ \varepsilon(\theta)],\ \mathbb{E}'_i[\varphi'\ \varepsilon(\theta')]\} \le \tag{5.97}$$

$$(\sup\varepsilon_t)\ \max\{\mathbb{E}_i[\varphi\cdot\theta)],\ \mathbb{E}'_i[\varphi'\cdot\theta']\}. \tag{5.98}$$

Доведення. Помітимо, що на множині $\{\theta < \tau\}$ ми маємо $(X_1,\cdots,X_\theta) = (X'_1,\cdots,X'_\theta)$, так, що $\varphi = \varphi'$ на такій події за означенням відповідних пар

$$\mathbb{E}_{ii1}[\varphi, \theta < \tau] = \sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}[\varphi 1_{\{\theta=t\}},\ t<\tau] = \sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{(X_1,...X_t)\in B_t\}},\ t<\tau] =$$

$$\sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}[\varphi_t(X'_1,...X'_t)1_{\{(X'_1,...X'_t)\in B_t\}},\ t<\tau] = \mathbb{E}_{ii1}[\varphi', \theta' < \tau].$$

Тоді

$$\mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}'_i\varphi' = \mathbb{E}_{ii1}[\varphi, \theta \ge \tau] - \mathbb{E}_{ii1}[\varphi', \theta' \ge \tau]. \tag{5.99}$$

Скориставшись (5.95), Лемою 5.6, (5.118), та (5.96) отримаємо

$$\mathbb{E}_{ii1}[\varphi, \theta \ge \tau] = \sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}[\varphi 1_{\{\theta=t\}},\ \tau \le t] =$$

$$\sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}[\mathbb{E}(\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ 1_{\{\tau\le t\}}\mid X_1,...X_t)] =$$

$$\sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \mathbb{P}(\tau\le t\mid X_1,...X_t)] =$$

$$\sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \left(1-\prod_{s=0}^{\theta-1}(1-\rho_s(X_s,X_{s+1}))\right)\right] \le$$

$$\sum_{t\ge1}\mathbb{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1,...X_t)1_{\{\theta=t\}}\ \left(1-\prod_{s=0}^{\theta-1}(1-\varepsilon_s)\right)\right] = \mathbb{E}_{ii1}[\varphi\ \varepsilon(\theta)] = \mathbb{E}_i[\varphi\ \varepsilon(\theta)], \tag{5.100}$$

де ми також скористались властивостями склеювання.

Скомбінувавши (5.100) з останніми нерівностями, отримаємо оцінку (5.97). Друга нерівність у теоремі 5.7 є очевидним наслідком (5.96).

Останній множник у другому знизу рядку в нерівності (5.100) може бути оцінений за допомогою параметрів $\overline{\varepsilon}(\theta), \underline{\varepsilon}(\theta)$ в (5.103):

$$\mathbb{E}_{ii1}[\varphi, \theta \geq \tau] \leq \sum_{t \geq 1} \mathbb{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1, ...X_t) 1_{\{\theta = t\}}\ \overline{\varepsilon}(\theta)\right] = \mathbb{E}_i[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)],$$

$$\mathbb{E}_{ii1}[\varphi, \theta \geq \tau] \geq \sum_{t \geq 1} \mathbb{E}_{ii1}\left[\varphi_t(X_1, ...X_t) 1_{\{\theta = t\}}\ \underline{\varepsilon}(\theta)\right] = \mathbb{E}_i[\varphi\ \underline{\varepsilon}(\theta)]. \tag{5.101}$$

За допомогою таких же обчислень ми отримаємо відповідні нерівності для $\mathbb{E}_{ii1}[\varphi', \theta' \geq \tau]$. □

Теорема 5.8. *За припущень Теореми 5.7 мають місце більш загальні оцінки стійкості*

$$\mathbb{E}_i[\varphi\ \underline{\varepsilon}(\theta)] - \mathbb{E}'_i[\varphi'\ \overline{\varepsilon}(\theta')] \leq \mathbb{E}_i\varphi - \mathbb{E}'_i\varphi' \leq \mathbb{E}_i[\varphi\ \overline{\varepsilon}(\theta)] - \mathbb{E}'_i[\varphi'\ \underline{\varepsilon}(\theta')], \tag{5.102}$$

якщо (потенційні малі) величини $\overline{\varepsilon}(\theta), \underline{\varepsilon}(\theta)$, $\overline{\varepsilon}(\theta'), \underline{\varepsilon}(\theta')$ задовільняють наступні нерівності майже напевно:

$$\overline{\varepsilon}(\theta) \geq 1 - \prod_{s=0}^{\theta - 1}(1 - \rho_s(X_s, X_{s+1})) \geq \underline{\varepsilon}(\theta) \geq 0,$$

$$\overline{\varepsilon}'(\theta') \geq 1 - \prod_{s=0}^{\theta' - 1}(1 - \rho'_s(X'_s, X'_{s+1})) \geq \underline{\varepsilon}(\theta') \geq 0. \tag{5.103}$$

Доведення. Оцінки (5.102) отримуються в результаті підстановки нерівностей (5.101) та їх аналогів для $\mathbb{E}_{ii1}[\varphi', \theta' \geq \tau]$ у (5.99). □

5.3.4 V-стійкість дискретних неоднорідних ланцюгів Маркова

У цьому розділі ми узагальнимо результати розділу 5.2.3 на неоднорідний випадок. Сформулюємо основні умови в термінах неоднорідних ланцюгів.

1. V-перемішування, та V-стійкість. Нехай $V = (V_j, j \in E)$ – деяка додатня пробна функція (необов'язково обмежена), для якої виконано наступні умови

$$V_i \geq 1,\ \sum_j P^{(t)}_{ij} V_j < \infty, \sum_j P'^{(t)}_{ij} V_j < \infty,\ \forall t > 0. \tag{5.104}$$

Умова V-стійкості за один крок полягає у зближенні перехідних матриць $P^{(t)}$ та $P'^{(t)}$ у V-нормі:

$$\exists\varepsilon\in(0,1)\ \left\|P^{(t)}-P'^{(t)}\right\|_V=\sup_i V_i^{-1}\sum_j|P^{(t)}_{ij}-P'^{(t)}_{ij}|V_j\le\varepsilon,\ \forall t\ge 0. \tag{5.105}$$

Умова V-перемішування:

$$\exists\rho_V\in(0,1),\ \sum_j|P^{(t)}_{ij}-P'^{(t)}_{kj}|V_j\le\rho_V(V_i+V_k),\ \forall i\ne j\in E,\ \forall t\ge 0. \tag{5.106}$$

Теорема 5.9. *Нехай виконано умови V-стійкості (5.105) та рівномірного V-перемішування (5.106). Тоді для кожного $n\ge 1$ виконуються нерівності*

$$\sup_{|f|\le V}\left|E_if(X_n)-E'_if(X'_n)\right|\le\varepsilon K^{(n)}_i(1-\rho^n_V)/(1-\rho_V), \tag{5.107}$$

де:

$$K^{(n)}_i=\sup_{t<n}E_iV_{X_t},\ \rho_V\in(0,1)\ \text{з умови (5.106).}$$

Доведення. Позначимо першу і другу компоненту процеса $\overline{X}$ через $Z^{(1)}$ та $Z^{(2)}$ так, що $\overline{X}=(Z^{(1)},Z^{(2)},d)$. За Лемою 5.13:

$$|E_i[f(X_n)]-E'_i[f(X'_n)]|\le E_{ii1}[W(Z^{(1)}_n,Z^{(2)}_n);d_n=0],$$

тому далі розглянемо:

$$E_{ii1}[W(Z^{(1)}_n,Z^{(2)}_n);d_n=0]=\sum_{x,y}\mathbb{P}_{ii1}(Z^{(1)}_n=x,Z^{(2)}_n=y,d_n=0)(V_x+V_y)=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{k,x,y}\mathbb{P}_{ii1}(Z^{(1)}_{t-1}=Z^{(2)}_{t-1}=k,d_{t-1}=1)\sum_{i,j}\mathbb{P}(Z^{(1)}_t=i,Z^{(2)}_t=j,d_t=0|Z^{(1)}_{t-1}=Z^{(2)}_{t-1}-k,d_{t-1}=1)\times$$

$$\mathbb{P}(Z^{(1)}_n=x,Z^{(2)}=y,d_l=0,l\ge t|Z^{(1)}_t=i,Z^{(2)}_t=j,d_t=0)(V_x+V_y)=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{k,x,y}P^{(t)}(i,k)V_kV_k^{-1}\sum_{i,j}\mathbb{P}(\overline{X}_t=(i,j,0)|\overline{X}_{t-1}=(k,k,1))\times$$

$$\mathbb{P}(Z^{(1)}_n=x,Z^{(2)}=y,d_l=0,l\ge t|Z^{(1)}_t=i,Z^{(2)}_t=j,d_t=0)(V_x+V_y)=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{k,x,y}P^{(t)}(i,k)V_kV_k^{-1}\sum_{i,j}\mathbb{P}(\overline{X}_t=(i,j,0)|\overline{X}_{t-1}=(k,k,1))(V_i+V_j)\times$$

$$(V_i+V_j)^{-1}\mathbb{P}(Z_n^{(1)}=x,Z^{(2)}=y,d_l=0,l\geq t|Z_t^{(1)}=i,Z_t^{(2)}=j,d_t=0)(V_x+V_y)=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{k}P^{(t)}(i,k)V_kV_k^{-1}\sum_{i,j}\mathbb{P}(\overline{X}_t=(i,j,0)|\overline{X}_{t-1}=(k,k,1))(V_i+V_j)\times$$

$$\left(\sum_{x,y}(V_i+V_j)^{-1}\mathbb{P}(Z_n^{(1)}=x,Z^{(2)}=y,d_l=0,l\geq t|Z_t^{(1)}=i,Z_t^{(2)}=j,d_t=0)(V_x+V_y)\right).$$

Тепер, скориставшись Лемами 5.14 та 5.16, отримаємо:

$$E_{ii1}[W(Z_n^{(1)},Z_n^{(2)});d_n=0]=\sum_{x,y}\mathbb{P}_{ii1}(Z_n^{(1)}=x,Z_n^{(2)}=y,d_n=0)(V_x+V_y)\leq$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{k}P_{ik}^{(t)}V_k\varepsilon\rho^{n-t}=\sum_{t=1}^{n}E_i[V_{X_t}]\varepsilon\rho_V^{n-t}\leq$$

$$\varepsilon K_i^{(n)}\sum_{t=0}^{n-1}\rho_V^t=\varepsilon K_i^{(n)}\frac{1-\rho_V^n}{1-\rho_V}.$$

□

Замість умови перемішування (5.106), можна розглядати дещо простіші умови (5.108)-(5.109), як видно в наступному наслідку.

Наслідок 5.5. *Нехай виконано умову V-стійкості з деяким $\varepsilon_V\in(0,1)$ та існують така підмножина станів $\mathrm{O}\in E$, число $\rho_O<1-\varepsilon_V$ та пробна функція V_i, що для довільного $t>0$ мають місце нерівності:*

$$\sum_j P_{ij}^{(t)}V_j\leq\rho_O V_i,\ \forall i\notin \mathrm{O},\ V_i\geq 1, \tag{5.108}$$

$$\sum_j |P_{ij}^{(t)}-P_{kj}^{\prime(t)}|V_j\leq\rho_O(V_i+V_k),\ \forall i\in E,\ k\in \mathrm{O}, i\neq k. \tag{5.109}$$

Тоді для всіх $n>0$ та $i\in E$ виконується нерівність:

$$\sup_{|f|\leq V}|E_i[f(X_n)]-E_i'[f(X_n')]|\leq\frac{\varepsilon_V K_i^{(n)}}{1-\rho_O-\varepsilon_V}, \tag{5.110}$$

де $K_i^{(n)}=\sup_{t<n}E_i[V_{X_t}]\leq\max\{V_i,\sup_{i\in \mathrm{O},t\geq 0}\sum_j P_{ij}^{(t)}V_j/(1-\rho_O)\}$.

Доведення. Покажемо, що виконується умова V- перемішування з $\rho_V = \rho_O + \varepsilon_V$. Для цього спочатку встановимо виконання при довільних i, j, t формули:

$$\sum_j |P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j \leq \rho_O(V_i + V_k). \tag{5.111}$$

Нехай $i, k \notin$ O, тоді для кожного $t > 0$:

$$\sum_j |P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j \leq$$

$$\sum_{j \in \mathrm{O}} |P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j + \sum_{j \notin \mathrm{O}} (P_{ij}^{(t)} + P_{kj}^{\prime(t)}) V_j =$$

$$\sum_{j \in \mathrm{O}} |P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j + \sum_{j \in E} P_{ij}^{(t)} V_j + \sum_{j \in E} P_{kj}^{\prime(t)} V_j - \sum_{j \in \mathrm{O}} P_{ij}^{(t)} V_j - \sum_{j \in \mathrm{O}} P_{kj}^{\prime(t)} V_j \leq$$

$$\rho_O(V_i + V_k) + \sum_{j \in \mathrm{O}} \left(|P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| - (P_{ij}^{(t)} + P_{kj}^{\prime(t)}) \right) V_j \leq \rho_O(V_i + V_k),$$

де в передостанній нерівності ми використали формулу (5.108). Якщо ж одне зі значень i, k або обидва належать O, то (5.111) випливає з умови (5.109). Тепер доведемо власне умову перемішування:

$$\sum_j |P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j \leq \sum_j |P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j + \sum_j |P_{kj}^{\prime(t)} - P_{kj}^{\prime(t)}| V_j \leq$$

$$\rho_O(V_i + V_k) + \varepsilon_V V_k < (\rho_O + \varepsilon_V)(V_i + V_k) = \rho_V(V_i + V_k).$$

Далі, застосувавши Теорему 5.9, отримаємо нерівність з умови наслідку. Залишилось довести нерівність для $K_i^{(n)}$. Зауважимо спочатку, що при $i \notin$ O:

$$E_i[V_{X_1}] = \sum_j V_j P_{ij}^{(0,1)} \leq \rho_O V_i. \tag{5.112}$$

Позначимо $k_i^{(n)} = E_i[V_{X_n}]$, $K_O = \sup_{i \in O, 1 < t \leq n} \sum_j P_{ij}^{(t-1,t)} V_j$. Тоді:

$$k_i^{(n)} = \sum_j P_{ij}^{(0,n)} V_j = \sum_j \sum_{k \in \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} P_{kj}^{(n-1,n)} V_j + \sum_j \sum_{k \notin \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} P_{kj}^{(n-1,n)} V_j \leq$$

$$\sum_{k \in \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} K_O + \rho_O \sum_{k \notin \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} V_k \leq K_O + \rho_O k_i^{(n-1)}.$$

Застосовуючи отриману формулу рекурсивно, отримаємо:

$$k_i^{(n)} \leq K_O \sum_{m=0}^{n-1} \rho_O^m + k_i^{(1)} \leq K_O \frac{1 - \rho_O^n}{1 - \rho_O} + \rho_O^n V_i,$$

що доводить оцінку для $K_i^{(n)}$ і завершує доведення наслідку. □

Зауваження 5.10. Зауважимо, що у деяких випадках величина $K_i^{(n)}$ буде обмеженою. Зокрема, якщо $V_i = 1$ і ланцюг рівномірно ергодичний (зокрема скінченний).

Приклад 5.8. Розглянемо в якості прикладу однорідний ланцюг народження та загибелі, що збурено неоднорідним чином.

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1-\alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & 0 & 1-\alpha_1 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 1-\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \dots \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$P'^{(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_0+\delta_0(t) & 1-\alpha_0-\delta_0(t) & 0 & 0\dots \\ \alpha_1+\delta_1(t) & 0 & 1-\alpha_1-\delta_1(t) & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2+\delta_2(t) & 0 & 1-\alpha_2-\delta_2(t) & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3+\delta_3(t) & 0 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

В якості функції V виберемо наступну функцію

$$V_0 = 1,\ V_i = v^i,$$

для деякого $v \geq 1$. Пізніше ми знайдемо умови, за яких таке v існує.

Перевіримо умову V-стійкості. Тоді i-те рівняння виглядає так:

$$v^{-i} 2\delta_i(t) v^{i+1} \leq \varepsilon,$$

або

$$2\delta_i(t) v \leq \varepsilon,$$

$$\delta_i(t) \leq \varepsilon/2v.$$

Отже, за достатньо малих $\delta_i(t)$ умова V-стійкості виконана рівномірно за t, i.

Перевіримо тепер умову V-перемішування. Для цього скористаємось Наслідком 5.5 з $O = \{0\}$:

$$\alpha_i v^{i-1} + (1-\alpha_i) v^{i+1} \leq \rho_O v^i,$$

$$\alpha_i + (1-\alpha_i) v^2 \leq \rho_O v,$$

$$(1-\alpha_i)v^2 - \rho_O v + \alpha_i \le 0.$$

Дана нерівність має розв'язки, якщо $\rho_O \ge 2\sqrt{(1-\alpha_i)\alpha_i}$. В цьому разі

$$v \in \left[\frac{\rho_O - \sqrt{\rho^2 - 4(1-\alpha_i)\alpha_i}}{2(1-\alpha_i)}, \frac{\rho_O + \sqrt{\rho^2 - 4(1-\alpha_i)\alpha_i}}{2(1-\alpha_i)}\right].$$

Припустимо, що $\gamma = \inf_i \alpha_i > 1/2$. Тоді можна вибрати $\rho_O = 2\sqrt{\gamma(1-\gamma)} < 1$. Розглянемо тепер нерівність з точки зору α_i:

$$(1-\alpha_i)v^2 - \rho_O v + \alpha_i \le 0,$$

$$\alpha_i(1-v^2) \le \rho_O v - v^2,$$

$$\alpha_i \ge \frac{\rho_O v - v^2}{1-v^2}$$

$$\inf_i \alpha_i \ge \frac{\rho_O v - v^2}{1-v^2}.$$

Тоді визначимо v з рівняння:

$$\gamma = \frac{\rho_O v - v^2}{1-v^2}.$$

$$(1-\gamma)v^2 - \rho_O v + \gamma = 0.$$

$$(\sqrt{1-\gamma}v - \sqrt{\gamma})^2 = 0.$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}} > 1.$$

Перевіримо тепер другу умову для $i > 2$:

$$\alpha_0 + (1-\alpha_0)v + \alpha_i v^{i-1} + (1-\alpha_i)v^{i+1} \le (1+v^i).$$

З урахуванням вище доведеного досить показати, що

$$\alpha_0 + (1-\alpha_0)v \le 1 + (1-\rho_O)v^i,$$

$$\text{або } \alpha_0(1-v) \le 1 + (1-\rho_O)v^i - v,$$

$$\text{або } \alpha_0 \ge 1 + \frac{(1-\rho_O)v^i}{1-v}.$$

Ясно, що права частина зростає по i, тому

$$\alpha_0 \ge 1 + \frac{(1-\rho_O)v^3}{1-v}. \tag{5.113}$$

Перевіримо другу умову для $i = 1$:

$$|\alpha_0 - \alpha_1| + (1 - \alpha_0)v + (1 - \alpha_1)v^2 \le (1 + v).$$

Досить вимагати, щоб

$$|\alpha_0 - \alpha_1| + (1 - \alpha_0)v - \alpha_1 \le 1 + (1 - \rho_O)v. \tag{5.114}$$

Перевіримо другу умову для $i = 2$:

$$\alpha_0 + |1 - \alpha_0 - \alpha_2|v + (1 - \alpha_2)v^3 \le (1 + v^2),$$

або

$$\alpha_0 + |1 - \alpha_0 - \alpha_2|v - \alpha_2 v \le 1 + (1 - \rho_O)v^2. \tag{5.115}$$

Тоді умови Наслідку 5.5, а отже і Теореми 5.9 в даному випадку будуть виконані, якщо виконані наступні умови.

Отже доведено наступну теорему.

Теорема 5.10. *Нехай для ланцюгів, заданих перехідними ймовірностями P та $P'^{(t)}$ з параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, виконані умови (5.113), (5.114), (5.115). Нехай також*

$$\gamma = \inf_i \alpha_i > 1/2, \textit{ та } \delta_i(t) < \varepsilon\sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma}},$$

для деякого фіксованого ε.

Тоді виконані умови Наслідку 5.5, з

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}, V_i = v^i, \rho_O = 2\sqrt{\gamma(1-\gamma)},$$

та $\mathrm{O} = \{0\}$.

Зауважимо, що у класичному випадку $\alpha_0 = 1$ умови (5.113), (5.114), (5.115) виконані автоматично. Окрім того, умова $\gamma = \inf_i \alpha_i > 1/2$ в однорідному випадку є необхідною та достатньою для рівномірної ергодичності.

5.3.5 Допоміжні леми

Розглянемо $\overline{X}$ – ланцюг, визначений вище у розділі 5.3.1. Позначимо через τ- перший час розклеювання для ланцюга $\overline{X}$, що стартує зі стану $(i, i, 1)$:

$$\tau = \inf\{t \ge 1 : d_t = 0\}. \tag{5.116}$$

Для заданих $i_1, ..., i_t \in E$ та $0 \le s < t$ визначимо випадкові події

$$A_s = \{\overline{X}_1 = (i_1, i_1, 1), ...\overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)\},\ \ B_{s+1} = \{X_{s+1} = i_{s+1}, ..., X_t = i_t\}.$$

Лема 5.6. *Наступні рівності мають місце для довільного початкового стану* $i_0 = i \in E$ *та* $0 \le s < t$

$$\mathbb{P}_{ii1}[\tau = s+1 \mid \tau > s,\ X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] = \rho_s(i_s, i_{s+1}), \tag{5.117}$$

$$\mathbb{P}_{ii1}[\tau > s \mid X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] = \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \rho_r(i_r, i_{r+1})), s \le t, \tag{5.118}$$

$$\mathbb{P}_{ii1}[\tau = s+1 \mid X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] = \rho_s(i_s, i_{s+1}) \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \rho_r(i_r, i_{r+1})), \tag{5.119}$$

Доведення. Оскільки подія $X_r = X'_r, r \le s$, еквівалентна події $\{\tau > s\}$, то ліва частина (5.117) рівна

$$\mathbb{P}_{ii1}[\tau = s+1 \mid A_s,\ B_{s+1}] = \sum_{l\in E} \mathbb{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0) \mid A_s,\ B_{s+1}] =$$

$$\sum_{l\in E} \mathbb{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0), A_s,\ B_{s+1}]/\mathbb{P}_{ii1}[A_s,\ B_{s+1}] =$$

$$\sum_{l\in E} \mathbb{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0),\ B_{s+1} \mid A_s]/\mathbb{P}_{ii1}[\ B_{s+1} \mid A_s] =$$

$$\sum_{l\in E} \mathbb{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0),\ B_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)]/\mathbb{P}_{ii1}[\ B_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)] =$$

$$\sum_{l\in E} \mathbb{P}_{ii1}[\overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0) \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)]\times$$

$$\mathbb{P}_{ii1}[B_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1), \overline{X}_{s+1} = (i_{s+1}, l, 0)]/\mathbb{P}_{ii1}[\ B_{s+1} \mid \overline{X}_s = (i_s, i_s, 1)] =$$

$$\sum_{l\in E} h^{(s)}_{i_s, i_{s+1} l} \prod_{r=s+1}^{t} P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} / \prod_{r=s}^{t} P^{(r)}_{i_r, i_{r+1}} = \sum_{l\in E} h^{(s)}_{i_s, i_{s+1} l}/P^{(s)}_{i_s, i_{s+1}} =$$

$$R^{(s)}_{i_s, i_{s+1}}/P^{(s)}_{i_s, i_{s+1}} = \rho_s(i_s, i_{s+1}),$$

де ми скористалися марковською властивістю ланцюга $\overline{X}$, властивостями склеювання (зокрема твердженням (5.79)) та рівністю

$$\sum_{l\in E} h^{(s)}_{i,jl}/P^{(s)}_{ij} = \sum\nolimits_{l\in E} R^{(s)}_{ij} R'^{(s)}_{il}\ /\ (1 - q^{(s)}_i) P^{(s)}_{ij} = (P^{(s)}_{ij} - Q^{(s)}_{ij})/P^{(s)}_{ij} = \rho_s(i, j).$$

Отже, (5.117) доведено.

Далі, помітимо, що ліва частина (5.118) рівна

$$\mathbb{P}_{ii1}[A_s \mid X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$

$$\mathbb{P}_{ii1}[A_s, X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] / \mathbb{P}_{ii1}[X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$

$$\mathbb{P}_{ii1}[A_s, B_{s+1}] / \mathbb{P}_{ii1}[X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$

$$\mathbb{P}_{ii1}[A_s]\ \mathbb{P}_{ii1}[B_{s+1} \mid A_s] / \mathbb{P}_{ii1}[X_1 = i_1, ..., X_t = i_t] =$$

$$\left(\prod_{r=0}^{s-1} Q^{(r)}_{i_r,i_{r+1}}\right)\left(\prod_{r=s}^{t-1} P^{(r)}_{i_r,i_{r+1}}\right) \Big/ \left(\prod_{r=0}^{t-1} P^{(r)}_{i_r,i_{r+1}}\right) =$$

$$\prod_{r=0}^{s-1} Q^{(r)}_{i_r,i_{r+1}} / P^{(r)}_{i_r,i_{r+1}} = \prod_{r=0}^{s-1}\left(1 - R^{(r)}_{i_r,i_{r+1}} / P^{(r)}_{i_r,i_{r+1}}\right) = \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \rho^{(r)}(i_r, i_{r+1})).$$

Тут ми скористалися виразом для ймовірності $\mathbb{P}_{ii1}[A_s]$, що є наслідком марковської властивості $\overline{X}$ та (5.78) у вигляді

$$\mathbb{P}[\tau > s+1, \overline{X}_{s+1} = (j, j, 1) \mid \tau > s, \overline{X}_s = (i, i, 1)] = Q^{(s)}_{ij}.$$

Нарешті, отримаємо (5.119), помноживши (5.117) на (5.118). □

У наступних лемах позначимо першу та другу компоненту процесу $\overline{X}$ через $Z^{(1)}$ та $Z^{(2)}$ відповідно. Таким чином, $\overline{X} = (Z^{(1)}, Z^{(2)}, d)$.

Лема 5.7. *Для довільної множини $B \subset E$ та довільного $i \in E$ має місце наступна нерівність:*

$$|P_i(X_n \in B) - P'_i(X'_n \in B)| \le \mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0).$$

Доведення. Скориставшись тим фактом, що маргінальні розподіли $\overline{X}$ співпадають з розподілами процесів X та X', отримаємо рівняння

$$|P_i(X_n \in B) - P'_i(X'_n \in B)| = |\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, D)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, D))|.$$

Розпишемо останній вираз для $d_n = 0$ та $d_n = 1$:

$$|\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, D)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, D))| =$$

$$|\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, 1)) + \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, 0)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, 1)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, 0))|.$$

Зауважимо, що:

$$\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, 1)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, 1)) =$$

$$\sum_{k \in B} (\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (k, E, 1)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, k, 1))).$$

З конструкції склеювання випливає, що переходи зі стану $(k, j, 1)$ в $(i, l, 1)$ є неможливими якщо $k \neq j$, а отже

$$\sum_{k \in B} (\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n = (k, k, 1)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n = (k, k, 1))) = 0.$$

Отже,

$$|\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, D)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, D))| = |\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, 0)) - \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, 0))| \leq$$

$$\max\{\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (B, E, 0), \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, B, 0))\} \leq \mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E, E, 0)) = \mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0).$$

□

Лема 5.8. *Для довільної множини $B \subset E$ та довільних $i, k \in E$ має місце наступна нерівність*

$$|P_i(X_n \in B) - P'_k(X'_n \in B)| \leq P_{ik0}(d_n = 0)$$

Доведення. Ідея доведення повністю повторює доведення попередньої леми, тому наводимо викладки без додаткових пояснень:

$$|P_i(X_n \in B) - P'_k(X'_n \in B)| = |\mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (B, E, D)) - \mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (E, B, D))| =$$

$$|\mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (B, E, 1)) + \mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (B, E, 0)) - \mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (E, B, 1)) - \mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (E, B, 0))| \leq$$

$$\max\{\mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (B, E, 0)), \mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (E, B, 0))\} \leq \mathbb{P}_{ik0}(\overline{X}_n \in (E, E, 0)) = \mathbb{P}_{ik0}(d_n = 0).$$

□

Лема 5.9. *Нехай для ланцюгів X_n, X'_n виконана умова рівномірної стійкості за один крок (5.83). Тоді для довільного $i \in E$ та $n \geq 0$ має місце нерівність:*

$$\mathbb{P}(d_{n+1} = 0 | \overline{X}_n = (i, i, 1)) \leq \varepsilon$$

Доведення. Скориставшись означенням перехідної ймовірності для процесу склеювання, отримаємо

$$\mathbb{P}(d_{n+1} = 0|\overline{X}_n = (i, i, 1)) = \sum_{j,k} \frac{\left(P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n)} \wedge P_{ij}^{\prime(n)}\right)\left(P_{ik}^{\prime(n)} - P_{ik}^{(n)} \wedge P_{ik}^{\prime(n)}\right)}{1 - \sum_{l \in E} P_{il}^{(n)} \wedge P_{il}^{\prime(n)}} =$$

$$1 - \sum_{l \in E} P_{il}^{(n)} \wedge P_{il}^{\prime(n)} \leq \varepsilon.$$

Остання нерівність випливає з наступного:

$$\varepsilon \geq \sup_i \sum_j |P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{\prime(n)}|/2 = \sup_i \sum_j \left((P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{\prime(n)})^+ + (P_{ij}^{\prime(n)} - P_{ij}^{(n)})^+\right)/2 =$$

$$\sup_i \sum_j \left(P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n)} \wedge P_{ij}^{\prime(n)} + P_{ij}^{\prime(n)} - P_{ij}^{(n)} \wedge P_{ij}^{\prime(n)}\right)/2 =$$

$$\sup_i \left(2 - 2\sum_j P_{ij}^{(n)} \wedge P_{ij}^{\prime(n)}\right)/2 = \sup_i \left(1 - \sum_j P_{ij}^{(n)} \wedge P_{ij}^{\prime(n)}\right).$$

Тут у другій рівності використано зображення $x = x \wedge y + (x - y)^+$. □

Лема 5.10. *Нехай для ланцюгів* X_n, X_n' *виконана умова рівномірного перемішування (5.84). Тоді для довільних* $i, j \in E$ *та* $n \geq 0$ *має місце нерівність:*

$$\mathbb{P}(d_{n+1} = d_{n+2} = \ldots d_{n+m} = 0|\overline{X}_n = (i, j, 0)) \leq \rho^m$$

Доведення. Скориставшись означенням перехідної ймовірності для процесу склеювання, отримаємо

$$\mathbb{P}(d_{n+1} = 0|\overline{X}_n = (i, k, 0)) = \sum_{j,l} \frac{\left(P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n)} \wedge P_{kj}^{\prime(n)}\right)\left(P_{kl}^{\prime(n)} - P_{il}^{(n)} \wedge P_{kl}^{\prime(n)}\right)}{1 - \sum_{s \in E} P_{is}^{(n)} \wedge P_{ks}^{\prime(n)}} =$$

$$1 - \sum_{j \in E} P_{ij}^{(n)} \wedge P_{kj}^{\prime(n)}.$$

В той же час:

$$\rho = \sup_{i \neq k} \sum_j |P_{ij}^{(n)} - P_{kj}^{\prime(n)}|/2 = \sup_{i \neq k} \sum_j \left((P_{ij}^{(n)} - P_{kj}^{\prime(n)})^+ + (P_{kj}^{\prime(n)} - P_{ij}^{(n)})^+\right)/2 =$$

$$\sup_{i \neq k} \sum_j \left(P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n)} \wedge P_{kj}^{\prime(n)} + P_{kj}^{\prime(n)} - P_{ij}^{(n)} \wedge P_{kj}^{\prime(n)}\right)/2 =$$

$$\sup_{i\neq k}\left(2-2\sum_j P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{kj}\right)/2=\sup_{i\neq k}\left(1-\sum_j P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{kj}\right).$$

Отже, для довільних $n \geq 0$, $i, k \in E$:

$$P(d_{n+1}=0|\overline{X}_n=(i,k,0))\leq \rho.$$

Твердження леми тепер випливає з наступного:

$$\mathbb{P}(d_{n+1}=d_{n+2}=\dots d_{n+m}=0|\overline{X}_n=(i,j,0))=$$

$$\sum_{k,l\in E}\mathbb{P}(d_{n+1}=d_{n+2}=\dots d_{n+m-1}=0,\overline{X}_{n+m-1}=(k,l,0)|\overline{X}_n=(i,j,0))\times$$

$$\mathbb{P}(d_{n+m}=0|\overline{X}_{n+m-1}=(k,l,0))\leq$$

$$\rho\mathbb{P}(d_{n+1}=d_{n+2}=\dots d_{n+m-1}=0|\overline{X}_n=(i,j,0))\leq\dots\leq\rho^m.$$

□

Наступна лема є ключовою в доведенні Теорем 5.5 та 5.6. При її доведенні використовується так званий метод розкладу за останнім моментом розклеювання.

Лема 5.11. *Нехай для ланцюгів X_n, X'_n виконані умови рівномірної стійкості за один крок (5.83) та рівномірного перемішування (5.84). Тоді для довільного $i \in E$ та $n \geq 0$ має місце нерівність:*

$$\mathbb{P}_{ii1}(d_n=0)\leq\varepsilon\frac{1-\rho^n}{1-\rho}.$$

Доведення. Запишемо розклад за моментом останнього розклеювання. Оскільки в нульовий момент часу ланцюг був склеєним, а в момент n розклеєним, то момент останнього розклеювання гарантовано настав на інтервалі між 1 та n включно:

$$\mathbb{P}_{ii1}(d_n=0)=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\mathbb{P}_{ii1}(d_n=d_{n-1}=\dots d_t=0,d_{t-1}=1)=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_j\mathbb{P}_{ii1}(d_n=d_{n-1}=\dots d_t=0,\overline{X}_{t-1}=(j,j,1))=$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j,k,l}\mathbb{P}_{ii1}(d_n = d_{n-1} = \ldots d_t = 0, \overline{X}_t = (k,l,0), \overline{X}_{t-1} = (j,j,1)) =$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j,k,l}\mathbb{P}(d_n = d_{n-1} = \ldots d_t = 0|\overline{X}_t = (k,l,0))\mathbb{P}(\overline{X}_t = (k,l,0)|\overline{X}_{t-1} = (j,j,1))\times$$

$$\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (j,j,1)).$$

Далі скористаємось лемою 5.10 і отримаємо:

$$\mathbb{P}(d_n = d_{n-1} = \ldots d_t = 0|\overline{X}_t = (k,l,0)) \leq \rho^{n-t}.$$

З урахуванням цього та попередніх викладок маємо нерівність:

$$\mathbb{P}_{ii1}(d_n = 0) \leq \sum_{t=1}^{n}\sum_{j,k,l}\rho^{n-t}\mathbb{P}(\overline{X}_t = (k,l,0)|\overline{X}_{t-1} = (j,j,1))\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (j,j,1)) =$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j}\rho^{n-t}\mathbb{P}(d_t = 0|\overline{X}_{t-1} = (j,j,1))\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (j,j,1)) \leq$$

$$\varepsilon\sum_{t=1}^{n}\left(\rho^{n-t}\sum_{j}\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_{t-1} = (j,j,1))\right) = \varepsilon\sum_{t=1}^{n}\rho^{n-t}\mathbb{P}_{ii1}(d_{t-1} = 1) \leq$$

$$\varepsilon\sum_{t=1}^{n}\rho^{n-t} = \varepsilon\sum_{t=0}^{n-1}\rho^{t} = \varepsilon\frac{1-\rho^n}{1-\rho},$$

де ми використали той факт, що за лемою 5.9:

$$\mathbb{P}(d_t = 0|\overline{X}_{t-1} = (j,j,1)) \leq \varepsilon.$$

□

Лема 5.12. *Має місце наступна формула:*

$$E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}); d_n = 1] = E_{ii1}[f(Z_n^{(2)}); d_n = 1].$$

Доведення. Скориставшись властивостями склеювання, отримаємо наступні рівності

$$E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}); d_n = 1] = \sum_{k} f(k)\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (k,E,1)) = \sum_{k} f(k)\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (k,k,1)) =$$

$$\sum_{k} f(k)\mathbb{P}_{ii1}(\overline{X}_n \in (E,k,1)) = E_{ii1}[f(Z_n^{(2)}); d_n = 1].$$

□

Лема 5.13. *Має місце наступна нерівність:*

$$|E_i[f(X_n)] - E_i'[f(X_n')]| \leq E_{ii1}[W(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}); d_n = 0],$$

де $W(i,j) = V_i + V_j$.

Доведення. Оскільки, як було встановлено раніше, маргінальні розподіли процесу $\overline{X}$, тобто розподіли $Z^{(1)}$ та $Z^{(2)}$ співпадають з розподілами процесів X та X' відповідно, то скориставшись Лемою 5.12 отримаємо наступні співвідношення

$$|E_i[f(X_n)] - E_i'[f(X_n')]| = |E_{ii1}[f(Z_n^{(1)})] - E_{ii1}[f(Z_n^{(2)})]| =$$

$$|E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}); d_n = 1] - E_{ii1}[f(Z_n^{(2)}); d_n = 1] + E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}); d_n = 0] - E_{ii1}[f(Z_n^{(2)}); d_n = 0]| =$$

$$|E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}); d_n = 0] - E_{ii1}[f(Z_n^{(2)}); d_n = 0]| = |E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}) - f(Z_n^{(2)}); d_n = 0]| \leq$$

$$|E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}) + f(Z_n^{(2)}); d_n = 0]| \leq |E_{ii1}[V_{Z_n^{(1)}} + V_{Z_n^{(2)}}; d_n = 0]| = E_{ii1}[W(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}); d_n = 0].$$

□

Лема 5.14. *Для довільних* $k, i, j \in E$ *має місце наступна формула:*

$$V_k^{-1} \sum_{i,j} \mathbb{P}(\overline{X}_t = (i,j,0) | \overline{X}_{t-1} = (k,k,1))(V_i + V_j) \leq \varepsilon.$$

Доведення. Скористаємось означенням $\mathbb{P}(\overline{X}_t = (i,j,0) | \overline{X}_{t-1} = (k,k,1))$, і отримаємо:

$$V_k^{-1} \sum_{i,j} \mathbb{P}(\overline{X}_t = (i,j,0) | \overline{X}_{t-1} = (k,k,1))(V_i + V_j) =$$

$$V_k^{-1} \sum_{i,j} \frac{\left(P_{ki}^{(n)} - P_{ki}^{(n)} \wedge P_{ki}'^{(n)}\right)\left(P_{kj}'^{(n)} - P_{kj}^{(n)} \wedge P_{kj}'^{(n)}\right)}{1 - \sum_{l \in E} P_{kl}^{(n)} \wedge P_{kl}'^{(n)}} (V_i + V_j) =$$

$$\frac{V_k^{-1}}{1 - \sum_{l \in E} P_{kl}^{(n)} \wedge P_{kl}'^{(n)}} \times$$

$$\sum_i \left(\left(P_{ki}^{(n)} - P_{ki}^{(n)} \wedge P_{ki}'^{(n)}\right) \sum_j \left(P_{kj}'^{(n)} - P_{kj}^{(n)} \wedge P_{kj}'^{(n)}\right) V_i \right) +$$

$$\frac{V_k^{-1}}{1 - \sum_{l \in E} P_{kl}^{(n)} \wedge P_{kl}'^{(n)}} \times$$

$$\sum_j \left(\left(P'^{(n)}_{kj} - P^{(n)}_{kj} \wedge P'^{(n)}_{kj} \right) \sum_i \left(P^{(n)}_{ki} - P^{(n)}_{ki} \wedge P'^{(n)}_{ki} \right) V_j \right) =$$

$$V_k^{-1} \sum_i \left(P^{(n)}_{ki} - P'^{(n)}_{ki} \right)^+ V_i + V_k^{-1} \sum_j \left(P'^{(n)}_{kj} - P^{(n)}_{kj} \right)^+ V_j =$$

$$V_k^{-1} \sum_i \left| P^{(n)}_{ki} - P'^{(n)}_{ki} \right| V_i \leq \varepsilon.$$

Остання нерівність випливає з умови V-стійкості (5.105). □

Лема 5.15. *Для довільних $m, s \in E$ має місце формула:*

$$\sum_{x,y} \mathbb{P}(\overline{X}_n = (x, y, 0) | \overline{X}_{n-1} = (m, s, 0))(V_x + V_y) \leq \rho_V(V_m + V_s). \tag{5.120}$$

Доведення.

Скористаємось означенням ймовірності переходу для розклеєного ланцюга, яке підставимо у вираз $\sum\limits_{x,y} \mathbb{P}(\overline{X}_n = (x, y, 0) | \overline{X}_{n-1} = (m, s, 0))(V_x + V_y)$:

$$\sum_{x,y} \mathbb{P}(\overline{X}_n = (x, y, 0) | \overline{X}_{n-1} = (m, s, 0))(V_x + V_y) \leq$$

$$\frac{1}{1 - \sum\limits_l P^{(n)}_{ml} \wedge P'^{(n)}_{sl}} \times$$

$$\sum_x \left(P^{(n)}_{mx} - P^{(n)}_{mx} \wedge P'^{(n)}_{sx} \right) V_x \sum_y \left(P'^{(n)}_{sy} - P'^{(n)}_{sy} \wedge P^{(n)}_{my} \right) +$$

$$\frac{1}{1 - \sum\limits_l P^{(n)}_{ml} \wedge P'^{(n)}_{sl}} \times$$

$$\sum_y \left(P'^{(n)}_{sy} - P'^{(n)}_{sy} \wedge P^{(n)}_{my} \right) V_y \sum_x \left(P^{(n)}_{mx} - P^{(n)}_{mx} \wedge P'^{(n)}_{sx} \right) =$$

$$\sum_x \left(P^{(n)}_{mx} - P'^{(n)}_{sx} \right)^+ V_x + \sum_y \left(P'^{(n)}_{sy} - P^{(n)}_{my} \right)^+ V_y =$$

$$\sum_i \left(\left(P^{(n)}_{mi} - P'^{(n)}_{si} \right)^+ + \left(P'^{(n)}_{si} - P^{(n)}_{mi} \right)^+ \right) V_i =$$

$$\sum_i \left| P^{(n)}_{mi} - P'^{(n)}_{si} \right| V_i \leq \rho_V(V_m + V_s).$$

Остання нерівність випливає з умови V-перемішування.

□

Лема 5.16. *Для довільних* $i, j \in E$*, а також* $t < n$ *має місце наступна нерівність:*

$$(V_i{+}V_j)^{-1}\sum_{x,y}\mathbb{P}(Z_n^{(1)}=x,Z_n^{(2)}=y,d_l=0,l=\overline{t,n}|Z_t^{(1)}=i,Z_t^{(2)}=j,d_t=0)(V_x{+}V_y)\le\rho_V^{n-t}. \tag{5.121}$$

Доведення.

Виділимо з формули (5.121) ймовірність переходу в останній момент і, помінявши порядок підсумовування, отримаємо:

$$(V_i+V_j)^{-1}\sum_{x,y}\mathbb{P}(Z_n^{(1)}=x,Z_n^{(2)}=y,d_l=0,l\ge t|Z_t^{(1)}=i,Z_t^{(2)}=j,d_t=0)(V_x+V_y)=$$

$$(V_i+V_j)^{-1}\sum_{m,s}\mathbb{P}(\overline{X}_{n-1}=(m,s,0),d_l=0,l=\overline{t,n-1}|\overline{X}_t=(i,j,0))\times$$

$$\sum_{x,y}\mathbb{P}(\overline{X}_n=(x,y,0)|\overline{X}_{n-1}=(m,s,0))(V_x+V_y)\le$$

$$\rho_V(V_i+V_j)^{-1}\sum_{m,s}\mathbb{P}(\overline{X}_{n-1}=(m,s,0),d_l=0,l=\overline{t,n-1}|\overline{X}_t=(i,j,0))(V_m+V_s),$$

де остання нерівність є наслідком прямого застосування леми 5.15.

Формула (5.121) тепер виводиться за індукцією:

$$(V_i+V_j)^{-1}\sum_{x,y}\mathbb{P}(Z_n^{(1)}=x,Z_n^{(2)}=y,d_l=0,l\ge t|Z_t^{(1)}=i,Z_t^{(2)}=j,d_t=0)(V_x+V_y)\le$$

$$(V_i+V_j)^{-1}\rho_V^{n-t}(V_i+V_j)=\rho_V^{n-t}.$$

□

5.4 Застосування до моделі пенсії вдівця

5.4.1 Вступ

У цьому розділі розглядається модель спільного страхування - так звана пенсія вдівця. Сенс цієї моделі полягає у наступному. Якщо один із подружжя помирає, інший отримає пожиттєву пенсію. Подібні моделі спільного доживання розглядаються, зокрема, у книзі [1], в розділах 9, 12, 13, 18. Як зауважено в [1], в розділі 9, розглядаючи страхування життя для групи людей, слід враховувати, що ймовірності смерті взагалі кажучи є залежними, однак припущення щодо їх незалежності дозвляє значно спростити розрахунки і широко використовується на практиці.

У цьому розділі ми розглядаємо вплив стрес-фактору на смертність, та на розмір премій. Іншими словами, ми будемо аналізувати, наскільки важливим є стрес-фактор та яким чином його слід врахувати при обчисленні премій.

В актуарній термінології (див [1], ст. 491) ця модель відповідає ануїтету для статусу $\left(\frac{[1]}{xy}\right)$, або іншими словами - після того, як один із членів подружжя помер, пенсія у вигляді однієї щорічної виплати буде виплачуватися, поки другий член подружжя живий (див. [37] та [153])). Ця модель є дискретною у тому сенсі, що виплати починаються в момент часу $\theta_0 = \min\{K_1, K_2\} + 1$ та закінчуються в момент часу $\theta = \max\{K_1, K_2\} + 1$, де K_1, K_2 фунції дожиття для першого та другого членів подружжя (див. [1] ст. 66).

Ця ситуація моделюється марковською моделлю, та для оцінки стрес-фактору ми скористаємось попереднім результатом щодо стійкості неоднорідних за часом ланцюгів Маркова. Більше інформації про ланцюги Маркова в актуарній математиці можна знайти у книзі [162].

5.4.2 Зв'язок із актуарними функціями

В означеннях, наведених нижче, q_{x+t}, q'_{y+t} - це відомі актуарні функції, $q_{x+t} = {}_1q_{x+t}$ - ймовірність смерті першої особи віку x протягом року життя - $[t+x, t+x+1)$ будучи живим на початку цього року, відповідно $q'_{y+t} =_1 q_{y+t}$ - це ймовірність смерті другої особи віку y, протягом року життя $[y+t, y+t+1)$.

Ми розглядаємо спільне страхування життя – пенсію, яку отримає особа, яка залишається живою після смерті партнера. Функція $\varphi(s,t) = \sum\limits_{k=s+1}^{t} v^k$ – це сучасна вартість страхових премій, якщо перша смерть у подружжі трапилась в s-тому році, а друга в t-тому, де v це дисконтний множник.

Визначимо наступні випадкові величини:

$$\theta_0 = \min\{K(x), K(y)\} + 1, \ \ \theta = \max\{K(x), K(y)\} + 1,$$

$$\varphi = \sum_{t=\theta_0}^{\theta-1} v^t, \tag{5.122}$$

де $K(x), K(y)$ це функції, які рівні цілій кількості майбутніх років життя осіб віку x та y відповідно. Ці актуарні функції визначені в [1], ст. 78.

Зауважимо, що за означенням φ – це сучасна вартість страхових премій для ануїтету $\left(\dfrac{[1]}{xy}\right)$ та

$$A_{\overline{xy}}^{[1]} = \mathbb{E}_0[\varphi]. \tag{5.123}$$

Щоб описати ефект стресу на рівень смертності вдівця (або вдови), ми замінимо ймовірності смерті q_{x+t}, q'_{y+t} після випадкового моменту першої смерті θ_0 на збільшені ймовірності смертності $q_{x+t}(1+\alpha_t)$, $q'_{y+t}(1+\alpha_t)$. Тут $\alpha_t \geq 0$ це стрес фактор у t-тому році.

5.4.3 Марковська модель

Розглянемо два неоднорідні ланцюги Маркова X та X' зі значеннями у фазовому просторі $E = \{0, 1, 2, 3\}$ та перехідними ймовірностями на t-тому кроці відповідно

$$P_t = \begin{pmatrix} (1-q_{x+t})(1-q'_{y+t}) & q_{x+t}(1-q'_{y+t}) & q'_{y+t}(1-q_{x+t}) & q_{x+t}\,q'_{y+t} \\ 0 & 1-q'_{y+t} & 0 & q'_{y+t} \\ 0 & 0 & 1-q_{x+t} & q_{x+t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для моделі без стресу, та

$$P'_t = \begin{pmatrix} (1-q_{x+t})(1-q'_{y+t}) & q_{x+t}(1-q'_{y+t}) & q'_{y+t}(1-q_{x+t}) & q_{x+t}\,q'_{y+t} \\ 0 & 1-q'_{y+t}(1+\alpha_t) & 0 & q'_{y+t}(1+\alpha_t) \\ 0 & 0 & 1-q_{x+t}(1+\alpha_t) & q_{x+t}(1+\alpha_t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для моделі зі стрес-фактором (α_t).

Матриця відносних різниць (5.93) рівна

$$(\rho_t(i,j),\ i,j \in E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_t q'_{y+t}/(1-q'_{y+t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_t q_{x+t}/(1-q_{x+t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Помітимо, що θ є моментом першого входу в поглинаючу множину $\{3\}$, а функція φ повністю визначається значеннями $(X_1, X_2, \ldots, X_\theta)$, а отже вона $\mathfrak{F}_\theta$-вимірна.

Помітимо, що різниці (5.93) та (5.103) задовільняють

$$\rho_s(X_s, X_{s+1}) = \alpha_s b_s 1_{\{s<\theta\}},$$

$$b_s = 1_{\{s<\theta_0-1\}}0 + 1_{\{\theta_0-1\le s<\theta-1\}} \max(q_{x+s}/(1-q_{x+s}),\ q'_{y+s}/(1-q'_{y+s})) + 1_{\{s=\theta-1\}}0,$$

отже, ми можемо обрати в (5.103)

$$\overline{\varepsilon}(\theta) = 1 - \prod_{s=\theta_0-1}^{\theta-2} (1-\alpha_s \max(q_{x+s}/(1-q_{x+s}),\ q'_{y+s}/(1-q'_{y+s}))),\ \underline{\varepsilon}(\theta') = 0. \quad (5.124)$$

5.4.4 Оцінка впливу стерс-фактору

Теорема 5.11. *Позначимо через* $\Pi_0 = A^{[1]}_{\overline{xy}} = \mathbb{E}_0[\varphi]$ *– одноразову нетто-премію для моделі без стрес-фактору, а через* $\Pi'_\alpha = A'^{[1]}_{\overline{xy}} = \mathbb{E}'_0[\varphi']$ *– аналогічну премію для моделі зі стрес-фактором* α*, та позначимо через* $\theta_0 = \min\{K(x), K(y)\} + 1$ *перший, а через* $\theta = \max\{K(x), K(y)\} + 1$ *останній момент часу, у який відбуваються виплати за полісом. Тоді*

$$|\Pi_0 - \Pi'_\alpha| \le$$
$$\mathbb{E}[v^{\theta_0}(1 - v^{|K(x)-K(y)|})(1-v)^{-1}\left(|K(x)-K(y)|-1\right)^+ \max_{\theta_0-1\le s<\theta-1}(\alpha_s b_s))]\ . \quad (5.125)$$

Доведення. Зауважимо, що $\Pi_0 \ge \Pi'_\alpha$, оскільки за наявності стресу інтенсивність смертності вища. Зокрема, $\varphi \ge \varphi'$, $\theta \ge \theta'$. Тоді з правої нерівності в (5.102) та з (5.122), (5.96), (5.124), (5.103) ми отримаємо

$$|\Pi_0 - \Pi'_\alpha| = \Pi_0 - \Pi'_\alpha \le \mathbb{E}[\varphi\, \overline{\varepsilon}(\theta)] \le$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\theta_0}^{\theta} v^t \left(1 - \prod_{s=\theta_0-1}^{\theta-2}(1-\alpha_s b_s)\right)\right] \le$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\theta_0}^{\theta} v^t \left(\sum_{s=\theta_0-1}^{\theta-2} \alpha_s b_s\right)\right] \le \mathbb{E}\left[\sum_{t=\theta_0}^{\theta} v^t \left((\theta-\theta_0)^+ \max_{\theta_0-1\le s<\theta-1}(\alpha_s b_s)\right)\right] =$$

$$\mathbb{E}[v^{\theta_0}(1 - v^{|K(x)-K(y)|})(1-v)^{-1}\left(|K(x)-K(y)|-1\right)^+ \max_{\theta_0-1\le s<\theta-1}(\alpha_s b_s))] \quad (5.126)$$

□

Розділ 6

Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова за умови рівномірної міноризації

6.1 Вступ

У цій частині дисертаційної роботи ми будемо розглядати питання, пов'язані зі стійкістю неоднорідних ланцюгів Маркова, за умови рівномірної міноризації. Умова рівномірної мінорізації, або мінорізації на всьому просторі для однорідних ланцюгів є еквівалентною рівномірній ергодичності і забезпечує рівномірну геометричну рекурентність. Для неоднорідних ланцюгів, як ми побачимо у цьому розділі, така умова уможливлює конструкцію склеювання "на всьому просторі", яка є певним чином еквівалентною максимальному склеюванню, яке ми розглянули раніше для неоднорідних ланцюгів із дискретним простором станів (зауважимо, що в цьому розділі ми розглядаємо неоднорідні ланцюги із загальним простором станів).

Під стійкістю будемо розуміти близькість перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній нормі, стійкість функціоналів (див. також [102]), а також стійкість скінченновимірних розподілів.

Ми будемо розглядати два неоднорідні незалежні ланцюги Маркова $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$, задані на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ зі значеннями в деякому вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$.

Будемо використовувати позначення

$$\mu K(A) = \int_E \mu(dx) K(x, A),$$

де μ — деяка міра на $(E, \mathcal{E})$, а $K\colon E \times \mathcal{E} \to [0, \infty)$ — деяке ядро. Для випадкової величини ξ та міри μ позначення

$$\xi \sim \mu$$

буде означати, що ξ має розподіл μ.

Перехідні ймовірності за один крок будемо позначати так:

$$P_{it}(x, A) = \mathcal{P}\{X_{t+1}^{(i)} \in A | X_t^{(i)} = x\}.$$

Тут $t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $\mathbb{N}$ — це множина натуральних чисел, $i \in \{1, 2\}$. У цій частині дисертаційної роботи ми розглядаємо лише дискретну множину індексів, тож у подальшому вирази вигляду $t \geq 0$ або $n \geq k$, $k \geq 0$ в контексті індексу ланцюга Маркова, слід розуміти як цілі числа більші або рівні 0 або k відповідно.

Надалі для набору перехідних ядер $P_{it}(x, A)$, $i \in \{1, 2\}$, $t \geq 0$ уведемо позначення:

$$P_i^{t,n}(x, A) := \left(\prod_{k=t}^{t+n-1} P_{it} \right) (x, A).$$

Таким чином у наших позначеннях

$$P_1^{t,n}(x, A) = \mathcal{P}\{X_{t+n}^{(1)} \in A | X_t^{(1)} = x\}.$$

Для дослідження стійкості необхідно розглядати ланцюги, що є близькими у деякому сенсі. Ми припустимо, що виконується таке зображення:

$$P_{it}(x, A) = Q_t(x, A) + (1 - Q_t(x, E)) R_{it}(x, A). \tag{6.1}$$

Тут $Q_t(x, A)$ деякий субстохастичний оператор (тобто $0 \leq Q_t(x, E) \leq 1$).

У цій схемі $Q_t(x, A)$ грає роль «спільної частини» двох ланцюгів. Чим вона «більша», тим більш подібними є ланцюги. Як і раніше позначимо

$$Q^{t,n}(x, A) := \left(\prod_{k=t}^{t+n-1} Q_k \right) (x, A).$$

Введемо позначення для міри близькості ланцюгів:

$$\varepsilon_t(x) = 1 - Q_t(x, E), \;\; \varepsilon_t(x) \in [0, 1]. \tag{6.2}$$

У подальшому ми будемо накладати різні умови на $\varepsilon_t(x)$. Найпростішою є умова рівномірної близькості: $\sup_{t,x} \varepsilon_t(x) < 1$.

Розглянемо декілька прикладів того, як може виглядати ядро Q_t.

Ядро мінімуму. Як $Q_t(x, A)$ можна вибрати мінімум $P_{it}(x, A)$ по $i \in \{1, 2\}$. Нехай перехідні ймовірності $P_{it}(x, A)$ мають щільності відносно деякої σ-скінченної міри λ:

$$P_{it}(x, A) = \int\limits_A f_{it}(x, y)\lambda(dy).$$

Тоді можна визначити

$$Q_t(x, A) = \int\limits_A f_{1t}(x, dy) \wedge f_{2t}(x, dy)\lambda(dy).$$

У цьому випадку $R_{it}(x, A) = \frac{P_{it}(x,A) - Q_t(x,A)}{1 - Q_t(x,E)}$, якщо $Q_t(x, E) < 1$, та $R_{it}(x, A) = 0$, якщо $Q_t(x, E) = 1$.

Збурені ланцюги. У деяких задачах ланцюги можна зобразити у вигляді

$$P_{it}(x, A) = (1 - \varepsilon_t)Q(x, A) + \varepsilon_t R_{it}(x, A).$$

Тобто обидва ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ є збуреними версіями деякого однорідного ланцюга з перехідним ядром $Q(x, A)$.

Умова міноризації на всьому просторі. Розглянемо умову

$$P_{it}(x, A) \geq \alpha\nu(A), \forall x \in E, \tag{6.3}$$

де $\alpha \in (0, 1)$, ν — деяка імовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$.

Зауважимо, що у випадку коли простір E дискретний, з умови міноризації на всьому просторі випливає умова рівномірного перемішування (див. Розділи 5.2.2 та 5.3.2):

$$\frac{1}{2} \sup_{i \neq j} \sum_{k \in E} |P_{1t}(i, k) - P_{2t}(j, k)| \leq \rho < 1.$$

Дійсно

$$\sum_{k \in E} |P_{1t}(i, k) - P_{2t}(j, k)| = \sum_{k \in E} P_{1t}(i, k) + P_{2t}(j, k) - 2P_{1t}(i, k) \wedge P_{2t}(j, k) \leq$$

$$\leq 2 - \alpha \sum_{k \in E} 2\nu(k) = 2(1-\alpha),$$

тобто ρ в умові рівномірного перемішування та α в умові мінoризації пов'язані співвідношенням $\rho = 1 - \alpha$. В теорії однорідних ланцюгів Маркова такі умови гарантують сильну ергодичність. Подібні ланцюги широко досліджувались як в однорідному, так і в неоднорідному випадках. Див., наприклад, роботи [139], [138], [?]. Особливістю результатів, представлених у даному розділі, є загальний фазовий простір, тоді як попередні дослідження переважно стосувались ланцюгів зі скінченим або дискретним простором значень (наприклад, [20], [21], [22] та [116]).

Зауважимо також, що дана умова мінoризації гарантує неперіодичність ланцюгів. Періодничні ланцюги досліджуються в роботі [45].

6.2 Склеювання на всьому просторі та його властивості

Побудуємо склеювання для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ за умови мінoризації на всьому просторі.

Визначимо спочатку оператор «несклеювання»:

$$T_t(x_1, x_2; A, B) = \frac{P_{1t}(x_1, A) - \alpha\nu(A)}{1-\alpha} \frac{P_{2t}(x_2, B) - \alpha\nu(B)}{1-\alpha}. \tag{6.4}$$

Зауважимо, що T_t — це стохастичний оператор:

$$T_t(x_1, x_2; E, E) = 1.$$

Окрім того,

$$T_t(x_1, x_2; A, E) = \frac{P_{1t}(x_1, A) - \alpha\nu(A)}{1-\alpha}, \; T_t(x_1, x_2; E, A) = \frac{P_{2t}(x_2, A) - \alpha\nu(A)}{1-\alpha}.$$

Для побудови склеювання розглянемо фазовий простір $(E \times E \times \{0, 1, 2\})$, на якому задано неоднорідний ланцюг Маркова $Z_n = (Z_{1n}, Z_{2n}, d_n), \; n \geq 0$, із такими перехідними імовірностями:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_t(x, y, 0; A \times B \times \{0\}) = (1-\alpha)T_t(x, y, A, B),\\
&\mathbb{P}_t(x, y, 0; A \times B \times \{1\}) = \alpha\nu(A \cap B),\\
&\mathbb{P}_t(x, y, 0; A \times B \times \{2\}) = 0,\\
&\mathbb{P}_t(x, x, 1; A \times B \times \{0\}) = (1 - Q_t(x, E))R_{1t}(x, A)R_{2t}(y, B),\\
&\mathbb{P}_t(x, x, 1; A \times B \times \{1\}) = 0,\\
&\mathbb{P}_t(x, x, 2; A \times B \times \{2\}) = Q_t(x, A \cap B),\\
&\mathbb{P}_t(x, y, 2; A \times B \times \{i\}) = \mathbb{P}_t(x, y, 1; A \times B \times \{i\}),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

тут $Q_t, R_{1t}R_{2t}$ визначено в (6.1).

Через $\mathbb{P}^{(t)}_{xyd}$ будемо позначати ймовірність на канонічному ймовірнісному просторі, породженому ланцюгом Z_n із перехідними ймовірностями $\mathbb{P}_t$, що стартує з моменту t та зі стану $Z_t = (x, y, d)$, $x, y \in E$, $d \in \{0, 1, 2\}$. Символом $\mathbb{E}^{(t)}_{xyd}$ позначатимемо математичне сподівання, що відповідає мірі $\mathbb{P}^{(t)}_{xyd}$.

Визначимо також ймовірнісну міру $\mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}(\cdot) := \int_E \nu(dx)\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}(\cdot)$, і відповідне математичне сподівання позначимо $\mathbb{E}^{(t)}_{\nu 1}$. Легко бачити, що маргінальні ймовірності ланцюга Z_n збігаються з перехідними ймовірностями ланцюгів $X^{(1)}_n$ та $X^{(2)}_n$.

Дану конструкцію склеювання можна інтерпретувати таким чином.
Якщо ланцюги в момент t не склеєні, то проводимо незалежне випробування, що склеює ланцюги з ймовірністю α (незалежно від поточного стану ланцюгів), і не склеює з ймовірністю $1-\alpha$, у цьому випадку ланцюги продовжують рухатись із перехідною ймовірністю T_t. Якщо ланцюги не склеєні в момент часу t, то $d_t = 0$.

Якщо склеювання відбулось у момент t, то $Z^{(1)}_t = Z^{(2)}_t \sim \nu$, $d_t = 1$. Якщо ланцюги склеєні в момент t і перебувають у стані x, то проводимо незалежне випробування, що розклеює ланцюги з ймовірністю $1 - Q_t(x, E)$ і залишає їх склеєними з ймовірністю $Q_t(x, E)$. Якщо ланцюги залишаються склеєними, то $Z^{(1)}_{t+1} = Z^{(2)}_{t+1} \sim Q_t(x, \cdot)/Q_t(x, E)$, $d_{t+1} = 2$, якщо ланцюг склеєний в момент часу $t+1$ і був склеєним у момент часу t.

Якщо склеєні ланцюги, що перебувають у момент часу t у стані x, розклеїлись, то $Z^{(1)}_{t+1} \sim R_{1,t+1}(x, \cdot)$, $Z^{(2)}_{t+1} \sim R_{2,t+1}(x, \cdot)$, $d_{t+1} = 0$.

Таке склеювання іноді називають рівномірним склеюванням (див. [80]). Інші приклади склеювання див. в роботах [143], де склеювання застосовується для аналізу напівмарковських ланцюгів, та [105] для склеювання процесів з неперервним часом.

Для ймовірностей, пов'язаних зі склеюванням, зручно ввести окремі позначення:

$$\begin{aligned} r_k^{(t)}(dx,dy) &= \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{t+i}=2, i=\overline{1,k-1}, Z_{t+k}=(dx,dy,0)\}, \\ r_k^{(t)}(x_0,dx,dy) &= \mathbb{P}_{x_0x_0 2}^{(t)}\{d_{t+i}=2, i=\overline{1,k-1}, Z_{t+k}=(dx,dy,0)\}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

$t \ge 0$, $k \ge 1$. Тут $r_k^{(t)}(dx,dy)$ — це ймовірність того, що ланцюг, що склеївся в момент t, перебував у склеєному стані $k-1$ кроків і розклеївся в момент k, причому перша і друга компонента потрапили у стани dx, dy відповідно.

Розглянемо такі ймовірності:

$$\begin{aligned} g_n^{(t)}(x) &= \mathbb{P}_{xx2}^{(t)}\{d_{n+t}=1, d_i \ne 1, i=\overline{t,n+t-1}\}, \\ g_n^{(t)} &= \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{n+t}=1, d_i \ne 1, i=\overline{t+1,n+t-1}\}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

$t, n \ge 0$.

Зауважимо, що

$$g_0^{(t)} = g_1^{(t)} = g_0^{(t)}(x) = g_1^{(t)}(x) = 0.$$

Визначимо також ймовірності «не склеювання»:

$$h_n^{(t)}(x,y) = \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+k}=0, k=\overline{1,n}\}. \tag{6.8}$$

Введемо позначення для ймовірностей потрапляння d_n у стан 1.

$$\begin{aligned} u_n^{(t)} &= \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{n+t}=1\} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)} g_{n-k}^{(t+k)} = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(t)} u_{n-k}^{(t+k)}, \\ u_n^{(t)}(x) &= \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{n+t}=1\} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t)}(x) g_{n-k}^{(t+k)} = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(t)}(x) u_{n-k}^{(t+k)}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Зауважимо, що $u_0^{(t)} = u_0^{(t)}(x) = 1$, $u_1^{(t)} = u_1^{(t)}(x) = 0$.

Лема 6.1. *Ймовірність $h_n^{(t)}(x,y)$ того, що розклеєний ланцюг, який перебуває у момент $t \ge 0$ у стані $(x,y) \in E \times E$, не склеїться за n кроків, дорівнює $(1-\alpha)^n$.*

Доведення. Згідно з формулами (6.5) та означенням (6.8) справедливі вирази:

$$h_n^{(t)}(x,y) = \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_k = 0, 1 \le k \le n\} = (1-\alpha)^n T^{t,n}(x,y,E,E) = (1-\alpha)^n,$$

оскільки кожен $T_t(x,y,A,B)$ — це стохастичний оператор.

□

Лема 6.2. *Для довільних $t \ge 0$, $k \ge 1$, $x_0 \in E$ виконуються такі вирази:*

$$\begin{aligned}
r_k^{(t)}(dx,dy) &= \int\limits_E \nu Q^{t,k-1}(dz)\varepsilon_{t+k}(z)R_{1t+k}(z,dx)R_{2t+k}(z,dy),\\
r_k^{(t)}(x_0,dx,dy) &= \int\limits_E \delta_{x_0}Q^{t,k-1}(dz)\varepsilon_{t+k}(z)R_{1t}(z,dx)R_{2t}(z,dy),\\
r_k^{(t)}(E,E) &\le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}(1-\varepsilon_{t+j}(x)) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x),\\
r_k^{(t)}(x_0,E,E) &\le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}(1-\varepsilon_{t+j}(x)) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Величину $\varepsilon_{t+k}(x)$ визначено у (6.2). У формулах (6.10) вважаємо, що $\prod\limits_{j=1}^{0} = 1$.

Доведення. Доведемо першу формулу. Згідно з означенням $r_k^{(t)}(dx,dy)$ (6.6) та формулами (6.5) маємо

$$\begin{aligned}
r_k^{(t)}(dx,dy) &= \mathbb{P}_{\nu1}^{(t)}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{1,k-1}, Z_{t+k} = (dx,dy,0)\} =\\
&= \int\limits_E \mathbb{P}_{\nu1}^{(t)}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{1,k-1}, Z_{t+k-1} = (du,du,2)\}\mathbb{P}_{t+k-1}(u,u,2;dx,dy,0) =\\
&= \int\limits_E \nu Q^{t,k-1}(du)\varepsilon_{t+k}(u)R_{1t+k}(u,dx)R_{2t+k}(u,dy).
\end{aligned}$$

Аналогічним чином, заміною міри ν на $\delta_x = \delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ доводиться друга формула.

Третя формула випливає з першої та того факту, що $R_{it}(x,E) = 1$:

$$r_k^{(t)}(E,E) = \int\limits_E \nu Q^{t,k-1}(dz)\varepsilon_{t+k}(z)R_{1t+k}(z,E)R_{2t+k}(z,E) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\nu Q^{t,k}(E) \le$$

$$\leq \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}Q_{t+j}(x,E) = \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}(1-\varepsilon_{t+j}(x)) \leq \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x).$$

Формула для $r_k^{(t)}(x_0, E, E)$ з (6.10) доводиться аналогічно заміною міри ν на δ_x. □

Лема 6.3. *Для довільних $t \geq 0$ та $n \geq 1$ справджуються формули:*

$$\begin{gathered} g_n^{(t)} = \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E} r_k^{(t)}(dx,dy)h_{n-1-k}^{(t+k)}(x,y) = \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\nu Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-1-k}, \\ g_n^{(t)}(x) = \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\delta_x Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-1-k}, \end{gathered} \tag{6.11}$$

де $\varepsilon_t(x) = 1 - Q_t(x,E)$.

Доведення. Знайдемо вираз для $g_n^{(t)}$. Із означення (6.7):

$$\begin{aligned} g_n^{(t)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{n+t}=1, d_{t+k}=\ldots=d_{t+n-1}=0, d_{t+1}=\ldots=d_{t+k-1}=2\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\nu Q^{t,k-1}(dy)\varepsilon_{t+k}(y)R_{1t}(y,dz_1)R_{2t}(y,dz_2)(1-\alpha)^{n-1-k}\times \\ &\quad \times T^{t+k,n-1-k}(z_1,z_2,E,E)\alpha = \\ &= \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E} r_k^{(t)}(dz_1,dz_2)h_{n-1-k}^{(t+k)}(z_1,z_2) = \\ &= \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\nu Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Остання формула в (6.11) отримується заміною міри ν на δ_x. □

6.3 Стійкість перехідних ймовірностей за умови рівномірної міноризації

6.3.1 Стійкість за умови рівномірної близькості перехідних ймовірностей за один крок

Для того, щоб отримати стійкість перехідних імовірностей необхідно, щоб ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ були близькими в деякому сенсі.

Першою і найбільш очевидною характеристикою близькості є така величина:

$$\varepsilon = \sup_{t\geq 0, x\in E} \varepsilon_t(x) = \sup_{t,x}(1 - Q_t(x, E)). \tag{6.12}$$

Умова рівномірної близькості полягає у тому, що $\inf_{t,x} Q_t(x, E) > 0$, або іншими словами, усі перехідні імовірності мають ненульову спільну частину. Для подальшого використання нам буде зручно переформулювати цю умову у вигляді

$$\varepsilon = \sup_{t\geq 0, x\in E} (1 - Q_t(x, E)) < 1. \tag{6.13}$$

Введемо також

$$\varepsilon_n^{(t)} = \sup_{t\leq k\leq t+n, x\in E} \varepsilon_k(x) = \sup_{t\leq k\leq t+n, x\in E} (1 - Q_t(x, E)). \tag{6.14}$$

Очевидно, що $\varepsilon_n^{(t)} \leq \varepsilon$ для довільних t, n. Якщо очікувати, що ε є малою величиною, то це означатиме, що $Q_t(x, E)$ буде близькою до 1 при всіх t, x, що у свою чергу означатиме близькість перехідних імовірностей P_{it}. Такий підхід можна використовувати, коли є підстави сподіватися, що «збурення ланцюгів» рівномірно обмежено деякою малою величиною.

Покажемо, що величини $g_n^{(t)}$, $g_n^{(t)}(x), u_n^{(t)}, u_n^{(t)}(x)$ мають порядок малості $\varepsilon_n^{(t)}$.

Лема 6.4. *Для довільних $t \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$, $x \in E$ виконано такі нерівності:*

$$g_n^{(t)} \leq \varepsilon_n^{(t)}(1 - \alpha) \leq \varepsilon(1 - \alpha),$$
$$g_n^{(t)}(x) \leq \varepsilon_n^{(t)}(1 - \alpha) \leq \varepsilon(1 - \alpha),$$

де ε та $\varepsilon_n^{(t)}$ визначено у (6.12) та (6.14) відповідно.

Доведення. Із формул (6.11) випливає

$$g_n^{(t)} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \nu Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-k-1} \le \varepsilon_n^{(t)} \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \nu Q^{t,k-1}(E)(1-\alpha)^{n-1-k} \le$$

$$\le \alpha \varepsilon_n^{(t)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha)^k = \varepsilon_n^{(t)} \alpha(1-\alpha)/\alpha = \varepsilon_n^{(t)}(1-\alpha) \le \varepsilon(1-\alpha).$$

Формула для $g_n^{(t)}(x)$ отримується аналогічно. ☐

Наступна лема є ключовою для виведення оцінок стійкості.

Лема 6.5. *Для довільних $x \in E$ та $n \ge 2$ виконуються такі нерівності:*

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \le \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha},$$

$$\mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \le \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}.$$

Доведення. Розкладемо ймовірність $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{n+t} = 0\}$ за моментом останнього склеювання $k \ge 0$. Вона означає, що ланцюг, що стартував склеєним, у точці x розклеївся в якийсь момент $i > k$ і залишався розклеєним до часу $t+n$. Якщо $k = 0$, то це означає, що жодного склеювання між моментами часу $t+1$ та $t+n$ не відбулось.

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{n+t} = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1, d_{t+j} \ne 1, j = \overline{k+1, n}, d_{t+n} = 0\}. \tag{6.15}$$

Імовірність (6.15) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1, d_{t+j} \ne 1, j = \overline{k+1, n}, d_{t+n} = 0\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1\} \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+j} \ne 1, j = \overline{k+1, n}, d_{t+n} = 0\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1\} \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+i} = 2, i < j, d_{t+l} = 0, l \ge j\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x) \int_{E\times E} r_j^{(t+k)}(dz, dy) h_{n-j}^{(t+k+j)}(z, y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x) r_j^{(t+k)}(E,E)(1-\alpha)^{n-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x) \int_E \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z) R_{1t+k+j}(z,E) R_{2t+k+j}(z,E)(1-\alpha)^{n-j},$$

де $u_k^{(t)}(x)$ визначено в (6.9). Оскільки R_{it} — це стохастичні оператори, то $\forall z \in E$, $R_{it}(z,E) = 1$, отже останній вираз такий:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x) \int_E \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} \le$$

$$\le \varepsilon_n^{(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x) \nu Q^{t+k,j-1}(E)(1-\alpha)^{n-j} =$$

$$= \varepsilon_n^{(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1\} \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{k+1, j-1}\}(1-\alpha)^{n-j} =$$

$$= \varepsilon_n^{(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1, d_{t+i} = 2, i = \overline{k+1, j-1}\}(1-\alpha)^{n-j} =$$

$$= \varepsilon_n^{(t)} \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)^{n-j} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k} = 1, d_{t+i} = 2, i = \overline{k+1, j-1}\} =$$

$$= \varepsilon_n^{(t)} \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)^{n-j} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+j-1} = 2\} \le$$

$$\le \varepsilon_n^{(t)} \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^{j} = \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}.$$

Оцінка для $\mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$ виводиться абсолютно аналогічно заміною $u_n^{(t)}(x)$ на $u_n^{(t)}$. □

Нам також знадобиться подібна оцінка для ланцюгів, що стартують розклеєними.

Лема 6.6. *Для довільних $x, y \in E$, $t \ge 0$ та $n \ge 2$ справедливі такі нерівності:*

$$\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \le (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1} \right) \le$$

$$\le (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}.$$

Доведення. Для ланцюга Z_n, що стартував розклеєним у момент t, є дві можливості бути розклеєним у момент $t+n$: якщо він перебував у розклеєному стані весь час, або якщо відбулося хоча б одне склеювання, після якого ланцюг розклеївся.

Таким чином, можемо записати:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\} = \\
&\quad= \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+i}=0, i\le n\} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+i}=0, i<k, d_{t+k}=1, d_{t+n}=0\} = \\
&\quad= h^{(t)}_n(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{xy0}\{d_{t+i}=0, i<k, d_{t+k}=1\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+k+(n-k)}=0\} = \\
&\quad= h^{(t)}_n(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{xy0}\{d_{t+i}=0, i<k, Z_{t+k-1}=(du,dv,0)\} \times \\
&\qquad \times \mathbb{P}^{(t+k-1)}_{uv0}\{d_{t+k}=1\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+n}=0\} = \\
&\quad= h^{(t)}_n(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha h^{(t)}_{k-1}(x,y)\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+k+(n-k)}=0\}.
\end{aligned}$$

Скористаємось тим фактом, що $h^{(t)}_n(x,y) = (1-\alpha)^n$, та Лемою 6.5 та отримаємо, що

$$\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+k+(n-k)}=0\} \le \varepsilon^{(t+k)}_{n-k}\frac{1-(1-\alpha)^{n-k}}{\alpha}.$$

Підставимо останню нерівність у вираз для $\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\}$, й отримаємо оцінки

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\} &= h^{(t)}_n(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha h^{(t)}_{k-1}(x,y)\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+k+(n-k)}=0\} \le \\
&\le (1-\alpha)^n + \alpha\sum_{k=1}^{n-1}(1-\alpha)^{k-1}\varepsilon^{(t+k)}_{n-k}\frac{1-(1-\alpha)^{n-k}}{\alpha} \le \\
&\le (1-\alpha)^n + \varepsilon^{(t)}_n \sum_{k=1}^{n-1}\left((1-\alpha)^{k-1}-(1-\alpha)^{n-1}\right) \le \\
&\le (1-\alpha)^n + \varepsilon^{(t)}_n\left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right).\square
\end{aligned}$$

Наступна теорема дає оцінку стійкості для перехідних імовірностей за n кроків.

Теорема 6.1. *Нехай* $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$ *— два неоднорідні незвідні неперіодичні ланцюги Маркова, для перехідних імовірностей яких справедливе зображення (6.1), та виконано умови міноризації (6.27) і рівномірної близькості (6.13). Тоді для довільних* $x, y \in E$, $t \geq 0$ *та* $n \geq 2$ *виконано такі нерівності:*

$$\begin{aligned}
&\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(x,A)| \leq \varepsilon\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha},\\
&\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(y,A)| \leq (1-\alpha)^n + \varepsilon\left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Доведення. Помітимо, що

$$\begin{aligned}
|P_1^{(t,n)}(x,A) - P_2^{(t,n)}(x,A)| &= |\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\} - \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}| \leq \\
&\leq \max\{\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\}, \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}\} \leq \\
&\leq \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}.
\end{aligned}$$

Однак, для останньої імовірності в силу леми 6.5 виконано нерівність

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \leq \varepsilon\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}.$$

Розглянемо тепер стійкість перехідних імовірностей для ланцюгів, що стартують із різних точок. Аналогічно до попередніх міркувань, виводимо

$$\begin{aligned}
|P_1^{(t,n)}(x,A) - P_2^{(t,n)}(y,A)| &= |\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\} - \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}| \leq \\
&\leq \max\{\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\}, \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}\} \leq \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}.
\end{aligned}$$

Оцінка (6.16) випливає тепер із леми 6.6. □

Зауваження 6.1. Якщо ланцюги $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ періодичні з однаковим періодом m, то ланцюги $(X_{nm}^{(1)}, n \geq 0)$, $(X_{nm}^{(2)}, n \geq 0)$ будуть неперіодичними, і до них можна застосувати теорему 6.1.

6.3.2 Порушення умови рівномірної близькості за часом

Припустимо, що величина $\varepsilon_t(x)$ не є рівномірно меншою 1 по t. Нехай $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}_0$ – множина індексів, для яких $\sup_{t\in\mathbb{T}} \sup_{x\in E} \varepsilon_t(x) = 1$.

Введемо позначення:

$$\mathbb{T}_n^{(t)} = \mathbb{T} \cap \{t, t+1, \dots, t+n\}, \ t \geq 0, \ n \geq 0,$$
$$\tilde{k}_n^{(t)} = \max\{t \in \mathbb{T}_n^{(t)}\} \leq \infty.$$

Визначимо також

$$\tilde{\varepsilon} = \sup_{t \notin \mathbb{T}, x \in E} \varepsilon_t(x), \quad \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} = \sup_{t \notin \mathbb{T}_n^{(t)}, x \in E} \varepsilon_t(x)$$

та припустимо, що

$$\tilde{\varepsilon} < 1. \tag{6.17}$$

Далі нам необхідно дослідити, як зміняться результати лем 6.5 та 6.6 в даній ситуації.

Лема 6.7. *Припустимо, що для деяких $t \geq 0$ та $n \geq 2$, $\tilde{k}_n^{(t)} < \infty$ та $t + n \notin \mathbb{T}_n^{(t)}$. Тоді для довільних $x, y \in E$ величини $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$, $\mathbb{P}_{v1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$ та $\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$ не перевищують*

$$(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}-1}}{\alpha}.$$

Доведення. Для зручності позначимо $t_0 = \tilde{k}_n^{(t)}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{n+t} = 0\} &= \int\limits_{E \times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t_0} \in (du, dv, \{0, 1, 2\}), d_{t+n} = 0\} \leq \\
&\leq \int\limits_{E \times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t_0} \in (du, dv, 0), d_{t+n} = 0\} = \\
&= \int\limits_{E \times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t_0} \in (du, dv, 0)\} \mathbb{P}_{uv0}^{(t+t_0)}\{d_{t+t_0+(n-t_0)} = 0\} \leq \\
&\leq \sup_{u,v \in E} \mathbb{P}_{uv0}^{(t+t_0)}\{d_{t+t_0+(n-t_0)} = 0\} \leq (1-\alpha)^{n-t_0} + \tilde{\varepsilon}_{n-t_0}^{t+t_0} \frac{1-(1-\alpha)^{n-t_0-1}}{\alpha},
\end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з леми 6.6. Зауважимо, що $\tilde{\varepsilon}_{n-t_0}^{(t+t_0)} \leq \tilde{\varepsilon}_n^{(t)}$, що доводить нерівність для $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}$. Решта нерівностей доводяться аналогічно. □

Наступна теорема дає відповідь на питання: як зміняться оцінки стійкості, якщо умову рівномірної близькості порушено за часом?

Теорема 6.2. *Нехай* $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$ *— два неоднорідні незвідні неперіодичні ланцюги Маркова, для перехідних імовірностей яких справедливе зображення (6.1), та виконано умови мінорризації (6.27) та близькості поза множиною* $\mathbb{T}$ *— (6.17). Нехай для деяких* $t \geq 0$ *та* $n \geq 2 - \tilde{k}_n^{(t)} < \infty$ *та* $t + n \notin \mathbb{T}_n^{(t)}$. *Тоді для довільних* $x, y \in E$ *виконано такі нерівності*

$$\sup_{A \in \mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x, A) - P_2^{t,n}(x, A)| \leq (1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}} + \varepsilon \frac{1 - (1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}-1}}{\alpha},$$

$$\sup_{A \in \mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x, A) - P_2^{t,n}(y, A)| \leq (1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}} + \varepsilon \frac{1 - (1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}-1}}{\alpha}.$$

Доведення. Як і в теоремі 6.1,

$$|P_1^{(t,n)}(x, A) - P_2^{(t,n)}(x, A)| \leq \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\},$$
$$|P_1^{(t,n)}(x, A) - P_2^{(t,n)}(y, A)| \leq \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}.$$

Доведення завершує застосування леми 6.7. □

6.3.3 Порушення умови рівномірної близькості за простором

Припустимо, що існує деяка множина $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$, для якої $Q_t(x, A) = 0$, $\forall x \in \mathcal{C}$. Припустимо також, що виконується нерівність

$$\hat{\varepsilon} = \sup_{x \notin \mathcal{C}, t} (1 - Q_t(x, E)) < 1. \tag{6.18}$$

Введемо позначення:

$$q^{t,k}(dy) = \int\limits_{\overline{\mathcal{C}}^k} \nu Q^{t,k-1}(dz) Q_{t+k}(z, dy),$$

$$q_k = \sup_t \int\limits_{\overline{\mathcal{C}}^k} \nu Q^{t,k-1}(dz) Q_{t+k}(z, \mathcal{C}).$$

Нехай

$$\delta := \sup_{x \in E \setminus \mathcal{C}, t} Q_t(x, \mathcal{C}). \text{ Тоді } \delta \leq 1.$$

Позначимо також

$$\rho = \max\left\{ \sup_{t, x \in E \setminus \mathfrak{C}} Q_t(x, E \setminus \mathfrak{C}), \nu(E \setminus \mathfrak{C}) \right\}$$

і припустимо, що

$$\rho < 1. \tag{6.19}$$

Маємо очевидну нерівність:

$$q_k \le \rho^k \delta.$$

Сформулюємо тепер аналоги лем 6.5 та 6.6.

Лема 6.8. *Для довільних $x \in E$ та $n \ge 2$ справджуються такі нерівності:*

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0\} \le (\rho \varepsilon^{(t)}_n + \delta)\frac{1 - (1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)},$$

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+n} = 0\} \le (\rho \varepsilon^{(t)}_n + \delta)\frac{1 - (1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}.$$

Доведення. Як і в лемі 6.5, запишемо

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{n+t} = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1\} \mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i < j, d_{t+l} = 0, l \ge j\}.$$

Зауважимо, що в силу того, що $Q_t(x, A) = 0, \forall x \in \mathfrak{C}$, ланцюг Z_n миттєво розклеюється, якщо у склеєному стані потрапляє в $\mathfrak{C}$.

Таким чином, для того, щоб ланцюг Z_n залишався у склеєному стані протягом певного часу необхідно, щоб він перебував у множині $E \setminus \mathfrak{C}$.

Тоді

$$\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i < j, d_{t+l} = 0, l \ge j\} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \times$$

$$\times \int\limits_{(E \setminus \mathfrak{C})^j} \nu Q^{t+k, j-1}(dz) \varepsilon_{t+k+j}(z) R_{1t+k+j}(z, E) R_{2t+k+j}(z, E)(1-\alpha)^{n-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \int\limits_{(E \setminus \mathfrak{C})^j \times E} \nu Q^{t+k, j-1}(dz) \varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \int\limits_{(E \setminus \mathfrak{C})^{j+1}} \nu Q^{t+k, j-1}(dz) \varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x) \int\limits_{(E\setminus\mathfrak{C})^j\times\mathfrak{C}} \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} \le \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x)(1-\alpha)^{n-j}\left(\rho^{j-k}\varepsilon_n^{(t)} + \rho^{j-k-1}\delta\right) = \\
&= (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u_k^{(t)}(x)\rho^{j-k-1}(1-\alpha)^{n-j} = \\
&= (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)^{n-j}\sum_{k=0}^{j-1} u_k^{(t)}\rho^{j-k-1} \le \\
&\le \frac{\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta}{1-\rho}\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)^{n-j}(1-\rho^j) \le (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}.
\end{aligned}
$$

Аналогічно можемо отримати оцінку для $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}$. ☐

Наступна лема дає оцінку імовірності того, що ланцюг, який стартував розклеєним, буде розклеєним у момент часу n.

Лема 6.9. *Для довільних $x, y \in E$, $t \ge 0$ та $n \ge 2$ справедлива така нерівність:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} &\le (1-\alpha)^n + \frac{\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta}{1-\rho}\left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right) \le \\
&\le (1-\alpha)^n + (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha(1-\rho)}
\end{aligned}
$$

Доведення. Доведення аналогічне до леми 6.6. ☐

Із лем 6.8 та 6.9 випливає така теорема.

Теорема 6.3. *Нехай $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$ – два неоднорідні незвідні неперіодичні ланцюги Маркова, для перехідних імовірностей яких справедливе зображення (6.1), та виконано умови міноризації (6.27), близькості поза множиною $\mathfrak{C}$ (6.18) та (6.19). Тоді для довільних $x, y \in E$ та $t \ge 0$ виконані такі нерівності:*

$$
\begin{aligned}
&\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(x,A)| \le (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}, \\
&\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(y,A)| \le (1-\alpha)^n + \\
&\qquad + \frac{\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta}{1-\rho}\left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Приклад 6.1. Покажемо, як отримані результати можуть бути застосовані для вивчення стійкості перехідних імовірностей у модифікованій лінійній моделі. Нехай $c > 0, a < b$ — деякі числа, $X_0^{(1)} = x_0 \in \mathbb{R}$, W_n — незалежні випадкові величини з нормальним розподілом $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$.

Розглянемо модифіковану лінійну модель AR(1):

$$X_n^{(1)} = \begin{cases} cX_{n-1}^{(1)} + W_n, \text{якщо } cX_n^{(1)} + W_n \in [a, b], \\ b, \text{якщо } cX_n^{(1)} + W_n > b, \\ a, \text{якщо } cX_n^{(1)} + W_n < a, n \geq 1 \end{cases} \tag{6.20}$$

Таким чином $X_n^{(1)}$ — це неоднорідний ланцюг Маркова зі значеннями у фазовому просторі $E = [a, b]$. Перехідні імовірності можна записати таким чином:

$$P_{1n}(x, A) = \begin{cases} (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_A \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy, \text{ якщо } A \in (a, b), \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_b^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy, \text{ якщо } A = \{b\}, \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy, \text{ якщо } A = \{a\}. \end{cases} \tag{6.21}$$

Ланцюг $X_n^{(2)}$ отримаємо шляхом додавання малого збурення $\Delta_n \in \mathbb{R}$:

$$X_n^{(2)} = \begin{cases} cX_{n-1}^{(2)} + W_n + \Delta_n, \text{якщо } cX_n^{(2)} + W_n + \Delta_n \in [a, b], \\ b, \text{якщо } cX_n^{(2)} + W_n + \Delta_n > b, \\ a, \text{якщо } cX_n^{(2)} + W_n + \Delta_n < a. \end{cases} \tag{6.22}$$

Перехідні імовірності для $X_n^{(2)}$ матимуть вигляд:

$$P_{2n}(x, A) = \begin{cases} (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_A \exp\left(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy, \text{ якщо } A \subset (a, b), \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_b^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy, \text{ якщо } A = \{b\}, \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy, \text{ якщо } A = \{a\}. \end{cases} \tag{6.23}$$

Нагадаємо, що як і скрізь у цьому розділі, ми вважаємо ланцюги $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ незалежними.

Припустимо, що

$$\sigma^2 = \sup_n \sigma_n^2 < \infty.$$

Розглянемо міру $\nu^*(dx)$, визначену на $[a, b]$ таким чином:

$$\nu^*(\{b\}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int\limits_b^{+\infty} \exp\left(-\frac{y-a}{2\sigma^2}\right) dy,$$

$$\nu^*(\{a\}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{b} \exp\left(-\frac{y-b}{2\sigma^2}\right) dy,$$

$$\nu^*(A) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int\limits_{A} \exp\left(-\frac{y-b}{2\sigma^2}\right) \wedge \exp\left(-\frac{y-a}{2\sigma^2}\right) dy,\ A \subset (a,b).$$

Зауважимо, що $\nu^*(\{a\}) = \nu^*(\{b\})$. Позначимо

$$\begin{aligned} \alpha &= \nu^*([a,b]) = \\ &= 2(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \left(\int\limits_{b}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right) dy + \int\limits_{a}^{(a+b)/2} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right) dy \right) = \\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{b-a}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-a}{\sigma}\right)\right) = \\ &= 2\left(1/2 - \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{b-a}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\left(\Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-a}{2\sigma}\right)\right), \end{aligned}$$

де Φ — функція стандартного нормального розподілу.

Очевидно, що $\alpha < 1$. Визначимо міру $\nu(\cdot)$:

$$\nu(A) = \nu^*(A)/\alpha.$$

Очевидно, що для визначеної таким чином міри ν виконано умову міноризації:

$$P_{in}(x,A) \geq \alpha\nu(A), \forall x \in [a,b],$$

де P_{in} — перехідні імовірності, визначені формулами (6.21) та (6.23). Перевіримо тепер умову рівномірної близькості. Як $Q_n(x,A)$ оберемо величину

$$Q_n(x,A) = \begin{cases} (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \int_A \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\right) \wedge \exp\left(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy,\ A \subset (a,b), \\ \min\{P_{1n}(x,\{b\}), P_{2n}(x,\{b\})\},\ \text{якщо } A = \{b\}, \\ \min\{P_{1n}(x,\{a\}), P_{2n}(x,\{a\})\},\ \text{якщо } A = \{a\}. \end{cases} \tag{6.24}$$

Тоді

$$\inf_{x\in[a,b]} Q_n(x,[a,b]) = \begin{cases} Q_n(b,[a,b]),\ \Delta_n < 0, \\ Q_n(a,[a,b]),\ \Delta_n > 0 \end{cases} \tag{6.25}$$

Щільності нормальних розподілів $\mathcal{N}(b,\sigma_n^2)$ та $\mathcal{N}(b+\Delta_n,\sigma_n^2)$ набувають однакових значень у точці $x_b = \Delta_n/2 + b$ при $\Delta_n < 0$, а щільності $\mathcal{N}(a,\sigma_n^2)$ та $\mathcal{N}(a+\Delta_n,\sigma_n^2)$

набувають однакових значень у точці $x_a = \Delta_n/2 + a$ при $\Delta_n > 0$. Тоді з формул (6.24) та (6.25) випливає, що при $\Delta_n < 0$

$$\inf_{x\in[a,b]} Q_n(x, [a, b]) =$$

$$= (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\left(\int_{-\infty}^{x_b} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy + \int_{x_b}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-b-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) dy\right) =$$

$$= 1 + \Phi\left(\frac{b - x_b}{\sigma_n}\right) - \Phi\left(\frac{x_b - b - \Delta_n}{\sigma_n}\right).$$

Аналогічно при $\Delta_n > 0$

$$\inf_{x\in[a,b]} Q_n(x, [a, b]) = 1 + \Phi\left(\frac{x_a - a - \Delta_n}{\sigma_n}\right) - \Phi\left(\frac{x_a - a}{\sigma_n}\right).$$

Позначимо

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\Delta_n, \sigma_n) = \sup_{x\in[a,b]} 1 - Q_n(x, [a, b]) = 1 - \inf_{x\in[a,b]} Q_n(x, [a, b]).$$

Очевидно, що $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ при $\Delta_n \longrightarrow 0$.

Позначимо

$$\Phi_a(\Delta_n) = \Phi\left(\frac{x_a - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_a - a - \Delta_n}{\sigma}\right),$$

$$\Phi_b(\Delta_n) = \Phi\left(\frac{x_b - b - \Delta_n}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b - x_b}{\sigma}\right),$$

$$\varepsilon = \sup_n \left(\Phi_a(\Delta_n)\mathbb{1}_{\Delta_n>0} + \Phi_a(\Delta_n)\mathbb{1}_{\Delta_n<0}\right).$$

Таким чином, у цьому випадку теорема 6.1 набуває вигляду Теореми 6.4.

Теорема 6.4. *Нехай для ланцюгів $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$, визначених формулами (6.20) та (6.22) відповідно, $\varepsilon < 1$. Тоді для довільних $x, y \in [a, b]$, $t \geq 0$, $n \geq 2$ виконані такі нерівності:*

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x, A) - P_2^{t,n}(x, A)| \leq \varepsilon\frac{1 - (1-\alpha)^n}{\alpha},$$

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x, A) - P_2^{t,n}(y, A)| \leq (1-\alpha)^n + \varepsilon\left(\frac{1 - (1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right).$$

де $\alpha = 1 - 2\left(\Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-a}{2\sigma}\right)\right)$, Φ — функція станадартного нормального розподілу.

6.3.4 Стійкість скінченновимірних розподілів

У цьому розділі ми будемо дотримуватись позначень, введених у Розділі 6.1, та припускатимемо, що перехідні ймовірності ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ можуть бути представлені наступним чином

$$P_{it}(x,A) = Q_t(x,A) + (1 - Q_t(x,E))R_{it}(x,A). \tag{6.26}$$

Тут Q_t – це субстохастичне ядро таке, що $0 \leq Q_t(x,E) \leq 1$ для всіх $x \in E$, та R_{it} деякі перехідні ядра. У представленні (6.26) Q_t грає роль“спільної частини” та R_{it} відповідно “різницевої частини”.

Помітимо, що таке представлення завжди можливе для двох перехідних ймовірностей (наприклад, поклавши $Q_t(x,A) = 0,\ R_{it} = P_{it}$). Однак пізніше ми накладемо умови, що вимагатимуть відділеності $Q_t(x,E)$ від 0.

Як і раніше, нам знадобиться умова міноризації. Однак ми дещо узагальнимо умову міноризації, введену раніше, дозволивши міноризуючим мірам та константам змінюватися з часом.

Умова (M). Для довільного $t \geq 0$ існують ймовірнісна міра ν_t, визначена на просторі станів $(E, \mathcal{E})$, та стала $\alpha_t \in (0,1)$ такі, що для всіх $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ та $i \in \{1,2\}$

$$P_{it}(x,A) \geq \alpha_t \nu_t(A). \tag{6.27}$$

Додатково ми припустимо, що $\alpha := \inf_{t \geq 0} \alpha_t \in (0,1)$.

Зауважимо, що конструкція та властивості склеювання, введеного в Розділі 6.2, вимагають лише технічної заміни міри ν та константи α на ν_t та α_t відповідно.

Припустимо, що $\{B_k, k \geq 0\}$ це деякий набір множин із $\mathcal{E}$, та покладемо

$$B_n^{(t)} = \otimes_{j=1}^n B_{t+j}.$$

Позначимо через $\mathcal{O} \subset \mathbb{N}_0$ таку множину індексів, що $\nu(B_k) = 0$ тоді і лише тоді, коли $k \in \mathcal{O}$. Нарешті покладемо

$$\mathcal{O}_n^{(t)} = \mathcal{O} \cap \{t, \ldots, t+n-1\},\ n \geq 1$$

та нехай

$$k_n^{(t)} = card(\mathcal{O}_n^{(t)}) \tag{6.28}$$

це кількість елементів у множині $\mathcal{O}^{(t)}_n$. Нам також знадобиться позначення для найменшої ненульової величини $\nu(B_k)$:

$$b^{(t)}_n = \min_{k \notin \mathcal{O}^{(t)}_n} \nu(B_k) > 0.$$

Наша мета полягає у тому, щоб отримати оцінки зверху для різниці ймовірностей для ланцюгів $X^{(i)}_n$ не виходити із множин B_k для $t \le k \le t+n$.

Для того, щоб це зробити, ми накладемо різні умови на Q_t, щоб переконатися, що ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ достатньо близькі. Найбільш природньою умовою є умова рівномірної близькості, яка виглядає наступним чином

(U)

$$\varepsilon^{(t)}_n := \sup_{x \in E, t \le k \le t+n} (1 - Q_t(x, B_k)) < 1. \tag{6.29}$$

Пізніше ми послабимо умову (6.29), щоб дозволити $Q_t(x, B_k)$ обертатися в 0 при деяких t.

Нам також знадобиться умова на множини B_n, $n \ge 0$. Отже, ми введемо наступну умову мажорування.

(D) Існує така послідовність дійсних чисел $S_n \ge 0$, $n \ge 0$ зі скінченною сумою $m = \sum\limits_{k \ge 0} S_k < \infty$, що

$$\int\limits_{B_t} \nu(dx) \int\limits_{B^{(t)}_n} Q_t(x, dy_1) Q_{t+1}(y_1, dy_2) \ldots Q_{t+n}(y_n, B_{t+n+1}) \le S_n. \tag{6.30}$$

Цю умову можна розуміти як скінченість середнього часу, проведеного ланцюгом у множинах B_n.

Введемо ряд позначень, які узагальнюють величини, введені в Розділі 6.2.

$$u^{(t)}_{i,n}(x) := \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 1,\ Z^{(i)}_{t+k} \in B_{t+k},\ k = \overline{1, n-1}\},\ n \ge 2, \tag{6.31}$$

$$q^{(t)}_n(dy) := \mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+k} = 2,\ Z^{(t)}_t = Z^{(2)}_t \in B_t,\ Z^{(1)}_{t+k} = Z^{(2)}_{t+k} \in B_{t+k},\ Z^{(1)}_{t+n} = Z^{(2)}_{t+n} \in dy,\ k = \overline{1, n}\}, \tag{6.32}$$

$$h^{(t)}_{i,n}(x, y; dz, dw) := \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+k} = 0,\ Z^{(i)}_{t+k} \in B_{t+k},\ Z^{(1)}_{t+n} \in dz,\ Z^{(2)}_{t+n} \in dw,\ k = \overline{1, n}\}, \tag{6.33}$$

$$R_n(z, dw, dv) := R_{1n}(z, dw) R_{2n}(z, dv), \tag{6.34}$$

$$p^{(t)}_{i,n}(x) = \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(i)}_{t+k} \in B_{t+k},\ k = \overline{1, n}\}. \tag{6.35}$$

Покладемо $u_{i,0}^{(t)}(x) = u_{i,1}^{(t)}(x) = 0$ та $q_0^{(t)}(dy) = 0$.

Сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 6.5. *Припустимо, що $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ два незалежні неоднорідні за часом неперіодичні незвідні ланцюги Маркова, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, що допускають представлення (6.26), а також задовільняють умові мінoризації (M), рівномірної близькості (U) та мажорування (D).*

Тоді мають місце наступні нерівності для всіх $n \geq 2$:

$$|\mathcal{P}\{X_{t+k}^{(1)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}|X_t^{(1)} = x\} - \mathcal{P}\{X_{t+k}^{(2)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}|X_t^{(2)} = x\}| \leq$$
$$\frac{\varepsilon_n^{(t)}}{b_n^{(t)}\alpha(1-b_n^{(t)}\alpha)^{k_n^{(t)}}}\left(1 - (1 - \alpha b_n^{(t)})^{n-1} + \alpha_{t+n-1}\nu_{t+n-1}(B_{t+n})(1 - (1 - \alpha b_n^{(t)})^{n-2}) + m\right). \tag{6.36}$$

Доведення. Спершу помітимо, що

$$\mathcal{P}\{X_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}|X_t^{(i)} = x\} = \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t=k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}\} = p_{i,n}^{(t)}(x).$$

Далі зауважимо, що на множині $\{\tau^{(t)} > n\}$ величини $Z_{t+k}^{(1)}$ та $Z_{t+k}^{(2)}$ співпадають, якщо $Z_t = (x, x, 1)$, та $k = \overline{1,n}$. Тоді запишемо

$$|p_{1,n}^{(t)}(x) - p_{2,n}^{(t)}(x)| = |\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(1)} \in B_{t+k}, k = \overline{1,n},\ \tau^{(t)} \leq n\} -$$
$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(2)} \in B_{t+k}, k = \overline{1,n},\ \tau^{(t)} \leq n\}| \leq$$
$$\max_{i\in\{1,2\}}\left\{\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, k = \overline{1,n},\ \tau^{(t)} \leq n\}\right\}.$$

Далі, розкладемо ймовірність $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, k = \overline{1,n}, \tau^{(t)} \leq n\}$ за першим після моменту часу t розклеюванням $(d_k = 0)$. Помітимо, що $\{\exists k \in \{1,\ldots,n\},\ d_{t+k} = 0\} \subset \{\tau^{(t)} \leq n\}$.

Тепер розглянемо ймовірності: $d_{t+n} = 0$, $d_{t+n} = 1$ або $d_{t+n} = 2$. Запишемо

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, k = \overline{1,n}, \tau^{(t)} \leq n\} =$$
$$= \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, d_{t+n} = 0,\ k = \overline{1,n}\} + \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, d_{t+n} = 1,\ k = \overline{1,n}\}+$$
$$+\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, \exists j\ d_{t+j} = 0,\ d_{t+n} = 2,\ k = \overline{1,n}\}.$$

Розглянемо всі три доданки окремо. Оцінка першого доданку дана в Лемі 6.12, другого в Лемі 6.13 та третього в Лемі 6.14. Таким чином, скориставшись Лемами 6.12–6.14, отримаємо нерівність (6.36). □

6.3.5 Випадок, коли умова рівномірної близькості порушується

У цьому розділі ми розглянемо випадок, коли умова рівномірної стійкості (6.29) порушується. Ми припустимо, що існує множина $\mathbb{T}$ невід'ємних цілих чисел, таких, що $Q_t(x, E)$ не є малою при $t \in \mathbb{T}$. Іншими словами, ми очікуємо, що умова близькості виконана при всіх $t \notin \mathbb{T}$. Отже, введемо наступну умову близькості:
(U2) Умова близькості:

$$\hat{\varepsilon} = \sup_{t \notin \mathbb{T}, x \in E} (1 - Q_t(x, E)) < 1. \tag{6.37}$$

Позначимо

$$\hat{\varepsilon}_n^{(t)} = \sup_{0 \le u \le t, u \notin \mathbb{T}, x \in E} (1 - Q_u(x, E)) \le \hat{\varepsilon} < 1, \tag{6.38}$$

та

$$\eta_n^{(t)} = \max\{k \in \{t, t+1, \ldots, t+n\} \cap \mathbb{T}\} - t, \ \eta_n^{(t)} \in \{0, \ldots, n\} \cup \{\infty\}. \tag{6.39}$$

У випадку $\{t, t+1, \ldots, t+n\} \cap \mathbb{T} = \emptyset$ покладемо $\eta_n^{(t)} = \infty$. Введемо спеціальне позначення

$$\kappa_n^{(t)} = \begin{cases} k^{(t)}_{\eta_n^{(t)}}, \text{ if } \eta_n^{(t)} < \infty, \\ 0, \text{ if } \eta_n^{(t)} = \infty. \end{cases}$$

Тепер ми можемо сформулювати теорему про стійкість за послабленої умови рівномірної стійкості.

Теорема 6.6. *Нехай $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ – два неоднорідні за часом незвідні неперіодичні ланцюги Маркова, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, що допускають представлення (6.26), задовільняють умові мінoризації (M), умові близькості $(U2)$, умові мажорування (D), та $\eta_n^{(t)} < n$.*

Тоді виконані наступні нерівності

$$|\mathcal{P}\{X_{t+k}^{(1)} \in B_{t+k}, \ k = 1, n | X_t^{(1)} = x\} - \mathcal{P}\{X_{t+k}^{(2)} \in B_{t+k}, \ k = 1, n | X_t^{(2)} = x\}| \le$$
$$3(1-\alpha)^{-k_n^{(t)}} (1 - b_n^{(t)} \alpha)^{n - \eta_n^{(t)}} + \frac{\hat{\varepsilon}_n^{(t)}}{\left(b_n^{(t)} \alpha (1 - b_n^{(t)} \alpha)^{k_n^{(t)}}\right)^2} K,$$

де

$$K = \left(1 - (1 - \alpha b_n^{(t)})^{n - \eta_n^{(t)} - 1}\right)^2 + \alpha_{t+n-1} \nu_{t+n-1}(B_{t+n}) \left((1 - (1 - \alpha b_n^{(t)})^{n - \eta_n^{(t)} - 2})\right)^2$$

$$+m(1-\alpha b_n^{(t)})^{n-\eta_n^{(t)}-1}.$$

Доведення. Доведення повторює кроки доведення Теореми 6.5 з використанням Лем 6.15-6.17 замість Лем 6.12–6.14. □

6.3.6 Допоміжні леми

У цьому розділі ми доведемо ряд допоміжних лем, які гратимуть важливу роль у доведенні основних результатів.

Лема 6.10. *Для всіх $i\in\{1,2\}, x\in B_t, t\geq 0, n\geq 2$, мають місце наступні нерівності*

$$\sum_{k=0}^{n} u_{i,k}^{(t)}(x)q_{n-k}^{(t+k)}(E)\leq p_{i,n}^{(t)}(x)\leq 1,$$

де $p_{i,n}^{(t)}(x)$ визначено (6.35).

Доведення. Скориставшись означенням (6.5), (6.31) та поклавши $D:=\{0,1,2\}$, ми запишемо:

$$u_{1,k}^{(t)}(x)=\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k}=1,\ Z_{t+j}^{(1)}\in B_{t+j},\ j=\overline{1,k-1}\}=\int\limits_{B_{t+1}\times E\times D}\mathbb{P}_t(x,x,1;du_1,dv_1,dz_1)\times$$

$$\times\int\limits_{B_{t+2}\times E\times D}\mathbb{P}_{t+1}(u_1,v_1,z_1;du_2,dv_2,dz_2)\dots\int\limits_{E\times E\times\{1\}}\mathbb{P}_{t+k-1}(u_{t+k-1},v_{t+k-1},0;du_{t+k},dv_{t+k},1)=$$

$$=\int\limits_{B_{t+1}\times E\times D}\mathbb{P}_t(x,x,1;du_1,dv_1,dz_1)\dots\mathbb{P}_{t+k-2}(u_{t+k-2},v_{t+k-2},z_{t+k-2};B_{t+k-1},E,0)\alpha_{t+k-1}\nu_{t+k-1}(E).$$

Таким чином встановлено нерівність

$$u_{1,k}^{(t)}(x)=\int\limits_{B_{t+1}\times E\times D}\mathbb{P}_t(x,x,1;du_1,dv_1,dz_1)\dots\mathbb{P}_{t+k-2}(u_{t+k-2},v_{t+k-2},z_{t+k-2};B_{t+k-1},E,0)\alpha_{t+k-1}.\tag{6.40}$$

Очевидно, що аналогічна рівність виконана для $u_{2,k}^{(t)}$. Тепер, скориставшись означеннями (6.5) та (6.32), запишемо:

$$q_{n-k}^{(t+k)}(E)=\int\limits_{B_{t+k}}\nu_{t+k-1}(dx)\int\limits_{B_{t+k+1}}Q_{t+k+1}(x,dx_1)\dots\int\limits_{B_{t+n}}Q_{t+n-1}(x_{n-k-1},dx_{n-k}).\tag{6.41}$$

Скомбінувавши (6.40) та (6.41), отримаємо, що

$$u_{1,k}^{(t)}(x)q_{n-k}^{(t+k)}(E) = \int\limits_{B_{t+1}\times E\times D} \mathbb{P}_t(x,x,1;du_1,dv_1,dz_1)\ldots\times$$

$$\mathbb{P}_{t+k-2}(u_{t+k-2},v_{t+k-2},z_{t+k-2};B_{t+k-1},E,0)\alpha_{t+k-1}\int\limits_{B_{t+k}} \nu_{t+k-1}(dx)\times$$

$$\times\int\limits_{B_{t+k+1}} Q_{t+k+1}(x,dx_1)\ldots\int\limits_{B_{t+n}} Q_{t+n-1}(x_{n-k-1},dx_{n-k}).$$

Скориставшись (6.5), ми можемо бачити, що для довільних $u,v\in E$,

$$\begin{gathered}\alpha_{t+k-1}\int_{B_{t+k}}\nu_{t+k-1}(dx)\int_{B_{t+k+1}}Q_{t+k+1}(x,dx_1)\ldots\int_{B_{t+n}}Q_{t+n-1}(x_{n-k-1},dx_{n-k}) =\\ =\int_{B_{t+k}}\mathbb{P}_{t+k-1}(x,y,0;du_{t+k},du_{t+k},1)\times\\ \times\int_{B_{t+k+1}}\mathbb{P}_{t+k}(u_{t+k},u_{t+k},1;du_{t+k+1},du_{t+k+1},2)\ldots\mathbb{P}_{t+n}(u_{t+n-1},u_{t+n-1},2;B_{t+n},B_{t+n},2).\end{gathered} \tag{6.42}$$

Нарешті скомбінувавши (6.40), (6.41), та (6.42), отримаємо наступну рівність:

$$u_{1,k}^{(t)}(x)q_{n-k}^{(t+k)}(E) = \int\limits_{B_{t+1}\times E\times D} \mathbb{P}_t(x,x,1;du_1,dv_1,dz_1)\ldots\times$$

$$\int\limits_{B_{t+k-1}\times E\times\{0\}} \mathbb{P}_{t+k-2}(u_{t+k-2},v_{t+k-2},z_{t+k-2};du_{t+k-1},dv_{t+k-1},dz_{t+k-1})\times$$

$$\times\int\limits_{B_{t+k}\times E\times\{1\}} \mathbb{P}_{t+k-1}(u_{t+k-1},v_{t+k-1},0;du_{t+k},du_{t+k},dz_{t+k})\times$$

$$\times\int\limits_{B_{t+k+1}} \mathbb{P}_{t+k}(u_{t+k},u_{t+k},1;du_{t+k+1},du_{t+k+1},2)\ldots P_{t+n}(u_{t+n-1},u_{t+n-1},2;B_{t+n},B_{t+n},2) =$$

$$=\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k}=1,\ d_{t+k+l}=2,\ l=1,n-k,\ Z_{t+j}^{(1)}\in B_{t+j},\ j=\overline{1,n}\}.$$

Взявши до уваги аналогічну рівність для $u_{2,k}^{(t)}$, можемо стверджувати що

$$u_{i,k}^{(t)}(x)q_{n-k}^{(t+k)}(E) = \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k}=1,\ d_{t+k+l}=2,\ l=1,n-k,\ Z_{t+j}^{(i)}\in B_{t+j},\ j=\overline{1,n}\}. \tag{6.43}$$

Більше того, скориставшись (6.43), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{n} u_{i,k}^{(t)}(x)q_{n-k}^{(t+k)}(E) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k}=1,\ d_{t+k+l}=2,\ l=1,n-k,\ Z_{t+j}^{(i)}\in B_{t+j},\ j=\overline{1,n}\}\le$$

$$\le\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n}=2,\ Z_{t+j}^{(i)}\in B_{t+j},\ j=\overline{1,n}\}\le p_{i,n}^{(t)}(x)\le 1.$$

□

З наступної леми отримаємо оцінку зверху для ймовірності не-склеювання протягом певного періоду часу. Тут $k_n^{(t)}$ це кардинальність множини $\mathcal{O}_n^{(t)}$.

Лема 6.11. *Припустимо, що* $b_n^{(t)}\alpha < 1$. *Тоді для всіх* $i \in \{1, 2\}$, $x, y \in B_t$, $t \geq 0$ *та* $n \geq 0$ *виконана наступна нерівність*

$$h_{i,n}^{(t)}(x, y; E, E) \leq (1 - b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}(1 - b_n^{(t)}\alpha)^n.$$

Доведення. Взявши до уваги позначення (6.5) для перехідних ймовірностей та позначення (6.33) для $h_{i,n}^{(t)}$, ми можемо отримати наступне співвідношення

$$h_{1,n}^{(t)}(x, y; E, E) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \alpha_{t+k}) \int\limits_{B_{t+1}\times E} T_t(x, y; dx_1, dy_1)\times$$

$$\int\limits_{B_{t+2}\times E} T_{t+1}(x_1, y_1; dx_2, dy_2) \ldots \int\limits_{B_{t+n}\times E} T_{t+n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}; dx_n, dy_n).$$

Аналогічна формула виконана для $h_{2,n}^{(t)}(x, y; E, E)$. Отже, можемо записати

$$h_{i,n}^{(t)}(x, y; E, E) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \alpha_{t+k})\tilde{T}_i^{t,n}(x, y; E, E),$$

де оператор $\tilde{T}_{1,t}(x, y; du, dv) = T_t(x, y; du \cap B_{t+1}, dv)$, $\tilde{T}_{2,t} = T_t(x, y; du, dv \cap B_{t+1})$, T_t визначено (6.4) та

$$\tilde{T}_i^{t,n} = \prod_{k=0}^{n-1} \tilde{T}_{i,t+k}.$$

Тут індекс n позначає номер множника у добутку. Маємо

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1 - \alpha_{t+k})\tilde{T}_i^{t,n}(x, y; E \times E) = \int\limits_{B_n^{(t)}} (P_{it}(x, dy_1) - \alpha_t \nu_t(dy_1)) \ldots \times$$

$$\times(P_{it+n-1}(y_{n-1}, B_{t+n}) - \alpha_{t+n-1}\nu_{t+n-1}(B_{t+n}))$$

Розглянемо $P_{it}(y, B_{t+1}) - \alpha_t \nu_t(B_{t+1})$. Якщо $t + 1 \notin \mathcal{O}$, то $\nu(B_{t+1}) \geq b_n^{(t)}$, для всіх $n \geq 1$, таким чином

$$P_{it}(y, B_{t+1}) - \alpha_t \nu_t(B_{t+1}) \leq 1 - \alpha_t b_n^{(t)} \leq 1 - \alpha b_n^{(t)}.$$

Якщо $t+1 \in \mathcal{O}$, то

$$P_{it}(y, B_{t+1}) - \alpha_t \nu_t(B_{t+1}) \leq 1 = \frac{1-\alpha b_n^{(t)}}{1-\alpha b_n^{(t)}}.$$

Нарешті запишемо

$$h_{i,n}^{(t)}(x, y; E, E) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\alpha_{t+k}) \tilde{T}_i^{t,n}(x, y; E, E)$$

$$\leq \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sup_{y \in E} P_{it+j}(y, B_{t+j+1}) - \alpha_{t+j} \nu_{t+j}(B_{t+j+1}) \right) \leq$$

$$\leq \frac{(1-\alpha b_n^{(t)})^n}{(1-\alpha b_n^{(t)})^{k_n^{(t)}}} = (1-\alpha b_n^{(t)})^{n-k_n^{(t)}} = (1-b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}(1-b_n^{(t)}\alpha)^n.$$

□

Наступні три леми відіграють ключову роль у доведенні основного результату даного розділу.

Лема 6.12. *Припустимо, що* $b_n^{(t)}\alpha < 1$. *Тоді для всіх* $i \in \{1, 2\}$, $t \geq 0$, $n \geq 1$ *та* $x \in B_t$ *виконана наступна нерівність*

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k=\overline{1,n}, d_{t+n}=0\} \leq \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n-1}}{b_n^{(t)}\alpha(1-b_n^{(t)}\alpha)^{k_n^{(t)}}},$$

де $\varepsilon_n^{(t)}$ *визначено в (6.29).*

Доведення. У випадку $n=1$ твердження леми очевидне. Отже, зосередимось на випадку $n \geq 2$. Скориставшись означеннями (6.5) та (6.31)–(6.34) відповідних ймовірностей та розглянувши час останнього склеювання $k \geq 0$ та останнього розклеювання $1 \leq j \leq n-k$, ми можемо розкласти ймовірність $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, d_{t+n}=0,\ k=\overline{1,n}\}$, наступним чином

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(1)} \in B_{t+k}, d_{t+n}=0,\ k=\overline{1,n}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-k} \int\limits_{B_{t+k}} \int\limits_{B_{t+k+1}\times E} u_{1,k}^{(t)}(x) q_{j-1}^{(t+k)}(dy)(1-Q_{t+k+j}(y,E)) \times$$

$$\times R_{t+k+j}(y, du, dv) h_{n-k-j}^{(t+k+j)}(u, v; E, E) \leq$$

$$\leq \varepsilon_n^{(t)}(1-b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-k}u_{1,k}^{(t)}(x)q_{j-1}^{(t+k)}(E)(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n-k-j}.$$

В останній нерівності ми скористались означенням (6.29) величини $\varepsilon_n^{(t)}$ з Леми 6.11 та тим фактом, що $R_{it}(x,E)=1$. Тепер ми можемо змінити порядок підсумовування у попередній нерівності та отримати

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)}\in B_{t+k}, d_{t+n}=0,\ k=\overline{1,n}\}\leq \varepsilon_n^{(t)}(1-b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha b_n^{(t)})^{j-1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-j}u_{1,k}^{(t)}(x)q_{n-j-k}^{(t+k)}(E),$$

Скориставшись Лемою 6.10, отримаємо $\sum\limits_{k=0}^{n-j}u_{1,k}^{(t)}(x)q_{n-j-k}^{(t+k)}(E)\leq 1$ та нарешті

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(1)}\in B_{t+k}, d_{t+n}=0,\ k=\overline{1,n}\}\leq \varepsilon_n^{(t)}(1-b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha b_n^{(t)})^{j-1}=$$

$$=\varepsilon_n^{(t)}\frac{1-(1-\alpha b_{n-1}^{(t)})^{n-1}}{b_n^{(t)}\alpha(1-b_n^{(t)}\alpha)^{k_n^{(t)}}}.$$

Аналогічно отримаємо нерівність для $i=2$. □

Лема 6.13. *Припустимо, що* $b_n^{(t)}\alpha<1$. *Тоді для всіх* $i\in\{1,2\}$, $x\in B_t$, $t\geq 0$ *та* $n\geq 2$ *таких, що* $t+n\notin\mathcal{O}$, *виконана наступна нерівність*

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)}\in B_{t+k}, d_{t+n}=1,\ k=\overline{1,n}\}\leq \varepsilon_n^{(t)}\alpha_{t+n-1}\nu_{t+n-1}(B_{t+n})\frac{1-(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n-2}}{b_n^{(t)}\alpha(1-b_n^{(t)}\alpha)^{k_n^{(t)}}},$$

де $\varepsilon_n^{(t)}$ *визначено в (6.29).*

Доведення. Із (6.5) випливає, що перехід у стан $\{d_{t+n}=1\}$ можливий лише зі стану $\{d_{t+n-1}=0\}$. Тоді, скориставшись Марковською властивістю, ми можемо записати

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(1)}\in B_{t+k}, d_{t+n}=1,\ k=\overline{1,n}\}=$$

$$\int\limits_{B_{t+n-1}\times E}\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(1)}\in B_{t+k}, Z_{t+n-1}=(du,dv,0),\ k=\overline{1,n-1}\}\times$$

$$\times\mathbb{P}_{uv0}^{(t+n-1)}\{d_{t+n}=1, Z_{t+n}^{(1)}\in B_{t+n}\}=$$

$$= \alpha_{t+n-1}\nu_{t+n-1}(B_{t+n})\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(1)}_{t+k} \in B_{t+k}, d_{t+n-1} = 0,\ k = \overline{1, n-1}\}.$$

Скориставшись Лемою 6.12, отримаємо

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(1)}_{t+k} \in B_{t+k}, d_{t+n} = 1,\ k = \overline{1, n}\} \le \alpha_{t+n-1}\nu_{t+n-1}(B_{t+n})\varepsilon^{(t)}_n \frac{1 - (1 - b^{(t)}_n\alpha)^{n-2}}{b^{(t)}_n\alpha(1 - b^{(t)}_n\alpha)^{k^{(t)}_n}} =$$

Аналогічні міркування вірні для $i = 2$. □

Лема 6.14. *Припустимо, що виконана умова мажорування* (D)*. Тоді для всіх* $i \in \{1, 2\}$, $x \in B_t$, $t \ge 0$ *та* $n > 2$ *таких, що* $t + n \notin \mathcal{O}$*, виконані наступні нерівності*

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(i)}_{t+k} \in B_{t+k}, \exists j\ d_{t+j} = 0,\ d_{t+n} = 2,\ k = \overline{1, n}\} \le \varepsilon^{(t)}_n \frac{m}{b^{(t)}_n\alpha(1 - b^{(t)}_n\alpha)^{k^{(t)}_n}},$$

де m *це стала із умови мажорування (6.30).*

Доведення. Дане доведення слідує схемі доведення Леми 6.13. Зокрема,

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(1)}_{t+k} \in B_{t+k}, \exists j\ d_{t+j} = 0,\ d_{t+n} = 2,\ k = \overline{1, n}\} =$$

$$= \sum_{j=2}^{n-1} \int\limits_{B_{t+j}} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(1)}_{t+k} \in B_{t+k}, Z_{t+j} \in (dy, dy, 1)\ k = \overline{1, j-1}\} \times$$

$$\times \mathbb{P}_{yy1}\{Z^{(1)}_{t+l} \in B_{t+l},\ d_{t+l} = 2,\ l = \overline{j+1, n}\}.$$

Скориставшись Лемою 6.13 та умовою мажорування (6.30), запишемо

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z^{(1)}_{t+k} \in B_{t+k}, \exists j\ d_{t+j} = 0,\ d_{t+n} = 2,\ k = \overline{1, n}\} \le$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} \varepsilon^{(t)}_n \alpha_{t+j-1}\nu_{t+j-1}(B_{t+j}) \frac{1 - (1 - b^{(t)}_n\alpha)^{j-2}}{b^{(t)}_n\alpha(1 - b^{(t)}_n\alpha)^{k^{(t)}_n}} q^{(t+j)}_{n-j} \le$$

$$\le \sum_{j=2}^{n-1} \varepsilon^{(t)}_n \alpha_{t+j-1}\nu_{t+j-1}(B_{t+j}) \frac{1 - (1 - b^{(t)}_n\alpha)^{j-2}}{b^{(t)}_n\alpha(1 - b^{(t)}_n\alpha)^{k^{(t)}_n}} S_{n-j} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^{(t)}_n}{b^{(t)}_n\alpha(1 - b^{(t)}_n\alpha)^{k^{(t)}_n}} \sum_{j=2}^{n-1} (1 - (1 - b^{(t)}_n\alpha)^{j-2}) S_{n-j} \le \varepsilon^{(t)}_n \frac{\sum\limits_{j=2}^{n-1} S_{n-j}}{b^{(t)}_n(1 - b^{(t)}_n\alpha)^{k^{(t)}_n}} \le$$

$$\le \varepsilon^{(t)}_n \frac{m}{b^{(t)}_n\alpha(1 - \alpha)^{k^{(t)}_n}}.$$

□

Тепер ми доведемо аналоги Лем 6.12–6.14 за умови (6.37).

Лема 6.15. *Припустимо, що* $b_n^{(t)}\alpha < 1$ *та* $\eta_n^{(t)} < n$. *Тоді для всіх* $i \in \{1, 2\}$, $t \geq 0$, $n \geq 2$ *та* $x \in B_t$ *має місце наступна нерівність*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}, d_{t+n} = 0\} \leq \\ &\leq (1 - b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}(1 - b_n^{(t)}\alpha)^{n-\eta_n^{(t)}} + \hat{\varepsilon}_n^{(t)}\left(\frac{1-(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n-\eta_n^{(t)}-1}}{b_n^{(t)}\alpha(1-b_n^{(t)}\alpha)^{k_n^{(t)}}}\right)^2,\end{aligned}$$

де $\hat{\varepsilon}_n^{(t)}$ *визначено в (6.38) та* $\eta_n^{(t)}$ *визначено в (6.39).*

Доведення. У цьому доведенні ми писатимемо η замість $\eta_n^{(t)}$ для кращого сприйняття тексту.

Розкладемо ймовірність $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}, d_{t+n} = 0\}$ за часом η:

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n}, d_{t+n} = 0\} =$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n},\ d_{t+\eta} \in \{0,1,2\},\ d_{t+n} = 0\} \leq \\ &\leq \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,n},\ d_{t+\eta} = 0,\ d_{t+n} = 0\} = \\ &= \int \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k},\ k = \overline{1,\eta},\ Z_{t+\eta} \in (du, dv, 0)\}\times \\ &\times \mathbb{P}_{uv0}^{(t+\eta)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_k,\ k = \overline{t+\eta+1, t+n},\ d_{t+n} = 0\} \leq \\ &\sup_{u,v \in B_\eta \times B_\eta} \mathbb{P}_{uv0}^{(t+\eta)}\{Z_k^{(i)} \in B_k,\ k = \overline{t+\eta+1, t+n},\ d_{t+n} = 0\}.\end{aligned}$$

Визначимо: $t_0 = t + \eta$, $n_0 = n - \eta$. Тоді можемо розкласти ймовірність $\mathbb{P}_{uv0}^{(t+\eta)}\{Z_k^{(i)} \in B_k,\ k = \overline{t+\eta+1, t+n},\ d_{t+n} = 0\}$ за часом першого склеювання (взявши до уваги випадок, коли жодного склеювання не відбулось на проміжку між t_0 та $t_0 + n_0$):

$$\mathbb{P}_{uv0}^{(t+\eta)}\{Z_k^{(i)} \in B_k,\ k = \overline{t+\eta+1, t+n},\ d_{t+n} = 0\} \leq h_{i,n_0}^{(t_0)}(u, v; E, E) +$$

$$\alpha_{t_0+k-1}\sum_{k=1}^{n_0-1} h_{i,k-1}^{(t_0)}(u, v; E, E)\sup_x \mathbb{P}_{xx1}^{(t_0+k)}\{Z_{t_0+l}^{(t)} \in B_{t_0+l},\ l = \overline{k, n_0},\ d_{t_0+n_0} = 0\}.$$

Скориставшись Лемою 6.12 для оцінки $\mathbb{P}_{xx1}^{(t_0+k)}\{Z_{t_0+l}^{(t)} \in B_{t_0+l},\ l = \overline{k, n_0},\ d_{t_0+n_0} = 0\}$ та тим фактом, що $\alpha_{t_0+k-1}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} h_{i,k}^{(t_0)}(u, v; E, E) \leq (1 - b_n^{(t)}\alpha)^{-k_n^{(t)}}\frac{1-(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n_0-1}}{b_n^{(t)}\alpha}$, отримаємо твердження леми. □

Аналогічний розклад може бути використано і для двох інших лем.

Лема 6.16. *Припустимо, що* $b_n^{(t)}\alpha < 1$ *та* $\eta_n^{(t)} < n$. *Тоді для всіх* $i \in \{1, 2\}$, $x \in B_t$, $t \geq 0$ *та* $n > 2$ *таких, що* $t + n \notin \mathcal{O}$, *виконана наступна нерівність*

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, d_{t+n} = 1,\ k = \overline{1, n}\} \leq$$
$$\leq (1-\alpha)^{-k_n^{(t)}}(1 - b_n^{(t)}\alpha)^{n-\eta_n^{(t)}} + \hat{\varepsilon}_n^{(t)}\alpha_{t+n-1}\nu_{t+n-1}(B_{t+n})\left(\frac{1-(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n-\eta_n^{(t)}-2}}{b_n^{(t)}\alpha(1-\alpha)^{k_n^{(t)}}}\right)^2,$$

де $\hat{\varepsilon}_n^{(t)}$ *визначено в (6.37).*

Лема 6.17. *Припустимо, що виконана умова мажорування та* $\eta_n^{(t)} < n$. *Тоді для всіх* $i \in \{1, 2\}$, $x \in B_t$, $t \geq 0$ *та* $n \geq 2$ *таких, що* $t + n \notin \mathcal{O}$, *виконується наступна нерівність*

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+k}^{(i)} \in B_{t+k}, \exists j\ d_{t+j} = 0,\ d_{t+n} = 2,\ k = \overline{1, n}\} \leq$$
$$\leq (1-\alpha)^{-k_n^{(t)}}(1 - b_n^{(t)}\alpha)^{n-\eta_n^{(t)}} + \hat{\varepsilon}_n^{(t)}\frac{m(1-b_n^{(t)}\alpha)^{n-\eta_n^{(t)}-1}}{(b_n^{(t)}\alpha(1-\alpha)^{k_n^{(t)}})^2},$$

де m *це стала з умови мажорування (6.30).*

6.4 Стійкість функціоналів від неоднорідних ланцюгів Маркова

В цьому розділи ми розглядатимемо два незалежні дискретні та неоднорідні за часом ланцюги Маркова $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ зі значеннями у загальному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$. Ми припустимо, що ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ визначені на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. У цьому розділі ми будемо використовувати позначення, введені у Розділі 6.1, та представлення (6.26).

Далі введемо ключові умови, які знадобляться для доведення основних результатів.

Як і в Розділі 6.26, будемо використовувати умову мінориазції на всьому просторі.

Умова (M) Існує ймовірнісна міра ν, що визначена на фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$, та сталі $\alpha \in (0, 1)$ такі, що для всіх $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$ та $i \in \{0, 1\}$

$$P_{it}(x, A) \geq \alpha\nu(A). \tag{6.44}$$

Введемо також умову рівномірної близькості (P).

$$\varepsilon_n^{(t)} := \sup_{x \in E, t \le k \le t+n} (1 - Q_k(x, E)) < 1.$$

Умову (P) можна дещо ослабити.

Послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$. Припустимо, що існує набір цілих чисел $\mathbb{T}$ такий, що $\sup_{x \in E, t \in \mathbb{T}} (1 - Q_t(x, E)) = 1$. Введемо множину

$$\mathbb{T}_n^{(t)} = \mathbb{T} \cap \{t, t+1, \dots, t+n\},\ t \ge 0,\ n \ge 0,$$

та значення

$$k_n^{(t)} = \max\{t \in \mathbb{T}_n^{(t)}\} \le \infty.$$

Будемо казати, що послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$ виконана для заданих $t \ge 0$ та $n \ge 1$, якщо

$$\begin{aligned} k_n^{(t)} &< \infty, \\ t + n &\notin \mathbb{T}_n^{(t)}, \\ \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} &= \sup_{t \notin \mathbb{T}_n^{(t)}, x \in E} (1 - Q_t(x, E)) < 1. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Помітимо, що з $k_n^{(t)} = \infty$ випливає $\sup_{x \in E, t \le k \le t+n} (1 - Q_k(x, E)) < 1$, що в свою чергу означає, що умова (P) виконана. У той же час з першого та другого тверджень з (6.45) отримаємо $0 < k_n^{(t)} < n$.

Будемо казати, що функція f задовільняє умову (F), якщо:

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \int_E f(x) \nu(dx) < \infty, \\ \sup_{x \in E} Q_{t+n}(x, f) &= \sup_{x \in E} \int_E f(y) Q_{t+n}(x, dy) < \infty, \\ R_f &= \sup_{i,t,x} \int_E f(y) R_{it}(x, dy) < \infty. \end{aligned} \tag{6.46}$$

У цьому випадку позначимо

$$C_t(f) = \frac{\sup_{x \in E} Q_t(x, f) - \alpha \nu(f) + \varepsilon R_f}{1 - \alpha}. \tag{6.47}$$

В подальшому будемо використовувати символ $\vee$ для max, тобто $a \vee b = \max\{a, b\}$.

У цьому розділі ми припустимо, що $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ є незалежними незвідними неперіодичними неоднорідними за часом ланцюгами Маркова, що визначені на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, які допускають представлення (6.26), задовільняють умову мінориизації (M), та $f : E \to \mathbb{R}$ деяка вимірна функція. Ми отримаємо різні умови для f та близькості ланцюгів.

Теорема 6.7. *Для ланцюгів* $X_n^{(1)}$ *та* $X_n^{(2)}$*, визначених вище, довільних* $x, y \in E$*,* $t \geq 0$ *та* $n \geq 2$*:*

(a) якщо функція f *обмежена та виконана умова рівномірної близькості* (P)*, то*

$$\begin{aligned} |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq \varepsilon_n^{(t)} ||f|| \left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} \right), \\ |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq ||f|| \left((1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} \right). \end{aligned} \tag{6.48}$$

(b) Якщо функція f *обмежена та виконана послаблена умова рівномірної близькості* $(P1)$ *для* t, n*, то*

$$\begin{aligned} |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq ||f|| \left((1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha} \right), \\ |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq ||f|| \left((1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha} \right). \end{aligned} \tag{6.49}$$

(c) Якщо функція f *задовільняє умову* (F) *та виконана умова рівномірної близькості* (P)*, то*

$$\begin{aligned} |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq \varepsilon_n^{(t)} \left(C_{t+n}(f) \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} + R_f \right), \\ |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq \left((1-\alpha)^{n-1} + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha} \right) C_{t+n}(f) + \varepsilon_n^{(t)} R_f. \end{aligned} \tag{6.50}$$

(d) Якщо функція f *задовільняє умову* (F) *та виконана послаблена умова рівномірної близькості* $(P1)$ *для* $t, n-1$*, то*

$$\begin{aligned} |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq M_n^{(t)} C_{t+n}(f) + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} R_f, \\ |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq M_n^{(t)} C_{t+n}(f) + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} R_f, \end{aligned} \tag{6.51}$$

де $M_n^{(t)} = (1-\alpha)^{n-k_{n-1}^{(t)}-1} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_{n-1}^{(t)}-2}}{\alpha}$.

Доведення. Почнемо доведення з випадку, коли функція f обмежена, так що

$$||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty.$$

У цьому випадку з Леми 6.18 отримаємо нерівності

$$\begin{aligned} |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq ||f|| \mathbb{P}_{xx1}^{(t)} \{d_{t+n} = 0\}, \\ |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\leq ||f|| \mathbb{P}_{xy0}^{(t)} \{d_{t+n} = 0\}. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Припустимо, що виконана умова (P). У цьому випадку, скориставшись Лемами 6.5 та 6.6, отримаємо наступні оцінки

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)} \{d_{t+n} = 0\} &\leq \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}, \\ \mathbb{P}_{xy0}^{(t)} \{d_{t+n} = 0\} &\leq (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}, \end{aligned} \tag{6.53}$$

Скомбінувавши нерівності (6.52) та (6.53), отримаємо формули (6.48).

Припустимо тепер, що виконана послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$. Тоді, скориставшись Лемою 6.8, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\} &\le (1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}^{(t)}_n \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha}, \\ \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\} &\le (1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}^{(t)}_n \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha}. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Скомбінувавши (6.54) та (6.52), отримаємо (6.49).

Нехай тепер функція f задовільняє умову F, і необов'язково є обмеженою. З Леми 6.19 отримаємо, що

$$\begin{aligned} |E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_x f(X^{(2)}_{t+n})| &\le \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n-1}=0\}C_{t+n}(f) + \varepsilon R_f, \\ |E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y f(X^{(2)}_{t+n})| &\le \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\}C_{t+n}(f) + \varepsilon R_f. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Із нерівностей (6.53) та (6.55) отримаємо (6.50), а з нерівностей (6.54) та (6.55) маємо (6.51). ☐

У якості прямого наслідка Теореми 6.7 ми можемо вивести оцінки для стійкості функціоналів в L_2 та оцінки ймовірностей великих відхилень.

Теорема 6.8. *Припустимо, що для ланцюгів* $X^{(1)}_n$ *та* $X^{(2)}_n$*, визначених вище, функції* $g(x) = |f(x) - \mu_n(t,x)|^2$, $\gamma > 0$, $x, y \in E$, $t \ge 0$ *та* $n \ge 2$ *маємо* $\sigma^2_n(t,x) = E^{(t)}_x[X^{(1)}_{t+n}]^2 - [E^{(t)}_x X^{(1)}_{t+n}]^2 < \infty$. *Тоді:*

(a) якщо функція f *обмежена та виконана умова рівномірної близькості* (P), *то*

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 &\le 2\sigma^2_n(t,x) + \varepsilon||g||\left(\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right), \\ P^{(t)}_{xx}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\sigma_n(t,x)\right\} &\le 2/\gamma^2 + \varepsilon||g||\left(\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right)(\gamma\sigma_n(t,x))^{-2}. \end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2\sigma^2_n(t,x) + ||g||\left(\varepsilon\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} + (1-\alpha)^n\right), \\ P^{(t)}_{xy}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\sigma_n(t,x)\right\} \le \\ \le 2/\gamma^2 + ||g||\left(\varepsilon\tfrac{1-(1-\alpha)^{-1}n}{\alpha} + (1-\alpha)^n\right)(\gamma\sigma_n(t,x))^{-2}. \end{aligned} \tag{6.57}$$

(b) Якщо функція f обмежена та виконана послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$ для t, n, то

$$\begin{gathered}
E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})|^2 \le 2\sigma_n^2(t,x) + ||g|| \left((1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha} \right), \\
P_{xy}^{(t)} \left\{ |f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})| > \gamma\sigma_n(t,x) \right\} \le \\
2/\gamma^2 + ||g|| \left((1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha} \right) (\gamma\sigma_n(t,x))^{-2}.
\end{gathered} \tag{6.58}$$

Тут ми допускаємо можливість $x = y$.

(c) Якщо функція g задовільняє умову (F) та виконана умова рівномірної близькості (P), то

$$\begin{gathered}
E_{xx}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})|^2 \le 2\sigma_n^2(t,x) + \varepsilon_n^{(t)} \left(C_{t+n}(g) \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} + R_g \right), \\
P_{xx}^{(t)} \left\{ |f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})| > \gamma\sigma_n(t,x) \right\} \le 2/\gamma^2 + \\
+\varepsilon_n^{(t)} \left(C_{t+n}(g) \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} + R_g \right) (\gamma\sigma_n(t,x))^{-2}.
\end{gathered} \tag{6.59}$$

$$\begin{gathered}
E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})|^2 \le 2\sigma_n^2(t,x) + \left((1-\alpha)^{n-1} + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha} \right) C_{t+n}(g) + \\
+\varepsilon R_g \\
P_{xy}^{(t)} \left\{ |f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})| > \gamma\sigma_n(t,x) \right\} \le 2/\gamma^2 + \\
+(\gamma\sigma_n(t,x))^{-2} \left[\left((1-\alpha)^{n-1} + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha} \right) C_{t+n}(g) + \varepsilon R_g \right].
\end{gathered} \tag{6.60}$$

(d) Якщо функція g задовільняє умову (F) та виконана послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$ для $t, n-1$, то

$$\begin{gathered}
E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})|^2 \le \\
\le 2\sigma_n^2(t,x) + \left((1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha} \right) C_{t+n}(g) + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} R_g, \\
P_{xy}^{(t)} \left\{ |f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})| > \gamma\sigma_n(t,x) \right\} \le 2/\gamma^2 + \\
+(\gamma\sigma_n(t,x))^{-2} \left[\left((1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k_n^{(t)}-1}}{\alpha} \right) C_{t+n}(g) + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} R_g \right].
\end{gathered} \tag{6.61}$$

Тут ми допускаємо можливість $x = y$.

Доведення. З Леми (6.20) отримаємо нерівності

$$E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)}) - f(X_{t+n}^{(2)})|^2 \le 2\sigma_n^2(t,x) + |E_x^{(t)} g(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} g(X_{t+n}^{(2)})|, \tag{6.62}$$

$$\begin{gathered} P^{(t)}_{xy}\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\sigma_n(t,x)\} \le \\ 2/\gamma^2 + (\gamma\sigma_n(t,x))^{-2}|E^{(t)}_x g(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y g(X^{(2)}_{t+n})|, \end{gathered} \tag{6.63}$$

для всіх $x, y \in E$, включаючи випадок $x = y$. Тепер ми послідовно застосуємо формули (6.48)-(6.51) з Теореми 6.7 до нерівностей (6.62) та (6.63) і отримаємо (6.56)-(6.61). □

Теорема 6.8 дає оцінки L_2-відхилень та ймовірностей великих відхилень у термінах $\sigma^2_n(t,x)$, що може мати певні практичні застосування. Однак ця теорема має один недолік, який полягає у тому, що оцінка не прямує до 0, якщо $\varepsilon \longrightarrow 0$. Далі ми отримаємо інші оцінки, які позбавлені цього недоліку.

Теорема 6.9. *Для ланцюгів $X^{(1)}_n$, $X^{(2)}_n$ та функції f, що визначені вище, $\gamma > 0$, $x, y \in E$, $t \ge 0$ та $n \ge 2$:*

(a) якщо функція f обмежена та виконана умова рівномірної близькості (P), то

$$\begin{gathered} E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2\varepsilon||f||^2\left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right), \\ P^{(t)}_{xx}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\right\} \le \\ 2/\gamma^2\varepsilon||f||^2\left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right). \end{gathered} \tag{6.64}$$

$$\begin{gathered} E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2||f||^2\left((1-\alpha)^n + \varepsilon^{(t)}_n\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}\right) \\ P^{(t)}_{xy}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\right\} \le \\ 2/\gamma^2||f||^2\left((1-\alpha)^n + \varepsilon^{(t)}_n\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}\right). \end{gathered} \tag{6.65}$$

(b) Якщо функція f обмежена та виконана послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$ для t, n, то

$$\begin{gathered} E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2||f||^2\left((1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n} + \tilde{\varepsilon}^{(t)}_n\frac{1-(1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n-1}}{\alpha}\right), \\ P^{(t)}_{xy}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\right\} \le \\ 2/\gamma^2||f||^2\left((1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n} + \tilde{\varepsilon}^{(t)}_n\frac{1-(1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n-1}}{\alpha}\right). \end{gathered} \tag{6.66}$$

Тут допускається $x = y$.

(c) Якщо функція f задовільняє умову (F) та виконана умова рівномірної близькості (P), то

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2\varepsilon C_{t+n}(f^2)\left(\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right), \\ P^{(t)}_{xx}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\right\} \le 2/\gamma^2\varepsilon\left(\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{6.67}$$

$$\begin{gathered} E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2C_{t+n}(f^2)\left((1-\alpha)^{n-1} + \varepsilon^{(t)}_n\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha}\right) + 2\varepsilon, \\ P^{(t)}_{xy}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\right\} \le \\ 2/\gamma^2 C_{t+n}(f^2)\left((1-\alpha)^{n-1} + \varepsilon^{(t)}_n\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha}\right) + 2\varepsilon/\gamma^2. \end{gathered} \tag{6.68}$$

(d) Якщо функція f задовільняє умову (F) та виконана послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$, то

$$\begin{gathered} E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le \\ 2C_{t+n}(f^2)\left((1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n} + \tilde{\varepsilon}^{(t)}_n\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n-1}}{\alpha}\right) + 2\tilde{\varepsilon}, \\ P^{(t)}_{xy}\left\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\right\} \le \\ 2/\gamma^2 C_{t+n}(f^2)\left((1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n} + \tilde{\varepsilon}^{(t)}_n\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-k^{(t)}_n-1}}{\alpha}\right) + 2\tilde{\varepsilon}/\gamma^2. \end{gathered} \tag{6.69}$$

Тут ми допускаємо $x = y$.

Доведення. Доведення слідує тій же схемі, за якою доводилась Теорема 6.7. Для того, щоб отримати формули (6.64) та (6.65), ми використаємо Лему 6.21 та отримаємо

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0\}, \\ P^{(t)}_{xx}\{|f(X^{(1)}_{t+n} - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\} \le 2\gamma^{-2}||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0\}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n} = 0\}, \\ P^{(t)}_{xy}\{|f(X^{(1)}_{t+n} - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\} \le 2\gamma^{-2}||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n} = 0\}. \end{aligned} \tag{6.71}$$

Застосувавши Леми 6.5 та 6.6 до (6.70) та (6.71), отримаємо (6.64) та (6.65).

Формули (6.66)-(6.69) доводяться аналогічно. Спершу ми скористаємось Лемою 6.21 та Лемою 6.22, щоб отримати оцінки в термінах ймовірностей розклеєння, та Лемами 6.5, 6.6 та 6.8 для оцінки цих ймовірностей. □

Ми можемо узагальнити Теореми 6.7-6.9 на випадок, коли умова рівномірної близькості не є рівномірною за простором.

Так, ми можемо допустити існування множини $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ такої, що $Q_t(x, A) = 0,\ \forall x \in \mathcal{C}$, та припустимо

$$\hat{\varepsilon} = \sup_{x \notin \mathcal{C}, t} (1 - Q_t(x, E)) < 1. \tag{6.72}$$

Введемо наступне позначення

$$\delta := \sup_{x \in E \setminus \mathcal{C}, t} Q_t(x, \mathcal{C}), \tag{6.73}$$

$$\rho := \max \left\{ \sup_{x \in E \setminus, t} Q_t(x, E \setminus \mathcal{C}), \nu(E \setminus \mathcal{C}) \right\}. \tag{6.74}$$

Тоді з Леми 6.1 з [14] отримаємо

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0\} \le (\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}, \\
\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n} = 0\} \le (1-\alpha)^n + (\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha(1-\rho)},
\end{gathered} \tag{6.75}$$

де δ та ρ визначені в (6.73) та (6.74). Тепер, скориставшись Лемами 6.18-6.22 та нерівностями (6.75), отримаємо результати аналогічні до Теорем 6.7 та 6.9 у випадку, коли виконана умова (6.72) замість умов (P) та $(P1)$. Підсумуємо результат у наступній теоремі.

Теорема 6.10. *Припустимо, що задано ланцюги $X^{(1)}_n, X^{(2)}_n$, $x, y \in E$, $t \ge 0$, $n \ge 2$ та виконано (6.72). Тоді*

(a) якщо функція f обмежена та виконана умова рівномірної близькості (P), то

$$\begin{gathered}
|E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_x f(X^{(2)}_{t+n})| \le ||f||(\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}, \\
E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2||f||^2(\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}, \\
|E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y f(X^{(2)}_{t+n})| \le ||f|| \left((1-\alpha)^{n-1} + (\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha(1-\rho)}\right), \\
E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2||f||^2 \left((1-\alpha)^{n-1} + (\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha(1-\rho)}\right)
\end{gathered} \tag{6.76}$$

(b) Якщо функція f обмежена та виконана послаблена умова рівномірної близькості $(P1)$ для t, n, то

$$\begin{gathered}
|E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_x f(X^{(2)}_{t+n})| \le C_t(f)(\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha(1-\rho)}, \\
E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2C(\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha(1-\rho)}, \\
|E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y f(X^{(2)}_{t+n})| \le C_t(f) \left((1-\alpha)^{n-1} + (\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha(1-\rho)}\right), \\
E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2C \left((1-\alpha)^{n-1} + (\rho\hat{\varepsilon} + \delta)\tfrac{1-(1-\alpha)^{n-2}}{\alpha(1-\rho)}\right),
\end{gathered} \tag{6.77}$$

де $C = C_{t+n}(f^2)$.

Аналогічним чином, ми можемо узагальнити Теорему 6.8 та отримати ймовірності великих відхилень за допомогою нерівності Чебишева:

$$P_{xy}^{(t)}\{|f(X_n^{(1)}) - f(X_n^{(2)})| > \gamma\} \le \gamma^{-2} E_{xy}^{(t)} |f(X_n^{(1)}) - f(X_n^{(2)}|.$$

6.4.1 Застосування до моделі страхування здоров'я із переключенням

У цьому розділі розглянемо модель страхування здоров'я з переключенням. Розглянемо послідовність марковських перехідних ядер

$$P_t = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & p_{03}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ 0 & 0 & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.78}$$

Ми припустимо, що існують дві моделі, у яких може бути залучений учасник схеми страхування. Ми позначимо їх через s (від “standard”) та a (від “altered”). У альтернативному режимі ймовірності мають вигляд

$$r_t = \begin{pmatrix} r_{00}(t) & r_{01}(t) & r_{02}(t) & r_{03}(t) \\ r_{10}(t) & r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ 0 & 0 & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.79}$$

Ймовірності переключення залежать від моменту часу t та стану x. Ми позначимо цю ймовірність через $\varepsilon_t(x)$. Отже, побудуємо два ланцюги Маркова на множині $E = \{(ij)\}_{i\in\{0,1,2,3\}, j\in\{s,a\}}$.

$$\begin{aligned} P_{1t}((x,j),(y,k)) &= p_{xy}(t), \\ P_{2t}((x,j),(y,k)) &= (1-\varepsilon_t(x,j))p_{xy}(t) + (1-\varepsilon_t(x,j))r_{xy}(t) \end{aligned} \tag{6.80}$$

Це означає, що

$$Q_t((x,j),(y,k)) = (1-\varepsilon_t(x,j))p_{xy}(t).$$

Припустимо, що страхова компанія має заплатити суму C_1 чи C_2, якщо учасник знаходиться в станах 1 чи 2 відповідно. Отже, для функції f виконано зображення

$$f(x,j) = \begin{cases} 0, \text{ if } x \in \{0,4\}, \\ C_1, \text{ if } x = 1, \\ C_2, \text{ if } x = 2. \end{cases} \tag{6.81}$$

Як ми бачимо, функція f не залежить від другого параметра $j \in \{s, a\}$.

Наша мета оцінити зміни у розмірі платежів у моделі без переключення у порівнянні з моделлю з переключенням.

Припустимо, що

$$\begin{gathered} \alpha = \inf_{t \geq 0, i \in \{0,1,2,3\}} \{p_{i3}(t), r_{i3}(t)\} > 0, \\ \nu(3,j) = 1, \text{ для всіх } j, \\ \nu(\{(0,j),(1,j),(2,j)\}) = 0. \end{gathered} \tag{6.82}$$

Помітимо, що $\nu(f) = \nu(3,j) f(3) = 0$.

Отже, маємо

$$Q_t((x,j),f) = \begin{cases} (1-\varepsilon_t(0,j))(p_{01}(t)C_1 + p_{02}(t)C_2), \text{ якщо } x = 0, \\ (1-\varepsilon_t(1,j))(p_{11}(t)C_1 + p_{12}(t)C_2), \text{ якщо } x = 1, \\ (1-\varepsilon_t(2,j))p_{22}(t)C_2, \text{ якщо } x = 2, \\ 0, \text{ якщо } x = 3 \end{cases} \tag{6.83}$$

$$\begin{gathered} R_f = \max\{r_{01}(t)C_1 + r_{02}(t)C_2, r_{11}(t)C_1 + r_{12}(t)C_2, r_{22}(t)C_2\}, \\ C_t(f) = \left(\sup_{x,j} Q_t((x,j),f) + \varepsilon R_f\right)(1-\alpha)^{-1}. \end{gathered} \tag{6.84}$$

Тепер ми можемо оцінити різницю в платежах в момент часу n між звичайною та модифікованою моделями.

Теорема 6.11. *У моделі, визначеній вище, різниця у платежах в момент часу n може бути оцінена наступним чином*

$$|E_x f(X_n^{(1)}) - E_x f(X^{(2)})_n| < \varepsilon C_{t+n}(f) \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{1-\alpha},$$

Середня різниця у платежах:

$$|E_x f(X_n^{(1)}) - E_x f(X^{(2)})_n| < 2\varepsilon C_{t+n}(f^2) \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{1-\alpha},$$

де $C_{t+n}(f)$ визначено в (6.84), а α в (6.82).

6.4.2 Допоміжні леми

У цьому розділі ми наведемо допоміжні технічні результати, які використовуються при доведенні основних теорем. Припускатимемо, що $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$, визначені вище, допукають представлення (6.26), а також задовільняють умову мінoризації (M).

Лема 6.18. *Припустимо, що функція* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *обмежена, тобто* $||f|| = \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$. *Тоді для* $x, y \in E$ *виконані наступні нерівності:*

$$\begin{aligned} |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\le ||f|| \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}, \\ |E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| &\le ||f|| \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}. \end{aligned} \tag{6.85}$$

Доведення. Визначимо час першого розклеювання $\tau^{(t)}$:

$$\tau^{(t)} = \inf_{k\ge t}\{d_{t+k} = 0\}.$$

Маємо нерівності

$$E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) = \mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(1)}),$$

$$E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)}) = \mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(2)}).$$

Помітимо, що якщо ланцюги залишаються склеєними протягом часу $t, t+n$, то

$$\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(1)}) = \mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(2)}).$$

Тоді ми можемо записати

$$|E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)} f(X_{t+n}^{(2)})| = |\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(1)}) - \mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(2)})| =$$

$$|\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} \left(f(Z_{t+n}^{(1)}) - f(Z_{t+n}^{(2)}) \right)| = |\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} \left(f(Z_{t+n}^{(1)}) - f(Z_{t+n}^{(2)}) \right) \mathbb{1}_{\tau^{(t)}<n}| \le$$

$$\max\{\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(1)}) \mathbb{1}_{\tau^{(t)}<n}, \mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(2)}) \mathbb{1}_{\tau^{(t)}<n}\}.$$

Розкладемо величину $\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(1)}) \mathbb{1}_{\tau^{(t)}<n}$ за часом останнього розклеювання

$$\mathbb{E}_{xx1}^{(t)} f(Z_{t+n}^{(1)}) \mathbb{1}_{\tau^{(t)}<n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k-1} \in \{1,2\}, d_{t+k} = 0, (Z_{t+k}^{(1)}, Z_{t+k}^{(2)}) \in (dy_1, dz_1)\}\times$$

$$\times \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{y_1 z_1 0}\{d_{t+j}=0,\ j=\overline{k+1,n},\ (Z^{(1)}_{t+n}, Z^{(2)}_{t+n}) = (du,dv)\} f(u) \le$$

$$\sup_{x\in E} f(x) \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\}, d_{t+k}=0, (Z^{(1)}_{t+k}, Z^{(2)}_{t+k}) \in (dy_1, dz_1)\}\times$$

$$\times \mathbb{P}^{(t)}_{y_1 z_1 0}\{d_{t+j}=0,\ j=\overline{k+1,n}\} = \sup_{x\in E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\}.$$

Аналогічні нерівності виконані для $\mathbb{E}^{(t)}_{xx1} f(Z^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\tau^{(t)}<n}$. Отже, ми отримали наступні оцінки

$$|E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_x f(X^{(2)}_{t+n})| \le ||f||\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\},$$

звідки випливає перша нерівність в (6.85).

Доведемо тепер другу нерівність. Скориставшись аналогічним підходом, отримаємо

$$|E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y f(X^{(2)}_{t+n})| = |\mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(1)}_{t+n}) - \mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(2)}_{t+n})| =$$

$$|\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}\left(f(Z^{(1)}_{t+n}) - f(Z^{(2)}_{t+n})\right)| = |\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}\left(f(Z^{(1)}_{t+n}) - f(Z^{(2)}_{t+n})\right)\mathbb{1}_{d_{t+n}=0}| \le$$

$$\max\{\mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(1)}_{t+n})\mathbb{1}_{d_{t+n}=0}, \mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{d_{t+n}=0}\}.$$

Розглянемо $\mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(1)}_{t+n})\mathbb{1}_{d_{t+n}=0}$. Запишемо

$$\mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(1)}_{t+n})\mathbb{1}_{d_{t+n}=0} \le ||f||\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\}.$$

Аналогічна нерівність має місце для $\mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(Z^{(2)}_{t+n}\mathbb{1}_{d_{t+n}=0})$.

□

Лема 6.19. *Припустимо, що функція* $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ *така, що виконана умова* (F). *Тоді для всіх* $x, y \in E$ *виконані наступні нерівності*

$$\begin{aligned} |E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_x f(X^{(2)}_{t+n})| &\le \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n-1}=0\}C_{t+n}(f) + \varepsilon^{(t)}_n R_f, \\ |E(t)_x f(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y f(X^{(2)}_{t+n})| &\le \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n-1}=0\}C_{t+n}(f) + \varepsilon^{(t)}_n R_f, \end{aligned} \tag{6.86}$$

де $C_{t+n}(f) = \frac{\sup_{x\in E} Q_{t+n}(x,f) - \alpha\nu(f) + \varepsilon^{(t)}_n R_f}{1-\alpha}$.

Доведення. Скориставшись підходом аналогічним до доведення Леми 6.18, отримаємо

$$\begin{array}{l} |E_x^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)}) - E_x^{(t)}f(X_{t+n}^{(2)})| \le \max_{i\in\{1,2\}} \int_E \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n}=0, Z_{t+n}^{(i)}=dy\}f(y), \\ |E_x^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)}) - E_y^{(t)}f(X_{t+n}^{(2)})| \le \max_{i\in\{1,2\}} \int_E \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n}=0, Z_{t+n}^{(i)}=dy\}f(y). \end{array} \tag{6.87}$$

Розглянемо

$$\int\limits_E \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n}=0, Z_{t+n}^{(1)}=dy\}f(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\}, d_{t+k}=0, (Z_{t+k}^{(1)}, Z_{t+k}^{(2)})\in(dy_1, dz_1)\}\times$$

$$\times \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{y_1z_10}^{(t)}\{d_{t+j}=0,\ j=\overline{k+1,n},\ (Z_{t+n}^{(1)}, Z_{t+n}^{(2)})=(du,dv)\}f(u).$$

Помітимо, що

$$\mathbb{P}_{y_1z_10}^{(t)}\{d_{t+j}=0,\ j=\overline{k+1,n},\ (Z_{t+n}^{(1)}, Z_{t+n}^{(2)})=(du,dv)\} = T^{t,n}(y_1,z_1,du,v)$$

за означенням T. Отже, маємо:

$$\int\limits_E \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n}=0, Z_{t+n}^{(1)}=dy\}f(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\}, d_{t+k}=0, (Z_{t+k}^{(1)}, Z_{t+k}^{(2)})\in(dy_1, dz_1)\}\times$$

$$\times T^{t,n-k}(y_1,z_1,f,E) =$$

$$= \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n-1}=0, (Z_{t+k}^{(1)}, Z_{t+k}^{(2)})\in(dy,dz)\}\left(\frac{P_{t+n1}(y,f)-\alpha\nu(f)}{1-\alpha}\right)+$$

$$+\int\limits_E \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n-1}\in\{1,2\}, (Z_{t+k}^{(1)}, Z_{t+k}^{(2)})\in(dy)\}(1-Q_{t+n}(y,E))R_{t+n1}(y,f) \le$$

$$\le \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n-1}=0\}\left(\frac{\sup_x Q_{t+n}(x,f)-\alpha\nu(f)+\varepsilon_n^{(t)}R_f}{1-\alpha}\right)+$$

$$+\varepsilon_n^{(t)}R_f\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n-1}\in\{1,2\}\} \le$$

$$\le \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n-1}=0\}\left(\frac{\sup_x Q_{t+n}(x,f)-\alpha\nu(f)+\varepsilon R_f}{1-\alpha}\right)+\varepsilon_n^{(t)}R_f.$$

Абсолютно аналогічні міркування справедливі для $\int_E \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0, Z^{(2)}_{t+n} = dy\}f(y)$. Взявши до уваги першу нерівність з (6.87), отримаємо першу формулу в (6.86).

Щоб довести другу нерівність в (6.86), помітимо, що

$$\int\limits_E \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n} = 0, Z^{(1)}_{t+n} = dz\}f(z) = \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{Z_{t+n-1} = (du, dv, 0)\}T_t(u, v; f, E) +$$

$$+ \int\limits_E \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{Z_{t+n-1} = (du, du, \{1, 2\})\}(1 - Q_{t+n}(u, E))R_{t+n1}(u, f)R_{t+n2}(u, E) \le$$

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n-1} = 0\}\left(\frac{Q_{t+n}(x, f) + \varepsilon^{(t)}_n R_f - \alpha\nu(f)}{1-\alpha}\right) + \varepsilon^{(t)}_n R_f,$$

врахувавши другу нерівність з (6.87), отримаємо другу формулу в (6.86). □

Лема 6.20. *Покладемо* $\mu_n(t, x) = E^{(t)}_x f(X^{(1)}_{t+n})$, $\sigma^2_n(t, x) = E^{(t)}_x |f(X^{(1)}_{t+n}) - \mu_n(t, x)|^2$ *та* $g(x) = |f(x) - \mu_n(t, x)|^2$. *Припустимо, що* $\sigma^2_n(t, x) < \infty$. *Тоді для довільних* $x, y \in E$ *(включаючи* $x = y$*) та* $\gamma > 0$ *виконані наступні нерівності*

$$E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})|^2 \le 2\sigma^2_n(t, x) + \Delta^{(t,n)}_{xy}(g), \tag{6.88}$$

$$P^{(t)}_{xy}\{|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_{t+n})| > \gamma\sigma_n(t, x)\} \le 2/\gamma^2 + (\gamma\sigma_n(t, x))^{-2}\Delta^{(t,n)}_{xy}(g), \tag{6.89}$$

де $\Delta^{(t,n)}_{xy}(g) = |E^{(t)}_x g(X^{(1)}_{t+n}) - E^{(t)}_y g(X^{(2)}_{t+n})|$.

Доведення. Можемо записати

$$E^{(t)}_y g(X^{(2)}_{t+n}) = E^{(t)}_x g(X^{(1)}_{t+n}) + E^{(t)}_y g(X^{(2)}_{t+n}) - E^{(t)}_x g(X^{(1)}_{t+n}) \le E_x g(X^{(1)}_{t+n}) + \Delta^{(t,n)}_{xy}(g).$$

У той же час,

$$E^{(t)}_x g(X^{(1)}_{t+n}) = E^{(t)}_x |X^{(1)}_{t+n} - \mu_n(t, x)|^2 = \sigma^2_n(t, x).$$

Отже, маємо оцінку

$$E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n}) - f(X^{(2)}_n)|^2 \le E^{(t)}_x|f(X^{(1)}_n) - \mu_n|^2 + E^{(t)}_y|f(X^{(2)}_n) - \mu_n|^2 =$$

$$= \sigma^2_n(t, x) + E^{(t)}_y g(X^{(2)}_{t+n}) \le \sigma^2_n(t, x) + \sigma^2_n(t, x) + \Delta^{(t,n)}_{xy}(g),$$

що доводить формулу (6.88). Щоб довести (6.89), скористаємось нерівністю Чебишева.

$$P_{xx}^{(t)}\left\{|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|>\gamma\sigma_n(t,x)\right\}\le\frac{E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|^2}{\gamma^2\sigma_n^2(x)},$$

тепер ми можемо застосувати доведену формулу (6.88) для $E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|^2$ та отримаємо оцінку

$$P_{xy}^{(t)}\left\{|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|>\gamma\sigma_n(x)\right\}\le\frac{2\sigma_n^2(t,x)+\Delta_{xy}^{(t,n)}(g)}{\gamma^2\sigma_n^2(t,x)}=$$

$$2/\gamma^2+(\gamma\sigma_n(t,x))^{-2}\Delta_{xy}^{(t,n)}(g),$$

яка доводить формулу (6.89). □

Лема 6.21. *Нехай функція* $f\colon E\longrightarrow\mathbb{R}$ *обмежена. Тоді для довільних* $x,y\in E$ *та* $\gamma>0$ *виконуються наступні нерівності:*

$$\begin{gathered}E_{xx}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|^2\le 2||f||^2\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n}=0\},\\ P_{xx}^{(t)}\{|f(X_{t+n}^{(1)}-f(X_{t+n}^{(2)})|>\gamma\}\le 2\gamma^{-2}||f||^2\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n}=0\}.\end{gathered}\tag{6.90}$$

$$\begin{gathered}E_{xy}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|^2\le 2||f||^2\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n}=0\},\\ P_{xy}^{(t)}\{|f(X_{t+n}^{(1)}-f(X_{t+n}^{(2)})|>\gamma\}\le 2\gamma^{-2}||f||^2\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n}=0\}.\end{gathered}\tag{6.91}$$

Доведення. Наслідуючи спосіб доведення Леми 6.18, можемо записати

$$E_{xx}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|^2=\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)})-f(X_{t+n}^{(2)})|^2=$$

$$\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}|f(X_{t+n}^{(1)}-f(X_{t+n}^{(2)})|^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}=$$

$$=\left(\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)})f(X_{t+n}^{(2)})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\right)+$$

$$+\left(\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}f(X_{t+n}^{(2)})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)})f(X_{t+n}^{(2)})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\right).$$

Розглянемо доданок

$$\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}f(X_{t+n}^{(1)})f(X_n^{(2)})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}=$$

$$\mathbb{E}_{xx1}^{(t)}\left(f(X_{t+n}^{(1)})^2-f(X_{t+n}^{(1)})f(X^{(2)})_n\right)\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{E\times E}\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\},Z_{t+k}^{(1)}=(dx,dy,0)\}\times$$

$$\times\left(T^{t+k+1,n}(x,y;f^2,E)-T^{t+k+1,n}(x,y;f,f)\right)\leq$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\},Z^{(1)}_{t+k}=(dx,dy,0)\}T^{t+k+1,n}(x,y;f^2,E)\vee$$

$$\vee\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\},Z^{(1)}_{t+k}=(dx,dy,0)\}T^{t+k+1,n}(x,y;f,f)\leq$$

$$\leq||f||^2\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\},Z^{(1)}_{t+k}=(dx,dy,0)\}T^{t,k}(x,y;E,E)=$$

$$=||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\}.$$

Аналогічна нерівність виконана для доданку

$$\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(2)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(1)}_{t+n})f(X^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}$$

Отже, ми довели першу формулу в (6.90).

Друга формула в (6.91) випливає з першої та нерівності Чебишева

$$P^{(t)}_{xx}\{|f(X^{(1)}_{t+n}-f(X^{(2)}_{t+n})|>\gamma\}\leq\gamma^{-2}E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n})-f(X^{(2)}_{t+n})|^2\leq$$

$$2\gamma^{-2}||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xx}\{d_n=0\}.$$

Доведення (6.91) аналогічне доведенню (6.90) з єдиною відмінністю – а саме, ми допускаємо, що ланцюги ніколи не склеються.

$$E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n})-f(X^{(2)}_{t+n})|^2=\left(\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}f(X^{(1)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}f(X^{(1)}_{t+n})f(X^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\right)+$$

$$+\left(\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}f(X^{(2)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}f(X^{(1)}_{t+n})f(X^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\right).$$

Скориставшись тими ж перетвореннями, що і раніше, отримаємо:

$$\mathbb{E}^{(t)}_{xy0}\left(f(X^{(1)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-f(X^{(1)}_{t+n})f(X^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{k-1}\in\{1,2\},Z^{(k)}=(dx,dy,0)\}\times$$

$$\times\left(T^{t+k+1,n}(x,y;f^2,E)-T^{t+k+1,n}(x,y;f,f)\right)+$$

$$+\left(T^{t,n}(x,y,f^2,E)-T^{t,n}(x,y,f,f)\right)\leq$$

$$M(\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{k-1}\in\{1,2\}, Z^{(k)}=(dx,dy,0)\}T^{t+k}(x,y;E,E)+$$

$$+T^{(t,n)}(x,y,E,E))\vee$$

$$\vee||f||^2(\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{k-1}\in\{1,2\}, Z^{(k)}=(dx,dy,0)\}T^{t+k}(x,y;E,E)+$$

$$+T^{(t,n)}(x,y,E,E)) = ||f||^2\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\},$$

що доводить першу формулу в (6.91), друга формула в (6.91) випливає з нерівності Чебишева. □

Лема 6.22. *Припустимо, що функція* $f\colon E\longrightarrow\mathbb{R}$ *задовільняє умову* (F).

Тоді для довільних $x, y\in E$ *та* $\gamma>0$ *виконані наступні нерівності*

$$\begin{gathered}E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n})-f(X^{(2)}_{t+n})|^2\le 2C\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\},\\ P^{(t)}_{xx}\{|f(X^{(1)}_{t+n}-f(X^{(2)}_{t+n})|>\gamma\}\le 2\gamma^{-2}C\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\}.\end{gathered}\tag{6.92}$$

$$\begin{gathered}E^{(t)}_{xy}|f(X^{(1)}_{t+n})-f(X^{(2)}_{t+n})|^2\le 2\left(C\mathbb{P}_{xy0}\{d_{t+n-1}=0\}+\varepsilon\right),\\ P^{(t)}_{xy}\{|f(X^{(1)}_{t+n}-f(X^{(2)}_{t+n})|>\gamma\}\le 2\gamma^{-2}\left(C\mathbb{P}_{xy0}\{d_{t+n-1}=0\}+\varepsilon\right),\end{gathered}\tag{6.93}$$

де $C=C_{t+n}(f^2)$.

Доведення. Як і в Лемі 6.21, розглянемо доданок

$$E^{(t)}_{xx}|f(X^{(1)}_{t+n})-f(X^{(2)}_{t+n})|^2=\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(1)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(1)}_{t+n})f(X^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}+$$

$$+\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(2)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}-\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(1)}_{t+n})f(X^{(2)}_{t+n})\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\le\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(1)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}+$$

$$+\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(2)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}.$$

Отже, маємо

$$\mathbb{E}^{(t)}_{xx1}f(X^{(1)}_{t+n})^2\mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}}\le$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k-1}\in\{1,2\}, Z^{(1)}_{t+k}=(dx,dy,0)\}T^{t+k+1,n}(x,y;f^2,E)+$$

$$+\int\limits_{E}^{(t)}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n-1}\in\{1,2\}, Z^{(1)}_{n-1}=Z^{(2)}_{n-1}=dx\}(1-Q_{t+n}(x,E))\times$$

$$\times R_{t+n,1}(x,f^2)R_{t+n,2}(x,E)\le C_t(f^2)\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\},$$

що доводить першу формулу в (6.92).

Для нерівностей (6.93) ми використаємо такий же підхід, як у доведенні Леми 6.21, та отримаємо нерівність

$$\mathbb{E}^{(t)}_{xy0} f(X^{(1)}_{t+n})^2 \mathbb{1}_{\{d_{t+n}=0\}} \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{E\times E} \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+k-1} \in \{1,2\}, Z^{(k)} = (dx, dy, 0)\} T^{t+k+1,n}(x, y; f^2, E) \leq$$

$$\leq C_t(f^2)\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n-1} = 0\} + \varepsilon \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n-1} \in \{1,2\}\},$$

що доводить першу формулу в (6.93).

Другі нерівності в (6.92) та (6.93) випливають з нерівності Чебишева. □

Розділ 7

Нерівності для функції ризику у неоднорідній за часом та простором моделі Крамера-Лундберга

7.1 Вступ

Дослідження стійкості розподілів та асимптотики розподілу марковських моментів загальних ланцюгів Маркова при широких припущеннях на характер перемішування детально висвітлене у монографії [93], де наведено також ряд застосувань.

Основи теорії стійкості стохастичних моделей викладено у монографії В. Золотарьова [164]. Важливі досягнення у теорії стійкості наведено у книзі С. Мейна, Р. Твіді [113].

Виходячи з потреб практичних застосувань, доцільно поширити класичні результати теорії Крамера-Лундберга на клас неоднорідних процесів ризику. Наприклад, актуарна вартість полісу автострахування має враховувати сезонний фактор, що діє періодично та впливає на інтенсивність дорожньо-транспортних пригод.

У роботі [99] досліджено асимптотику функції ризику для неоднорідного за простором (зі змінною інтенсивністю премій) та однорідного і неперервного за часом узагальнення моделі ризику Крамера-Лундберга. Неоднорідні моделі ризику з позицій теорії відновлення також досліджуються у роботі [107].

В даній частині дисертаційної роботи вказане вище дослідження продовжено у бік порівняння функцій ризику (тобто, отримання явних нерівностей для їх різниці) для неоднорідної чи однорідної за часом чи простором моделі. Означення функції ризику (що теж саме, що функція ймовірностей банкрутства в залежності від страхового резерву, див. нижче) наведено у [78].

Для практичних застосувань двічі неоднорідної (за простором та часом) моделі також отримано явні експоненційні нерівності для різниці відповідних функцій ризику з використанням результатів [96], [94], [95].

Інші результати, що стосуються неоднорідних процесів Маркова, можна знайти в роботах [163] та [159].

7.2 Неоднорідна за часом і простором модель Крамера-Лундберга

Нехай $(c(x), x \in \mathbb{R})$ – додатна борелівська функція така, що функція $1/c(x)$ локально інтегровна та для деяких сталих $c > 0$ і $\gamma > 0$

$$c(x) - c = O(\exp(-\gamma x)), \quad x \to \infty. \tag{7.1}$$

Розглянемо неоднорідний за часом процес Маркова у $\mathbb{R}$, що описує динаміку страхового капіталу та є неперервним справа розв'язком стохастичного рівняння

$$dX(t) = c(X(t))dt - d\widetilde{Z}(t), \; t \geq s, \;\; X(s) = x. \tag{7.2}$$

Існування та єдиність розв'язку обгрунтовані у Лемі 7.1 нижче.

Тут $c(x)$ задає інтенсивність премій при наявному страховому фонді x, а процес $\widetilde{Z}(t)$ має незалежні прирости

$$\widetilde{Z}(t) - \widetilde{Z}(s) = \sum_{\widetilde{\nu}(s)<n\leq\widetilde{\nu}(t)} \xi_n, \tag{7.3}$$

та описує страхові виплати на $(s, t]$. Тут $\widetilde{\nu}(t)$ – випадковий процес, що визначено нижче.

Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ у (7.3) є незалежними однаково розподіленими невід'ємними випадковими величинами страхових виплат, з $\mathrm{P}(\xi_n < x) = F(x)$, $G(x) = 1 - F(x)$, $m = \mathrm{E}\xi_1$, та задовольняють умову Крамера про скінченність при деякому $\alpha > 0$ генеруючої функції моментів

$$\widehat{f}(\alpha) = \mathrm{E}\exp(\alpha\xi_1) < \infty. \tag{7.4}$$

Нехай також

$$\widehat{G}(\alpha) = (\widehat{f}(\alpha) - 1)/\alpha = \int\limits_0^\infty \exp(\alpha x) G(x) dx.$$

У (7.3) за припущенням випадковий процес $(\widetilde{\nu}(t), t \geq 0)$ з незалежними приростами не залежить від (ξ_n), задає кількість страхових подій на $(0, t]$ та є неоднорідним процесом Пуассона зі структурною мірою $\widetilde{\Lambda}(s, t) = \int_s^t \widetilde{\lambda}(u) du$ і борелівською невід'ємною локально інтегровною інтенсивністю $\widetilde{\lambda}(u)$ такою, що $\widetilde{\Lambda}(s, \infty) = \infty$. Отже,

$$\mathrm{P}(\widetilde{\nu}(t) - \widetilde{\nu}(s) = n) = \exp(-\widetilde{\Lambda}(s, t)))(\widetilde{\Lambda}(s, t))^n/n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.5}$$

Визначимо момент першого стрибка процесу $\widetilde{\nu}(t)$ після s

$$\theta_s = \inf(t > s : \widetilde{\nu}(t) > \widetilde{\nu}(s)). \tag{7.6}$$

Щільність θ_s дорівнює $P_{sx}(\theta_s \in du) = \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s, u)) du, \ u \geq s$.

За теорією процесів з незалежними приростами [47], [38], [39] інфінітезимальний оператор $A(t)$ (або ж характеристичний оператор Динкіна [47, II,5]) процесу $(X(t))$ має вигляд

$$A(t) g(x) = c(x) g'(x) + \widetilde{\lambda}(t)[g * F(x) - g(x)], \ x \in \mathbb{R}, \tag{7.7}$$

для $g \in C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ (або $g \in \mathfrak{D}(A(t))$ - області визначення лінійного оператора $A(t)$). Тут згортка $g * F(x) = \int_0^\infty g(x-y) dF(y)$. Для функції f згортка визначається як $f * g(x) = \int_0^\infty f(x - y) g(y) dy$.

Визначимо неперервні строго зростаючі функції, що внаслідок умов на $c(x)$ є ізоморфізмами $\mathbb{R}_+$:

$$D(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{c(y)} dy, \quad C(y) = \sup(x : D(x) < y) = D^{(-1)}(y). \tag{7.8}$$

Нехай також

$$H(x, t) = C(D(x) + t) - x, \quad x, t \geq 0. \tag{7.9}$$

Зауважимо, що ця функція не спадає за t та невід'ємна, $H(x, 0) = 0$.

Лема 7.1. *За умови $X(s) = x \geq 0$ до настання моменту θ_s у (7.6) мають місце рівності*

$$X(t) = x + H(x, t - s), \quad s \leq t < \theta_s,$$

$$X(\theta_s) = x + H(x, \theta_s - s) - \xi_{\widetilde{\nu}(s)+1}. \tag{7.10}$$

Доведення. З (7.2) та (7.6) виводимо, що при $s \leq t < \theta_s$ виконується стохастичне рівняння $dX(t) = c(X(t))dt$, звідки за означенням (7.8) $t - s = \int_s^t dX(u)/c(X(u)) = D(X(t)) - D(x)$. Тому з (7.8) випливає перша рівність у (7.10). Друга рівність є очевидним наслідком першої та неперервності справа процесу $X(t)$. □

Надалі символи P_{sx} та E_{sx} означають ймовірність та математичне сподівання за умови $X(s) = x$.

7.3 Момент банкрутства та зупинений процес

Основним об'єктом дослідження є асимптотика розподілу момента банкрутства

$$\zeta_{sx} = \inf(t > s : X(t) < 0), \text{ де } X(s) = x. \tag{7.11}$$

Тому розглянемо процес з обривом

$$X_t = X(t)1_{t<\zeta_{sx}} - \infty 1_{t\geq\zeta_{sx}}, \quad t \geq s,$$

зі значеннями у $\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$. Він є марковським субпроцесом процесу $X(t)$, що відповідає мультиплікативному функціоналу $\mu_s^t = 1_{\{\zeta_{sx}>t\}}$ [47, Ch.1.5]

Внаслідок неперервності $X(t)$ справа, означення субпроцесу X_t та визначення інфінітезимального оператора (траєкторії процесів $X(t)$ та X_t збігаються до настання строго додатного марковського моменту ζ_{sx} для кожного $x \geq 0$) інфінітезимальний оператор A_t процесу X_t має вигляд

$$A_t g(x) = [A(t)g](x)1_{x\geq 0}, \; x \in \mathbb{R}, \;\; A_t g(-\infty) = 0. \tag{7.12}$$

для функцій g з $g(x) = 0$ при $x < 0$.

Визначимо при $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+), t \geq s$, перехідну ймовірність

$$P_{st}(x, B) = \mathrm{P}_{sx}(X_t \in B) = \mathrm{P}_{sx}(X(t) \in B, \; \zeta_{sx} > t). \tag{7.13}$$

Розглянемо при $x \geq 0$ ймовірності виживання та банкрутства (функцію ризику) на нескінченному горизонті

$$\widetilde{p}_s(x) = P_{s\infty}(x, \mathbb{R}_+) = P_{s\infty}1(x),$$

$$\widetilde{q}_s(x) = 1 - \widetilde{p}_s(x) = P_{sx}(\zeta_{sx} < \infty), \tag{7.14}$$

де $P_{s\infty}1(x) = \lim_{t\to\infty} P_{st}1(x) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}_{sx}(\zeta_{sx} > t) = \mathrm{P}_{sx}(\zeta_{sx} = \infty)$, а 1 - одинична функція на $\mathbb{R}_+$. При $x < 0$ довизначимо ці функції як нульові.

7.4 Оцінка Крамера у однорідній за часом моделі

Нехай стала $\lambda > 0$, а $(\nu(t))$ – однорідний за часом процес Пуассона зі сталою функцією інтенсивності $\lambda(t) = \lambda$, $\Lambda(s,t) = \lambda(t-s)$ у (7.5).

Розглянемо однорідний випадковий процес ризику (Y_t) аналогічний до (X_t) з заміною неоднорідного процесу $(\widetilde{\nu}(t))$ на однорідний $(\nu(t))$ та з тією ж інтенсивністю премій $(c(x))$ і сумами виплат (ξ_n). Інфінітезимальний оператор цього процесу має вигляд

$$Ag(x) = (c(x)g'(x) + \lambda[g * F(x) - g(x)])1_{x\geq 0}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{7.15}$$

для $g(x) = 0$ при $x < 0$.

Позначимо через

$$p(x) = p_s(x), \quad q(x) = q_s(x) \tag{7.16}$$

відповідні до (7.14) ймовірності виживання та банкрутства для процесу (Y_t), які, очевидно, не залежать від s. У роботі [99], Лема 3 та рівність (30), доведено існування для майже всіх x невід'ємної похідної

$$r(x) = -q'(x), \quad q(x) = \int_x^\infty r(y)dy. \tag{7.17}$$

Для функцій g на $\mathbb{R}_+$ введемо при $\alpha \geq 0$ позначення

$$\|g\|_\alpha = \sup_{x\geq 0} \exp(\alpha x)\,|g(x)|\,, \quad \widehat{g}(\alpha) = \int_0^\infty \exp(\alpha x) g(x) dx, \tag{7.18}$$

$$I_s(g) = \int_s^\infty |g(x)|\, dx, \quad g^{\pm}(x) = \max(0, \pm g(x)).$$

Припустимо, що стала c у (7.1) задовольняє умову балансу

$$\lambda m < c. \tag{7.19}$$

Тому за припущень (7.4), (7.19) строго додатним є показник Крамера

$$\beta \equiv \sup(\alpha \geq 0 : \lambda \widehat{G}(\alpha) < c) > 0, \tag{7.20}$$

оскільки $\widehat{G}(0) = m$.

Одночасно з попередніми розглянемо також при $\alpha \geq 0$ умову

$$\Delta(\alpha) \equiv \inf_{x \geq 0} \left(c(x) - \lambda \int\limits_0^x \exp(\alpha y) G(y) dy \right) / \lambda \widehat{f}(\alpha) > 0. \tag{7.21}$$

Зауваження 7.1. Для виконання (7.21) при малих $\alpha \geq 0$ необхідно та достатньо, щоб $\Delta(0) > 0$. Якщо інтенсивність $c(x)$ не зростає, то (7.21) виконано при $\alpha < \beta$.

Для обгрунтування вкажемо, що функція $\Delta(\alpha)$ неперервна в нулі внаслідок (7.4) та не зростає, а значення $\Delta(0) = c/\lambda - m$. Таким чином, якщо $\Delta(0) > 0$, то виконана умова (7.19) і $\Delta(\alpha) > 0$ для всіх $\alpha \in [0, \beta)$.

Лема 7.2. *([99], Лема 4). Функція $r(x)$ у (7.17) є розв'язком рівняння*

$$c(x) r(x) = \lambda \int_0^x r(y) G(x - y) dy + \lambda (1 - q(0)) G(x), \ x \geq 0, \tag{7.22}$$

для м.в. x, причому

$$\int_0^\infty c(x) r(x) dx = \lambda m. \tag{7.23}$$

Наступна фундаментальна лема описує властивості розв'язків рівнянь типу (7.22).

Лема 7.3. *Нехай $k(t, s)$ борелєва невід'ємна обмежена функція, а борелєва обмежена функція $y(t) \geq 0$. Тоді рівняння Вольтерра*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t k(t, s) x(s) ds, \quad t \geq 0, \tag{7.24}$$

має єдиний розв'язок у класі вимірних локально обмежених функцій та є невід'ємним: $x(t) \geq 0$.

Доведення. Вказаний розв'язок є сумою ряду Неймана методу послідовних наближень і є невід'ємним, оскільки степені невід'ємних операторів є невід'ємними (див. [97], Лема 3). Зауважимо, що внаслідок лінійності для розв'язків $x_i(t)$ (7.24) та $y_i(t)$ у правій частині з $y_1(t) \geq y_2(t)$ випливає, що $x_1(t) \geq x_2(t)$ при всіх t. □

Тепер ми можемо сформулювати основний результат розділу.

Теорема 7.1. *(a) Нехай виконуються умови (7.1), (7.19), та стала* $0 \leq \alpha < \min(\gamma, \beta)$. *Тоді*

$$\|q\|_\alpha \leq \widehat{r}(\alpha) \leq (\|(c(\cdot) - c)^-\|_\alpha + \lambda\widehat{G}(\alpha))/(c - \lambda\widehat{G}(\alpha)). \tag{7.25}$$

(b) При $0 \leq \alpha < \beta$ *за припущення додатності знаменника правої частини*

$$\|q\|_\alpha \leq \widehat{r}(\alpha) \leq \lambda\widehat{G}(\alpha)/(c - \lambda\widehat{G}(\alpha) - \|(c(\cdot) - c)^-\|_0). \tag{7.26}$$

(c) За виконання (7.21) для даного $\alpha > 0$

$$\|q\|_\alpha \leq \|r\|_\alpha / \alpha \leq 1/\alpha\Delta(\alpha). \tag{7.27}$$

Доведення. **(a)** Нерівність $\|q\|_\alpha = \sup_{x \geq 0} \exp(\alpha x) \int_x^\infty r(y)dy \leq \widehat{r}(\alpha)$ очевидна за означенням (7.17).

Перепишемо (7.22) у вигляді

$$cr(x) = (c - c(x))r(x) + \lambda r * G(x) + \lambda p(0)G(x). \tag{7.28}$$

Множенням (7.28) на $\exp(\alpha x)$ та інтегруванням на $[0, \infty)$ отримуємо

$$c\widehat{r}(\alpha) \leq \left\|(c - c(\cdot))^+\right\|_\alpha \int\limits_0^\infty r(y)dy + \lambda\widehat{r}(\alpha)\widehat{G}(\alpha) + \lambda p(0)\widehat{G}(\alpha)$$

$$\leq \|(c(\cdot) - c)^-\|_\alpha + \lambda\widehat{r}(\alpha)\widehat{G}(\alpha) + \lambda\widehat{G}(\alpha),$$

з урахуванням (7.17) та нерівностей $p(0), q(0) \leq 1$. Звідси виводимо (7.25).

(b) Аналогічно з рівняння (7.28) виводимо, що

$$c\widehat{r}(\alpha) \leq \left\|(c - c(\cdot))^+\right\|_0 \widehat{r}(\alpha) + \lambda\widehat{r}(\alpha)\widehat{G}(\alpha) + \lambda\widehat{G}(\alpha),$$

звідки отримуємо (7.26).

(c) Нерівність $\|q\|_\alpha \leq \|r\|_\alpha / \alpha$ очевидна згідно (7.17).

З (7.22) виводимо, що функція $x(t) = -r(t) + K\exp(-\alpha t)$ є розв'язком рівняння (7.24) з ядром $k(s,t) = \lambda G(t-s)$ та правою частиною $y(t) = -\lambda p(0)G(t) + K\exp(-\alpha t)(c(t) - \lambda\int_0^t \exp(\alpha s)G(s)ds)$. Тому за Лемою 7.3 нерівності $x(t) \geq 0$ (тобто $\|r\|_\alpha \leq K$) випливають з нерівностей $y(t) \geq 0, t \geq 0$. Останні через нерівності $p(0) \leq 1$ та $\exp(\alpha t)G(t) \leq \widehat{f}(\alpha)$ виконуються за умовою (7.21) при $K = 1/\Delta(\alpha)$. Отже, доведено нерівність $\|r\|_\alpha \leq 1/\Delta(\alpha)$ та (7.27). □

7.5 Порівняння з однорідною за часом моделлю Крамера-Лундберга

Порівняння моделей ми розуміємо як явні нерівності для різниці відповідних функцій ризику.

Припустимо, що неоднорідний процес - розв'язок (7.2) задовольняє при деякому $\alpha > 0$, фіксованому $s \geq 0$ та деякій сталій $\rho_\alpha(s) < 1$ умову

$$\sup_{x\geq 0} \widehat{f}(\alpha) \int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u))\exp(-\alpha H(x,u-s))du \leq \rho_\alpha(s) < 1. \tag{7.29}$$

Зауваження 7.2. Для виконання (7.29) при достатньо малих $\alpha > 0$ *необхідно та достатньо, щоб*

$$\inf_{x\geq 0} \int_s^\infty \widetilde{\lambda}(u)\exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u))H(x,u-s)du > m. \tag{7.30}$$

Доведення. Дійсно, вираз під знаком верхньої межі у лівій частині (7.29) при кожному x має розклад Тейлора

$$(1 + m\alpha + o(\alpha))(1 - \alpha B(x) + o(\alpha)) = 1 - (B(x) - m)\alpha + o(\alpha),\ \alpha \longrightarrow 0,$$

де $B(x)$ – вираз під знаком нижньої межі у лівій частині (7.30). Тут всі $o()$ рівномірні за x внаслідок додатності H м.с. Візьмемо верхню границю по x в останньому співвідношенні, та виберемо мале значення додатного α (необов'язково для саме того значення, що у (7.29)). Тоді шукана еквівалентність випливає з того, що різниця $B(x) - m$ відділена від нуля. □

Зауваження 7.3. В *однорідній схемі з* $\widetilde{\lambda}(u) = \lambda$ *та* $c(x) = c$ *умова (7.30) еквівалентна умові балансу (7.19).*

Доведення. Дійсно, у даних припущеннях $H(x,t) = ct$, а ліва частина (7.30) дорівнює c/λ . ☐

Наслідок 7.1. *Якщо функція* $c(x)$ *монотонна, то* $H(x,t)$ *монотонна за аргументом* x *у той же бік.*

Якщо $c(\cdot)$ *не спадає, умова (7.30) еквівалентна умові*

$$\int\limits_{s}^{\infty} \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u)) C(u-s) du > m. \tag{7.31}$$

Якщо ж $c(\cdot)$ *не зростає, то умова (7.30) еквівалентна умові*

$$\int\limits_{s}^{\infty} \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u))(C(u-s)) - K(u-s)) du > m, \tag{7.32}$$

де $K(t) = \int_0^\infty (1 - c(y + H(y,t))/c(y)) dy$.

Доведення. Обчислимо з (7.9) для майже всіх x

$$\partial/\partial x H(x,t) = C'(D(x)+t)/c(x) - 1,$$

звідки внаслідок (7.8) та $C'(D(x))/c(x) = 1$ отримуємо при майже всіх x тотожність

$$\partial/\partial x H(x,t) = c(x + H(x,t))/c(x) - 1. \tag{7.33}$$

Це доводить перше твердження наслідку, оскільки $H(x,t) \geq 0$.

Якщо інтенсивність $c(x)$ не спадає за x, то найменше значення (7.30) досягається при $x = 0$, тому досить врахувати, що $H(0,t) = C(t)$.

Якщо ж інтенсивність $c(x)$ не зростає за x, то найменше значення (7.30) досягається при $x = \infty$, тому слід врахувати рівність

$$H(\infty, t) = C(t) - K(t),$$

що випливає з інтегрування (7.33) на $[0,x]$ та рівності $H(0,t) = C(t)$. ☐

Теорема 7.2. *Нехай для $\alpha \geq 0$ виконується умова (7.29) та одна з умов (a),(b),(c) Теореми 7.1. Тоді*

$$\|\widetilde{q}_s - q\|_\alpha \leq I_s(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda)\ \widehat{f}(\alpha) \max(1, \|q\|_\alpha))/(1 - \rho_\alpha(s)), \tag{7.34}$$

де норма $\|q\|_\alpha$ у правій частині обмежується у відповідному пункті Теореми 7.1.

У кожному випадку для ймовірності ризику має місце нерівність

$$\widetilde{q}_s(x) \leq \exp(-\alpha x)(\|\widetilde{q}_s - q\|_\alpha + \|q\|_\alpha). \tag{7.35}$$

Доведення. Розглянемо неоднорідний процес (X_t) з інфінітезимальним оператором (7.12), перехідною імовірністю P_{st} у (7.13), та базовий однорідний процес (Y_t) з інфінітезимальним оператором (7.15). Вказані оператори задовольняють означення квазі-однорідності [96], с.3, оскільки різницевий оператор у (AD) [96] згідно з (7.12) та (7.15) має вигляд

$$D_s g(x) \equiv (A_s - A)g(x) = (\widetilde{\lambda}(s) - \lambda)(g * F(x) - g(x))1_{x \geq 0}, \tag{7.36}$$

та є обмеженим при нормі $\|\|_\alpha$.

З урахуванням рівності $\widetilde{q}_s - q = -(\widetilde{p}_s - p)$ застосуємо нерівність (17) Теореми 2 з роботи [96] з нормою $\|\|_\alpha$

$$\|\widetilde{q}_s - q\|_\alpha \leq \int\limits_s^\infty \|P_{su}\|_\alpha \, \|D_u p\|_\alpha \, du, \tag{7.37}$$

де ядро оператора P_{su} визначено у (7.13).

Згідно з (7.36) при $u \geq s$

$$\begin{aligned} \int\limits_s^\infty \|D_u p\|_\alpha \, du &\leq I_s(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda) \sup_{u \geq 0} \exp(\alpha u)\, |(p * F(u) - p(u))| \\ &= I_s(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda) \sup_{u \geq 0} \exp(\alpha u)\, |(-G(u) - q * F(u) + q(u))| \\ &\leq I_s(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda) \max(\max(1, \|q\|_\alpha)\widehat{f}(\alpha), \|q\|_\alpha) \\ &= I_s(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda)\widehat{f}(\alpha) \max(1, \|q\|_\alpha). \end{aligned} \tag{7.38}$$

Далі, розглянемо функції

$$\varphi_{st}(x) = E_{sx} \exp(-\alpha X_t + \alpha x), \ \varphi_s = \sup_{t \geq s,\ x \geq 0} \varphi_{st}(x). \tag{7.39}$$

За означенням операторної норми та ядраP_{st} у (7.13)

$$\|P_{st}\|_\alpha = \sup_{x\geq 0} \varphi_{st}(x) \leq \varphi_s. \tag{7.40}$$

За марковською властивістю процесу (X_t) для марковського моменту θ_s у (7.6) та Лемою 7.1 з урахування позначення $J_s \equiv X_{\theta_s} = x + H(x, \theta_s - s) - \xi_{\nu(s)+1}$ отримуємо

$$\varphi_{st}(x) = \mathrm{E}_{sx} \exp(-\alpha H(x, t-s)) 1_{\theta_s > t}$$

$$+\mathrm{E}_{sx} \exp(-\alpha J_s + \alpha x) \mathrm{E}_{\theta_s J_s} \exp(-\alpha X_t + \alpha J_s) 1_{\theta_s \leq t}$$

$$= \mathrm{E}_{sx} \exp(-\alpha H(x, t-s)) 1_{\theta_s > t}$$

$$+\mathrm{E}_{sx} \exp(-\alpha J_s + \alpha x) \varphi_{\theta_s, t}(J_s)) 1_{\theta_s \leq t}$$

$$= \int_t^\infty \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u)) \exp(-\alpha H(x, u-s)) du$$

$$+ \int_s^t \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u)) du \;\; \exp(-\alpha H(x, u-s))$$

$$\cdot \int_0^\infty \exp(\alpha y)) \varphi_{ut}(H(x, u-s) + x - y) dF(y). \tag{7.41}$$

Заміною $\varphi_{ut}(\cdot)$ у правій частині на її верхню межу φ_u (7.39), що не залежить від x, та переходячи до верхньої межі при $t \geq s$ та $x \geq 0$ у (7.41) з урахуванням (7.5) отримуємо нерівність

$$\varphi_s \leq 1 + \widehat{f}(\alpha) \sup_{t\geq s,\ x\geq 0} \int_s^t \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s,u)) \exp(-\alpha H(x, u-s)) \varphi_u du.$$

За умовою (7.29) ядра у правій частині є стискаючими з нормою не більшою за $\rho_\alpha(s)$, тому повторний перехід до верхньої межі з урахуванням монотонності φ_s у (7.39) призводить до нерівності

$$\|P_{st}\|_\alpha \leq \varphi_s \leq 1/(1 - \rho_\alpha(s)) \tag{7.42}$$

згідно з означенням (7.29).

Нарешті, підстановка (7.42) та використання (7.38) у (7.37) доводить шукану нерівність (7.34).

Нерівність (7.35) випливає з нерівності трикутника для норми (7.18). □

7.6 Порівняння з класичною моделлю Крамера-Лундберга

Розглянемо випадковий процес ризику $(\overline{Y}_t)$ аналогічний до (Y_t) з заміною неоднорідної інтенсивності премій $(c(x))$ на однорідну $\overline{c}(x) = c$ і тими ж сумами виплат (ξ_n). Інфінітезимальний оператор цього процесу має вигляд

$$\overline{A}g(x) = (cg'(x) + \lambda[g * F(x) - g(x)])1_{x\geq 0}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{7.43}$$

Відповідні функції у (7.16), (7.17) позначимо через

$$\overline{p}(x), \quad \overline{q}(x), \quad \overline{r}(x).$$

Для цих функцій відомі явні нерівності, див. [78].

Теорема 7.3. *Нехай виконуються умови (7.1) і (7.19), та* $0 \leq \alpha < \min(\gamma, \beta)$. *Тоді*

$$\|q - \overline{q}\|_\alpha \leq (\|c(\cdot) - c\|_\alpha + \lambda\widehat{G}(\alpha)\min(\|c(\cdot) - c\|_0/c, 1))/(c - \lambda\widehat{G}(\alpha)). \tag{7.44}$$

Далі, виконується оцінка знизу

$$\lambda m/(c + \|c(\cdot) - c\|_0) \leq q(0).$$

Крім того, за додаткової умови $\|c(\cdot) - c\|_0 < c$ *має місце оцінка зверху*

$$q(0) \leq \lambda m/(c - \|c(\cdot) - c\|_0). \tag{7.45}$$

Доведення. Застосуємо до процесів (Y_t), $(\overline{Y}_t)$ тотожність (7.22) Леми 7.2 та віднімемо першу рівність від другої. Отримуємо

$$(r(x) - \overline{r}(x))c = r(x)(c - c(x)) + \lambda(r - \overline{r}) * G + \lambda(\overline{q}(0) - q(0))G(x). \tag{7.46}$$

Множенням (7.46) на $\exp(\alpha x)$ та інтегруванням на $\mathbb{R}_+$ виводимо

$$c\int_0^\infty \exp(\alpha x)\,|r(x) - \overline{r}(x)|\,dx \leq \|c - c(\cdot)\|_\alpha \int_0^\infty r(x)dx$$

$$+\widehat{G}(\alpha)\int\limits_0^\infty \exp(\alpha x)\left|r(x)-\overline{r}(x)\right|dx+\lambda\widehat{G}(\alpha)\left|\overline{q}(0)-q(0)\right|. \tag{7.47}$$

Звідси з урахуванням $q(0) \leq 1$ виводимо нерівність

$$\int\limits_0^\infty \exp(\alpha x)\left|r(x)-\overline{r}(x)\right|dx \leq \left(\|c-c(\cdot)\|_\alpha+\lambda\widehat{G}(\alpha)\left|\overline{q}(0)-q(0)\right|\right)/(c-\lambda\widehat{G}(\alpha)). \tag{7.48}$$

Враховуючи (7.23), за (7.17) отримуємо

$$\|q-\overline{q}\|_\alpha \leq \int\limits_0^\infty \exp(\alpha x)\left|r(x)-\overline{r}(x)\right|dx$$

$$\leq \left(\|c-c(\cdot)\|_\alpha+\lambda\widehat{G}(\alpha)\left|\overline{q}(0)-q(0)\right|\right)/(c-\lambda\widehat{G}(\alpha)). \tag{7.49}$$

Далі, застосуємо рівняння (7.23) до процесів (Y_t), $(\overline{Y}_t)$ та віднімемо одне від одного:

$$c\int\limits_0^\infty (r(x)-\overline{r}(x))dx=\int\limits_0^\infty r(x)(c-c(x))dx.$$

Звідси

$$c\left|q(0)-\overline{q}(0)\right|=c\left|\int\limits_0^\infty (r(x)-\overline{r}(x))dx\right|=\left|\int\limits_0^\infty r(x)(c-c(x))dx\right|$$

$$\leq \|c-c(\cdot)\|_0\int\limits_0^\infty r(x)dx=\|c-c(\cdot)\|_0\, q(0). \tag{7.50}$$

Оскільки (див. [78]) $\overline{q}(0)=\lambda m/c$, то має місце (7.45).

З іншого боку, $c\left|q(0)-\overline{q}(0)\right| \leq c$. Підстановка останніх нерівностей у (7.49) доводить теорему. ☐

7.7 Дворівнева інтенсивність премій

Розглянемо приклад залежної від страхового фонду дворівневої інтенсивності премій

$$c(x)=b1_{x<z}+c1_{x\geq z}, \tag{7.51}$$

при деяких $b, c, z > 0$.

Умова (7.1) виконана при кожному $\gamma > 0$.

Основні функції дорівнюють

$$D(x) = (x/b)1_{x \le z} + (z/b + (x - z)/c))1_{x>z},$$

$$C(y) = (by)1_{y \le z/b} + (z + c(y - z/b))1_{y>z/b},$$

$$H(x, t) = (ct)1_{x>z}$$

$$+(bt)1_{0 \le t \le (z-x)/b} + (ct + (z - x)(1 - c/b))1_{x \le z, t>(z-x)/b}. \tag{7.52}$$

Перші дві рівності виводяться з (7.8), а останню простіше вивести з (7.10) та рівняння (7.2) при $t < \zeta_{sx}$.

Умова (7.21) виконується при деякому $\alpha > 0$ тоді і тільки тоді, коли має місце умова балансу (7.19) та $b > \lambda \int_0^z G(y)dy$. Це твердження є очевидним наслідком Зауваження 1 та (7.51).

Наслідок 7.2. *За припущення (7.51)*
(a) при $0 \le \alpha < \beta$

$$\|q\|_\alpha \le ((b - c)^- e^{\alpha z} + \lambda \widehat{G}(\alpha))/(c - \lambda \widehat{G}(\alpha)).$$

(b) При $0 \le \alpha < \beta$ *за умови додатності знаменника у правій частині*

$$\|q\|_\alpha \le \lambda \widehat{G}(\alpha)/(c - \lambda \widehat{G}(\alpha) - (b - c)^-)$$

(c) Нехай $0 < \alpha < \beta$ *та*

$$\overline{\Delta}(\alpha) = \min\left(c - \lambda \widehat{G}(\alpha), b - \lambda \int\limits_0^z \exp(\alpha y) G(y) dy\right) / \lambda \widehat{f}(\alpha) > 0.$$

Тоді

$$\|q\|_\alpha \le 1/\alpha \overline{\Delta}(\alpha).$$

Доведення. Твердження (a), (b) та (c) є прямими наслідками відповідних тверджень Теореми 7.1 з урахуванням (7.51) та (7.52). В останньому пункті слід врахувати, що $\Delta(\alpha) \ge \overline{\Delta}(\alpha)$. □

Зауважимо, що інтенсивність у (7.51) завжди монотонна.

Тому при $b \le c$ (не спадання за x) з урахуванням рівностей (7.31) та (7.52) і виразу для щільності θ_s маємо необхідну та достатню умову (7.30)

$$\mathrm{E}_s[b(\theta_s - s)1_{b(\theta_s - s) < z} + (c((\theta_s - s) + z(1 - b/c))1_{b(\theta_s - s) \ge z}] > m.$$

Аналогічно, при $b \ge c$ (не зростання за x) маємо необхідну та достатню умову (7.30)

$$\mathrm{E}_s[c(\theta_s - s)] > m.$$

Наслідок 7.3. *Припустимо, що виконуються умови одного з пунктів (a),(b) або (c) Наслідку 7.2.*

(a1) Нехай $b \le c$ *та*

$$\overline{\rho}_\alpha(s) \equiv \widehat{f}(\alpha) \int\limits_s^\infty \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s, u)) \exp(-\alpha H(0, u - s)) du < 1,$$

де $H(0, t) = (bt)1_{t < z/b} + (ct + z(1 - c/b))1_{t \ge z/b}$.

Тоді

$$\|\widetilde{q}_s - q\|_\alpha \le I_s(\widetilde{\lambda}(\cdot) - \lambda)\, \widehat{f}(\alpha) \max(1, \|q\|_\alpha))/(1 - \overline{\rho}_\alpha(s)), \tag{7.53}$$

де $\|q\|_\alpha$ *оцінюється у відповідному пункті Наслідку 7.2.*

(a2) Нехай $b \ge c$ *та*

$$\overline{\rho}_\alpha(s) \equiv \widehat{f}(\alpha) \int\limits_s^\infty \widetilde{\lambda}(u) \exp(-\widetilde{\Lambda}(s, u)) \exp(-\alpha H(\infty, u - s)) du < 1,$$

де $H(\infty, t) = ct$.

Тоді має місце нерівність (7.53).

Доведення. Твердження випливає з монотонності функції $H(x, t)$ за аргументом x згідно з Наслідком 7.1 та з рівності (7.52). □

Наслідок 7.4. *Нехай виконується умова (7.19), та* $0 \le \alpha < \beta$. *Тоді*

$$\|q - \overline{q}\|_\alpha \le (|c - b| \exp(\alpha z) + \min(|b/c - 1|, 1)\lambda \widehat{G}(\alpha)/(c - \lambda \widehat{G}(\alpha)).$$

Також, виконується оцінка знизу $\lambda m/(c + |c - b|) \le q(0)$. *Крім того, за додаткової умови* $b < 2c$ *має місце оцінка зверху* $q(0) \le \lambda m/(c - |c - b|)$.

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з (7.44) та (7.51). □

Висновки

В даній дисертаційній роботі отримано наступні результати.

1. Узагальнено умову зсуву на випадок неоднорідних ланцюгів Маркова. Доведено теорему про геометричну ергодичність неоднорідного ланцюга Маркова за виконання модифікованої умови зсуву.

2. Отримано умови геометричної рекурентності для пари неоднорідних ланцюгів Маркова. Отримано оцінки геометричного моменту для часу першого спільного відвідування множини парою ланцюгів.

3. Отримано умови та оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній нормі для геометрично ергодичних неоднорідних ланцюгів Маркова.

4. Отримано умови стійкості та геометричної ергодичності для узагальненої авторегресійної неоднорідної Марковської моделі.

5. Узагальнено теорему Лідвала про скінченість середнього часу склеювання на випадок склеювання двох неоднорідних ланцюгів Маркова. Отримано оцінки середнього часу за умови квадратичної інтегровності.

6. Узагальнено ряд властивостей згорток числових послідовностей на випадок неоднорідних згорток.

7. Отримано оцінки середнього часу склеювання для двох неоднорідних ланцюгів Маркова за умови стохастичного мажорування.

8. Адаптовано метод максимального склеювання для двох копій однорідного ланцюга Маркова із дискретним простором станів, що стартують із різними початковими розподілами, на випадок склеювання двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова із дискретним простором станів. За його допомогою доведено, що за умови рівномірного перемішування та рівномірної близькості перехідних ймовірностей за один крок для ланцюгів із дискретним простором станів має місце близькість перехідних ймовірностей за n кроків у рівномірній та зваженій

нормах для однорідних та неоднорідних ланцюгів Маркова.

9. Отримано умови та оцінки стійкості для скінченновимірних розподілів для однорідних та неоднорідних ланцюгів Маркова з використанням адаптованого методу максимального склеювання.

10. Отримані результати щодо стійкості застосовано для обчислення актуарної нетто-премії у моделі “пенсія вдівця”.

11. Запропоновано метод склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова із загальним простором станів за умови рівномірної міноризації. За допомогою цього методу отримано оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків, скінченновимірних розподілів та функціоналів від пари ланцюгів, що задовільняють умову рівномірної міноризації.

12. Отримано нерівності для функції ризику в неоднорідній за простором та часом моделі Крамера-Лундберга.

Бібліографія

1. Actuarial Mathematics / N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman et al. Itasca, Ill. : Society of Actuaries, 1986. P. 753.
2. Albrecher H. Markov Models in Actuarial Science (Chapter in Encyclopedia of Actuarial Science). John Wiley and Sons, 2006. P. 1094–1096.
3. Andrieu C., Fort G., Vihola M. Quantitive convergence rates for subgeometric Markov chains // J. Appl. Prob. 2015. no. 52. P. 391–404.
4. Anily S., Federgruen A. Ergodicity in parametric non-stationary Markov chains: an application to simulated annealing methods // Operations Research. 1987. Vol. 35. P. 867–874.
5. Anily S., Federgruen A. Simulated annealing methods with general acceptance probabilities // Journal of Applied Probability. 1987. Vol. 24. P. 657–667.
6. Antoniou C., Koutsopoulos H., Yannis G. Traffic state prediction using Markov chain models // Proceedings of the European Control Conference. 2007.
7. Athreya K., Ney P. A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains // Trans Am Math Soc. 1978. Vol. 245. P. 493–501.
8. Baxendale P. Renewal theory and computable convergence rates for geometrically ergodic Markov chains // Annals of Applied Probability. 2005. Vol. 15. P. 700–738.
9. Bednorz W. The Kendall theorem and its application to the geometric ergodicity of Markov chains // Appl Math (Warsaw). 2013. Vol. 4, no. 2. P. 129–165.
10. Besenczi R., Batfai N., Jeszenszky P. e. a. Large-scale simulation of traffic flow using Markov model // PloS one. 2021. Vol. 16, no. 2.
11. Billingsley P. Ergodic theory and information. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1978. P. 193.
12. Blackwell D. A renewal theorem // Duke Math J. 1948. Vol. 15. P. 145–150.

13. Blackwell D. Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices // Probability and statistics. 1959. Vol. The Harald Cramer volume. P. 139–160.
14. Bremaud P. Markov Chains. Springer Cham, 2020. P. xvi+557.
15. Brooks S., Roberts G. Convergence assessment techniques for Markov chain Monte Carlo // Statistics and Computing. 1998. Vol. 8. P. 319–335.
16. Chen J., Nurdin H. Generalized simulated annealing with sequentially modified cost function for combinatorial optimization problems // 2019 Australian and New Zealand Control Conference. 2019. P. 48–53.
17. Chow Y., Robbins H. A renewal theorem for random variables which are dependent or non-identically distributed // Ann. Math. Statist. 1963. Vol. 34, no. 2. P. 390–395.
18. Chung K. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Springer Berlin, Heidelberg, 1960. P. x+280.
19. Classification of encrypted traffic with second-order Markov chains and application attribute bigrams / M. Shen, M. Wei, L. Zhu, M. Wang // IEEE Transactions on Information Forensics and Security. 2017. Vol. 12, no. 8. P. 1830–1843.
20. Cohn H. On the tail σ-algebra of the finite inhomogeneous Markov chains // Ann. Math. Statist. 1970. Vol. 41. P. 2175–2176.
21. Cohn H. A ratio limit theorem for the finite nonhomogeneous Markov chains // Israel Journal of Mathematics. 1974. Vol. 19. P. 329–334.
22. Cohn H. Finite nonhomogeneous Markov chains: Asymptotic behaviour // Advances in Applied Probability. 1976. Vol. 8. P. 502–516.
23. Cohn H. On a paper by Doeblin on non-homogeneous Markov chains // Advances in Applied Probability. 1981. Vol. 13. P. 388–401.
24. Connors D., Kumar P. Simulated annealing and balance of recurrent order in time-inhomogeneous Markov chains // Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control. 1987. P. 2261–2263.
25. Daley D. Tight bounds for the renewal function of a random walk // Ann. Probab. 1980. Vol. 8, no. 3. P. 615–621.

26. Dedecker J., Gouezel S. Subgaussian concentration inequalities for geometrically ergodic Markov chains // Electron Commun Probab. 2015. Vol. 20. P. 1–12.
27. Delebecque F., Quadrat J. Optimal control of markov chains admitting strong and weak interactions // Automatica. 1981. Vol. 17, no. 1. P. 281–296.
28. Dobrushin R. Central limit theorems for non-stationary Markov chains I // Theory of Probab. and its Appl. 1956. Vol. 1, no. 1. P. 65–80.
29. Dobrushin R. Central limit theorems for non-stationary Markov chains II // Theory of Probab. and its Appl. 1956. Vol. 1, no. 4. P. 329–383.
30. Doeblin W. Le cas discontinu des probabilites en chaine // Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk (Brno). 1937. Vol. 236. P. 3–13.
31. Doeblin W. Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats // Mathematique de l'Union Interbalkaniqu. 1938. no. 2. P. 77–105.
32. Doeblin W. Sur deux proble'mes de M. Kolmogoroff concernant les cha'ines denombrables // Bull Soc Math France. 1938. Vol. 66. P. 210–220.
33. Dorea C., Cruz J. Approximation results for non-homogeneous Markov chains and some applications // The Indian Journal of Statistics. 2004. Vol. 66. P. 243–252.
34. Dorea C., Pereira A. A note on a variation of Doeblin's condition for uniform ergodicity of Markov chains // Acta Mathematica Hungarica. 2006. Vol. 110. P. 287–292.
35. Douc R., Moulines E., Rosenthal J. Quantitive bounds on convergence of time-inhomogeneous Markov chains // The Annals of Applied Probability. 2004. Vol. 14, no. 4. P. 1643–1665.
36. Douc R., Moulines E., Soulier P. Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence // Annals of Applied Probability. 2004. Vol. 14. P. 1353–1377.
37. Dublin L., A.J. L. Length of Life. New York: The Ronald Press, 1936. P. 400.
38. Dynkin E. Markov processes, Volume 1. Academic Press, New York, 1966. Vol. 1. P. 639.
39. Dynkin E. Markov processes, Volume 2. Springer, Berlin, 1966. Vol. 2. P. 276.

40. Ekheden E., Silvestrov D. Coupling and explicit rate of convergence in Cramer-Lundber approximation for reinsurance risk processes // Communications in Statistics - Theory and Methods. 2011. Vol. 40, no. 19-20. P. 3524–3539.

41. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. John Wiley & Sons, New York, 1966. Vol. 1. P. 509.

42. Fort G., Roberts G. Subgeometric ergodicity of strong Markov processes // Annals of Applied Probability. 2005. Vol. 15. P. 1565–1589.

43. Gagniuc P. Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation. 256, 2017. P. 256.

44. Gamerman D., Lopes H. Markov chain Monte Carlo, 2nd edn. Texts in Statistical Science Series, Chapman, 2006. P. 352.

45. Gerontidis I. Periodic strong ergodicity in non-homogeneous Markov systems // Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28. P. 58–73.

46. Geyer J. Practical Markov chain Monte Carlo // Statistical Science. 1992. Vol. 7, no. 4. P. 473–483.

47. Gikhman I., Skorokhod A. The Theory of Stochastic Processes II. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983. P. 440.

48. Gismondi F., Janssen J., R. M. Non-homogeneous time convolutions, renewal processes and age-dependent mean number of notorcar accidents // Annals of Actuarial Science. 2015. Vol. 9. P. 36–57.

49. Gnedenko B., Kovalenko I. Introduction to Queueing Theory. Burkhauser Boston, 1989. P. 326.

50. Golomoziy V. Stability of inhomogeneous Markov chains (in ukr.) // The Bulletin of Kyiv University, Series of Physics and Mathematics. 2009. no. 4. P. 10–15.

51. Golomoziy V. Stability estimate of time-inhomogeneous Markov chains under the uniformal minorization condition // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications II. Conference materials. 2012.

52. Golomoziy V. Coupling of time-inhomogeneous Markov chains // Probability, Reliability and Stochastic Optimization. Conference materials. 2015.

53. Golomoziy V. An inequality for the coupling moment in the case of two inhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2015. Vol. 90. P. 43–56.
54. Golomoziy V. An estimate for an expectation of the simultaneous renewal for time-inhomogeneous Markov chains // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2016. Vol. 3, no. 4. P. 315–323.
55. Golomoziy V. An estimate of the expectation of the excess of a renewal sequence generated by a time-inhomogeneous Markov chain if a square-integrable majorizing sequence exists // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2017. Vol. 94. P. 53–62.
56. Golomoziy V. Properties of the stochastic ordering for discrete distributions and their applications to the renewal sequence generated by a nonhomogeneous Markov chain // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2018. Vol. 97. P. 33–43.
57. Golomoziy V. Quantitive estimate of an expectation of the simultanious renewal for time-inhomogeneous Markov chains // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications IV. Conference materials. 2018.
58. Golomoziy V. On estimation of expectation of simultaneous renewal time of time-inhomogeneous Markov chains using dominating sequence // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2019. Vol. 6, no. 3. P. 334–343.
59. Golomoziy V. Estimates of stability of transition probabilities for non-homogeneous Markov chains in the case of the uniform minorization // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2020. Vol. 101. P. 85–101.
60. Golomoziy V. Stability of functionals of perturbed Markov chains under the condition of uniform minorization // Random Operators and Stochastic Equations. 2020. Vol. 28. P. 237–251.
61. Golomoziy V. Stability of time-inhomogeneous Markov chains satisfying minorization condition on the whole space // Modern problems of stochastic analysis (Uzbekistan). Conference materials. 2020.
62. Golomoziy V. An estimate for an exponential moment for the simultateous renewal of two random walks on a half line (in ukr.) // The Bulletin of Kyiv University, Series in Physics and Mathematics. 2021. Vol. 2. P. 26–31.

63. Golomoziy V. Exponential moments of hitting times for time-inhomogeneous atomic Markov chains // 8th European Congress of Mathematics. Conference materials. 2021.
64. Golomoziy V. Geometric drift condition for inhomogeneous Markov chains // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications V. Conference materials. 2021.
65. Golomoziy V. On expectation of the simultaneous renewal time for two time- inhomogeneous Markov chains // Actual problems of stochastic analysis (Uzbekistan). Conference materials. 2021.
66. Golomoziy V. Exponential moments of simultaneous hitting time for non-atomic Markov chains // Glasnik Matematicki. 2022. Vol. 57. P. 129–147.
67. Golomoziy V. Computable bounds of exponential moments of simultaneous hitting time for two time-inhomogeneous atomic Markov chains // In: Malyarenko, A., Ni, Y., Rancic, M., Silvestrov, S. (eds) Stochastic Processes, Statistical Methods, and Engineering Mathematics . SPAS 2019. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2023. Vol. 408. P. 97–119.
68. Golomoziy V. On geometric recurrence for time-inhomogeneous autoregression // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2023. Vol. 10, no. 3. P. 1–29.
69. Golomoziy V., Kartashov M. Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. I // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2013. Vol. 86. P. 93–104.
70. Golomoziy V., Kartashov M. Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. II // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2013. Vol. 87. P. 65–68.
71. Golomoziy V., Kartashov M. On the integrability of the coupling moment for time-inhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2014. Vol. 89. P. 1–12.
72. Golomoziy V., Kartashov M. Maximal coupling and stability of discrete nonhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2015. Vol. 91. P. 17–27.

73. Golomoziy V., Kartashov M. Maximal coupling and V-stability of discrete nonhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2016. Vol. 93. P. 19–31.
74. Golomoziy V., Kartashov M. Some inequalities for the risk function in the time and space nonhomogeneous Cramer–Lundberg risk model // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2019. Vol. 98. P. 243–254.
75. Golomoziy V., Kartashov M., Kartashov Y. Impact of the stress factor on the price of widow's pensions // In: Silvestrov, D., Martin-Lof, A. (eds) Modern Problems in Insurance Mathematics. 2014. P. 223–237.
76. Golomoziy V., Kartashov M., Kartashov Y. Impact of the stress factor on the price of widow's pensions. Proofs // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2016. Vol. 92. P. 17–22.
77. Golomoziy V., Mishura Y. Stability estimates for finite-dimensional distributions of time-inhomogeneous Markov chains // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 13.
78. Grandell J. Aspects of Risk Theory. Springer Series in Statistics, 1991. P. 178.
79. Griffeath D. A maximal coupling for Markov chains // Wahrscheinlichkeitsth. 1975. P. 95–106.
80. Griffeath D. Uniform coupling of non-homogeneous Markov chains // Journal of Applied Probability. 1975. Vol. 12. P. 753–762.
81. Griffeath D. Partial coupling and loss of memory for Markov chains // The Annals of Probability. 1976. Vol. 4. P. 850–858.
82. Guilmeau T., Chouzenoux E., Elvira V. Adaptive simulated annealing through alternating Renyi divergence minimization // 2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Rhodes Island, Greece. 2023. P. 1–5.
83. Hajnal J., Bartlett M. The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1956. Vol. 52. P. 67–77.
84. Hajnal J., Bartlett M. Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1958. Vol. 54. P. 233–246.

85. Handbook of Markov chain Monte Carlo / S. Brooks, A. Gelman, G. Jones, X. Meng. Chapman and Hall/CRC Handbooks of Modern Statistical Methods, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011. P. 619.
86. Hartfiel D., Rothblum U. Convergence of inhomogeneous products of matrices and coefficients of ergodicity // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 277. P. 1–9.
87. Hernandez-Lerma O., Lasserre J. Markov chains and invariant probabilities. Birkauser Verlag, Basel, 2003. Vol. 211. P. 208.
88. Hoem J. Markov chain models in life insurance // Blatter DGVFM. 1969. Vol. 9. P. 91–107.
89. Hoem J. A Markov chain model of working life tables // Scandinavian Actuarial Journal. 1977. Vol. 1977, no. 1. P. 1–20.
90. Hubin A. An adaptive simulated annealing em algorithm for inference on non-homogeneous hidden Markov models // AIIPCC. 2019. P. 1–9.
91. Ionescu-Tulcea C. Mesures dans les espaces produits // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. 1949. Vol. 7. P. 292–294.
92. Jarner S., Roberts G. Polynomial convergence rates of Markov chains // Annals of Applied Probability. 2001. Vol. 12. P. 224–247.
93. Kartashov M. Strong Stable Markov Chains. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996. P. 138.
94. Kartashov M. The stability of almost homogeneous in time Markov semigroups of operators // Theory Probab. Math. Statist. 2004. no. 71. P. 119–128.
95. Kartashov M. The ergodicity and stability of quasi-homogeneous Markov semigroups of operators // Theory Probab. Math. Statist. 2006. no. 72. P. 59–68.
96. Kartashov M. The stability of transient quasi-homogeneous Markov semigroups and an estimate of the ruin probability // Theory Probab. Math. Statist. 2007. no. 75. P. 41–50.
97. Kartashov M. Boundedness, limits, and stability of solutions of a perturbation of a nonhomogeneous renewal equation on a semiaxis // Theory Probab. Math. Statist. 2010. no. 81. P. 71–83.
98. Kartashov M., Golomoziy V. The mean coupling time of independent discrete renewal processes // Theory Probab. Math. Statist. 2012. no. 84. P. 79–86.

99. Kartashov M., Stroev O. Lundberg approximation for the risk function in an almost homogeneous environment // Theory Probab. Math. Statist. 2006. no. 73. P. 71–79.
100. Kingman J. Geometrical aspects of the theory of non-homogeneous Markov chains // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1975. Vol. 77. P. 171–183.
101. Kingman J., Williams D. The combinatorial structure of non-homogeneous Markov chains // Wahrscheinlichkeitstheorie. 1973. Vol. 26. P. 77–86.
102. Kluppelberg C., S. P. Renewal theory for functionals of a Markov chain with compact state space // The Annals of Probability. 2003. Vol. 3. P. 2270–2300.
103. Kolmogorov A. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, Julius Springer, 1933. P. 62.
104. Laarhoven P., Aarts E. Simulated Annealing: Theory and Applications. Springer Dordrecht, 1987. P. xi+187.
105. Lindvall T. On coupling for continuous time renewal processes // J. Appl. Probab. 1982. Vol. 19. P. 82–89.
106. Lindvall T. Lectures on the Coupling Method. John Wiley and Sons, 1992. P. 272.
107. A Lundberg-type inequality for an inhomogeneous renewal risk model / I. Andrulyte, E. Bernackaite, D. Kievinaite, J. Siaulys // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2015. Vol. 2, no. 2. P. 173–184.
108. Madsen R. A note on some ergodic theorems of A. Paz // The Annals of Mathematical Statistics. 1971. Vol. 42, no. 1. P. 405–408.
109. Maire F., Douc R., Olsson J. Comparison of asymptotic variances of inhomogeneous Markov chains with application to Markov chain Monte Carlo methods // The Annals of Statistics. 2014. Vol. 42, no. 4. P. 1483–1510.
110. Markov A. Investigation of an important case of dependent trials // Izv. Akad. Nauk SPB. 1907. Vol. 6. P. 61–80.
111. Markov chains / R. Douc, E. Moulines, P. Priouret, P. Soulier. Springer Cham, 2018. P. xiii+757.
112. Melfi V. Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications // Annals of Probability. 1992. Vol. 20. P. 753–771.

113. Meyn S., Tweedie R. Markov Chains and Stochastic Stability. Springer London, 1993. P. xvi+550.
114. Mitra B., Romeo F., Sangiovanni-Vincentelli A. Convergence and finite-time behavior of simulated annealing // Advances in applied probability. 2016. Vol. 18. P. 747–771.
115. Mott J. Sur l'extension du the'oreme limite du calcul des probabilites aux sommes de quantites de'pendantes // Math Ann. 1927. Vol. 97. P. 1–59.
116. Mott J. XXIV.-Conditions for the ergodicity of non-homogeneous finite Markov chains // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. 1957. Vol. 64. P. 369–380.
117. Mukhamedov F., Al-Rawashdeh A. Approximations of non-homogeneous Markov chains on abstract states spaces // Bull. Math. Sci. 2021. Vol. 11.
118. Mukhamedov F., Al-Rawashdeh A. Generalized Dobrushin ergodicity coefficient and ergodicities of non-homogeneous Markov chains // Banach Journal of Mathematical Analysis. 2022. Vol. 16.
119. Muller P., Sanso B., Iorio M. Optimal Bayesian design by inhomogeneous Markov chain simulation // Journal of the American Statistical Association. 2004. Vol. 99, no. 467. P. 788–798.
120. Neveu A. Mathematical foundations of the calculus of probability. Holden-Day Publishing, San Francisco, 1965. P. xiii+223.
121. Ney P. A refinement of the coupling method in renewal theory // Stoch. Process. Appl. 1981. Vol. 11. P. 11–26.
122. Norberg R. A time-continuous Markov chain interest model with applications to insurance // Applied Stochastic Models and Data Analysis. 1995. Vol. 11. P. 245–256.
123. Numemelin E., Tuominen P. Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory // Stoch. Proc. Appls. 1982. Vol. 12. P. 187–202.
124. Numemelin E., Tweedie R. Geometric ergodicity and r-positivity for general Markov chains // Ann. Probab. 1978. Vol. 6. P. 404–420.

125. Nummelin E. A splitting technique for Harris recurrent Markov chains // Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1978. no. 43. P. 309–318.

126. Nummelin E. General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1984. P. 176.

127. Orey S. Potential kernels for recurrent Markov chains // J Math Anal Appl. 1965. Vol. 8. P. 104–132.

128. Orey S. Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities. Springer, 1971. P. 108.

129. Paz A. Ergodic theorems for inifinite probabilistic tables // Ann. Math. Statist. 1970. Vol. 4, no. 2. P. 539–550.

130. Platis A., Limnios N., Le Du M. Electrical substation performability and reliability indicators modelled by non-homogeneous Markov chains // Probabilistic Safety Assessment and Management'96: ESREL'96-PSAM-III, June 24-28 1996, Crete, Greece. 1996. Vol. 1. P. 709–714.

131. Platis A., Limnios N., Le Du M. Asymptotic availability of systems modeled by cyclic non-homogeneous Markov chains. 1997.

132. Platis A., Limnios N., Le Du M. Dependability analysis of systems modeled by non-homogeneous Markov chains // Reliability Engineering and System Safety. 1998. Vol. 61. P. 235–249.

133. A poisson limit theorem for a strongly ergodic non-homogeneous Markov chain / H. Wang, M. Tang, J. Fang, Wang R. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 277. P. 722–730.

134. Rachev S. The Monge-Kantorovich mass transference problem and its stochastic applications // Theory of Probability and Its Applications. 1985. Vol. 29, no. 4. P. 647–671.

135. Revuz D. Markov Chains. North Holland, 1984. P. 373.

136. Robert C., Casella G. Monte Carlo Statistical Methods. Springer, New York, 2004. P. 649.

137. Robert C., Casella G. Introducing Monte Carlo methods with R. Springer, New York, 2010. P. 284.

138. Scott M., Arnold B., Isaacson D. Strong ergodicity for continuous-time, non-homogeneous Markov chains // Journal of Applied Probability. 1982. Vol. 19. P. 692–694.

139. Scott M., Isaacson D. Proportional intensities and strong ergodicity for Markov processes // Journal of Applied Probability. 1983. Vol. 20. P. 185–190.

140. Seneta E. Non-negative Matrices. Wiley, London, 1973. P. 278.

141. Seneta E. On the historical development of the theory of finite inhomogeneous Markov chains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1973. Vol. 74. P. 503–513.

142. Sethuraman S., Varadhan S. A martingale proof of Dobrushin’s theorem for non-homogeneous Markov chains // Electron. J. Probab. 2005. no. 10. P. 1221–1235.

143. Silvestrov D. Coupling for Markov renewal processes and the rate of convergence in ergodic theorems for processes with semi-Markov switchings // Acta Appl. Math. 1994. no. 34. P. 109–124.

144. Silvestrov D. Coupling for Markov renewal processes and the rate of convergence in ergodic theorems for processes with semi-Markov switchings // Acta Applicandae Mathematicae - An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications. 2007. Vol. 34, no. 1. P. 109–124.

145. Silvestrov D. Improved Asymptotics for Ruin Probabilities. Springer, Cham, 2014. P. 37–68.

146. Silvestrov D., Silvestrov S. Nonlinearly Perturbed Semi-Markov Processes. Springer Cham, 2017. P. xiv+143.

147. Silvestrov D., Silvestrov S. e. a. Coupling and ergodic theorems for Markov chains with damping component // Journal: Theor. Probability and Math. Statist. 2020. no. 101. P. 243–264.

148. Siu T. On a multivariate Markov chain model for credit risk measurement // Quantitative Finance. 2005. Vol. 5, no. 6. P. 543–556.

149. Smith W. On the elementary renewal theorem for non-identically distributed variables // Pacif J. Math. 1964. Vol. 14, no. 2. P. 673–699.

150. Stenberg F., Manca R., Silvestrov D. An algorithmic approach to discrete time non-homogeneous backward semi-markov reward processes with an application to disability insurance // Methodol Comput Appl Probab. 2007. no. 9. P. 497–519.

151. Strook D., Varadhan S. Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. P. 351.

152. Thorisson H. Coupling, Stationarity, and Regeneration. Springer, New York, 2000. P. 517.

153. Trowbridge C. Mortality rates by marital status // Transactions of society of actuaries. 1994. P. 99–112.

154. Tsaklidis G., Vassiliou P.-C. Asymptotic periodicity of the vector of variances and covariances in non-homogeneous Markov systems // Journal of Applied Probability. 1988. Vol. 25. P. 21–33.

155. Tuominen P., R.L. T. Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains // Adv. in Appl. Probab. 1994. Vol. 26. P. 775–798.

156. Tweedie R., Corcoran J. N. Perfect sampling of ergodic Harris chains // Annals of Applied Probability. 2001. Vol. 11, no. 2. P. 438–451.

157. Vassiliou P.-C. Cyclic behaviour and asymptotic stability of non-homogeneous Markov systems // Journal of Applied Probability. 1984. Vol. 21. P. 315–325.

158. Vassiliou P.-C. Asymptotic variability of non-homogeneous Markov systems under cyclic behaviour // European Journal of Operational Research. 1986. Vol. 27. P. 215–228.

159. Vassiliou P.-C. Limiting distributions of a non-homogeneous Markov system in a stochastic environment in continuous time // Mathematics. 2022. Vol. 10.

160. Vassiliou P.-C., Tsaklidis G. The rate of convergence of the vector of variances and covariances in non-homogeneous Markov systems // Journal of Applied Probability. 1989. Vol. 26. P. 776–783.

161. Walters P. An introduction to ergodic theory. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York-Berlin. Vol. 79. P. 250.

162. Woltius H. Life Insurance Mathematics: (the Markovian Model). CAIRE, 1994. P. 255.

163. Zeifman A. Quasi-ergodicity for non-homogeneous continuous-time Markov chains // Journal of Applied Probability. 1989. Vol. 26. P. 643–648.

164. Zolotarev V. Modern Theory of Summation of Random Variables. De Gruyter, 1997. P. 412.

Додаток

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких, опубліковано основні наукові результати

1. Golomoziy, V. On geometric recurrence for time-inhomogeneous autoregression // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2023. Vol 10, no. 3. P. 1-29.

2. Golomoziy, V. Exponential moments of simultaneous hitting time for non-atomic Markov chains // Glasnik Matematicki. 2022. Vol 57, iss. 1. P. 129-147.

3. Golomoziy, V. and Mishura, Y. Stability Estimates for Finite-Dimensional Distributions of Time-Inhomogeneous Markov Chains // Mathematics. 2020. Vol. 8, iss. 2.

4. Golomoziy, V. Stability of functionals of perturbed Markov chains under the condition of uniform minorization // Random Operators and Stochastic Equations. 2020. Vol. 28, iss. 4. P. 237-251.

5. Golomoziy, V. Estimates of stability of transition probabilities for non-homogeneous Markov chains in the case of the uniform minorization // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2020. Vol 101. P. 85-101.

6. Golomoziy, V. On estimation of expectation of simultaneous renewal time of time-inhomogeneous Markov chains using dominating sequence // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2019. Vol 6, no. 3. P. 334-343.

7. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Some inequalities for the risk function in the time and space nonhomogeneous Cramer–Lundberg risk model // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2019. Vol 98. P. 243-254.

8. Golomoziy, V. Properties of the stochastic ordering for discrete distributions and their applications to the renewal sequence generated by a nonhomogeneous Markov

chain // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2018. Vol 97. P. 33-43.

9. Golomoziy, V. An estimate of the expectation of the excess of a renewal sequence generated by a time-inhomogeneous Markov chain if a square-integrable majorizing sequence exists // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2017. Vol 94. P. 53-62.

10. Golomoziy, V. An estimate for an expectation of the simultaneous renewal for time-inhomogeneous Markov chains // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2016. Vol 3, no. 4. P.315-323.

11. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling and V-stability of discrete nonhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2016. Vol 93. P. 19-31.

12. Golomoziy, V. and Kartashov, M. and Kartashov, Y. Impact of the stress factor on the price of widow's pensions. Proofs // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2016. Vol 92. P. 17-22.

13. Golomoziy, V. An inequality for the coupling moment in the case of two inhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2015. Vol 90. P. 43-56.

14. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling and stability of discrete non-homogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2015. Vol 91. P. 17-27.

15. Golomoziy, V. and Kartashov, M. On the integrability of the coupling moment for time-inhomogeneous Markov chains // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2014. Vol 89. P. 1-12.

16. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. I // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2013. Vol 86. P. 93-104.

17. Golomoziy, V. and Kartashov, M. Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. II // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2013. Vol 87. P. 65-68.

18. Голомозий, В. Оцінка експоненційного моменту для часу одночасного відновлення двох випадкових блукань на півпрямій // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. 2021. Вип. 2. Р. 26-31.

Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Golomoziy, V. Computable Bounds of Exponential Moments of Simultaneous Hitting Time for Two Time-Inhomogeneous Atomic Markov Chains // In: Malyarenko, A., Ni, Y., Rancic, M., Silvestrov, S. (eds) Stochastic Processes, Statistical Methods, and Engineering Mathematics. SPAS 2019. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Vol 408, 2023. P. 97-119.

2. Golomoziy, V. and Kartashov, M. and Kartashov, Y. Impact of the stress factor on the price of widow's pensions. // In: Silvestrov, D., Martin-Lof, A. (eds) Modern Problems in Insurance Mathematics. 2014. P. 223-237.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Golomoziy, V. Exponential moments of hitting times for time-inhomogeneous atomic Markov chains. // 8th European Congress of Mathematics. Conference materials. 2021.

2. Golomoziy, V. Geometric drift condition for inhomogeneous Markov chains. // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications V. Conference materials. 2021.

3. Golomoziy, V. Quantitive estimate of an expectation of the simultanious renewal for time-inhomogeneous Markov chains. // International conference Modern Stochastics: Theory and Applications IV. Conference materials. 2018.

4. Golomoziy, V. Coupling of time-inhomogeneous Markov Chains. // Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv, Ukraine. Conference materials. 2015.

5. Golomoziy, V. Stability of time-inhomogeneous Markov chains satisfying minorization condition on the whole space // Modern problems of stochastic analysis (Uzbekistan). Conference materials. 2020.

6. Golomoziy, V. On expectation of the simultaneous renewal time for two time-inhomogeneous Markov chains // Actual problems of stochastic analysis (Uzbekistan). Conference materials. 2021.

7. Golomoziy, V. Stability estimate of time-inhomogeneous Markov chains under the uniformal minorization condition. // MSTA III. Conference materials. 2012.