Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КОЗЛОВА НАДІЯ ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 517.968

ДИСЕРТАЦІЯ

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________ Н.О. Козлова

Науковий керівник

Бойчук Олександр Андрійович
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню конструктивних методів побудови розв'язків нетерових крайових задач для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма, слабконелінійних інтегральних рівнянь типу Гамерштейна, слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією, а також лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням.

Використовуючи теорію псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, доведено нетеровість крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з невиродженим ядром у гільбертовому просторі $L_2[a, b]$. Спираючись на перехід від вихідної задачі до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь, яку можна записати у вигляді еквівалентного лінійного операторного рівняння в просторі ℓ_2, встановлено критерій існування розв'язків поставленої задачі. Досліджено критичний (резонансний) та некритичний (нерезонансний) випадки. Розглянуто, як частинний випадок, питання існування розв'язку нетерової крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма з симетричним ядром.

В дисертаційній роботі знайдено необхідні та достатні умови розв'язності слабкозбуреної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма, при умові, що породжуюча задача не є розв'язною при довільних неоднорідностях. Побудовано ітераційну процедуру відшукання розв'язків поставленої задачі. Використовуючи метод Вішика-Люстерника, побудовано загальний вигляд розв'язку

задачі у вигляді частини степеневого ряду з сингулярністю, який збігається при фіксованому, достатньо малому параметрі. Розглянуто критичний випадок першого порядку, який характеризується тим, що відповідь на питання про існування розв'язків вихідної крайової задачі отримується за допомогою аналізу першого наближення до шуканого розв'язку.

Досліджено питання про розгалуження розв'язків нетерової крайової задачі для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна у гільбертовому просторі $L_2[a, b]$. Спираючись на перехід від вихідної задачі до еквівалентного нелінійного операторного рівняння в просторі ℓ_2, побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено необхідні умови існування розв'язків поставленої задачі. Отримано достатні умови існування розв'язків через коефіцієнти вихідної задачі. Встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами у випадку фредгольмовості поставленої задачі. Запропоновано ітераційну схему побудови наближених розв'язків поставленої задачі, проведено оцінки області збіжності та оцінки наближених розв'язків за допомогою методу мажорант Ляпунова.

Розглянуто слабконелінійну нетерову крайову задачу, яка може бути як перевизначеною, так і недовизначеною, для системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Показано, що слабконелінійну імпульсну крайову задачу можна досліджувати, розглядаючи її як внутрішню крайову задачу. Отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків такої задачі у просторі n-вимірних вектор-функцій, які допускають розриви першого роду у скінченній кількості точок та які є абсолютно неперервними на кожному із проміжків поза цими точками. Запропоновано алгоритм відшукання наближених розв'язків поставленої задачі, а також встановлено, у фредгольмовому випадку, зв'язок між необхідною та достатньою умовами існування розв'язків.

Досліджено нетерову крайову задачу для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням. Розглянуто випадок, коли породжуюча крайова задача без керування є розв'язною не при всіх неоднорідностях. Встановлено необхідні та достатні умови, при яких вводячи лінійне керування в праву частину породжуючої крайової задачі, отримана крайова задача стає розв'язною. Побудовано явний вигляд таких керувань через коефіцієнти вихідної задачі. Отримано критерії існування розв'язків поставленої задачі у випадку сталого і змінного керувань.

Наведені в дисертаційній роботі теоретичні результати проілюстровано на конкретних прикладах.

Ключові слова: лінійне інтегральне рівняння типу Фредгольма, слабконелінійне інтегральне рівняння типу Гамерштейна, система інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією, псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор, рівняння для породжуючих констант, керування, метод Вішика-Люстерника, метод простих ітерацій.

ABSTRACT

Kozlova N.O. Fredholm boundary-value problems for integral and integrodifferential equations. – Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the specialty 01.01.02 – differential equations. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to research of constructive methods for the construction of solutions of the Fredholm boundary-value problems for linear Fredholm integral equations, for the weakly nonlinear Hammerstein integral equations, for the weakly nonlinear systems of integrodifferential equations with impulsive action and for linear integral Fredholm equations with control.

Using the theory of Moore-Penrose pseudoinverse operators, the Fredholm property of the boundary-value problem for a linear Fredholm integral equation with a nondegenerate kernel in Hilbert space $L_2[a, b]$ has been proven. Relying on the transition from the original problem to a counted-dimensional system of algebraic equations, which can be written in the form of an equivalent linear operator equation in the space ℓ_2, the criterion for the existence of solutions has been established. Critical (resonance)

and non-critical (non-resonance) cases are considered. As a partial case, a question of the existence of a solution of Fredholm boundary-value problem for Fredholm integral equation with symmetric kernel has been considered.

Under the assumption that the generating boundary-problem is unsolvable for arbitrary inhomogeneities, necessary and sufficient conditions for the solvability of a weakly perturbed boundary-value problem of Fredholm integral equation have been found. An iterative procedure for finding solutions of the weakly perturbed boundary-value problem of an integral equation has been constructed. Using the Vishik-Lyusternik method, a general form of a solution of the problem is constructed as part of a power series with singularity, which coincides with a fixed, sufficiently small parameter. The critical case of the first order has been considered. This case is characterized by the fact that the answer to the question of the existence of solutions of the original boundary-value problem is obtained by analyzing the first approximation to the desired solution.

The question of branching solutions of the Fredholm boundary-value problem for a weakly nonlinear Hammerstein integral equation in Hilbert space $L_2[a,b]$ has been investigated. Based on the transition from the original boundary-value problem to the equivalent nonlinear operator equation in the space ℓ_2, the equation for the generating constants has been constructed and the necessary conditions for the existence of a solution of the seeing problem have been established. Sufficient conditions for the existence of solutions have been obtained. A connection between the necessary and sufficient conditions has been established. The iterative process for constructing approximate solutions and the estimation of the range of convergence of estimate, which based on the method of finite Lyapunov majorizing equations, have been established.

The Fredholm weakly nonlinear boundary-value problem, which can be either a redefined or undefined, for a system of integrodifferential equations with impulsive action at fixed points of time has been considered. It has been shown that a weakly nonlinear impulsive boundary-value problem can be investigated by considering it as an interface boundary-value problem (interface BVP). Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of such problem in the space of n-dimensional vector-valued functions, that allow breaks of the first kind in a finite number of points and which are absolutely continuous on each of the intervals outside of these points, are obtained.

The convergent iterative procedure for constructing approximate solutions has been proposed and, in Fredholm case of index zero, a connection between these conditions has been established.

The boundary-value problem for a linear Fredholm integral equation with control has been investigated. The case, when the generating boundary-value problem without control is not for all inhomogeneities solvable, has been considered. With introducing control on the right-hand side of the generating problem, the obtained boundary-value problem becomes solvable. An explicit form of such controls has been constructed through the coefficients of the original problem. The criteria for the existence of solutions of the given problem in the case of constant and variable control have been obtained.

Keywords: linear Fredholm integral equation, the weakly nonlinear integral equation of Hammerstein type, the system of integrodifferential equations with impulsive action, Moore-Penrose pseudoinverse operator, the equation for generating constants, control, Vishik-Lyusternik method, a method of simple iteration.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях

1. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 1. – С. 58-66. (English translation: Kozlova N.O. Noetherian Boundary-Value Problems for Integral Equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No.3. – P. 266-275. DOI: 10.1007/s10958-017-3298-3)
2. Бойчук О.А. Слабкозбурені інтегральні рівняння / О.А. Бойчук, Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 2. – С. 151-160. (English translation: Boichuk O.A. Weakly Perturbed Integral

Equations / O.A. Boichuk, N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 223, No.3. – P. 199-209. DOI: 10.1007/s10958-017-3348-x)

3. Bondar I. Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations / I. Bondar, M. Gromyak, N. Kozlova // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 17, No.1. – P. 69-84. DOI: 10.18514/MMN.2016.1897
4. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Буковинський мат. журн. – 2016. – Т.4, № 1-2. – С. 82-86.
5. Козлова Н.О. Слабкозбурені лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь/ Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Вісник Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 65-70.

Тези наукових доповідей

1. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integro-differential equations / N. Kozlova, V. Feruk // Nonlinear analysis and application: 3rd international scientific conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik, April 01-03, 2015. Book of abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2015. – P. 32.
2. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference "Modelling and stability", May 27-29, 2015. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2015. – С. 55.
3. Козлова Н.О. Фредгольмові інтегральні рівняння з керуванням / Н.О. Козлова // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2015. – С. 150.
4. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integral equations / N. Kozlova, V. Feruk // 7th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" (MADEA-7), September 08-13, 2015. Abstracts. – Baku, Azerbaijan. – 2015. – P. 89.

5. Бойчук А.А. Метод Вишика-Люстерника для слабовозмущенных интегральных уравнений / А.А. Бойчук, Н.А. Козлова, В.А. Ферук // VII международная научная конференция “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры”, 8-9 октября 2015. Материалы конференции. – Актобе, Республика Казахстан. – 2015. – С. 25-29.
6. Козлова Н.О. Один подход к исследованию слабовозмущенных краевых задач для интегральных уравнений / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Международная научная конференция “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвященная 75-летию доктора физ.-мат. наук, профессора С.Т. Сафаровича, 29-30 октября 2015 г. Материалы конференции. – Душанбе, Республика Таджикистан. – 2015. – С. 111-112.
7. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р. Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ, Україна. – 2016. – С. 143-146.
8. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування”, присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, 19-21 травня 2016 р. Тези доповідей. – Ужгород, Україна. – 2016. – С. 79.
9. Козлова Н.О. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25-27 травня 2016 р. Тези доповідей. – Львів, Україна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kozlova.pdf
10. Kozlova N.O. Weakly perturbed linear boundary value problems for the Fredholm integral equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // International

Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, September 20-24, 2016. Book of abstracts. – Lviv, Ukraine. – 2016. – P. 85.

11. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (1936-1992), 28-30 вересня 2016. Матеріали конференції. – Чернівці, Україна. – 2016. – С. 57.
12. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння типу Гамерштейна / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фіз.-мат. наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д.І. Мартинюка (1942-1996), 19-21 травня 2017 року. Матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський, Україна. – 2017. – С. 56.
13. Козлова Н.О. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII Internation Conference "Modelling and stability", 24-26 May, 2017. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2017. – С. 66.
14. Козлова Н.О. Крайова задача для інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.А. Степанця (1942-2007), 28 травня - 3 червня 2017 р. Тези доповідей. – Слов'янськ, Україна. – 2017. – С. 62.
15. Kozlova N.O. Weakly nonlinear integral equations / N.O. Kozlova // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008), 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2017. – С. 70.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена знаходженню умов існування та побудові розв'язків нетерових крайових задач для лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь та нетерових крайових задач для слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Проблеми побудови конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для широкого класу систем функціонально-диференціальних рівнянь, які традиційно займають одне з центральних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь, ґрунтовно вивчалися у роботах М.В. Азбелєва, О.А. Бойчука, А.М. Самойленка, В.П. Журавльова, Б. Ван-дер-Поля, В. Вольтерра, А.М. Ляпунова, І.Г. Малкіна, М.О. Перестюка, М.Й. Ронто, Ю.О. Рябова. Дослідженню нелінійних та сингулярних рівнянь присвячено також роботи М.О. Красносельського, Г.М. Вайнікко, П.П. Забрейка, Т. Карлемана, С.Г. Міхліна, М.І. Шкіля, П.Ф. Самусенка. Інтерес до таких задач зумовлений, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у різних областях знань: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування; низки радіотехнічних, механічних та біологічних задач. Специфіка дослідження крайових задач для інтегральних рівнянь полягає в тому, що у більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який у відповідних просторах не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, які базуються на використанні принципу нерухомої точки. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких задач, у зв'язку з чим вони є маловивченими.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка згідно із загальним планом досліджень у рамках держбюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудови керувань для нелінійних еволюційних систем зі складною динамікою"(номер державної реєстрації №0111U006677), №16БФ038-01 "Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури"(номер державної реєстрації №0116U004752).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження умов існування та побудови розв'язків нетерових крайових задач для інтегральних рівнянь та систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Основними завданнями дослідження є:

• встановлення необхідних та достатніх умов існування розв'язків нетерових крайових задач для лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь; відшукання умов біфуркації та розгалуження розв'язків для таких задач;

• знаходження умов розв'язності слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією;

• встановлення критерію розв'язності крайових задач для лінійних інтегральних рівнянь з керуванням.

Об'єктом дослідження є інтегральні рівняння і системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією та крайові задачі для них.

Предметом дослідження є необхідні та достатні умови існування та конструктивні методи побудови розв'язків крайових задач для лінійних і слабконелінійних інтегральних рівнянь та слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат теорії псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, метод Вішика-Люстерника, розвинений для лінійних задач у роботах В.С. Королюка, А.Ф. Турбіна, А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, а також методи функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, такі:

1. встановлено критерії існування розв'язків нетерових крайових задач для лінійного інтегрального рівняння та лінійного слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими;

2. побудовано загальний вигляд розв'язку у вигляді частини степеневого ряду з сингулярнісю за параметром, який збігається при фіксованому, достатньо малому параметрі для лінійної слабкозбуреної крайової задачі, в припущенні, що породжуюча задача є нерозв'язною;
3. встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків нетерової крайової задачі для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна, побудовано рівняння для породжуючих констант, яке дає необхідну умову існування розв'язку, встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами, запропоновано ітераційні схеми побудови її наближених розв'язків;
4. досліджено нетерову крайову задачу для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу, знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків поставленої задачі, встановлено зв'язок між цими умовами;
5. досліджено крайову задачу для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням у випадку, коли породжуюча крайова задача без керування є нерозв'язною; встановлено умови, при яких вводячи керування в праву частину породжуючої задачі, отримана крайова задача стає розв'язною; знайдено явний вигляд керування.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання сприяють подальшому розвитку теорії крайових задач для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, що використовуються при моделюванні та дослідженні фізичних, економічних та біологічних процесів.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист одержані автором самостійно. Визначення загального плану дослідження належить науковому керівнику – О.А. Бойчуку. У спільних роботах співавторам належать обговорення та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювались на конференціях та наукових семінарах:

1. Міжнародна конференція "The nonlinear analysis and application 2015"(Київ, 1-3 квітня 2015 р.);
2. XVII Міжнародна конференція "Dynamical system modelling and stability investigation"(Київ, 27-29 травня 2015 р.);
3. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3-6 червня 2015 р.);
4. VII Міжнародна конференція "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"(MADEA-7) (Баку, Азербайджан, 8-13 вересня 2015 р.);
5. VII Міжнародна наукова конференція "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры"(Актобе, Республіка Казахстан, 8-9 жовтня 2015 р.);
6. Міжнародна наукова конференція "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел"(Душанбе, Республіка Таджикістан, 29-30 жовтня 2015 р.);
7. XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.);
8. Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"(Ужгород, 19-21 травня 2016 р.);
9. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016"(Львів, 25-27 травня 2016 р.);
10. Міжнародна конференція "International conference on Differential equations"(Львів, 20-24 вересня 2016 р.);
11. Міжнародна наукова конференція "Диференціально - функціональні рівняння та їх застосування"(Чернівці, 28-30 вересня 2016 р.);
12. Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"(Кам'янець-Подільський, 19-21 травня 2017 р.);

13. XVIII Міжнародна конференція "Dynamical system modeling and stability investigation"(Київ, 24-26 травня 2017 р.);
14. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування"(Слов'янськ, 28 травня - 3 червня 2017 р.);
15. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 7-10 червня 2017 р.);
16. Засідання наукового семінару лабораторії крайових задач Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора, члена-кореспондента НАН України О.А. Бойчука (Київ, 2017);
17. Засідання наукового семінару кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка НАН України А.М. Самойленка та доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка НАН України М.О. Перестюка (Київ, 2017).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 20 наукових публікацій. З них

- 5 статей [11, 40, 44, 48, 99] у фахових виданнях, серед яких 2 статті [11, 44], надруковані у журналі, переклад якого включений до наукометричної бази Scopus, 2 статті [40, 48] у наукових фахових виданнях України та 1 статтю [99] у фаховому іноземному журналі, який включено до наукометричної бази Scopus;
- 15 тез доповідей на наукових конференціях [17, 41–43, 45–47, 49–52, 106–109].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 116 найменувань, та додатку. Повний обсяг складає 170 сторінок друкованого тексту.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику – члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору О.А. Бойчуку за постановку задачі, постійну увагу до роботи й обговорення отриманих результатів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У ***вступі*** зроблено опис основних характеристик дисертаційного дослідження: обґрунтовано актуальність поставленої проблеми; визначено мету, завдання, об'єкт, предмет, методи дослідження; розкрито наукову новизну, теоретичне та практичне значення роботи; подано короткий аналіз сучасного стану проблеми; наведено дані про апробацію результатів та загальних опис отриманих результатів.

У ***першому розділі*** роботи наведено необхідні теоретичні відомості з лінійної алгебри, теорії псевдообернених операторів, теорії інтегральних рівнянь. Зроблено огляд сучасних наукових праць, тісно пов'язаних з тематикою дисертаційного дослідження.

У ***другому розділі*** дисертації досліджено питання існування розв'язку нетерових крайових задач для лінійного інтегрального рівняння та лінійного слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими. Використовуючи теорію псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, встановлено критерії існування розв'язку таких задач. Розглянуто критичний (резонансний) та некритичний (нерезонансний) випадки.

У ***підрозділі 2.1*** досліджено питання існування та встановлено загальний вигляд розв'язку лінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{1}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Тут $K(t,s)$ – ядро, сумовне з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, , S – обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $S = col\left(S_1, \ S_2, \ ..., \ S_p\right) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$, $S_i : L_2[a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha = col\left(\alpha_1, \ \alpha_2, \ ..., \ \alpha_p\right) \in \mathbb{R}^p$.

Для інтегрального рівняння (1) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 2.1.3 *Однорідне рівняння (1) ($f(t) = 0$) має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$*

$$x(t, c_r) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} c_r, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{3}$$

Неоднорідне рівняння (1) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується r лінійно-незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0 \tag{4}$$

та має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$ вигляду

$$x(t, c_r) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} c_r + \Phi(t) \Lambda^+ g, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{5}$$

Тут P_{Λ_r} ($P_{\Lambda_r^*}$) – матриця, яка складається із повної системи r лінійно-незалежних стовпчиків (рядків) матриці-ортопроектора P_Λ (P_{Λ^*}) на ядро (коядро) матриці Λ, Λ^+ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці Λ матриця,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1 - a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$f_i = \int\limits_a^b f(t) \varphi_i(t) dt, \quad a_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(t, s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) dt ds,$$

$$\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t), \ \ \varphi_2(t), \ \ \dots, \ \ \varphi_i(t), \ \ \dots \Big),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$.

Для крайової задачі (1), (2) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 2.1.6 *Однорідна крайова задача (1), (2) ($f(t) = 0, \alpha = 0$) має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$*

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}, \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються $r + d_1$ лінійно-незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0, \tag{6}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) = 0, \tag{7}$$

і має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a,b]$ вигляду

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t)(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g), \tag{8}$$

$$d_1 = p - \mathrm{rank} Q, \quad d_2 = r - \mathrm{rank} Q.$$

Тут матриця $P_{Q_{d_2}}$ ($P_{Q_{d_1}^*}$) складається із повної системи d_2 (d_1) лінійно-незалежних стовпчиків (рядків) матриці-ортопроектора P_Q (P_{Q^*}) на ядро (коядро) матриці Q, Q^+ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці Q матриця, $Q = S\Phi(\cdot)P_{\Lambda_r}$.

У ***підрозділі 2.2*** досліджено умови біфуркації та встановлено структуру розв'язків слабкозбуреного лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds. \tag{9}$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Припускається, що породжуюче рівняння (1), отримане з (9) при $\varepsilon = 0$, не є розв'язним.

Використовуючи метод Вішика-Люстерника та теорію псевдообернених операторів, отримано наступний результат.

Теорема 2.2.2 *Припустимо, що породжуюче рівняння (1) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконується умови*

$$P_{B_0^*} P_{\Lambda_r^*} = 0, \quad P_{B_0} = 0,$$

то інтегральне рівняння (9) буде мати єдиний розв'язок $x \in L_2[a,b]$ у вигляді ряду з сингулярністю в точці $\varepsilon = 0$:

$$x(t) = \Phi(t)\left(\frac{P_{\Lambda_r} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_{r_1}} c_k + \tilde{z}_k)\right),$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Тут $(r \times r)$-вимірна матриця B_0 має вигляд $B_0 := P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 P_{\Lambda_r}$, ${B_0}^+$ є псевдооберненою (за Муром–Пенроузом) до матриці B_0, $P_{B_0^*}$ – матриця-ортопроектор на коядро матриці B_0, $\tilde{z}_k$ та c_k визначаються з ітераційного процесу через коефіцієнти вихідної задачі,

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \; \tilde{a}_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad i,j = \overline{1,\infty}.$$

У ***підрозділі 2.3*** встановлено необхідні і достатні умови існування та загальний вигляд розв'язку слабкозбуреної крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння (9) з крайовою умовою

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon Jx(\cdot). \tag{10}$$

у припущенні, що породжуюча задача, тобто задача (1), (2), є нерозв'язною.

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, $x(t)$, $f(t)$, S, α, ε такі ж, як було визначено раніше; $J = col\Big(J_1, \;\; J_2, \;\; \dots, \;\; J_p\Big) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$ – обмежений лінійний векторний функціонал, $J_i : L_2[a,b] \to \mathbb{R}$.

Використовуючи метод Вішика-Люстерника та теорію псевдообернених операторів, отримано критерій розв'язності крайової задачі (9), (10).

Теорема 2.3.3 *Припустимо, що породжуюча крайова задача (1), (2) не є розв'язною. Тоді, якщо виконується умова*

$$P_{\hat{B}_0^*} = 0,$$

то крайова задача (9), (10) буде мати розв'язок $x \in L_2[a,b]$ *у вигляді ряду з сингулярністю в точці* $\varepsilon = 0$*:*

$$x(t) = \Phi(t)(\frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \hat{B}_0^+ b_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k)),$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Тут $W = S\Phi(\cdot)$, $W_1 = J\Phi(\cdot)$, $\hat{B}_0 = \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q_{d_1}^*} (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix}$, $P_{\hat{B}_0^*}$ – матриця-ортопроектор на коядро $((r + d_1) \times d_2)$-вимірної матриці $\hat{B}_0$, $\hat{B}_0^+$ – псевдообернена за Муром–Пенроузом до матриці $\hat{B}_0$ матриця.

У ***третьому розділі*** дисертаційної роботи досліджено нетерову крайову задачу для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна та нетерову крайову задачу для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків таких задач. Побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами. Запропоновано ітераційні схеми побудови їх наближених розв'язків.

У ***підрозділі 3.1*** отримано необхідну та достатню умови існування розв'язку слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s) Z(x(s,\varepsilon), s, \varepsilon) ds, \tag{11}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (1).

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, $x(t)$, $f(t)$ такі ж, як було визначено раніше, $Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ – нелінійна по першій компоненті функція така, що

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le \mu],\ Z(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b],$$

$$Z(x(t,\cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

де μ, ε_0 – достатньо малі константи, $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Теорема 3.1.2. (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійне рівняння (11) має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$*:* $x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$

перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r)$ (5) з векторною константою $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$. Тоді константа c_r^0 обов'язково повинна бути дійсним коренем рівняння для породжуючих констант

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 V(z(c_r), 0) = 0. \tag{12}$$

Тут $z(c_r)$, $V(z(c_r), 0)$ є границями $z(\varepsilon)$, $V(z(\varepsilon), \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$,

$$V(z(\varepsilon), \varepsilon) = col\Big(m_1(\varepsilon),\ \ m_2(\varepsilon),\ \ \ldots,\ \ m_i(\varepsilon),\ \ \ldots\Big),$$

$$V(\cdot, \varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| \leq q], \quad V(z(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

$$m_i(\varepsilon) = m_i(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_i(\varepsilon), \ldots, \varepsilon) = \int\limits_a^b Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\varphi_i(t)dt.$$

Теорема 3.1.4. (Достатня умова) *Нехай породжуюче для рівняння (11) рівняння (1), за виконання r лінійно-незалежних умов (4), має r-параметричну сім'ю розв'язків $x(t, c_r)$ (5). Тоді, для кожного дійсного значення векторної константи $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (12) та при виконанні умов*

$$P_{\bar{B}_0^*}P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 = 0, \quad P_{\bar{B}_0} = 0$$

рівняння (11) буде мати розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r)$. Цей розв'язок, при достатньо малих ε, можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$c_r^k(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1(A_1\bar{y}_k(\varepsilon) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)),$$

$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_r^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r}c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)),$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r}c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon)z_k(\varepsilon) = z(c_r^0) + y_k(\varepsilon),$$

$$x_k(t, \varepsilon) = \Phi(t)z_k(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Тут $A_1 = A_1(c_r^0) = \frac{\partial V(z,0)}{\partial z}\Big|_{z=z(c_r^0)}$, матриця $\bar{B}_0$ розмірності $(r \times r)$ має вигляд $\bar{B}_0 = P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r}$, $\bar{B}_0^+$ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до $\bar{B}_0$ матриця.

Теорема 3.1.4. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Для того, щоб слабконелінійне інтегральне рівняння (11) мало розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(t, 0) = x_0(t, c_r),$$

де $x_0(t, c_r)$ *– породжуючий розв'язок з векторною константою* $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, *необхідно, щоб константа* c_r^0 *була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (12) і достатньо, щоб ця константа* c_r^0 *була простим коренем рівняння для породжуючих констант (12).*

У ***підрозділі 3.2*** встановлено необхідну та достатню умови існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Гамерштейна (11) з крайовою умовою

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{13}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі (1), (2).

Тут $K(t, s)$, $K_1(t, s)$, $x(t)$, $f(t)$, S, α, μ, $Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ та ε_0 такі ж, як було визначено раніше; $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний обмежений p-вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку.

Теорема 3.2.2 (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійна крайова задача (11), (13) має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_{d_2})$ *(8) з векторною константою* $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$. *Тоді константа* $c_{d_2}^0$ *обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант*

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 V(z(c_{d_2}), 0) = 0, \tag{14}$$

$$P_{Q^*_{d_1}}(H(z(c_{d_2}),0) - W\Lambda^+\Lambda_1 V(z(c_{d_2}),0)) = 0. \qquad (15)$$

Тут $z(c_{d_2})$, $V(z(c_{d_2}),0)$, $H(z(c_{d_2}),0)$ є границями $z(\varepsilon)$, $V(z(\varepsilon),\varepsilon)$, $H(z(\varepsilon),\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, де

$$H(z(\varepsilon),\varepsilon) = col\left(h_1(\varepsilon),\;\; h_2(\varepsilon),\;\; \ldots,\;\; h_\nu(\varepsilon),\;\; \ldots,\;\; h_p(\varepsilon)\right),$$

$$H(\cdot,\varepsilon) \in D^1[\|z - z_0\| \le \mu], \quad H(z(\cdot),\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

$$h_\nu(\varepsilon) = h_\nu(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_i(\varepsilon), \ldots, \varepsilon) = J_\nu(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \nu = \overline{1,p}.$$

Теорема 3.2.4 (Достатня умова) *Нехай породжуюча для крайової задачі (11), (13) задача (1), (2), за виконання $r + d_1$ лінійно-незалежних умов (6), (7), має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t, c_{d_2})$ (8). Тоді, для кожного значення векторної константи $c_{d_2} = c^0_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (14), (15) та при виконанні умов*

$$P_{\check{B}^*_0} G = 0, \quad P_{\check{B}_0} = 0$$

задача (11), (13) буде мати розв'язок $x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c^0_{d_2})$. Цей розв'язок, при достаньо малих ε, можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$c^k_{d_2}(\varepsilon) = \check{B}^+_0 G \check{b}_k,$$

$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon(P_{\Lambda_r} Q^+(H(z_0(c^0_{d_2}),0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) +$$

$$+ R_2(y_k(\varepsilon),\varepsilon) - W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) +$$

$$+ R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))) + \Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) +$$

$$+ R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))),$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Тут $((r+d_1)\times d_2)$-вимірна матриця $\check{B}_0$ має вигляд

$$\check{B}_0 := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q_{d_1}^*}(l_1 - W\Lambda^+\Lambda_1 A_1)P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix},$$

$G := \begin{pmatrix} P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 & P_{Q_{d_1}^*} \end{pmatrix}$, $A_1 = A_1(c_{d_2}^0) = \left.\frac{\partial V(z,0)}{\partial z}\right|_{z=z(c_{d_2}^0)}$, $l_1 = H'(z_0)$, $P_{\check{B}_0^*}$ – матриця-ортопроектор на коядро матриці $\check{B}_0$, $\check{B}_0^+$ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці $\check{B}_0$ матриця.

Теорема 3.2.5. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Якщо $d_2 = r + d_1$, то для того, щоб слабконелінійна крайова задача (11), (13) мала розв'язок $x = x(t,\varepsilon) : x(t,0) = x_0(t, c_{d_2}^0)$, де $x_0(t, c_{d_2}^0)$ – породжуючий розв'язок з векторною константою $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, необхідно, щоб константа $c_{d_2}^0$ була дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (14), (15) і достатньо, щоб ця константа $c_{d_2}^0$ була простим коренем системи (14), (15).*

У **підрозділі 3.3** отримано необхідну та достатню умови існування розв'язку слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \tilde{\Phi}(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds \quad (16)$$

з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = M_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad (17)$$

$$t \neq \tau_i,\ t\in[a,b],\ \tau_i \in (a,b),\ i = 1,2,...,p$$

та крайовою умовою

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\ \ \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (18)$$

Умови (17), (18) еквівалентні умові

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k+q}, \quad (19)$$

де

$$\mathfrak{L} := \begin{bmatrix} \varphi \\ S \end{bmatrix}, \ \delta := \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \ J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) := \begin{bmatrix} J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \\ J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Припускаємо, що розв'язок

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \ x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0],$$

слабконелінійної імпульсної крайової задачі (16), (19) при $\varepsilon = 0$ перетворюється у розв'язок породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \tilde{\Phi}(t) \int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t), \tag{20}$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q}. \tag{21}$$

Розв'язок задачі (20), (21) будемо називати породжуючим розв'язком задачі (16)-(18).

Тут $A(t), B(t), \ \tilde{\Phi}(t)$ — $(m \times n)$, $(m \times n)$, $(n \times m)$ - вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\tilde{\Phi}(t)$ лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; E_i, M_i — $(k_i \times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор стовпчик констант; S — обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $D_2[a,b]$, $S = col(S_1, S_2, S_3, ..., S_q)$: $D_2[a,b] \to \mathbb{R}^q$; нелінійна вектор-функція $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ така ж, як було визначено в підрозділі 3.1; $J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійні обмежені, відповідно, p, q - вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовні по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Теорема 3.3.2 (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійна імпульсна крайова задача (16)–(18) має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \ x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r)$ *з векторною константою* $c_r = c_r^0$ $(r = m+n-\operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$. *Тоді константа* c_r^0 *обов'язково* *повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант*

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds d\tau + \right.$$
$$\left. + B(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) d\tau \right] ds = 0, \tag{22}$$

$$P_{Q^*_{d_2}} \left\{ J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - \mathfrak{L}\left(\int\limits_a^{\cdot} \int\limits_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds d\tau + \right.\right.$$
$$+ \Psi_0(\cdot) D^+ \int\limits_a^b \left[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds d\tau + \right. \tag{23}$$
$$\left.\left.\left. + B(t) \int\limits_a^b K(t,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds \right] dt \right) \right\} = 0,$$
$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = k + q - \operatorname{rank} Q.$$

Теорема 3.3.3 (Достатня умова) *Нехай породжуюча крайова задача (20), (21), при виконанні умов*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\delta - \mathfrak{L} F(\cdot)) = 0,$$

має r-параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t,c_r)$. Тоді для кожної дійсної векторної константи $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (22), (23) та при виконанні умови

$$\operatorname{rank} \tilde{B}_0 = d_1 + d_2, \quad d_1 + d_2 \le r, \tag{24}$$

слабконелінійна крайова задача (16)–(18) має хоча б один розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$ і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$c_k = \tilde{B}_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{e}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)e_2^k(s,\varepsilon)\Big]ds \\ -P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1\bar{y}_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L}F_k^3(\cdot,\varepsilon)\Big\} \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\mathfrak{L}F_k(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_k(t,\varepsilon)$$

та формулою $x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_k(t,\varepsilon),\ (k = 0,1,2,...)$.

Тут $((d_1+d_2)\times r)$-вимірна матриця $\tilde{B}_0$ визначається формулою

$$\tilde{B}_0 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s) + B(s)h_1(s)\Big]ds \\ P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) - \mathfrak{L}F_0^1(\cdot)\Big\} \end{bmatrix},$$

$\tilde{B}_0^+$ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці $\tilde{B}_0$ матриця.

Теорема 3.3.4 (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Для того, щоб слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (16)–(18) мала розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$ *необхідно, щоб константа* c_r^0 *була дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (22), (23) і достатньо, щоб виконувалася умова (24).*

Більше того, якщо $d_1+d_2 = r$*, умова (24) означає, що* $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ *є простим коренем системи рівнянь для породжуючих констант (22), (23).*

У ***четвертому розділі*** дисертаційної роботи розглянуто крайові задачі для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням.

У ***підрозділі 4.1*** отримано необхідні та достатні умови існування розв'язку крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма зі постійним керуванням

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int\limits_a^b K_1(t,s)x(s)ds \cdot u, \tag{25}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Jx(\cdot)u, \tag{26}$$

у припущенні, що породжуюча крайова задача, тобто задача (1), (2), є незавжди розв'язною.

Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f(t)$, функціонали S та J, вектор α – відомі і такі ж, як було визначено в підрозділах 2.1 та 2.3, а функцію $x \in L_2[a,b]$ та керування $u \in \mathbb{R}$ – потрібно визначити.

Теорема 4.1.2 *Нехай інтегральне рівняння (25) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Delta^*_{r_1}} P_{\Lambda^*_r} g = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g) = 0,$$

то один із розв'язків інтегрального рівняння (25) буде мати вигляд

$$x(t) = \Phi(t)\Lambda^+(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g),$$

а за умови

$$P_{\tilde{F}^*} \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g = 0$$

керування u визначатиметься представленням

$$u = -\tilde{F}^+ \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g.$$

Якщо виконуються додаткові умови

$$P_\Delta = 0, \quad P_{\Lambda_r} = 0, \quad P_{\tilde{F}} = 0,$$

то розв'язок $\{x(t), u\}$ *рівняння (25) буде єдиним.*

Тут $\Delta = P_{\Lambda^*_r} \Lambda_1$, $\tilde{F} = \Lambda^+(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g)$, $P_{\tilde{F}}$ ($P_{\tilde{F}^*}$) – матриця-ортопроектор на ядро (коядро) матриці $\tilde{F}$, $\tilde{F}^+$ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до матриці $\tilde{F}$ матриця.

Для крайової задачі (25), (26) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 4.1.4 *Нехай крайова задача без керування (1), (2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}} \varrho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1 \Theta^+ \varrho) = 0, \quad P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1)\Theta^+ \varrho) = 0,$$

то один із розв'язків крайової задачі (25), (26) буде мати вигляд

$$x(t) = \Phi(t)(\Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho)),$$

а за умови

$$P_{F^*}\Theta^+\varrho = 0$$

керування и визначатиметься формулою

$$u = F^+\Theta^+\varrho.$$

Якщо виконуються умови

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} = 0, \quad P_F = 0,$$

то розв'язок $\{x(t), u\}$ крайової задачі (25), (26) буде єдиним.

Тут $\Theta := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 \\ P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) \end{bmatrix}$, $\varrho := -\begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*}g \\ P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - W\Lambda^+g) \end{bmatrix}$, $F := \Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho)$, P_Θ – матриця-ортопроектор на ядро матриці Θ, $P_{\Theta_{r_1}^*}$ – матриця, яка складається із повної системи r_1 лінійно-незалежних рядків матриці P_{Θ^*}, що є ортопроектором на коядро матриці Θ, F^+ та Θ^+ – псевдообернені за Муром-Пенроузом до матриць F та Θ, відповідно, матриці.

У ***підрозділі 4.2*** знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма зі змінним керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)u(s)ds, \tag{27}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Ju(\cdot), \tag{28}$$

у припущенні, що породжуюча крайова задача, тобто задача (1), (2), є незавжди розв'язною.

Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f(t)$, функціонали S та J, вектор α – відомі і такі ж, як було визначено в підрозділах 2.1 та 2.3, а функцію $x \in L_2[a,b]$ та керування $u \in L_2[a,b]$ – потрібно визначити.

Наведемо спочатку критерій розв'язності інтегрального рівняння (27).

Теорема 4.2.2 *Нехай інтегральне рівняння без керування (27) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Delta^*_{r_1}} P_{\Lambda^*_r} g = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g) = 0,$$

то інтегральне рівняння з керуванням (27) буде мати хоча б один розв'язок $\{x(t), u(t)\}$. *За додаткових умов* $P_\Delta = 0$, $P_{\Lambda_r} = 0$ *розв'язок* $\{x(t), u(t)\}$ *рівняння (27) буде єдиним.*

Для крайової задачі (27), (28) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 4.2.4 *Нехай крайова задача без керування (1), (2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}} \varrho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1 \Theta^+ \varrho) = 0, \quad P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+ \varrho) = 0,$$

то крайова задача (27), (28) з керуванням буде мати хоча б один розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ *вигляду*

$$x(t) = \Phi(t)(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + \Lambda^+(g + \Lambda_1 \Theta^+ \varrho) +$$
$$+ P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+ \varrho)),$$
$$u(t) = \Phi(t)(P_\Theta c + \Theta^+ \varrho).$$

За додаткових умов

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} = 0,$$

розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ *крайової задачі (27), (28) буде єдиним.*

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Необхідні відомості з лінійної алгебри та теорії псевдообернених операторів

Дисертація присвячена встановленню умов існування розв'язків та розробці конструктивних методів аналізу нетерових крайових задач для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма, слабконелінійних інтегральних рівнянь типу Гамерштейна, слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією та лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням. Для отримання результатів роботи використано деякі загальновідомі факти з різних областей математики. У даному розділі наведемо необхідні відомості з лінійної алгебри, теорії псевдообернених операторів та теорії інтегральних рівнянь.

Алгоритми розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, у яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, є давно відомими. Якщо ж матриця системи вироджена або кількість рівнянь не співпадає з кількістю невідомих, то система може не мати розв'язків або мати неєдиний розв'язок. Для розв'язання таких систем можна використати готові алгоритми псевдообернення матриць за Муром–Пенроузом. Такий підхід запропоновано Г. Муром [111] та Р. Пенроузом [112] і розвинуто у роботах О.А. Бойчука, А.М. Самойленка [5, 10, 77, 95, 96].

Сформулюємо умови розв'язності систем лінійних алгебраїчних рівнянь та наведемо структуру множини розв'язків таких систем. Нехай маємо лінійну систему з прямокутною матрицею коефіцієнтів

$$Qa = b, \tag{1.1}$$

де Q — довільна $(m \times n)$-вимірна матриця зі сталими компонентами, $\mathrm{rank Q} := \mathrm{n_1} \leq \mathrm{min(m, n)}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ — шуканий вектор-стовпчик.

Розглянемо матрицю Q як лінійний оператор $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}^n = R(Q^*) \oplus N(Q), \quad \mathbb{R}^m = R(Q) \oplus N(Q^*),$$
$$N(Q) = \ker Q = \{a : a \in \mathbb{R}^n, Qa = 0\},$$
$$N(Q^*) = \ker Q^* = \mathrm{coker} Q = \{b : b \in \mathbb{R}^m, \quad bQ = 0\},$$
$$R(Q) = \mathrm{Im} Q, \quad R(Q^*) = \mathrm{Im} Q^*.$$

Означення 1.1.1. *[111, 112] $(n \times m)$-вимірна матриця Q^+ називається псевдооберненою до матриці Q за Муром–Пенроузом, якщо виконуються умови*

$$QQ^+Q = Q, \quad Q^+QQ^+ = Q^+, \quad (QQ^+)^* = QQ^+, \quad (Q^+Q)^* = Q^+Q. \tag{1.2}$$

Матрицю Q^+ можна знайти за наступним співвідношенням [88]:

$$Q^+ = \lim_{\omega \to +0} Q^*(QQ^* + \omega I_n)^{-1} = \lim_{\omega \to +0} (Q^*Q + \omega I_m)^{-1} Q^*, \tag{1.3}$$

де I_n, I_m — одиничні матриці відповідних розмірностей.

Позначимо через P_Q та P_{Q^*} $(n \times n)$ та $(m \times m)$-вимірні матриці-ортопроектори, що проектують простори $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^m$ на ядро $N(Q)$ та коядро $N(Q^*)$ матриці Q відповідно:

$$P_Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow N(Q), \quad N(Q) = P_Q \mathbb{R}^n;$$
$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \longrightarrow N(Q^*), \quad N(Q^*) = P_{Q^*} \mathbb{R}^m.$$

Матриці P_Q та P_{Q^*} знаходяться за відомими формулами [15, 86, 95]:

$$P_Q = I_n - Q^+Q, \quad P_{Q^*} = I_m - QQ^+. \tag{1.4}$$

Алгебраїчна система (1.1) буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли її права частина належить ортогональному доповненню підпростора $N(Q^*)$, тобто якщо виконується умова [95]

$$P_{Q^*} b = 0. \tag{1.5}$$

При цьому загальний розв'язок системи (1.1) буде мати вигляд

$$a = P_Q c + Q^+ b, \quad c \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Оскільки $\mathrm{rank}Q = n_1$, то $\mathrm{dim}N(Q) = n - \mathrm{rank}Q = n - n_1 := r$. Враховуючи, що $\mathrm{rank}Q = \mathrm{rank}Q^*$ [23], то для розмірності коядра $N(Q^*)$ маємо $\mathrm{dim}N(Q^*) = m - \mathrm{rank}Q = m - n_1 := d$. Тому $\mathrm{rank}P_Q = r$, а $\mathrm{rank}P_{Q^*} = d$. Отже, $(m \times m)$-вимірну матрицю-ортопроектор P_{Q^*} можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{Q_d^*}$, що складається з d лінійно-незалежних рядків матриці P_{Q^*}, тобто умова (1.5) складається з d лінійно-незалежних умов. Аналогічно, $(n \times n)$-вимірну матрицю-ортопроектор P_Q можна замінити $(n \times r)$-вимірною матрицею P_{Q_r}, що складається з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора P_Q.

Справедливим є наступне твердження [95].

Теорема 1.1.1. *Якщо* $\mathrm{rank}Q = n_1 \leq \min(m, n)$, *то лінійна алгебраїчна система (1.1) розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-стовпчик* $b \in \mathbb{R}^m$ *задовольняє* d *лінійно-незалежних умов*

$$P_{Q_d^*} b = 0, \quad d = m - n_1, \tag{1.7}$$

при цьому система (1.1) має r*-параметричну* $(r = n - n_1)$ *сім'ю лінійно-незалежних розв'язків виду*

$$a = P_{Q_r} c_r + Q^+ b, \quad c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{1.8}$$

Наслідок 1.1.1. Якщо $\mathrm{rank}Q = n_1 = n$, то система (1.1) розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-стовпчик $b \in \mathbb{R}^m$ задовольняє умову

$$P_{Q_d^*} b = 0, \quad d = m - n$$

і при цьому має єдиний розв'язок

$$a = Q^+ b.$$

Справді, якщо $r = 0$, то $P_{Q_r} = 0$.

Наслідок 1.1.2. Якщо $\mathrm{rankQ} = n_1 = m$, тоді умова розв'язності (1.7) завжди виконується та система (1.1) буде розв'язною при будь-яких $b \in \mathbb{R}^m$. Розв'язок системи у цьому випадку матиме вигляд

$$a = P_{Q_r} c_r + Q^+ b, \quad r = n - m.$$

Справді, оскільки $d = 0$, то $P_{Q_d^*} = 0$.

1.2. Відомі факти з теорії інтегральних рівнянь.

Дослідження багатьох складних явищ та об'єктів, що виникають у природничих дисциплінах, потребують побудови та вивчення відповідних математичних моделей, значне місце серед яких належить інтегральним рівнянням. Такі рівняння виникають у багатьох галузях, наприклад, електродинаміці, математичній фізиці, біології, економіці, тощо.

Теорія інтегральних рівнянь остаточно сформувалася на рубежі XIX-XX століть. Перші фундаментальні результати у цій теорії з'явились у дослідженнях І. Фредгольма [102, 103], Д. Гільберта, Е. Шмідта [115]. У роботах [102, 103] побудовано теорію лінійних інтегральних рівнянь (які пізніше було названо рівняннями Фредгольма другого роду), що є широким узагальненням теорії лінійних алгебраїчних систем. Це дало змогу вперше отримати розв'язок крайових задач Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа [74]. Одним з основних результатів згаданих вище досліджень стала альтернатива Фредгольма [73, 85].

Наступним кроком розвитку теорії інтегральних рівнянь стало перенесення її на більш широкий клас рівнянь – рівнянь з цілком неперервним оператором. Наведемо означення такого оператора.

Означення 1.2.1. *[37] Лінійний оператор $K : H \to H$ є цілком неперервним, якщо він кожну обмежену множину переводить в передкомпактну.*

Альтернатива Фредгольма для функціональних рівнянь з таким оператором була доведена Ф. Рісом, який показав, що інтегральний оператор Фредгольма

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{1.9}$$

за умови Гільберта-Шмідта $\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds dt < \infty$, є цілком непервним оператором, та побудував загальну теорію для таких рівнянь [76]. Але саме роботи

Гільберта з інтегральних рівнянь зробили абсолютно прозорою необхідність зазначеного узагальнення – від теорії інтегральних рівнянь до теорії операторів.

Наведемо альтернативу Фредгольма для функціональних рівнянь другого роду [53, с. 477], [76].

Нехай маємо рівняння

$$x = \lambda K x + f, \quad x \in H. \tag{1.10}$$

Покладемо $\Lambda = I - \lambda K$, де $K : H \to H$ – цілком неперервний оператор, $f \in H$, I – одиничний оператор в H. Тоді (1.10) перепишеться у вигляді

$$\Lambda x = f. \tag{1.11}$$

Введемо у розгляд відповідне до (1.11) однорідне операторне рівняння

$$\Lambda x = 0, \tag{1.12}$$

спряжене до (1.11) рівняння

$$\Lambda^* y = g, \tag{1.13}$$

та відповідне спряжене однорідне рівняння

$$\Lambda^* y = 0, \tag{1.14}$$

де $\Lambda^* = I - \lambda K^*$, K^* – оператор, спряжений до оператора K.

Справедливими є наступні твердження [53, с. 474].

Теорема 1.2.1 (Альтернатива Фредгольма)**.** *Або рівняння* (1.11) *має при даному* λ *один і лише один розв'язок для будь-якого* f*, або однорідне рівняння* (1.12) *має ненульовий розв'язок.*

Означення 1.2.2. *Якщо при деякому* λ *однорідне рівняння* $\lambda K x = x$ *має ненульові розв'язки, то* $\frac{1}{\lambda}$ *називається власним значенням оператора* K*,* λ *називається характеристичним значенням оператора* K*, а відповідні їм розв'язки називаються власними функціями цього оператора.*

Означення 1.2.3. *Число* λ *називається регулярним значенням для оператора* K*, що діє в просторі* H*, якщо оператор* $(K - \lambda I)^{-1}$ *визначений на всьому просторі* H *і є обмеженим.*

Означення 1.2.4. *Оператор* K *(1.9) називається симетричним, якщо ядро* $K(t, s)$ *є симетричним, тобто виконується рівність*

$$K(t, s) = K^*(t, s) = K(s, t). \tag{1.15}$$

Наведемо властивості власних функцій та власних значень симетричного оператора [85].

1. Власні значення симетричного оператора – дійсні, власні функції симетричного оператора – дійснозначні.

2. Власні функції симетричного оператора, що відповідають різним власним значенням є ортогональними.

3. Симетричний оператор має хоча б одне власне значення.

4. Кожний симетричний оператор або має нескінченне число власних значень, або є скінченновимірним.

Здобутки теорії лінійних інтегральних рівнянь стали поштовхом до дослідження нелінійних інтегральних рівнянь. Зокрема, у роботі Гамерштейна [105] докладно розглянуто інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_a^b K(t, s) f(s, x(s)) ds \tag{1.16}$$

в припущенні, що лінійний інтегральний оператор K (1.9) з симетричним ядром (1.15) має тільки додатні власні значення і для нього справедливою є альтернатива Фредгольма [85, с. 257].

Метод Гаммерштейна спирається на теорему Гільберта-Шмідта та полягає в приведенні інтегрального рівняння (1.16) до системи алгебраїчних або трансцендентних рівнянь за допомогою системи ортонормованих власних функцій оператора K.

Узагальнюючи нелінійне інтегральне рівняння (1.16), Урисоном було розглянуто рівняння

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, x(s))ds + f(t). \tag{1.17}$$

За допомогою методу послідовних наближень, ним було показано, що при $f(t) \geq 0$ і деяких простих умовах, що накладаються на ядро $K(t, s, x)$, існує інтервал значень параметра λ, $\alpha < \lambda < \beta$, коли при кожному λ з цього інтервалу рівняння (1.17) має єдиний розв'язок $x(t, \lambda)$, монотонно зростаючий з ростом λ [74]. При цьому

$$\lim_{\lambda \to \alpha} x(t, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \to \beta} x(t, \lambda) = 0. \tag{1.18}$$

Дослідженню нелінійних та сингулярних рівнянь присвячено роботи М.О. Красносельського, Г.М. Вайнікко, П.П. Забрейка [54], Т. Карлемана [100], С.Г. Міхліна [71], М.І. Шкіля, П.Ф. Самусенка [82, 114] та багатьох інших математиків. Важливим етапом в розвитку теорії інтегральних рівнянь було створення в 60-ті роки XX століття теорії псевдообернених операторів, яка об'єднала в собі теорію широких класів інтегральних та диференціальних операторів і сприяла вирішенню ряда важливих проблем теорії рівнянь в частинних похідних.

1.3. Огляд досліджень нетерових крайових задач для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

Математичні моделі на основі крайових задач виникають у радіотехніці, механіці, біології та інших областях природознавства. Саме тому крайові задачі для різних типів рівнянь є об'єктами досліджень у багатьох областях математики: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування, тощо. Завдяки широкому колу теоретичних та практичних застосувань теорія крайових задач є одним з актуальних розділів сучасної математики.

Розглянемо крайову задачу для операторного рівняння (1.11)

$$Ux = \begin{bmatrix} \Lambda \\ S \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{1.19}$$

де W – векторний лінійний функціонал, визначений в H, $\alpha \in H$.

Однією із прийнятих у літературі класифікацій лінійних крайових задач (1.19) є класифікація за розмірністю ядра та коядра оператора U, яка запропонована С.Г. Крейном [95]. Задачі типу (1.19) поділяються на

- нормально-розв'язні ($\dim\ker U = \infty$, $\dim\ker U^* = \infty$);
- n-нормальні ($\dim\ker U < \infty$, $\dim\ker U^* = \infty$);
- d-нормальні ($\dim\ker U = \infty$, $\dim\ker U^* < \infty$);
- нетерові ($\dim\ker U < \infty$, $\dim\ker U^* < \infty$), зокрема, якщо $\dim\ker U = \dim\ker U^*$, то задача (1.19) – фредгольмова.

Одне з центральних місць у якісній теорії широкого класу функціонально-диференціальних, інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь з імпульсним впливом традиційно займають проблеми побудови конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь. Специфіка такого роду крайових задач полягає в тому, що у більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який, у відповідних просторах не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, які базуються на використанні принципу нерухомої точки. Необоротність оператора лінійної частини є наслідком того, що число m крайових умов не співпадає з порядком n операторної системи. Такого типу задачі, за наведеною вище термінологією, є нетеровими (або із нетеровою лінійною частиною) і включають як недовизначені, так і перевизначені, як некритичні, так і критичні крайові задачі, які вперше були розглянуті в роботах Р. Конті [101] та О.А. Бойчука [5,95,96], де було побудовано оригінальні алгоритми та конструктивні схеми дослідження таких задач.

Більш дослідженими серед задач типу (1.19) є нетерові та фредгольмові крайові задачі, дослідженню яких присвячені роботи А.М. Самойленка [16, 79–81, 95, 113], М.О. Перестюка [19, 78], О.А. Бойчука [16, 91, 95, 96], М.Й. Ронто [80, 113], Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова [32], І.Т. Кігурадзе [38, 39], С.М. Чуйка [14, 18], А.Ю. Лучки [61–64], В.П. Журавльова [8, 33–36], В.А. Михайлеця [69, 70] та багатьох інших вчених.

Зважаючи на те, що література, пов'язана з дослідженням крайових задач є достатньо обширною, зупинимось лише на деяких працях з даної тематики. У роботах А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, В.П. Журавльова запропоновано методику побудови узагальнено-оберненого (псевдооберненого) до лінійного нетерового оператора в банаховому (гільбертовому) просторі. Використовуючи теорію псевдообернених операторів, авторами отримано критерії розв'язності та структуру розв'язків лінійних та слабконелінійних нетерових крайових задач для різних класів систем функціонально-диференціальних рівнянь.

Відома теорема С.М. Нікольського [72] про загальний вигляд фредгольмових операторів у функціональних просторах тісно пов'язана з конструкцією Е. Шмідта [21, с. 339], яка дозволяє знаходити узагальнено-обернений оператор до фредгольмового. Використовуючи теорему Ф.В. Аткінсона [3] про загальний вигляд нетерових операторів у банахових просторах, у роботах А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, В.П. Журавльова [10, 95, 96] запропоновано конструкцію для узагальненого обернення нетерових операторів. В.П. Журавльовим було доведено теореми про загальний вигляд узагальнено оборотних $n-$ та $d-$ нормальних операторів, які узагальнюють теорему Ф.В. Аткінсона [3] для нетерових операторів.

На основі узагальнення відомої леми Е. Шмідта [21] на випадок лінійних обмежених нормально розв'язних операторів у банахових просторах в роботі О.А. Бойчука, В.П. Журавльова та О.О. Покутного [9] запропоновано конструкцію узагальнено-оберненого оператора до лінійного обмеженого нормально розв'язного, ядро та образ якого доповнювальні в цих просторах. Ця конструкція дозволяє отримати критерій розв'язності та формулу для зображення загального розв'язку лінійних нормально розв'язних операторних рівнянь.

До розв'язання інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь застосовувались наближені методи, розробці яких присвячені роботи: чисельно-аналітичний метод – А.М. Самойленко, М.Й. Ронто [80, 113], різницевий метод – С.К. Годунов [28], В.Л. Макаров [24, 66, 67], проекційно-ітеративний метод – Ю.Д. Соколов [83], А.Ю. Лучка [61–64].

Відзначимо, що чисельні методи розв'язання крайових задач дають лише обчислювальну схему для знаходження наближеного розв'язку задачі, а доведення існування точного розв'язку задачі, як правило, залишається поза розгляду.

У роботі А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї [77] одержано критерій розв'язності та досліджено структуру множини розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для систем таких рівнянь. Розвиваючи ці дослідження, І.А. Бондар та О.А. Бойчуком досліджено питання існування та побудова розв'язків лінійних та слабконелінійних нетерових крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією [20, 98]. У роботах В.П. Журавльова [33, 36] отримано умови існування та представлення розв'язку лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.

При математичному моделюванні еволюції реальних процесів з короткочасовими збуреннями часто їх тривалістю можна знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями або, як їх часно називають, диференціальні системи з імпульсним впливом.

М.М. Крилов та М.М. Боголюбов показали, що при дослідженні систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом можна успішно застосовувати асимптотичні методи нелінійної механіки. Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом почалося у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [78], А. Халаная, Д. Векслера [87]. У подальшому, ідеї, закладені у цих роботах, отримали свій розвиток та узагальнення у багаточисленних публікаціях [19, 77, 91, 93, 95]. Стало зрозуміло, що теорію диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати і для дослідження розв'язності систем інтегро-диференціальних рівнянь [89, 90].

РОЗДІЛ 2
ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

Інтегро-диференціальні рівняння та їх системи є математичними моделями різноманітних фізичних процесів. Широта застосувань стала поштовхом до інтенсивного розвитку теорії таких рівнянь в останні півстоліття. Зокрема, у [77] встановлено умови існування розв'язку крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. У даному розділі, вперше за допомогою теорії псевдообернених операторів, запропоновано підхід до дослідження нетерових задач для інтегральних рівнянь, ядра яких не є виродженими. Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків слабкозбурених інтегральних рівнянь і крайових задач для них.

2.1. Крайові задачі для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма

Розглядається лінійна неоднорідна крайова задача для інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{2.1}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha. \tag{2.2}$$

Тут $K(t,s)$ – ядро, сумовне з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, S – обмежений лінійний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $S = col\Big(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p\Big) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$, $S_i : L_2[a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha = col\Big(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p\Big) \in \mathbb{R}^p$.

Знайдемо необхідну та достатню умови існування розв'язку як інтегрального рівняння (2.1), так і крайової задачі (2.1), (2.2) для такого рівняння.

Дослідимо спочатку інтегральне рівняння (2.1). Для цього зведемо його до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь, оскільки для неї вже розроблено підходи знаходження умов розв'язності.

Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо у розгляд наступні позначення

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt,\ f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,\ a_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds. \tag{2.3}$$

Застосовуючи позначення (2.3) до інтегрального рівняння (2.1), отримаємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i, \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty. \tag{2.5}$$

Для зручності подальших викладок, запишемо систему (2.4) у вигляді операторного рівняння у просторі ℓ_2

$$\Lambda z = g, \tag{2.6}$$

де

$$\begin{aligned} z &= col\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_i,\ \ \ldots\right) \in \ell_2, \\ g &= col\left(f_1,\ \ f_2,\ \ \ldots,\ \ f_i,\ \ \ldots\right) \in \ell_2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Згідно з [95, с. 69], для системи (2.6) є справедливим наступний результат.

Теорема 2.1.1. *Однорідна система (2.6) ($g = 0$) має розв'язок $z \in \ell_2$*

$$z = P_\Lambda c, \quad c \in \ell_2. \tag{2.9}$$

Неоднорідна система (2.6) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda^*} g = 0 \tag{2.10}$$

та має розв'язок $z \in \ell_2$

$$z = P_\Lambda c + \Lambda^+ g, \quad c \in \ell_2. \tag{2.11}$$

Тут P_Λ – матриця-ортопроектор на нуль-простір $N(\Lambda)$ оператора Λ, P_{Λ^*} – матриця-ортопроектор на нуль-простір $N(\Lambda^*)$ оператора Λ^*, Λ^+ – псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до Λ матриця. Наведені вище матриці обчислюються за формулами (1.3), (1.4) [95, с. 501].

Зазначимо, що оператор Λ, який фігурує у лівій частині операторного рівняння (2.6), має вигляд $\Lambda = I - K$, де $K : \ell_2 \to \ell_2$ – оператор

$$(Kw)(t) = \int_a^b K(t,s)w(s)ds, \tag{2.12}$$

який, залежно від властивостей ядра $K(t,s)$, може мати досить складну структуру. Однією із прийнятих у літературі класифікацій таких операторів Λ, як зазначалося в розділі 1, є класифікація за розмірністю їх ядер та ядер спряжених до них операторів $\Lambda^* : \ell_2 \to \ell_2$ [95, с. 22].

У нашому випадку, так як $K(t,s)$ є сумовним з квадратом ядром, оператор K є цілком неперервним і, як відомо, для оператора Λ є справедливою альтернатива Фредгольма [37, с. 481]. Отже, ядро та коядро оператора Λ є скінченновимірними та мають однакову розмірність ($\dim\ker\Lambda = \dim\ker\Lambda^* = r < \infty$) і оператор Λ є фредгольмовим (нульового індексу $\operatorname{ind}\Lambda = 0$). Тобто, зображення розв'язків (2.9) та (2.11) є r-параметричними сім'ями розв'язків однорідного та неоднорідного рівнянь (2.1) відповідно, а кількість лінійно-незалежних умов розв'язності (2.10) дорівнює r.

Таким чином, в цьому випадку, теорема 2.1.1 перепишеться у наступному вигляді.

Теорема 2.1.2. *Однорідна система (2.6)* ($g = 0$) *має r-параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$*

$$z(c_r) = P_{\Lambda_r} c_r, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{2.13}$$

Неоднорідна система (2.6) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно-незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0 \tag{2.14}$$

та має r-параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$ вигляду

$$z(c_r) = P_{\Lambda_r} c_r + \Lambda^+ g, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{2.15}$$

Тут P_{Λ_r} – матриця, яка складається із повної системи r лінійно-незалежних стовпчиків матриці-ортопроектора P_Λ, $P_{\Lambda_r^*}$ – матриця, яка складається із повної системи r лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Λ^*}.

Від розв'язку (2.15) алгебраїчної системи (2.6), за теоремою Ріса-Фішера [37, с. 171], перейдемо до розв'язку інтегрального рівняння (2.1). Справді, існує елемент $x \in L_2[a,b]$ такий, що x_i, $i = \overline{1,\infty}$, які визначаються із системи (2.4), є його коефіцієнтами Фур'є, тобто має місце представлення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{2.16}$$

де

$$\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t), \;\; \varphi_2(t), \;\; \dots, \;\; \varphi_i(t), \;\; \dots \Big), \tag{2.17}$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$.

У роботі [27, с. 266] показано, що елемент $x(t)$, який визначається співвідношенням (2.16), і є шуканим розв'язком вихідного рівняння (2.1).

Отже, використовуючи теорему 2.1.2 для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь, отримаємо наступний критерій розв'язності для вихідного інтегрального рівняння (2.1).

Теорема 2.1.3. *Однорідне рівняння (2.1) ($f(t) = 0$) має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$*

$$x(t, c_r) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} c_r, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{2.18}$$

Неоднорідне рівняння (2.1) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується r лінійно-незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0 \tag{2.19}$$

та має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$ вигляду

$$x(t, c_r) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} c_r + \Phi(t) \Lambda^+ g, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{2.20}$$

Наведені вище результати набувають більш конкретного вигляду, якщо накласти на ядро $K(t, s)$ інтегрального оператора (2.12) додаткові умови. Припустимо, що ядро $K(t, s)$, яке фігурує у формулі (2.12), є симетричним, тобто справедлива рівність (1.15).

Замість повної ортонормальної системи функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ можна взяти лінійно-незалежну систему власних функцій симетричного оператора (2.12), що визначаються із співвідношень

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \int_a^b K(t, s) \varphi_i(s) ds, \tag{2.21}$$

де λ_i – характеристичні числа оператора (2.12).

Власні функції симетричного оператора є ортогональними [85, с. 140], тому матриця Λ, в даному випадку, набуде діагонального вигляду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\lambda_2-1}{\lambda_2} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_i-1}{\lambda_i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Можливими є такі два випадки:

1) некритичний випадок (усі характеристичні числа $\lambda_i \neq 1$);

2) критичний випадок (існує таке i, при якому характеристичне число $\lambda_i = 1$).

Розглянемо спочатку некритичний випадок. Очевидно, що діагональна матриця Λ має обернену

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2-1} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_i}{\lambda_i-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \Lambda^+, \tag{2.23}$$

і згідно формул (1.4)

$$P_{\Lambda_r} = P_{\Lambda_r^*} = 0. \tag{2.24}$$

Врахувавши у зображенні (2.18) та умовах (2.19), рівність (2.24), переконуємося, що умови розв'язності неоднорідного рівняння (2.1) завжди виконуються, і однорідне рівняння (2.1) має єдиний розв'язок $x(t) = 0$.

Єдиний розв'язок неоднорідного рівняння (2.1), згідно із зображенням (2.20), позначеннями (2.7), (2.3), (2.17) та виразами (2.23), (2.24), буде мати наступний вигляд

$$z = \Lambda^+ g = col\left(\tfrac{\lambda_1 f_1}{\lambda_1-1},\ \tfrac{\lambda_2 f_2}{\lambda_2-1},\ \dots,\ \tfrac{\lambda_i f_i}{\lambda_i-1},\ \dots\right) =$$

$$= col\left(\tfrac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\int\limits_a^b f(t)\varphi_1(t)dt,\ \tfrac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\int\limits_a^b f(t)\varphi_2(t)dt,\ \dots,\ \tfrac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,\ \dots\right),$$

$$x(t) = \Phi(t)\Lambda^+ g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds =$$
$$= f(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds. \tag{2.25}$$

Отже, теорема 2.1.3 у випадку симетричного ядра матиме наступний вигляд.

Теорема 2.1.4. *Однорідне рівняння (2.1) ($f(t) = 0$) має єдиний розв'язок*

$$x(t) = 0. \tag{2.26}$$

Неоднорідне рівняння (2.1) завжди є розв'язним та має єдиний розв'язок $x \in L_2[a, b]$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds. \tag{2.27}$$

Тепер розглянемо критичний випадок. Нехай існує власне значення $\lambda_i = 1$ оператора (2.12) кратності r і $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_r(t)$ – лінійно-незалежні власні функції, що відповідають цьому власному значенню. Тоді, використовуючи формули (1.3), (1.4), отримаємо

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_{r+1}-1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$P_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}, \quad P_{\Lambda_r^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

і розв'язок однорідної системи (2.6) має вигляд

$$z = col\Big(c_1,\ \ c_2,\ \ \ldots,\ \ c_r,\ \ 0,\ \ \ldots\Big),\quad \forall c_i \in \mathbb{R},\quad i = \overline{1,r}.$$

При виконанні умов (2.14)

$$f_i = 0,\quad i = \overline{1,r},$$

розв'язок неоднорідної системи (2.6) матиме вигляд

$$z = col\left(c_1,\ \ c_2,\ \ \ldots,\ \ c_r,\ \ \tfrac{\lambda_{r+1} f_{r+1}}{\lambda_{r+1}-1},\ \ \tfrac{\lambda_{r+2} f_{r+2}}{\lambda_{r+2}-1},\ \ \ldots\right),\quad \forall c_i \in \mathbb{R},\quad i = \overline{1,r}. \tag{2.30}$$

Однорідне рівняння (2.1), згідно (2.18), (2.17) і (2.29), матиме розв'язок, який зображується у вигляді

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i \varphi_i(t),\quad \forall c_i \in \mathbb{R},\quad i = \overline{1,r}, \tag{2.31}$$

а умови (2.19), згідно (2.3), (2.7), (2.29), мають вигляд

$$\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt = 0,\quad i = \overline{1,r}. \tag{2.32}$$

Зображення (2.20) для розв'язку неоднорідного рівняння (2.1) із використанням формул (2.3), (2.7), (2.17), (2.28), (2.31) набирає вигляду

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i \varphi_i(t) + \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int\limits_a^b f(s)\varphi_i(s)ds,\quad \forall c_i \in \mathbb{R},\quad i = \overline{1,r}. \tag{2.33}$$

Отже, у критичному випадку теорему 2.1.3 можна переформулювати таким чином.

Теорема 2.1.5. *Однорідне рівняння (2.1) ($f(t) = 0$) має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a,b]$ вигляду (2.31). Неоднорідне рівняння (2.1) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно-незалежних умов (2.32) та має r-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a,b]$ вигляду (2.33).*

Зауважимо, що низку робіт присвячено дослідженню скінченно сингулярних операторів (finitely singular operator) [110, с. 14]. Відомо [110, с. 18], наприклад, що якщо оператори Λ та Λ^* є скінченно-сингулярними, то Λ буде нетеровим.

2.1.1. Критерій розв'язності лінійної неоднорідної крайової задачі. Повернемося тепер до розгляду питання існування та структури розв'язку крайової задачі (2.1), (2.2). Очевидно, що навіть, якщо інтегральне рівняння (2.1) має розв'язок, то він може не задовольняти крайову умову (2.2). Тобто нам потрібно знайти такі умови на коефіцієнти вихідної задачі, при яких це виконуватиметься. Згідно з теоремою 2.1.3, якщо виконується умова (2.19), розв'язок лінійного неоднорідного інтегрального рівняння (2.1) має вигляд (2.20). Для того, щоб цей розв'язок був розв'язком крайової задачі (2.1), (2.2), необхідно і достатньо, щоб він задовольняв умову (2.2), тобто, щоб існував такий вектор параметрів $c_r \in \mathbb{R}^r$, $r = \mathrm{dimker}\Lambda = \mathrm{dimker}\Lambda^* < \infty$, що фігурує у представленні (2.20), який задовольняє алгебраїчну систему

$$Qc_r = \alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g, \tag{2.34}$$

де $(p \times r)$-вимірна матриця Q має вигляд

$$Q = S\Phi(\cdot)P_{\Lambda_r}. \tag{2.35}$$

Згідно критерію розв'язності системи (2.34) [95, с. 69], така вектор константа $c_r \in \mathbb{R}^r$ існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) = 0, \quad d_1 = p - \mathrm{rank}Q,$$

та має вигляд

$$c_r = P_{Q_{d_2}}c_{d_2} + Q^+(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g), \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad d_2 = r - \mathrm{rank}Q. \tag{2.36}$$

Тут $(r \times d_2)$-вимірна матриця $P_{Q_{d_2}}$ складається із повної системи d_2 лінійно-незалежних стовпчиків матриці-ортопроектора P_Q, $(d_1 \times p)$-вимірна матриця $P_{Q^*_{d_1}}$ складається із повної системи d_1 лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*}, $(r \times p)$-вимірна матриця Q^+ є псевдоберненою (за Муром–Пенроузом) до матриці Q.

Підставляючи (2.36) в (2.20), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2)

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t)(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g), \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Отже, справедливим є наступний критерій розв'язності лінійної неоднорідної крайової задачі (2.1), (2.2).

Теорема 2.1.6. *Однорідна крайова задача (2.1), (2.2)* ($f(t) = 0, \alpha = 0$) *має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$*

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}, \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються $r + d_1$ лінійно-незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0, \tag{2.37}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) = 0, \tag{2.38}$$

і має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$ вигляду

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t)(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g), \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{2.39}$$

2.1.2. Крайова задача для рівняння з симетричним оператором. Розглянемо випадок, коли оператор K, який визначається зображенням (2.12), є симетричним. За цієї умови, можна отримати більш уточнені результати і теорема 2.1.6 набуде більш конкретного вигляду. Як і раніше, можливими є такі два випадки:

1) некритичний випадок (усі характеристичні числа $\lambda_i \neq 1$);

2) критичний випадок (існує таке i, при якому характеристичне число $\lambda_i = 1$).

У некритичному випадку (тобто, коли усі $\lambda_i \neq 1$) справедлива теорема 2.1.4, тобто лінійне однорідне інтегральне рівняння (2.1) ($f(t) = 0$) має лише нульовий розв'язок, а лінійне неоднорідне інтегральне рівняння (2.1) має єдиний розв'язок вигляду (2.27). Очевидно, що $x(t) = 0$ задовольняє однорідну умову (2.2)

($\alpha = 0$) і, отже, однорідна крайова задача (2.1), (2.2) ($f(t) = 0,\ \alpha = 0$) має єдиний розв'язок. Неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) буде розв'язною лише тоді, коли розв'язок неоднорідного інтегрального рівняння (2.1) задовольнятиме умову (2.2), тобто повинна виконуватись жорстка умова на неоднорідність α у крайовій умові

$$Sx(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int\limits_a^b f(s)\varphi_i(s)dsS\varphi_i(\cdot) = \alpha. \tag{2.40}$$

Врахувавши рівність (2.24), позначення (2.35), а також формули (1.3), (1.4), переконуємося, що

$$Q = 0, \quad P_{Q_{d_2}} = P_{Q^*_{d_1}} = I. \tag{2.41}$$

Використавши рівності (2.41), теорему 2.1.6 для лінійної неоднорідної крайової задачі (2.1), (2.2) можна сформулювати у такому вигляді.

Теорема 2.1.7. *Однорідна крайова задача (2.1), (2.2)* ($f(t) = 0, \alpha = 0$) *має єдиний розв'язок*

$$x(t) = 0. \tag{2.42}$$

Неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються p умов

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int\limits_a^b f(s)\varphi_i(s)dsS_\nu\varphi_i(\cdot) = \alpha_\nu, \quad \nu = \overline{1,p} \tag{2.43}$$

та має єдиний розв'язок $x \in L_2[a,b]$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i\varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int\limits_a^b f(s)\varphi_i(s)ds. \tag{2.44}$$

Розглянемо критичний випадок, тобто нехай існує власне значення оператора (2.12) $\lambda_i = 1$ кратності r. Тоді, згідно з теоремою 2.1.5, якщо виконується умова (2.32), розв'язок лінійного неоднорідного інтегрального рівняння (2.1) має вигляд

(2.33). Для того, щоб цей розв'язок був розв'язком крайової задачі (2.1), (2.2), необхідно і достатньо, щоб він задовольняв умову (2.2), тобто щоб вектор параметрів $c_r \in \mathbb{R}^r$, що фігурує у представленні (2.33), задовольняв алгебраїчну систему

$$Qc_r = \alpha - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)dsS\varphi_i(\cdot), \tag{2.45}$$

де $(p \times r)$-вимірна матриця Q має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} S_1\varphi_1(\cdot) & S_1\varphi_2(\cdot) & \dots & S_1\varphi_r(\cdot) \\ S_2\varphi_1(\cdot) & S_2\varphi_2(\cdot) & \dots & S_2\varphi_r(\cdot) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_p\varphi_1(\cdot) & S_p\varphi_2(\cdot) & \dots & S_p\varphi_r(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Використавши критерій розв'язності системи (2.45) [95, с. 69], теорема 2.1.6 набуде наступного вигляду.

Теорема 2.1.8. *Однорідна крайова задача (2.1), (2.2)* ($f(t) = 0, \alpha = 0$) *має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_2} c_j p_{q_{ij}} \varphi_i(t), \quad \forall c_j \in \mathbb{R}. \tag{2.46}$$

Неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно-незалежних умов (2.32) та d_1 лінійно-незалежних умов

$$\sum_{\nu=1}^{p} p_{q^*_{k\nu}} \left(\alpha_\nu - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)dsS_\nu\varphi_i(\cdot) \right) = 0, \quad k = \overline{1, d_1}, \tag{2.47}$$

і має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x \in L_2[a, b]$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_2} c_j p_{q_{ij}} \varphi_i(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{p} q^+_{j\nu} \left(\alpha_\nu - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)dsS_\nu\varphi_i(\cdot) \right) \varphi_j(t) +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_i \varphi_i(t)}{\lambda_i - 1} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds, \quad \forall c_j \in \mathbb{R}. \tag{2.48}$$

Тут $p_{q_{ij}}$, $p_{q^*_{k\nu}}$ та $q^+_{j\nu}$ – елементи матриць $P_{Q_{d_2}}$, $P_{Q^*_{d_1}}$ та Q^+ відповідно.

Зауваження 2.1.1. *Якщо ядро $K(t,s)$ інтегрального оператора (2.12) є виродженим, то отримані в цьому підрозділі результати збігаються із результатами роботи [77].*

2.2. Слабкозбурені лінійні інтегральні рівняння типу Фредгольма

У більшості публікацій, що стосуються дослідження питань існування та побудови розв'язків (точних чи наближених) нетерових крайових задач для лінійних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь або розглядається випадок виродженого ядра інтегрального оператора [96], [6], [15], [36], або робиться припущення про єдиність розв'язку розглядуваної задачі [62], [63].

У даному підрозділі, використовуючи апарат псевдообернених матриць, висвітлюється один з можливих підходів до відшукання умов біфуркації розв'язків слабкозбуреного інтегрального рівняння, ядра якого є невиродженими.

Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ слабкозбурене лінійне інтегральне рівняння

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon\int\limits_a^b K_1(t,s)x(s)ds. \tag{2.49}$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f\in L_2[a,b]$, $x\in L_2[a,b]$, $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Ставиться питання знаходження умов біфуркації розв'язків та їх структури слабкозбуреного інтегрального рівняння (2.49), за умови, що породжуюче рівняння

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t),$$

тобто рівняння (2.1), не має розв'язку.

Застосовуючи підхід, використаний в підрозділі 2.1 до рівняння (2.1), зведемо рівняння (2.49) до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь. Враховуючи (2.3) та ввівши додатково у розгляд інтеграли Гільберта

$$\tilde{a}_{ij} = \int_a^b \int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad i,j = \overline{1,\infty}, \tag{2.50}$$

отримаємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь зі збуреннями

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}x_j, \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{2.51}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty. \tag{2.52}$$

Запишемо систему (2.51) у вигляді операторного рівняння в просторі ℓ_2

$$\Lambda z = g + \varepsilon \Lambda_1 z, \tag{2.53}$$

де матриця Λ та вектор-стовпчики z, g визначаються формулами (2.7), (2.8):

$$z = col\Big(x_1, \;\; x_2, \;\; \ldots, \;\; x_i, \;\; \ldots\Big) \in \ell_2, \quad g = col\Big(f_1, \;\; f_2, \;\; \ldots, \;\; f_i, \;\; \ldots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

а матриця Λ_1 має вигляд

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1i} & \ldots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \ldots & \tilde{a}_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Породжуюче для операторного рівняння (2.53) рівняння має вигляд (2.6)

$$\Lambda z = g.$$

Як зазначалося раніше, оператор $\Lambda : \ell_2 \to \ell_2$ має вигляд $\Lambda = I - K$, де $I : \ell_2 \to \ell_2$ — одиничний, $K : \ell_2 \to \ell_2$ — цілком неперервний оператори. Отже, Λ – фредгольмовий оператор (нетеровий оператор нульового індексу) [65, с. 188], [96]. Таким чином, для рівняння (2.6) справедлива теорема 2.1.2.

Породжуюче рівняння (2.2) не має розв'язку, тобто умова (2.14) не виконується. Виникає питання: чи можна за допомогою лінійного збурення Λ_1 зробити рівняння (2.53), а отже, і рівняння (2.49) розв'язними?

Як відомо [57, с. 60], малі збурення зберігають фредгольмовість оператора, тобто оператор $(\Lambda - \varepsilon\Lambda_1)$ є фредгольмовим, що дозволяє використати при дослідженні рівняння (2.53) класичні методики.

Використовуючи метод Вішика-Люстерника та теорію псевдообернених операторів, знайдемо умови біфуркації розв'язків та їх структуру слабкозбуреного неоднорідного рівняння (2.49), при умові, що породжуюче рівняння (2.2), а, отже, і операторне рівняння (2.2), не мають розв'язків.

2.2.1. Загальний вигляд розв'язку слабкозбуреного інтегрального рівняння. Застосуємо метод Вішика-Люстерника [22] для відшукання умови виникнення розв'язку рівняння (2.53) у вигляді частини ряду за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε. У розглядуваному випадку розв'язок рівняння (2.53) будемо шукати у вигляді ряду

$$z = z(\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k. \tag{2.55}$$

Підставимо ряд (2.55) у рівняння (2.53) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} для знаходження z_{-1} отримаємо однорідне рівняння

$$\Lambda z_{-1} = 0. \tag{2.56}$$

Згідно з теоремою 2.1.2, однорідне рівняння (2.56) завжди має розв'язок

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} c_{-1}, \quad \forall c_{-1} \in \mathbb{R}^r, \tag{2.57}$$

де вектор-стовпчик c_{-1} буде визначено з умови розв'язності рівняння відносно z_0.

При ε^0 для визначення z_0 одержимо неоднорідне рівняння

$$\Lambda z_0 = g + \Lambda_1 z_{-1}. \tag{2.58}$$

За теоремою 2.1.2 умова розв'язності рівняння (2.58) має вигляд

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 z_{-1}) = 0. \tag{2.59}$$

Підставимо вираз для z_{-1} (2.57) у вказану умову розв'язності (2.59). Звідси отримаємо алгебраїчну систему відносно $c_{-1} \in \mathbb{R}^r$

$$B_0 c_{-1} = -P_{\Lambda_r^*} g, \tag{2.60}$$

де матриця B_0 розмірності $(r \times r)$ має вигляд

$$B_0 := P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 P_{\Lambda_r}. \tag{2.61}$$

Для того, щоб система (2.60) була розв'язною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0^*} P_{\Lambda_r^*} g = 0. \tag{2.62}$$

Якщо виконується умова

$$P_{B_0^*} P_{\Lambda_r^*} = 0, \tag{2.63}$$

то умова (2.62) буде виконуватись і система (2.60) буде розв'язною відносно c_{-1}:

$$c_{-1} = P_{B_0} \hat{c}_{-1} + \tilde{c}_{-1}, \quad \tilde{c}_{-1} := -{B_0}^{+} P_{\Lambda_r^*} g. \tag{2.64}$$

Зазначимо, що за припущення

$$P_{B_0} = 0, \tag{2.65}$$

система (2.60) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$c_{-1} = \tilde{c}_{-1} = -B_0{}^{+} P_{\Lambda_r^*} g. \tag{2.66}$$

Звідси випливає, згідно (2.65), що коефіцієнт z_{-1} у розкладі ряду (2.55) визначається наступним чином:

$$z_{-1} = -P_{\Lambda_r} B_0{}^{+} P_{\Lambda_r^*} g. \tag{2.67}$$

Підставивши у (2.58) вираз (2.67), отримаємо

$$\Lambda z_0 = g - \Lambda_1 P_{\Lambda_r} B_0{}^{+} P_{\Lambda_r^*} g. \tag{2.68}$$

Рівняння (2.68), при виконанні умови (2.63), має розв'язок

$$z_0 = P_{\Lambda_r} c_0 + \tilde{z}_0, \tag{2.69}$$

де c_0 — вектор констант, який буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності рівняння для z_1, $\tilde{z}_0$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.68):

$$\tilde{z}_0 = \Lambda^{+}(g - \Lambda_1 P_{\Lambda_r} B_0{}^{+} P_{\Lambda_r^*} g). \tag{2.70}$$

При ε^1 для визначення z_1 одержимо лінійне неоднорідне рівняння

$$\Lambda z_1 = \Lambda_1 z_0. \tag{2.71}$$

Згідно з теоремою 2.1.2, рівняння (2.71) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова розв'язності

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_0 = 0. \tag{2.72}$$

Або ж, враховуючи вирази (2.72) та (2.69), отримаємо рівняння відносно елемента c_0

$$B_0 c_0 = -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0. \tag{2.73}$$

Система (2.73), за виконання умови (2.63), має розв'язок. За умови (2.65) система (2.73) має єдиний розв'язок у вигляді

$$c_0 = -B_0{}^{+} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0. \tag{2.74}$$

Підставивши (2.74) у (2.69), отримаємо розв'язок рівняння (2.68)

$$z_0 = \tilde{z}_0 - P_{\Lambda_r} B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0. \tag{2.75}$$

Якщо умова (2.72) справджується, то рівняння (2.71) має сім'ю розв'язків

$$z_1 = P_{\Lambda_r} c_1 + \tilde{z}_1, \tag{2.76}$$

де $\tilde{z}_1$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.71) має вигляд

$$\tilde{z}_1 = \Lambda^+ \Lambda_1 z_0, \tag{2.77}$$

а довільний елемент c_1 буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності рівняння для z_2.

Використовуючи метод математичної індукції, для знаходження коефіцієнтів z_k ряду (2.55) на кожному наступному кроці отримуємо рівняння

$$\Lambda z_k = \Lambda_1 z_{k-1}. \tag{2.78}$$

При тій же умові (2.63) рівняння (2.78) має розв'язок

$$z_k = P_{\Lambda_r} c_k + \tilde{z}_k, \quad \forall k \geq 1, \tag{2.79}$$

де частинний розв'язок $\tilde{z}_k$ неоднорідного рівняння (2.78) має вигляд

$$\tilde{z}_k = \Lambda^+ \Lambda_1 z_{k-1}. \tag{2.80}$$

Елемент c_k, при виконанні умови (2.65), однозначно визначається формулою

$$c_k = -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_k. \tag{2.81}$$

Підставивши вирази для $z_k,\ k = \overline{-1, \infty}$ в ряд (2.55), отримаємо

$$z = \frac{P_{\Lambda_r} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} c_k + \tilde{z}_k), \tag{2.82}$$

де

$$c_k = \begin{cases} -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} g, & \text{якщо } k = -1; \\ -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_k, & \text{якщо } k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \tag{2.83}$$

Аналогічно [96] ряд (2.82) буде збіжним при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 2.2.1. *Нехай породжуюче для рівняння (2.53) рівняння (2.6) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови (2.63), (2.65), то рівняння (2.53) буде мати єдиний розв'язок у вигляді збіжного при достатньо малих фіксованих* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ряду (2.82).*

Використовуючи отримані результати для слабкозбуреного рівняння (2.53), ми можемо тепер зробити висновок про існування розв'язку вихідного слабкозбуреного інтегрального рівняння (2.49). Для цього використаємо перехід, який був описаний у підрозділі 2.1 для інтегрального рівняння (2.1). Згідно нього, аналогічно роботі [27, с. 266], можна зробити висновок про те, що множина елементів

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z$$

є шуканою сім'єю розв'язків вихідного рівняння (2.49).

Отже, тепер ми можемо сформулювати критерій розв'язності для вихідного слабкозбуреного інтегрального рівняння (2.49). Застосуємо результати теореми 2.2.1 для рівняння (2.53) до інтегрального рівняння (2.49).

Теорема 2.2.2. *Припустимо, що породжуюче рівняння (2.2) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконується умови*

$$P_{B_0^*} P_{\Lambda_r^*} = 0, \quad P_{B_0} = 0,$$

то інтегральне рівняння (2.49) буде мати єдиний розв'язок $x \in L_2[a, b]$ *у вигляді ряду з сингулярністю в точці* $\varepsilon = 0$*:*

$$x(t) = \Phi(t) \left(\frac{P_{\Lambda_r} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} c_k + \tilde{z}_k) \right), \tag{2.84}$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Зауваження 2.2.1 Умова (2.63) є достатньою умовою біфуркації розв'язку рівняння (2.53). Якщо умова (2.63) не виконується, то розв'язок рівняння (2.53) у вигляді ряду (2.55) не існує, але може існувати розв'язок у вигляді частини ряду типу (2.55) за степенями малого параметра ε починаючи із -2, -3, ... [95, с. 213]. Зокрема, розв'язок рівняння (2.53), при виконанні додаткової умови можна шукати у вигляді ряду

$$z = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k z_k.$$

2.2.2. Приклад. Проілюструємо наведені вище теоретичні викладки на конкретному прикладі. Розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_0^{\pi} K_1(t,s)x(s)ds. \tag{2.85}$$

Породжуюче для нього рівняння має вигляд

$$x(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds = f(t). \tag{2.86}$$

У нашому випадку ядро $K(t,s)$ є виродженим та симетричним. Отже, за систему $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ ми можемо взяти систему власних функцій оператора

$$(Kw)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t+s)w(s)ds. \tag{2.87}$$

Неважко переконатись, що ортонормовані функції $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t$ і $\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t$ є власними функціями оператора (2.87), які відповідають характеристичним числам $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ відповідно.

Зведемо рівняння (2.85) та (2.86) до рівнянь виду (2.53) та (2.6). Використавши позначення (2.3), (2.50), отримаємо

$$\Lambda z = g + \varepsilon \Lambda_1 z, \tag{2.88}$$

$$\Lambda z = g, \tag{2.89}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.90}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi x(t) \cos t dt, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi x(t) \sin t dt, \tag{2.91}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \cos t dt, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt, \tag{2.92}$$

$$\begin{gathered} \tilde{a}_{11} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \cos t \cos s dt ds, \; \tilde{a}_{12} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \cos t \sin s dt ds, \\ \tilde{a}_{21} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \sin t \cos s dt ds, \; \tilde{a}_{22} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \sin t \sin s dt ds. \end{gathered} \tag{2.93}$$

Використовуючи формули (1.3), (1.4), знаходимо

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.94}$$

В нашому випадку одиниця є власним значенням оператора $(Kw)(t)$ кратності 1. Тобто, ми маємо критичний випадок. І, згідно з теоремою 2.1.2, справедливим є наступний результат.

Теорема 2.2.3. *Однорідне рівняння (2.89)* $(g = 0)$ *має розв'язок*

$$z = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{2.95}$$

Неоднорідне рівняння (2.89) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int\limits_0^\pi f(t) \cos t dt = 0 \tag{2.96}$$

та має розв'язок

$$z = \begin{pmatrix} c \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{2.97}$$

При різних неоднорідностях $f(t)$ умова розв'язності (2.96) може виконуватись або не виконуватись. Наприклад, що при $f(t) = \sin t$ вона виконується, і розв'язок рівняння (2.89) матиме вигляд $z = col(c, \sqrt{\frac{\pi}{8}})$. Однак, очевидно, умова (2.96) виконується не для усіх функцій $f(t)$. Зокрема, при $f(t) = \cos t$ ця умова не виконується, тобто неоднорідне рівняння (2.89) не має розв'язку. Спробуємо підібрати ядро $K_1(t, s)$ таким чином, щоб рівняння (2.88) мало розв'язок у вигляді ряду (2.55). Для цього скористаємося теоремою 2.1.2, тобто перевіримо виконання умови (2.63). Згідно (2.90), (2.94), маємо

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{11}. \tag{2.98}$$

Якщо

$$\tilde{a}_{11} \neq 0, \tag{2.99}$$

то, використовуючи формули (1.4), отримуємо

$$P_{B_0} = P_{B_0^*} = 0.$$

Отже, за припущення (2.99), виконуються умови (2.63) і (2.65), і ми можемо побудувати єдиний розв'язок рівняння (2.88) у вигляді ряду (2.55). Умова (2.99) виконується, наприклад, якщо $K_1(t, s) = \cos(t - s)$. Справді, скориставшись формулами (2.61), (2.93), (2.94), маємо

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Проілюструємо алгоритм (2.56)-(2.83) побудови ряду (2.55). Згідно (2.57), (2.64), маємо

$$c_{-1} = -{B_0}^{+} P_{\Lambda_r^*} g = -\frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} c_{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес за формулами (2.79)-(2.81), переконуємося, що

$$z_k = 0, \quad \forall k \geq 0,$$

і ряд (2.55) обривається на першому доданку, тобто розв'язок рівняння (2.88) має вигляд

$$z = z(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

а розв'язок рівняння (2.85), згідно з теоремою 2.2.2, є таким:

$$x(t) = -\frac{2}{\pi\varepsilon}\cos t.$$

Зауваження 2.2.2. Якщо у рівнянні (2.85) замість ядра $K(t,s) = \frac{2}{\pi}\cos(t+s)$ розглядати довільне симетричне ядро, у якого одиниця є власним значенням кратності r, то умова (2.99) набуде вигляду

$$\det B_0 \neq 0, \quad B_0 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{r1} & \tilde{a}_{r2} & \dots & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix}. \tag{2.100}$$

2.3. Біфуркація розв'язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь типу Фредгольма

Використовуючи результати, отримані в підрозділах 2.1 та 2.2, висвітлимо один із можливих підходів до відшукання умов біфуркації розв'язків слабкозбуреної лінійної крайової задачі для інтегрального рівняння, ядро якого є невиродженим.

Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ слабкозбурену лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K_1(t,s)x(s)ds, \tag{2.101}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon Jx(\cdot). \tag{2.102}$$

Тут $K(t, s)$, $K_1(t, s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a, b] \times [a, b]$, f, $x \in L_2[a, b]$, $S = col\Big(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p\Big) : L_2[a, b] \to \mathbb{R}^p$ і $J = col\Big(J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_p\Big) : L_2[a, b] \to \mathbb{R}^p$ – обмежені лінійні векторні функціонали, S_i, $J_i : L_2[a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha = col\Big(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p\Big) \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Ставиться питання знаходження умов біфуркації розв'язків та їх структури слабкозбуреної крайової задачі (2.101), (2.102), при умові, що породжуюча задача

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds = f(t),$$

$$Sx(\cdot) = \alpha,$$

тобто задача (2.1), (2.2), не має розв'язку.

Застосовуючи описаний у підрозділі 2.1 для крайової задачі (2.1), (2.2) підхід, зведемо задачу (2.101), (2.102) до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь зі збуренням. Використовуючи позначення (2.3) та (2.50):

$$x_i = \int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(t, s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_1(t, s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

отримаємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь зі збуренням

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, \infty}, \tag{2.103}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_\nu \varphi_j(\cdot)x_j = \alpha_\nu + \sum_{j=1}^{\infty} J_\nu \varphi_j(\cdot)x_j, \quad \nu = \overline{1, p}, \tag{2.104}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty.$$

Для зручності подальших викладок запишемо задачу (2.103), (2.104) у вигляді операторного рівняння у просторі ℓ_2 [96]

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ W_1 \end{bmatrix} z = q + \varepsilon U_1 z, \tag{2.105}$$

де матриці Λ, Λ_1, вектор-стовпчики z та g визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54):

$$z = col\Big(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_i,\ \ \ldots\Big) \in \ell_2, \quad g = col\Big(f_1,\ \ f_2,\ \ \ldots,\ \ f_i,\ \ \ldots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde a_{11} & \tilde a_{12} & \ldots & \tilde a_{1i} & \ldots \\ \tilde a_{21} & \tilde a_{22} & \ldots & \tilde a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde a_{i1} & \tilde a_{i2} & \ldots & \tilde a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

а матриці W та W_1 визначаються формулами:

$$W := S\Phi(\cdot), \quad W_1 := J\Phi(\cdot), \tag{2.106}$$

$$\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t),\ \ \varphi_2(t),\ \ \ldots,\ \ \varphi_i(t),\ \ \ldots\Big).$$

Використовуючи наведений вище підхід до крайової задачі (2.1), (2.2) прийдемо до рівняння

$$Uz = q, \tag{2.107}$$

яке є породжуючим для (2.105).

Як вже раніше було зазначено, оператор $\Lambda : \ell_2 \to \ell_2$, який фігурує у лівій частині операторних рівнянь (2.105) і (2.107) має вигляд $\Lambda = I - K$, де $I : \ell_2 \to \ell_2$ — одиничний, $K : \ell_2 \to \ell_2$ — цілком неперервний оператори. Як відомо, для оператора Λ є вірною альтернатива Фредгольма [65, с. 188] , тобто він є фредгольмовим оператором, а оператор $U : \ell_2 \to \ell_2 \times \mathbb{R}^p$ є нетеровим ($\operatorname{ind} U \neq 0$). Таким чином, для рівняння (2.107) справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3.1. *Однорідне рівняння (2.107)* ($q = 0$) *має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $z \in \ell_2$

$$z(c_{d_2}) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}, \quad c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{2.108}$$

Неоднорідне рівняння (2.107) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуютьcя $r + d_1$ *лінійно-незалежних умов*

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0, \tag{2.109}$$

$$P_{Q_{d_1}^*} (\alpha - W\Lambda^+ g) = 0, \tag{2.110}$$

і має d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $z \in \ell_2$ *вигляду*

$$z(c_{d_2}) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+ (\alpha - W\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g, \quad c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{2.111}$$

Знайдемо умови біфуркації розв'язків та їх структуру слабкозбуреної неоднорідної крайової задачі (2.101), (2.102), при умові, що породжуюча крайова задача (2.1), (2.2) не має розв'язку. Для цього, спочатку дослідимо умови виникнення розв'язку рівняння (2.105). Оскільки, за припущенням, крайова задача (2.1), (2.2) нерозв'язна, то і не розв'язне рівняння (2.107). Виникає питання: чи можна за допомогою лінійного збурення U_1 зробити рівняння (2.105) розв'язним?

Як відомо [57, с. 60], малі збурення зберігають нетеровість цілком неперервного оператора, тобто оператор $(U - \varepsilon U_1)$ є нетеровим, що дозволяє використати при дослідженні рівняння (2.105) класичні методики.

2.3.1. Метод Вішика-Люстерника для побудови розв'язків слабкозбуреної крайової задачі.

Застосуємо метод Вішика-Люстерника [4], який дозволяє знайти ефективні умови виникнення розв'язку рівняння (2.105) у вигляді частини ряду за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε. У нашому випадку розв'язок рівняння (2.105) будемо шукати у вигляді наступного ряду

$$z = z(\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k. \tag{2.112}$$

Підставимо ряд (2.112) у рівняння (2.105) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} для знаходження елементу z_{-1} отримаємо однорідне рівняння

$$Uz_{-1} = 0. \tag{2.113}$$

Згідно теореми 2.3.1 однорідне рівняння (2.113) завжди має розв'язок

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}, \quad c_{-1} \in \mathbb{R}^{d_2}, \tag{2.114}$$

де вектор-стовпчик c_{-1} буде визначений з умови розв'язності рівняння відносно z_0.

При ε^0 для знаходження z_0 отримаємо неоднорідне рівняння

$$Uz_0 = q + U_1 z_{-1}. \tag{2.115}$$

Рівняння (2.115), за теоремою 2.3.1, є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 z_{-1}) = 0, \tag{2.116}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha + W_1 z_{-1} - W\Lambda^+(g + \Lambda_1 z_{-1})) = 0. \tag{2.117}$$

Підставимо вираз для елементу z_{-1} (2.114) у вказані умови розв'язності (2.116), (2.117). Отримаємо алгебраїчну систему відносно c_{-1}

$$\hat{B}_0 c_{-1} = b_{-1}, \tag{2.118}$$

де матриця $\hat{B}_0$ розмірності $((r + d_1) \times d_2)$ та неоднорідність b_{-1} мають вигляд

$$\hat{B}_0 := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix}, \tag{2.119}$$

$$b_{-1} := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*} g \\ P_{Q_{d_1}^*}(W\Lambda^+ g - \alpha) \end{bmatrix}. \tag{2.120}$$

Для того, щоб система (2.118) була розв'язною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась наступна умова

$$P_{\hat{B}_0^*} b_{-1} = 0. \tag{2.121}$$

Якщо виконується умова

$$P_{\hat{B}_0^*} = 0, \tag{2.122}$$

то і умова (2.121) буде виконуватись, і система (2.118) буде розв'язною відносно c_{-1}

$$c_{-1} = P_{\hat{B}_0}\hat{c}_{-1} + \tilde{c}_{-1}, \quad \tilde{c}_{-1} = \hat{B}_0^+ b_{-1}, \quad \hat{c}_{-1} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{2.123}$$

Зазначимо, що за припущення фредгольмовості оператора $\hat{B}_0$, система (2.118) матиме єдиний розв'язок. Справді, тоді $P_{\hat{B}_0^*} = P_{\hat{B}_0}$ і, згідно з умовою (2.122), $P_{\hat{B}_0}\hat{c}_{-1} = 0$. Розв'язок системи (2.118) набуває вигляду

$$c_{-1} = \tilde{c}_{-1} = \hat{B}_0^+ b_{-1}. \tag{2.124}$$

Отже, коефіцієнт z_{-1} в розкладі (2.112) набуває вигляду

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \hat{B}_0^+ b_{-1}. \tag{2.125}$$

Звідси, підставивши у (2.115) вираз (2.125), отримаємо наступне

$$Uz_0 = q + U_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \hat{B}_0^+ b_{-1}. \tag{2.126}$$

Рівняння (2.126), при виконанні умови (2.122), має розв'язок

$$z_0 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_0 + \tilde{z}_0,$$

де c_0 – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності рівняння для z_1, $\tilde{z}_0$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.126)

$$\tilde{z}_0 = U^+(q + U_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \hat{B}_0^+ b_{-1}).$$

При ε^1 отримаємо наступне неоднорідне рівняння

$$Uz_1 = U_1 z_0. \tag{2.127}$$

Умови розв'язності рівняння (2.127) є наступними

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_0 = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) z_0 = 0. \tag{2.128}$$

Підставимо вираз для z_0 у рівності (2.128) і отримаємо схожу до (2.118) алгебраїчну систему

$$\hat{B}_0 c_0 = b_0, \tag{2.129}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$P_{\hat{B}_0^*} b_0 = 0. \tag{2.130}$$

Тут

$$b_0 := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 \tilde{z}_0 \\ P_{Q_{d_1}^*}(W\Lambda^+\Lambda_1 - W_1)\tilde{z}_0 \end{bmatrix}. \tag{2.131}$$

Тоді, один із розв'язків системи (2.129) має вигляд

$$c_0 = \hat{B}_0^+ b_0, \quad \forall c_0 \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{2.132}$$

Таким чином, якщо виконується умова (2.122), то рівняння (2.127) має розв'язок

$$z_1 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_1 + \tilde{z}_1, \tag{2.133}$$

де c_1 – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці даного ітераційного процесу, а $\tilde{z}_1$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.127) має вигляд

$$\tilde{z}_1 = U^+ U_1 z_0.$$

При ε^2 отримаємо рівняння

$$U z_2 = U_1 z_1. \tag{2.134}$$

Умови розв'язності рівняння (2.134) виглядають наступним чином

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 z_1 = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) z_1 = 0,$$

або ж, враховуючи (2.133), отримаємо систему відносно елемента c_1

$$\hat{B}_0 c_1 = b_1, \tag{2.135}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\hat{B}_0^*} b_1 = 0. \tag{2.136}$$

Тут

$$b_1 := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_1 \\ P_{Q_{d_1}^*} (W \Lambda^+ \Lambda_1 - W_1) \tilde{z}_1 \end{bmatrix}. \tag{2.137}$$

Тоді один із розв'язків системи (2.135) має наступний вигляд

$$c_1 = \hat{B}_0^+ b_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Рівняння (2.134) має розв'язок

$$z_2 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_2 + \tilde{z}_2,$$

де довільний елемент c_2 буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу, а частинний розв'язок $\tilde{z}_2$ рівняння (2.134) має вигляд

$$\tilde{z}_2 = U^+ U_1 z_1.$$

За допомогою математичної індукції покажемо, що умова (2.122) є умовою розв'язності і рівняння, яке ми отримаємо на k-му кроці ітераційного процесу

$$U z_k = U_1 z_{k-1}. \tag{2.138}$$

Згідно теореми 2.3.1, рівняння (2.138) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_{k-1} = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*} (W_1 - W \Lambda^+ \Lambda_1) z_{k-1} = 0, \tag{2.139}$$

та має розв'язок

$$z_k = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k, \quad \forall k \geq 1, \tag{2.140}$$

де c_k – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці, а частинний розв'язок $\tilde{z}_k$ неоднорідного рівняння (2.138) має вигляд

$$\tilde{z}_k = U^+ U_1 z_{k-1}. \tag{2.141}$$

Отримаємо алгебраїчну систему

$$\hat{B}_0 c_k = b_k, \tag{2.142}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\hat{B}_0^*} b_k = 0.$$

Тут

$$b_k := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 \tilde{z}_k \\ P_{Q_{d_1}^*}(W\Lambda^+\Lambda_1 - W_1)\tilde{z}_k \end{bmatrix}.$$

Один із розв'язків системи (2.142) має вигляд

$$c_k = \hat{B}_0^+ b_k, \quad c_k \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad k = -1, 0, ... \tag{2.143}$$

Таким чином, рівняння (2.138) є розв'язним, якщо виконується умова (2.122), і має розв'язок (2.140).

Підставивши вирази для $z_k, \quad k \geq -1$ в ряд (2.112), отримаємо

$$z = \frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k), \tag{2.144}$$

де c_k визначаються формулою (2.143).

Отже, ми довели справедливість наступного твердження.

Теорема 2.3.2. *Нехай породжуюче для рівняння (2.105) рівняння (2.107) не є розв'язним. Тоді, якщо виконується умова (2.122), то рівняння (2.105) буде мати розв'язок у вигляді збіжного, при достатньо малих фіксованих* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, *ряду (2.144) з сингулярністю в точці* $\varepsilon = 0$.

Зауваження 2.3.1. Умова (2.122) є достатньою умовою існування розв'язку рівняння (2.105). Якщо умова (2.122) не виконується, то розв'язок рівняння (2.105) у вигляді ряду (2.112) не існує, але може існувати розв'язок у вигляді частини ряду типу (2.112) за степенями малого параметра ε починаючи із -2, -3, ...

Використовуючи отримані результати для слабкозбуреного рівняння (2.105), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідної збуреної крайової задачі (2.101), (2.102). Для цього використаємо перехід, висвітлений у підрозділі у 2.1, згідно якого можна зробити висновок про те, що множина елементів

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{2.145}$$

і є шуканою сім'єю розв'язків вихідної крайової задачі (2.101), (2.102). Отже тепер сформулюємо теорему, яка визначає умову біфуркації та загальний вигляд розв'язку крайової задачі (2.101), (2.102).

Теорема 2.3.3. *Припустимо, що породжуюча крайова задача (2.1), (2.2) не є розв'язною. Тоді, якщо виконується умова*

$$P_{\hat{B}_0^*} = 0,$$

то крайова задача (2.101), (2.102) буде мати розв'язок $x \in L_2[a, b]$ *у вигляді ряду з сингулярністю в точці* $\varepsilon = 0$*:*

$$x(t) = \Phi(t) \left(\frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k) \right), \tag{2.146}$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Зауваження 2.3.2. Відмітимо, що, як показано у [115], для зведення задачі (2.101), (2.102) до крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь (2.103), (2.104) замість довільної повної в $L_2[a, b]$ ортонормальної системи функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ можна використовувати пару повних в $L_2[a, b]$ ортонормальних систем $\{\nu_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{\mu_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ власних функцій симетричних операторів $\underline{K}$ та $\overline{K}$ [115, с. 123] відповідно

$$(\underline{K}w)(t) = \int_a^b \underline{K}(t, s) w(s) ds, \quad (\overline{K}w)(t) = \int_a^b \overline{K}(t, s) w(s) ds,$$

де

$$\underline{K}(t, s) = \int_a^b K(\xi, t) K(\xi, s) d\xi, \quad \overline{K}(t, s) = \int_a^b K(t, \xi) K(s, \xi) d\xi.$$

ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ

У другому розділі дисертації досліджується питання існування розв'язку нетерової крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння та лінійного слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими. Використовуючи теорію псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, встановлено критерії існування розв'язку таких задач. Розглянуто критичний (резонансний) та некритичний (нерезонансний) випадки.

У випадку лінійної слабкозбуреної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма, в припущенні, що породжуюча задача є нерозв'язною, за допомогою методу Вішика-Люстерника, побудовано загальний вигляд розв'язку таких задач у вигляді частини сингулярного ряду, який збігається при фіксованому, достатньо малому параметрі.

РОЗДІЛ 3
СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ГАМЕРШТЕЙНА ТА СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

В цьому розділі досліджено нетерову крайову задачу для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна у просторі $L_2[a,b]$, а також нетерову крайову задачу для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. На відміну від лінійного випадку, в якому породжуюча задача не мала розв'язку, розглянуто питання про існування розв'язків, у випадку, коли породжуюча задача є розв'язною. Досліджено питання існування та побудови розв'язку крайової задачі, який перетворюється в один із розв'язків породжуючої задачі. Отримано рівняння для породжуючих констант та показано, що для існування шуканого розв'язку необхідно, щоб це рівняння мало хоча б один дійсний корінь. Встановлено достатні умови існування такого розв'язку, запропоновано конструктивний алгоритм його відшукання та вказано зв'язок між необхідною та достатньою умовами.

3.1. Слабконелінійні інтегральні рівняння типу Гамерштейна

Розглянемо слабконелінійне інтегральне рівняння

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds. \tag{3.1}$$

Ставиться питання знаходження умов існування розв'язку

$$x = x(t,\varepsilon): \quad x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

рівняння (3.1), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t, c_r)$ породжуючого рівняння

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t),$$

тобто рівняння (2.1). Далі цей розв'язок $x_0(t, c_r)$ будемо називати породжуючим розв'язком слабконелінійного рівняння (3.1).

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ – нелінійна по першій компоненті функція така, що

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le \mu], \quad Z(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b], \\ Z(x(t,\cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \tag{3.2}$$

де μ, ε_0 – достатньо малі константи, $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Застосовуючи підхід, описаний в підрозділі 2.1 для рівняння (2.1), зведемо рівняння (3.1) до зліченновимірної системи слабконелінійних рівнянь. Використовуючи (2.3) та (2.50):

$$x_i = \int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

та ввівши додатково позначення

$$m_i(\varepsilon) = m_i(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_i(\varepsilon), \ldots, \varepsilon) = \int\limits_a^b Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\varphi_i(t)dt, \tag{3.3}$$

від рівняння (3.1) приходимо до зліченновимірної системи слабконелінійних рівнянь

$$x_i(\varepsilon) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j(\varepsilon) = f_i + \varepsilon\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}m_j(\varepsilon) \quad i = \overline{1, \infty}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j(\varepsilon)|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |m_j(\varepsilon)|^2 < +\infty, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Запишемо систему (3.4) у вигляді операторного рівняння в просторі ℓ_2

$$\Lambda z = g + \varepsilon \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon), \tag{3.5}$$

де матриці Λ, Λ_1, вектор-стовпчики z та g визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54):

$$z = col\Big(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_i,\ \ \ldots\Big) \in \ell_2, \quad g = col\Big(f_1,\ \ f_2,\ \ \ldots,\ \ f_i,\ \ \ldots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1i} & \ldots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \ldots & \tilde{a}_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$V(z(\varepsilon), \varepsilon) = col\Big(m_1(\varepsilon),\ \ m_2(\varepsilon),\ \ \ldots,\ \ m_i(\varepsilon),\ \ \ldots\Big) \in \ell_2, \tag{3.6}$$

$$V(\cdot, \varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| \le \mu], \quad V(z(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]. \tag{3.7}$$

Для того, щоб дослідити питання розв'язності вихідного рівняння (3.1), дослідимо спочатку операторне рівняння (3.5).

Породжуюче операторне рівняння для рівняння (3.5) має вигляд (2.6):

$$\Lambda z = g.$$

3.1.1. Необхідна умова існування розв'язку. Знайдемо необхідну умову існування розв'язку $z(\varepsilon)$ рівняння (3.5), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $z(c_r)$ (2.15) рівняння (3.1). Розглядаючи праву частину рівняння (3.5) як неоднорідність та використовуючи теорему 2.1.2, умова розв'язності рівняння (3.5) має вигляд

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \varepsilon \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \tag{3.8}$$

Так як породжуюче рівняння (2.6) має розв'язок, то врахувуючи умову розв'язності рівняння (2.6), умова (3.8) набуде вигляду

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{3.9}$$

Оскільки $z(\varepsilon) \to z(c_r)$ при $\varepsilon \to 0$, то використовуючи умови (3.7), накладені на нелінійну функцію $V(z(\varepsilon), \varepsilon)$, перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ у (3.9) та отримаємо необхідну умову існування розв'язку рівняння (3.5)

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 V(z(c_r), 0) = 0. \tag{3.10}$$

Таким чином, якщо рівняння (3.10) має корінь $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, то корінь c_r^0 визначає той породжуючий розв'язок $z(c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $z(\varepsilon)$ рівняння (3.5). Якщо ж операторне рівняння (3.10) не має розв'язків, то і рівняння (3.5) не має шуканого розв'язку. Оскільки ми розглядаємо всі рівняння в дійсній площині, то мова йде про дійсні розв'язки рівняння (3.10). Умови типу (3.10) вперше виникли в теорії періодичних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Константи c_r у цьому випадку мають фізичний зміст: це амплітуди періодичних розв'язків. Тому такі рівняння отримали назву рівнянь для породжуючих амплітуд [5, 32, 68]. Аналогічно до систем звичайних диференціальних рівнянь, рівняння (3.10) будемо називати рівнянням для породжуючих констант c_r^0 слабконелінійного операторного рівняння (3.5) [96].

Теорема 3.1.1. (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійне рівняння (3.5) має розв'язок $z(\varepsilon)$*

$$z(\varepsilon) \in \ell_2, \quad z(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \tag{3.11}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок (2.15) з векторною константою $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$. Тоді константа c_r^0 обов'язково повинна бути дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (3.10).

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння (3.5), перепишемо теорему 3.1.1 для вихідного слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна (3.1). Для цього використаємо перехід, запропонований Гільбертом та перенесений Гамерштейном на нелінійний випадок [105]. Згідно цього підходу, якщо рівняння (3.5) має хоча б один розв'язок $z(\varepsilon) = col\Big(x_1(\varepsilon),\ x_2(\varepsilon),\ \ldots,\ x_i(\varepsilon),\ \ldots\Big)$, то згідно теореми Ріса-Фішера, існує елемент $x = x(t,\varepsilon)$: $x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ такий, що $x_i(\varepsilon)$, є його коефіцієнтами Фур'є. Має місце представлення

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\varepsilon)\varphi_i(t) = \Phi(t)z(\varepsilon). \tag{3.12}$$

Аналогічно до лінійного випадку, можна зробити висновок про те, що множина елементів $x(t,\varepsilon)$, які визначається співвідношенням (3.12), і є шуканою сім'єю розв'язків вихідного слабконелінійного інтегрального рівняння (3.1). Отже, сформулюємо необхідну умову існування розв'язку вихідного слабконелінійного інтегрального рівняння (3.1).

Теорема 3.1.2. (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійне рівняння (3.1) має розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$: $x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r)$ (2.20) з векторною константою $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$. Тоді константа c_r^0 обов'язково повинна бути дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (3.10).*

Необхідна умова не забеспечує існування розв'язку рівняння (3.1). Тому важливим завданням є відшукання умов, при яких розв'язок рівняння (3.1) гарантовано буде існувати, а також розробка конструктивних алгоритмів побудови шуканого розв'язку розглядуваної задачі.

3.1.2. Достатня умова існування розв'язку. Для того, щоб отримати достатні умови існування розв'язку рівняння (3.1), знайдемо достатні умови існування розв'язку операторного рівняння (3.5). Для цього введемо заміну змінних у рівнянні (3.5)

$$z(\varepsilon) = z(c_r^0) + y(\varepsilon), \tag{3.13}$$

де $z(c_r^0)$ – породжуючий розв'язок, $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ – дійсний корінь рівняння (3.10).

Будемо шукати умови існування розв'язку $y(\varepsilon)$

$$y(\varepsilon) \in \ell_2, \quad y(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad y(0) = 0 \tag{3.14}$$

наступного рівняння

$$\Lambda y(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda_1 V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon). \tag{3.15}$$

Використавши неперервну диференційованість функції $V(z, \varepsilon)$ по z в околі породжуючого розв'язку, виділимо лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε функції $V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon)$

$$V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) = V(z_0(c_r^0), 0) + A_1 y(\varepsilon) + R(y(\varepsilon), \varepsilon), \tag{3.16}$$

де

$$V(z_0(c_r^0), 0) \in \ell_2, \quad A_1 = A_1(c_r^0) = \frac{\partial V(z, 0)}{\partial z}\Big|_{z=z(c_r^0)}, \quad R(y(\varepsilon), \varepsilon) \in \ell_2. \tag{3.17}$$

При цьому маємо

$$R(\cdot, \varepsilon) \in C^1(\|y\| \leq \mu),\ R(y(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],\ R(0, 0) = 0,\ \frac{\partial R(0, 0)}{\partial y} = 0. \tag{3.18}$$

Таким чином, розглядаючи праву частину рівняння (3.15) як неоднорідність, згідно теореми 2.1.2, отримуємо, що рівняння (3.15) буде мати розв'язок у вигляді

$$y(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} c_r + \bar{y}(\varepsilon), \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{3.19}$$

$$\bar{y}(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon). \tag{3.20}$$

Умова розв'язності для рівняння (3.15) набуде вигляду

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{3.21}$$

Підставимо у рівність (3.21) розклад (3.16)

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1 y(\varepsilon) + R(y(\varepsilon), \varepsilon)) = 0.$$

Врахувавши рівняння (3.10) та представлення (3.19), отримаємо

$$\bar{B}_0 c_r = -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}(\varepsilon) + R(y(\varepsilon), \varepsilon)), \tag{3.22}$$

де матриця $\bar{B}_0$ розмірності $(r \times r)$ має вигляд

$$\bar{B}_0 = P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r}. \tag{3.23}$$

Рівняння (3.22) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\bar{B}_0^*} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}(\varepsilon) + R(y(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \tag{3.24}$$

Якщо

$$P_{\bar{B}_0^*} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 = 0, \tag{3.25}$$

то рівність (3.24) завжди буде виконуватись, і рівняння (3.22) матиме розв'язок, а за умови

$$P_{\bar{B}_0} = 0, \tag{3.26}$$

цей розв'язок буде єдиним.

Отже, для знаходження розв'язку рівняння (3.15) приходимо до системи операторних рівнянь

$$\begin{gathered} y(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} c_r(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon), \\ c_r(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}(\varepsilon) + R(y(\varepsilon), \varepsilon)), \\ \bar{y}(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1 (P_{\Lambda_r} c_r(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + R(y(\varepsilon), \varepsilon)). \end{gathered} \tag{3.27}$$

Ввівши нову змінну $u = col(y(\varepsilon), c_r(\varepsilon), \bar{y}(\varepsilon))$, отримаємо рівняння

$$u = Lu + Fu, \tag{3.28}$$

де

$$L = \begin{pmatrix} 0 & P_{\Lambda_r} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

$$L_1 := -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 A_1, \tag{3.30}$$

$$Fu := \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 R(y(\varepsilon), \varepsilon) \\ \varepsilon \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1 (P_{\Lambda_r} c_r(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + R(y(\varepsilon), \varepsilon)) \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Квазітрикутний блочний матричний оператор $I - L$ завжди має обернений, що має вигляд:

$$(I-L)^{-1} = \begin{pmatrix} I & P_{\Lambda_r} & I + P_{\Lambda_r} L_1 \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

тому рівняння (3.28) можна переписати у вигляді

$$u = \hat{S}u, \quad \hat{S} := (I-L)^{-1}F. \tag{3.33}$$

Виходячи зі структури оператора $\hat{S}$, при достатньо малих ε, оператор $\hat{S}$ буде стискаючим. Отже, операторне рівняння (3.33) належить до класу рівнянь, для розв'язання яких застосовується метод простих ітерацій. Враховуючи зв'язок рівняння (3.33) та системи операторних рівнянь (3.27), для знаходження наближеного розв'язку системи (3.27) пропонується використовувати наступний ітераційний процес.

Перше наближення $\bar{y}_1(\varepsilon)$ до елемента $\bar{y}(\varepsilon)$ знаходимо як частинний розв'язок рівняння

$$\Lambda \bar{y}_1(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda_1 V(z(c_r^0), 0), \tag{3.34}$$

який існує завдяки вибору константи $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ із рівняння для породжуючих констант (3.10) та має вигляд

$$\bar{y}_1(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(c_r^0), 0). \tag{3.35}$$

Приймемо $\bar{y}_1(\varepsilon)$ за перше наближення $y_1(\varepsilon)$ до розв'язку $y(\varepsilon)$ рівняння (3.15)

$$y_1(\varepsilon) = \bar{y}_1(\varepsilon). \tag{3.36}$$

Друге наближення $y_2(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ знаходимо із рівняння

$$\Lambda y_2(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} c_r^1(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.37}$$

Рівняння (3.37) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\bar{B}_0 c_r^1(\varepsilon) = -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_1(\varepsilon) + R(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.38}$$

Умова розв'язності рівняння (3.38) має вигляд

$$P_{\bar{B}_0^*} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_1(\varepsilon) + R(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \tag{3.39}$$

За умов (3.25), (3.26), умова (3.39) виконується, і із рівняння (3.38) єдиним чином визначається перше наближення $c_r^1(\varepsilon)$ до параметра $c_r(\varepsilon)$

$$c_r^1(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_1(\varepsilon) + R(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.40}$$

Друге наближення $y_2(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ буде таким

$$y_2(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} c_r^1(\varepsilon) + \bar{y}_2(\varepsilon), \tag{3.41}$$

де

$$\bar{y}_2(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1 (P_{\Lambda_r} c_r^1(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.42}$$

Третє наближення $y_3(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ знаходимо із рівняння

$$\Lambda y_3(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1 (P_{\Lambda_r} c_r^2(\varepsilon) + \bar{y}_2(\varepsilon)) + R(y_2(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.43}$$

Рівняння (3.43) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\bar{B}_0 c_r^2(\varepsilon) = -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_2(\varepsilon) + R(y_2(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.44}$$

Умова розв'язності рівняння (3.44) має вигляд

$$P_{\bar{B}_0^*} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_2(\varepsilon) + R(y_2(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \tag{3.45}$$

За умов (3.25), (3.26), рівність (3.45) виконується і із рівняння (3.44) єдиним чином визначається друге наближення $c_r^2(\varepsilon)$ до параметра $c_r(\varepsilon)$

$$c_r^2(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_2(\varepsilon) + R(y_2(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.46}$$

Третє наближення $y_3(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ буде таким

$$y_3(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} c_r^2(\varepsilon) + \bar{y}_3(\varepsilon), \tag{3.47}$$

де

$$\bar{y}_3(\varepsilon) = \varepsilon\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_r^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r}c_r^2(\varepsilon) + \bar{y}_2(\varepsilon)) + R(y_2(\varepsilon), \varepsilon)). \tag{3.48}$$

Продовжуючи цей процес далі, отримуємо таку ітераційну схему для знаходження $y_k(\varepsilon)$

$$c_r^k(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1(A_1\bar{y}_k(\varepsilon) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)), \tag{3.49}$$

$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_r^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r}c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)), \tag{3.50}$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r}c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{3.51}$$

$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0. \tag{3.52}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1.3. (Достатня умова) *Нехай породжуюче для рівняння (3.5) рівняння (2.6), за виконання r лінійно-незалежних умов*

$$P_{\Lambda_r^*}g = 0,$$

має r-параметричну сім'ю розв'язків $z(c_r) \in \ell_2$ (2.15). Тоді, для кожного дійсного значення векторної константи $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (3.10) та при виконанні умов

$$P_{\bar{B}_0^*}P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 = 0, \quad P_{\bar{B}_0} = 0$$

рівняння (3.5) буде мати розв'язок $z(\varepsilon) \in \ell_2$ неперервний по ε, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $z(c_r^0)$. Цей розв'язок, при достатньо малих ε, можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$c_r^k(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1(A_1\bar{y}_k(\varepsilon) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)),$$

$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_r^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r}c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)),$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r}c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon),$$

$$z_k(\varepsilon) = z(c_r^0) + y_k(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння (3.5), можна зробити висновки про існування розв'язку вихідного слабконелінійного інтегрального рівняння (3.1). Для цього використаємо перехід, описаний при дослідженні необхідної умови існування розв'язку рівняння (3.1).

Отже, сформулюємо достатню умову існування розв'язку слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна (3.1).

Теорема 3.1.4. (Достатня умова) *Нехай породжуюче для рівняння (3.1) рівняння (2.1), за виконання r лінійно-незалежних умов (2.19), має r-параметричну сім'ю розв'язків $x(t, c_r)$ (2.20). Тоді, для кожного дійсного значення векторної константи $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (3.10) та при виконанні умов*

$$P_{\bar{B}_0^*} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 = 0, \quad P_{\bar{B}_0} = 0$$

рівняння (3.1) буде мати розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r)$. Цей розв'язок, при достатньо малих ε, можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$c_r^k(\varepsilon) = -\bar{B}_0^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_k(\varepsilon) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)),$$

$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_r^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R(y_k(\varepsilon), \varepsilon)),$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} c_r^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon),$$

$$z_k(\varepsilon) = z(c_r^0) + y_k(\varepsilon),$$

$$x_k(t, \varepsilon) = \Phi(t) z_k(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Сформулюємо теорему про зв'язок між необхідною та достатньою умовами.

Теорема 3.1.5. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Для того, щоб слабконелінійне інтегральне рівняння (3.1) мало розв'язок*

$$x = x(t, \varepsilon) : \ x(t, 0) = x_0(t, c_r),$$

де $x_0(t, c_r)$ *– породжуючий розв'язок з векторною константою* $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$*, необхідно, щоб константа* c_r^0 *була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (3.10) і достатньо, щоб ця константа* c_r^0 *була простим коренем рівняння для породжуючих констант (3.10).*

3.1.3. Приклад. Проілюструємо наведені вище теоретичні викладки на такому інтегральному рівнянні

$$\begin{gathered} x(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(t+s)x(s)ds = \sin t - \cos t + \\ +\varepsilon \int\limits_0^\pi \cos t \sin s \left(\pi(2-\varepsilon^2) - 4(2+3\varepsilon^2)x(s) + 3\pi\varepsilon x^2(s)\right) ds. \end{gathered} \tag{3.53}$$

Породжуюче рівняння для рівняння (3.53) має вигляд

$$x(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(t+s)x(s)ds = \sin t - \cos t. \tag{3.54}$$

У нашому випадку ядро $K(t, s)$ є виродженим та симетричним. Отже, за систему $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ ми можемо взяти систему власних функцій оператора

$$(Kw)(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(t+s)w(s)ds. \tag{3.55}$$

Неважко переконатись, що ортонормовані функції $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin t + \cos t)$ і $\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin t - \cos t)$, є власними функціями оператора (3.55), які відповідають характеристичним числам $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ відповідно.

Зведемо рівняння (3.53) та (3.54) до рівнянь виду (3.5) та (2.6). Отримаємо

$$\Lambda z = g + \varepsilon \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon), \tag{3.56}$$

$$\Lambda z = g, \tag{3.57}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\pi x(t)(\sin t + \cos t)dt, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\pi x(t)(\sin t - \cos t)dt, \tag{3.59}$$

$$\begin{gathered} V(z(\varepsilon), \varepsilon) = 2\sqrt{\pi}(2 - \varepsilon^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \\ -4(2 + 3\varepsilon^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.60}$$

Скориставшись формулами (1.3), (1.4) [95], отримаємо

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

В нашому випадку одиниця є власним значенням оператора $(Kw)(t)$ кратності 1. Тобто, ми маємо критичний випадок. Врахувавши (3.58), (3.61), переконаємось, що умова розв'язності (2.14) у нашому випадку виконується, і, згідно теореми 2.1.2, рівняння (3.57) має сім'ю розв'язків

$$z(c_r) = \begin{pmatrix} c_r \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{pmatrix}, \quad \forall c_r \in \mathbb{R}, \tag{3.62}$$

а рівняння (3.54) — сім'ю розв'язків

$$x(t, c_r) = \left(\frac{c_r}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \right) \sin t + \left(\frac{c_r}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \right) \cos t. \tag{3.63}$$

Необхідна умова існування розв'язку $z(\varepsilon)$ рівняння (3.56), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $z(c_r)$ рівняння (3.57) у нашому випадку має вигляд

$$\begin{gathered} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 V(z(c_r), 0) = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(0) \\ m_2(0) \end{pmatrix} = \\ = \frac{\pi}{4}(m_1(0) + m_2(0)) = 2\pi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - c_r \right) = 0. \end{gathered} \tag{3.64}$$

Рівняння (3.64) має єдиний розв'язок $c_r^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, що визначає той породжуючий розв'язок $z(c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $z(\varepsilon)$ рівняння (3.56).

Знайдемо тепер достатню умову існування розв'язку рівняння (3.56). Для цього виконаємо у ньому заміну змінних

$$z(\varepsilon) := z(c_r^0) + y(\varepsilon), \tag{3.65}$$

де

$$z(c_r^0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

– породжуючий розв'язок рівняння (3.56).

Рівняння (3.15) для визначення $y(\varepsilon)$ набуде вигляду

$$\Lambda y(\varepsilon) = \varepsilon \Lambda_1 V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon), \tag{3.67}$$

де матриці Λ, Λ_1 мають вигляд (3.58) та

$$V(z(c_r^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) = 4\sqrt{\pi}(\varepsilon - 2\varepsilon^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$-4\begin{pmatrix} 3\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 3\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(\varepsilon) \\ y_2(\varepsilon) \end{pmatrix} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} (y_1(\varepsilon) + y_2(\varepsilon))^2 + 4y_1^2(\varepsilon) \\ (y_1(\varepsilon) + y_2(\varepsilon))^2 + 4y_2^2(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Тобто, у нашому випадку

$$V(z_0(c_r^0), 0) = 0, \quad A_1 = -8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

$$R(y(\varepsilon), \varepsilon) = 4\sqrt{\pi}(\varepsilon - 2\varepsilon^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+4\varepsilon\begin{pmatrix} 3 - 3\varepsilon & 1 \\ 1 & 3 - 3\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(\varepsilon) \\ y_2(\varepsilon) \end{pmatrix} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} (y_1(\varepsilon) + y_2(\varepsilon))^2 + 4y_1^2(\varepsilon) \\ (y_1(\varepsilon) + y_2(\varepsilon))^2 + 4y_2^2(\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

Згідно (3.23), (3.58), (3.61), (3.68) маємо

$$\bar{B}_0 = P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r} = -2\pi\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\pi. \tag{3.70}$$

Отже,

$$\bar{B}_0^+ = \bar{B}_0^{-1} = -\frac{1}{2\pi}, \quad P_{\bar{B}_0} = P_{\bar{B}_0^*} = 0 \tag{3.71}$$

і достатні умови (3.25), (3.26) існування розв'язку рівняння (3.56) виконуються.

Провівши відповідні обчислення, отримуємо, що система (3.67), за умов (3.25), (3.26), еквівалентна системі

$$\begin{aligned} &c_r(\varepsilon) = \sqrt{\pi}(\varepsilon - 2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}(4\varepsilon - 3\varepsilon^2)y_1(\varepsilon) + \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}(y_1(\varepsilon))^2, \\ &\bar{y}_1(\varepsilon) = \bar{y}_2(\varepsilon) = y_2(\varepsilon) = 0, \quad y_1(\varepsilon) = c_r(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Конструктивний алгоритм (3.49)-(3.52) у нашому випадку набуде вигляду

$$c_r^k(\varepsilon) = \sqrt{\pi}(\varepsilon - 2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}(4\varepsilon - 3\varepsilon^2)y_1^k(\varepsilon) + \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}(y_1^k(\varepsilon))^2, \tag{3.73}$$

$$\bar{y}_1^{k+1}(\varepsilon) = \bar{y}_2^{k+1}(\varepsilon) = y_2^{k+1}(\varepsilon) = 0, \quad y_1^{k+1}(\varepsilon) = c_r^k(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{3.74}$$

$$y_1^0(\varepsilon) = y_2^0(\varepsilon) = \bar{y}_1^0(\varepsilon) = \bar{y}_2^0(\varepsilon) = 0. \tag{3.75}$$

Збіжність методу простих ітерацій (3.73)-(3.75) оцінюється за допомогою мажорант Ляпунова. Мажоруюча система для системи (3.72) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &v = U(v, \varepsilon) = \sqrt{\pi}(\varepsilon - 2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}(4\varepsilon - 3\varepsilon^2)v + \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}v^2, \\ &\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = u_2 = 0, \quad u_1 = v. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Для оцінки збіжності по ε ітераційного процесу (3.73)-(3.75) складемо систему

$$v = U(v, \varepsilon), \quad 1 - \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \tag{3.77}$$

дійсним додатнім розв'язком якої є

$$\varepsilon^* = -\frac{1}{3}(2 - \sqrt{10}) \approx 0,3874, \quad v^* = -\frac{\sqrt{\pi}}{3}(2 - \sqrt{10}) \approx 0,6867. \tag{3.78}$$

Отже, система (3.56) має в околі $\varepsilon = 0$ розв'язок $z(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в породжуючий розв'язок $z(c_r^0)$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ ітераційного процесу (3.73)-(3.75) і рівності (3.65).

Побудуємо кілька перших наближень за схемою (3.73)-(3.75)

$$y_1^1(\varepsilon) = 0, \tag{3.79}$$

$$y_1^2(\varepsilon) = c_r^1(\varepsilon) = \sqrt{\pi}(\varepsilon - 2\varepsilon^2), \tag{3.80}$$

$$y_1^3(\varepsilon) = c_r^2(\varepsilon) = \sqrt{\pi}(\varepsilon - 4\varepsilon^3 - 3\varepsilon^4 + 6\varepsilon^5), \tag{3.81}$$

$$\begin{gathered} y_1^4(\varepsilon) = c_r^3(\varepsilon) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(2\varepsilon - 16\varepsilon^4 - 24\varepsilon^5 + \\ +15\varepsilon^6 + 66\varepsilon^7 + 72\varepsilon^8 - 117\varepsilon^9 - 108\varepsilon^{10} + 108\varepsilon^{11}). \end{gathered} \tag{3.82}$$

Як бачимо, побудовані наближені розв'язки в околі $\varepsilon = 0$ прямують до вектора

$$y^*(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi}\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.83}$$

що є, як можна переконатися простою підстановкою, розв'язком рівняння (3.67). Відхилення наближень (3.79)-(3.82) від точного розв'язку (3.83) відображено у таблиці

Точність наближень, побудованих

за методом простих ітерацій (3.73)-(3.75)

ε	$\lvert y_1^*(\varepsilon) - y_1^1(\varepsilon)\rvert$	$\lvert y_1^*(\varepsilon) - y_1^2(\varepsilon)\rvert$	$\lvert y_1^*(\varepsilon) - y_1^3(\varepsilon)\rvert$	$\lvert y_1^*(\varepsilon) - y_1^4(\varepsilon)\rvert$
0,3874	0,686648	0,532015	0,439177	0,375906
0,3000	0,531736	0,319042	0,208653	0,142307
0,2000	0,354491	0,141796	0,061823	0,027792
0,1000	0,177245	0,035449	0,007515	0,001611
0,0100	0,017725	0,000354	0,000007	0,000000

Отже, згідно (3.65) і (3.83), розв'язок $z^*(\varepsilon)$ системи (3.56), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в породжуючий розв'язок (3.66) системи (3.57) має вигляд

$$z^*(\varepsilon) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

а розв'язок рівняння (3.1), згідно теореми 3.1.4, виглядає наступним чином

$$x^*(t) = (\varepsilon + 1)\sin t + \varepsilon\cos t. \tag{3.85}$$

Легко бачити, що при $\varepsilon = 0$ розв'язок (3.85) перетворюється у породжуючий розв'язок (3.63) з константою $c_r^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, яка є розв'язком рівняння для породжуючих констант (3.64).

Зауваження 3.1.1. У випадку, коли $K(t,s) = 0$, $f(t) = 0$, $\varepsilon = 1$, $K_1(t,s)$ – кусково-неперервне, симетричне, додатньовизначене ядро, отримані результати співпадають із результатими роботи [105].

3.2. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь типу Гамерштейна

У даному підрозділі досліджено питання розв'язності нетерової крайової задачі для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна. Головним завданнням є встановлення необхідних та достатніх умов існування розв'язку, а також, встановлення зв'язку між цими умовами.

Розглянемо слабконелінійну крайову задачу для інтегрального рівняння

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \tag{3.86}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{3.87}$$

Ставиться питання знаходження необхідних та достатніх умов існування розв'язку

$$x = x(t,\varepsilon): \quad x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

крайової задачі (3.86), (3.87), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t, c_{d_2})$ породжуючої крайової задачі

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t),$$

$$Sx(\cdot) = \alpha,$$

тобто задачі (2.1), (2.2). Далі цей розв'язок $x_0(t,c_r)$ будемо називати породжуючим розв'язком крайової задачі (3.86), (3.87).

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f\in L_2[a,b]$, S - обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $S=col(S_1,S_2,...,S_p):L_2[a,b]\to\mathbb{R}^p$; $S_i:L_2[a,b]\to\mathbb{R}$, $\alpha=col(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p$, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – нелінійна по першій компоненті функція така, що $Z(\cdot,t,\varepsilon)\in C^1[\|x-x_0\|\le\mu]$, $Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b]$, $Z(x(t,\cdot),t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійний обмежений p-вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку; μ та ε_0 – достатньо малі константи.

Зведемо задачу (3.86), (3.87) до зліченновимірної системи слабконелінійних рівнянь. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Застосовуючи (2.3), (2.50) та (3.3):

$$x_i=\int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)dt,\quad f_i=\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij}=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,\quad \tilde{a}_{ij}=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

$$m_i(\varepsilon)=m_i(x_1(\varepsilon),x_2(\varepsilon),\dots,x_i(\varepsilon),\dots,\varepsilon)=\int\limits_a^b Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\varphi_i(t)dt,$$

та ввівши додатково наступні позначення

$$h_\nu(\varepsilon)=h_\nu(x_1(\varepsilon),x_2(\varepsilon),\dots,x_i(\varepsilon),\dots,\varepsilon)=J_\nu(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\quad \nu=\overline{1,p}, \tag{3.88}$$

від задачі (3.86), (3.87) приходимо до зліченновимірної системи слабконелінійних рівнянь

$$x_i(\varepsilon)-\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j(\varepsilon)=f_i+\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{a}_{ij}m_j(\varepsilon),\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{3.89}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}S_\nu\varphi_j(\cdot)x_j(\varepsilon)=\alpha_\nu+\varepsilon h_\nu(\varepsilon),\quad \nu=\overline{1,p}, \tag{3.90}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j(\varepsilon)|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |m_j(\varepsilon)|^2 < +\infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |h_\nu(\varepsilon)|^2 < +\infty, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Запишемо систему рівнянь (3.89), (3.90) у вигляді операторного рівняння у просторі ℓ_2

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon) \\ H(z(\varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix} = q + \varepsilon D(z(\varepsilon), \varepsilon), \tag{3.91}$$

де матриці Λ, Λ_1, W, W_1, вектор-стовпчики z та g визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54), (2.106), (3.6), (3.7):

$$z = col\Big(x_1, \;\; x_2, \;\; \dots, \;\; x_i, \;\; \dots\Big) \in \ell_2,$$
$$g = col\Big(f_1, \;\; f_2, \;\; \dots, \;\; f_i, \;\; \dots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1 - a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$W := S\Phi(\cdot), \quad W_1 := J\Phi(\cdot),$$

$$V(z(\varepsilon), \varepsilon) = col\Big(m_1(\varepsilon), \;\; m_2(\varepsilon), \;\; \dots, \;\; m_i(\varepsilon), \;\; \dots\Big) \in \ell_2,$$

$$V(\cdot, \varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| \le \mu], \quad V(z(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

$$H(z(\varepsilon), \varepsilon) = col\Big(h_1(\varepsilon), \;\; h_2(\varepsilon), \;\; \dots, \;\; h_\nu(\varepsilon), \;\; \dots, \;\; h_p(\varepsilon)\Big), \tag{3.92}$$

$$H(\cdot, \varepsilon) \in D^1[\|z - z_0\| \le \mu], \quad H(z(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]. \tag{3.93}$$

Породжуюче рівняння для рівняння (3.91) має вигляд (2.107):

$$Uz = q.$$

3.2.1. Рівняння для породжуючих констант. Знайдемо необхідні умови існування розв'язку $z(\varepsilon)$ рівняння (3.91), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $z(c_r)$ рівняння (2.107). Рівняння (3.91) є розв'язним тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \varepsilon\Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon)) = 0, \tag{3.94}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha + \varepsilon H(z(\varepsilon), \varepsilon) - W\Lambda^+(g + \varepsilon\Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon))) = 0. \tag{3.95}$$

Так як породжуюче рівняння (2.107) має розв'язок, то враховуючи умови (2.109) та (2.110) теореми 2.3.1, отримаємо

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \tag{3.96}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(H(z(\varepsilon), \varepsilon) - W\Lambda^+\Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \tag{3.97}$$

Оскільки $z(\varepsilon) \to z(c_{d_2})$ при $\varepsilon \to 0$, то, використовуючи умови, накладені на нелінійні функції $V(z(\varepsilon), \varepsilon)$ та $H(z(\varepsilon), \varepsilon)$, перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ у рівностях (3.96) та (3.97) і отримаємо необхідні умови існування розв'язку операторного рівняння (3.91)

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 V(z(c_{d_2}), 0) = 0, \tag{3.98}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(H(z(c_{d_2}), 0) - W\Lambda^+\Lambda_1 V(z(c_{d_2}), 0)) = 0. \tag{3.99}$$

Отже, якщо система рівнянь (3.98), (3.99) має корінь $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, то цей корінь $c_{d_2}^0$ визначає той породжуючий розв'язок $z(c_{d_2}^0)$, якому може відповідати розв'язок $z(\varepsilon)$ рівняння (3.91). Якщо ж система рівнянь (3.98), (3.99) не має розв'язків, то і рівняння (3.91) не має шуканого розв'язку. Оскільки ми розглядаємо всі системи в дійсній площині, то мова йде про дійсні розв'язки системи рівнянь (3.98), (3.99). Відмітимо, що в класичній теорії диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами константа $c_{d_2}^0$ має фізичний зміст, тобто є амплітудою породжуючого розв'язку, а відповідні рівняння виду (3.98), (3.99) називаються рівняннями для породжуючих амплітуд [68]. Тому, аналогічно до теорії крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, систему рівнянь

(3.98), (3.99) будемо називати системою рівнянь для породжуючих констант $c^0_{d_2}$ розглядуваного слабконелінійного рівняння (3.91) [96].

Теорема 3.2.1. (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійне рівняння (3.91) має розв'язок* $z(\varepsilon)$

$$z(\varepsilon) \in \ell_2, \quad z(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \tag{3.100}$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок (2.111) з векторною константою* $c_{d_2} = c^0_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$. *Тоді константа* $c^0_{d_2}$ *обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99).*

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння (3.91), перепишемо теорему 3.2.1 для вихідної слабконелінійної крайової задачі (3.86), (3.87). Для цього використаємо перехід, запропонований Гільбертом та перенесений Гамерштейном на нелінійний випадок [105]. Згідно цього підходу, якщо рівняння (3.91) має хоча б один розв'язок $z(\varepsilon) = col\Big(x_1(\varepsilon),\ x_2(\varepsilon),\ \ldots,\ x_i(\varepsilon),\ \ldots\Big)$, то за теоремою Ріса-Фішера, існує елемент $x = x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ такий, що $x_i(\varepsilon)$, є його коефіцієнтами Фур'є і має місце представлення

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\varepsilon)\varphi_i(t) = \Phi(t)z(\varepsilon), \tag{3.101}$$

де

$$\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_i(t),\ \ldots\Big),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$.

Аналогічно до лінійного випадку, можна зробити висновок про те, що множина елементів $x(t, \varepsilon)$, які визначається співвідношенням (3.101), і є шуканою сім'єю розв'язків вихідної крайової задачі (3.86), (3.87). Отже, сформулюємо необхідну умову існування розв'язку вихідної слабконелінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Гамерштейна (3.86), (3.87).

Теорема 3.2.2. (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійна крайова задача (3.86), (3.87) має розв'язок*

$$x = x(t, \varepsilon): \quad x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_{d_2})$ *(2.39) з векторною константою* $c_{d_2} = c^0_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$. *Тоді константа* $c^0_{d_2}$ *обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99).*

Необхідна умова не забезпечує існування розв'язку крайової задачі (3.86), (3.87). Тому важливим завданням є відшукання умов, при яких розв'язок поставленої задачі (3.86), (3.87) гарантовано буде існувати, а також розробка конструктивних алгоритмів побудови шуканого розв'язку розглядуваної слабконелінійної задачі (3.86), (3.87).

3.2.2. Достатня умова існування розв'язку. Метод простих ітерацій. Для того, щоб знайти достатню умову існування розв'язку крайової задачі для інтегрального рівняння типу Гамерштейна (3.86), (3.87), знайдемо спочатку достатню умову існуванння розв'язку слабконелінійного операторного рівняння (3.91). Для цього у рівнянні (3.91) виконаємо заміну змінних

$$z(\varepsilon) = z(c^0_{d_2}) + y(\varepsilon), \tag{3.102}$$

де $z(c^0_{d_2})$ – породжуючий розв'язок, $c^0_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$ – дійсний корінь системи (3.98), (3.99).

В нових змінних будемо шукати умови існування розв'язку $y(\varepsilon)$

$$y(\varepsilon) \in \ell_2, \quad y(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad y(0) = 0 \tag{3.103}$$

наступного рівняння

$$Uy(\varepsilon) = \varepsilon D(z(c^0_{d_2}) + y(\varepsilon), \varepsilon). \tag{3.104}$$

Використовуючи неперервну диференційовність функцій $V(z(\varepsilon), \varepsilon)$ та $H(z(\varepsilon), \varepsilon)$ по z в околі точки $\varepsilon = 0$, виділимо лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε функцій $V(z(c^0_{d_2}) + y(\varepsilon), \varepsilon)$ та $H(z(c^0_{d_2}) + y(\varepsilon), \varepsilon)$. Тоді має місце розклад

$$D(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon)=\begin{bmatrix} V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1y(\varepsilon)+R_1(y(\varepsilon),\varepsilon) \\ H(z_0(c^0_{d_2}),0)+l_1y(\varepsilon)+R_2(y(\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}= \\ =D(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_2y(\varepsilon)+R(y(\varepsilon),\varepsilon), \tag{3.105}$$

де

$$D(z_0(c^0_{d_2}),0)\in\ell_2, \quad A_1=A_1(c^0_{d_2})=\frac{\partial V(z,0)}{\partial z}\Big|_{z=z(c^0_{d_2})}, \\ R_i(y(\varepsilon),\varepsilon)\in\ell_2, \quad i=\overline{1,2}, \tag{3.106}$$

$l_1y(\varepsilon)$ – лінійна частина функції $H(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon)$.

Згідно з [65], лінійний оператор $l_1=H'(z_0)$ є похідною від функції $H(z(\varepsilon),\varepsilon)$ в точці $z=z(c^0_{d_2})$.

При цьому маємо

$$R_1(\cdot,\varepsilon)\in C^1(\|y\|\le\mu), \quad R_2(\cdot,\varepsilon)\in D^1(\|y\|\le\mu), \\ R_i(y(\cdot),\cdot)\in C[0,\varepsilon_0], \quad R_i(0,0)=0, \quad \frac{\partial R_i(0,0)}{\partial y}=0, \quad i=\overline{1,2}. \tag{3.107}$$

Таким чином, розглядаючи праву частину рівняння (3.104) як неоднорідність, згідно теореми 2.3.1, отримаємо, що рівняння (3.104) буде мати розв'язок

$$y(\varepsilon)=P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2}+\bar y(\varepsilon), \quad \forall c_{d_2}\in\mathbb{R}^{d_2}, \tag{3.108}$$

$$\bar y(\varepsilon)=\varepsilon(P_{\Lambda_r}Q^+(H(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon)-W\Lambda^+\Lambda_1V(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon))+ \\ +\Lambda^+\Lambda_1V(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon)), \quad c_{d_2}\in\mathbb{R}^{d_2}. \tag{3.109}$$

Умова розв'язності рівняння (3.104) набуде вигляду

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1V(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon)=0, \tag{3.110}$$

$$P_{Q^*_{d_1}}(H(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon)-W\Lambda^+\Lambda_1V(z(c^0_{d_2})+y(\varepsilon),\varepsilon))=0. \tag{3.111}$$

Підставимо у рівності (3.110), (3.111) розклад (3.105)

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1y(\varepsilon)+R_1(y(\varepsilon),\varepsilon))=0,$$

$$P_{Q^*_{d_1}}(H(z_0(c^0_{d_2}),0)+l_1y(\varepsilon)+R_2(y(\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1y(\varepsilon)+R_1(y(\varepsilon),\varepsilon)))=0.$$

Враховуючи систему рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99) та представлення (3.108), отримаємо

$$\check{B}_0 c_{d_2} = G\check{b} \tag{3.112}$$

де матриця $\check{B}_0$ та неоднорідності G та $\check{b}$ мають вигляд

$$\check{B}_0 := \begin{bmatrix} P_{\Lambda^*_r}\Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q^*_{d_1}}(l_1 - W\Lambda^+\Lambda_1 A_1) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix}, \tag{3.113}$$

$$G := \begin{pmatrix} P_{\Lambda^*_r}\Lambda_1 & P_{Q^*_{d_1}} \end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

$$\check{b} := \begin{bmatrix} -(A_1\bar{y}(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon),\varepsilon)) \\ W\Lambda^+\Lambda_1(A_1\bar{y}(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon),\varepsilon)) - (l_1\bar{y}(\varepsilon) + R_2(y(\varepsilon),\varepsilon)) \end{bmatrix}. \tag{3.115}$$

Алгебраїчна система (3.112) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\check{B}^*_0} G\check{b} = 0. \tag{3.116}$$

Якщо

$$P_{\check{B}^*_0} G = 0, \tag{3.117}$$

то рівність (3.116) завжди виконується, і система (3.112) матиме розв'язок, а за умови

$$P_{\check{B}_0} = 0, \tag{3.118}$$

цей розв'язок буде єдиним.

Отже, для знаходження розв'язку рівняння (3.104), за умови (3.118), приходимо до системи операторних рівнянь

$$
\begin{gathered}
y(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon), \\
c_{d_2}(\varepsilon) = \check{B}_0^+ G \check{b}, \\
\bar{y}(\varepsilon) = \varepsilon(P_{\Lambda_r} Q^+(H(z_0(c_{d_2}^0), 0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + \\
+R_2(y(\varepsilon), \varepsilon) - W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + \\
+R_1(y(\varepsilon), \varepsilon))) + \Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \\
+\bar{y}(\varepsilon)) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon))), \quad c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.
\end{gathered}
\tag{3.119}
$$

Ввівши нову змінну $u = col(y(\varepsilon), c_{d_2}(\varepsilon), \bar{y}(\varepsilon))$, отримаємо рівняння

$$
u = Lu + Fu, \tag{3.120}
$$

де

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.121}
$$

$$
L_1 := \check{B}_0^+ G \begin{bmatrix} -A_1 \\ W\Lambda^+\Lambda_1 A_1 - l_1 \end{bmatrix}, \tag{3.122}
$$

$$
Fu := \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \check{B}_0^+ G \tilde{b} \\ \\ \varepsilon(P_{\Lambda_r} Q^+(H(z_0(c_{d_2}^0), 0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + R_2(y(\varepsilon), \varepsilon) - \\ -W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon))) + \\ +\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon))) \end{pmatrix},
$$

$$
\tilde{b} = \begin{bmatrix} -R_1(y(\varepsilon), \varepsilon) \\ W\Lambda^+\Lambda_1 R_1(y(\varepsilon), \varepsilon) - R_2(y(\varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix}. \tag{3.123}
$$

Квазітрикутний блочний матричний оператор $I - L$ завжди має обернений, що має вигляд

$$(I-L)^{-1} = \begin{pmatrix} I & P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} & I + P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}L_1 \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.124}$$

Тому рівняння (3.120) можна переписати у вигляді

$$u = \hat{S}u, \quad \hat{S} := (I-L)^{-1}F. \tag{3.125}$$

Враховуючи структуру оператора $\hat{S}$, при достатньо малих ε, оператор $\hat{S}$ буде стискаючим оператором. Отже, операторне рівняння (3.125) належить до класу рівнянь, для розв'язання яких застосовується метод простих ітерацій [32,96]. Враховуючи зв'язок системи операторних рівнянь (3.119) з операторним рівнянням (3.125), для знаходження наближеного розв'язку системи операторних рівнянь (3.119) пропонується використовувати наступний ітераційний процес.

Перше наближення $\bar{y}_1(\varepsilon)$ до елемента $\bar{y}(\varepsilon)$ знаходимо як частинний розв'язок рівняння

$$U\bar{y}_1(\varepsilon) = \varepsilon D(z(c^0_{d_2}), 0), \tag{3.126}$$

який існує завдяки вибору константи $c^0_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$ із системи рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99) та має вигляд

$$\begin{gathered} \bar{y}_1(\varepsilon) = \varepsilon(P_{\Lambda_r}Q^+(H(z(c^0_{d_2}),0) - \\ -W\Lambda^+\Lambda_1 V(z((c^0_{d_2}),0)) + \Lambda^+\Lambda_1 V(z(c^0_{d_2}),0)), \quad c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \end{gathered} \tag{3.127}$$

Приймемо $\bar{y}_1(\varepsilon)$ за перше наближення $y_1(\varepsilon)$ до розв'язку $y(\varepsilon)$ рівняння (3.104)

$$y_1(\varepsilon) = \bar{y}_1(\varepsilon). \tag{3.128}$$

Друге наближення $y_2(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ знаходимо із рівняння

$$U\bar{y}_2(\varepsilon) = \varepsilon \begin{bmatrix} \Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0) + A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_1(\bar{y}_1(\varepsilon),\varepsilon)) \\ H(z_0(c^0_{d_2}),0) + l_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_2(\bar{y}_1(\varepsilon),\varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$= \varepsilon D(z(c^0_{d_2}) + P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon). \tag{3.129}$$

Рівняння (3.129) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (V(z_0(c^0_{d_2}), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_1(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)) = 0, \tag{3.130}$$

$$\begin{gathered} P_{Q^*_{d_1}}(H(z_0(c^0_{d_2}), 0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_2(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon) - \\ - W \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c^0_{d_2}), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_1(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon))) = 0. \end{gathered} \tag{3.131}$$

Враховуючи (3.113) та (3.114), отримаємо

$$\check{B}_0 c^1_{d_2}(\varepsilon) = G \check{b}_1, \tag{3.132}$$

$$\check{b}_1 := - \begin{bmatrix} A_1 \bar{y}_1(\varepsilon) + R_1(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon) \\ l_1 \bar{y}_1(\varepsilon) + R_2(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon) - W \Lambda^+ \Lambda_1 (A_1 \bar{y}_1(\varepsilon) + R_1(\bar{y}_1(\varepsilon), \varepsilon)) \end{bmatrix}.$$

Умова розв'язності рівняння (3.132) має вигляд

$$P_{\check{B}^*_0} G \check{b}_1 = 0. \tag{3.133}$$

За умов (3.117), (3.118), рівність (3.133) виконується і із рівняння (3.132) єдиним чином визначається перше наближення $c^1_{d_2}(\varepsilon)$ до параметра $c_{d_2}(\varepsilon)$

$$c^1_{d_2}(\varepsilon) = \check{B}^+_0 G \check{b}_1. \tag{3.134}$$

Друге наближення $y_2(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ буде таким

$$y_2(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_2(\varepsilon), \tag{3.135}$$

де

$$\begin{gathered} \bar{y}_2(\varepsilon) = \varepsilon (P_{\Lambda_r} Q^+ (H(z_0(c^0_{d_2}), 0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_1(\varepsilon)) + \\ + R_2(y_1(\varepsilon), \varepsilon) - W \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c^0_{d_2}), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \\ + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_1(y_1(\varepsilon), \varepsilon))) + \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c^0_{d_2}), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^1_{d_2}(\varepsilon) + \\ + \bar{y}_1(\varepsilon)) + R_1(y_1(\varepsilon), \varepsilon))). \end{gathered} \tag{3.136}$$

Третє наближення $y_3(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ знаходимо із рівняння

$$Uy_3(\varepsilon)=\varepsilon\begin{bmatrix}\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon)+\bar y_2(\varepsilon))+R_1(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon))\\ H(z_0(c^0_{d_2}),0)+l_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon)+\bar y_2(\varepsilon))+R_2(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}=$$

$$=\varepsilon D(z(c^0_{d_2})+P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^2_{d_2}(\varepsilon)+\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon). \qquad (3.137)$$

Рівняння (3.137) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon)+\bar y_2(\varepsilon))+R_1(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon))=0, \qquad (3.138)$$

$$\begin{gathered}P_{Q^*_{d_1}}(H(z_0(c^0_{d_2}),0)+l_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon)+\bar y_2(\varepsilon))+\\ +R_2(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon)-W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^1_{d_2}(\varepsilon)+\\ +\bar y_2(\varepsilon))+R_1(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon)))=0.\end{gathered} \qquad (3.139)$$

Аналогічним чином, враховуючи (3.113) та (3.114), маємо

$$\check B_0 c^2_{d_2}(\varepsilon)=G\check b_2, \qquad (3.140)$$

$$\check b_2:=-\begin{bmatrix}A_1\bar y_2(\varepsilon)+R_1(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon)\\ l_1\bar y_2(\varepsilon)+R_2(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon)-W\Lambda^+\Lambda_1(A_1\bar y_2(\varepsilon)+R_1(\bar y_2(\varepsilon),\varepsilon))\end{bmatrix}.$$

Умова розв'язності рівняння (3.140) має вигляд

$$P_{\check B_0^*}G\check b_2=0. \qquad (3.141)$$

За умов (3.117), (3.118), рівність (3.141) виконується і із рівняння (3.140) єдиним чином визначається друге наближення $c^2_{d_2}(\varepsilon)$ до параметра $c_{d_2}(\varepsilon)$

$$c^2_{d_2}(\varepsilon)=\check B_0^+G\check b_2. \qquad (3.142)$$

Третє наближення $y_3(\varepsilon)$ до $y(\varepsilon)$ буде таким

$$y_3(\varepsilon)=P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^2_{d_2}(\varepsilon)+\bar y_3(\varepsilon), \qquad (3.143)$$

де

$$\begin{gathered}\bar{y}_3(\varepsilon)=\varepsilon(P_{\Lambda_r}Q^+(H(z_0(c^0_{d_2}),0)+l_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^2_{d_2}(\varepsilon)+\bar{y}_2(\varepsilon))+\\ +R_2(y_2(\varepsilon),\varepsilon)-W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^2_{d_2}(\varepsilon)+\\ +\bar{y}_2(\varepsilon))+R_1(y_2(\varepsilon),\varepsilon)))+\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^2_{d_2}(\varepsilon)+\\ +\bar{y}_2(\varepsilon))+R_1(y_2(\varepsilon),\varepsilon))).\end{gathered}\tag{3.144}$$

Продовжуючи цей процес далі, отримуємо таку ітераційну схему для знаходження $y_k(\varepsilon)$

$$\begin{gathered}c^k_{d_2}(\varepsilon)=\check{B}_0^+G\check{b}_k,\\ \bar{y}_{k+1}(\varepsilon)=\varepsilon(P_{\Lambda_r}Q^+(H(z_0(c^0_{d_2}),0)+l_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^k_{d_2}(\varepsilon)+\bar{y}_k(\varepsilon))+R_2(y_k(\varepsilon),\varepsilon)-\\ -W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^k_{d_2}(\varepsilon)+\bar{y}_k(\varepsilon))+R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon)))+\\ +\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0)+A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^k_{d_2}(\varepsilon)+\bar{y}_k(\varepsilon))+R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))),\\ y_{k+1}(\varepsilon)=P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c^k_{d_2}(\varepsilon)+\bar{y}_{k+1}(\varepsilon),\quad k=\overline{0,\infty},\\ y_0(\varepsilon)=\bar{y}_0(\varepsilon)=0.\end{gathered}$$

Отже, справедливою є наступна теорема.

Теорема 3.2.3 (**Достатня умова**). *Нехай породжуюче для рівняння (3.91) рівняння (2.107) за виконання $r+d_1$ лінійно-незалежних умов (2.109), (2.110) має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $z(c_{d_2})\in\ell_2$ (2.111). Тоді, для кожного значення векторної константи $c_{d_2}=c^0_{d_2}\in\mathbb{R}^{d_2}$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99) та при виконанні умов*

$$P_{\check{B}_0^*}G=0,\quad P_{\check{B}_0}=0$$

рівняння (3.91) буде мати розв'язок $z(\varepsilon)\in\ell_2$ неперервний по ε, який перетворюється при $\varepsilon=0$ в породжуючий розв'язок $z(c^0_{d_2})$. Цей розв'язок, при достат-

ньо малих ε, можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$c_{d_2}^k(\varepsilon) = \check{B}_0^+ G\check{b}_k,$$
$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon(P_{\Lambda_r}Q^+(H(z_0(c_{d_2}^0),0) + l_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_2(y_k(\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0),0) + A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))) +$$
$$+\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0),0) + A_1(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))),$$
$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = \overline{0,\infty},$$
$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Використовуючи отримані результати для слабконелінійного операторного рівняння (3.91), можна зробити висновки про існування розв'язку вихідної крайової задачі для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна (3.86), (3.87). Для цього використаємо перехід, який був описаний при дослідженні необхідної умови існування розв'язку крайової задачі (3.86), (3.87). Отже, сформулюємо достатню умову існування розв'язку вихідної крайової задачі (3.86), (3.87).

Теорема 3.2.4 (**Достатня умова**). *Нехай породжуюча для крайової задачі (3.86), (3.87) задача (2.1), (2.2), за виконання $r + d_1$ лінійно-незалежних умов (2.37), (2.38), має d_2-параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t, c_{d_2})$ (2.39). Тоді, для кожного значення векторної константи $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99) та при виконанні умов*

$$P_{\check{B}_0^*}G = 0, \quad P_{\check{B}_0} = 0$$

задача (3.86), (3.87) буде мати розв'язок

$$x = x(t,\varepsilon): \quad x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c_{d_2}^0)$. Цей розв'язок, при достаньо малих ε, можна знайти за допомогою збіжного ітераційного *процесу*

$$c^k_{d_2}(\varepsilon) = \check{B}_0^+ G \check{b}_k,$$
$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon(P_{\Lambda_r} Q^+(H(z_0(c^0_{d_2}),0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_2(y_k(\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon)))+$$
$$+\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c^0_{d_2}),0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))),$$
$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c^k_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = \overline{0,\infty},$$
$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Теорема 3.2.5. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Якщо $d_2 = r + d_1$, то для того, щоб слабконелінійна крайова задача (3.86), (3.87) мала розв'язок $x = x(t,\varepsilon) : x(t,0) = x_0(t, c^0_{d_2})$, де $x_0(t, c^0_{d_2})$ – породжуючий розв'язок з векторною константою $c_{d_2} = c^0_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}$, необхідно, щоб константа $c^0_{d_2}$ була дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (3.98), (3.99) і достатньо, щоб ця константа $c^0_{d_2}$ була простим коренем системи (3.98), (3.99).*

3.3. Слабконелінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

Розглянемо слабконелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \tilde{\Phi}(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \quad (3.145)$$

з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := M_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad (3.146)$$

$$t \neq \tau_i,\ t \in [a,b],\ \tau_i \in (a,b),\ i = 1,2,...,p$$

та крайовою умовою

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\ \ \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (3.147)$$

Будемо використовувати припущення і позначення з [77, 95]: $A(t), B(t), \tilde{\Phi}(t)$ — $(m\times n)$, $(m\times n)$, $(n\times m)$ — вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\tilde{\Phi}(t)$ лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; E_i, M_i — $(k_i\times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор-стовпчик констант, $\mathrm{rank}\,(E_i+M_i)=k_i$ $(i=1,2,...,p)$, тобто розв'язок системи (3.145) визначається однозначним продовженням через точки розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i\big(x(\tau_i+0)-x(\tau_i-0)\big). \tag{3.148}$$

Тут імпульс задається не по всіх компонентах невідомої n-вимірної вектор-функції $x(t)=col(x_1(t),x_2(t),...,x_{k_i}(t),...,x_n(t))$, а лише по k_i її компонентах;
S — обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $D_2[a,b]$, $S=col(S_1,S_2,S_3,..,S_q)\ :\ D_2[a,b]\ \to\ \mathbb{R}^q$; $\alpha=col(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_q)\ \epsilon\ \mathbb{R}^q$; $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна з квадратом по t і неперервна по ε:

$$Z(\cdot,t,\varepsilon)\in C^1[\|x-x_0\|\le\mu],\ Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b],\ Z(x(t,\cdot),t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0];$$

$J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійні обмежені, відповідно, p, q-вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовні по x у розумінні Фреше [65] і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Шукана функція $x(t)$ належить простору n-вимірних функцій, які допускають розриви першого роду у точках $\tau_1,\tau_2,...,\tau_p\in(a,b)$ і які абсолютно неперервні на кожному із проміжків: $[a,\tau_1),[\tau_1,\tau_2),...,[\tau_p,b]$. Такі функції $x(t)\in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$ допускають представлення:

$$x(t)=\int\limits_a^t \dot{x}(s)ds+x(a)+\sum_{i=1}^{p}\chi_{[\tau_i,b]}(t)\Delta x(\tau_i), \tag{3.149}$$

де $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)$, $i = 1, ..., p$, $\chi_{[\tau_i,b]}(t)$ — характеристична функція проміжка $[\tau_i, b]$. Норма у просторах $D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ вводиться як у [2]:

$$\|x\|_{D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)} = \|\dot{x}\|_{L_2[a,b]} + |x(a)|_{\mathbb{R}^n} + \|\sum_{i=1}^{p} \chi_{[\tau_i,b]}(t)\Delta x(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^n},$$
$$\|x\|_{L_2[a,b]} = \left(\int_a^b \sum_{i=1}^{n} | \ x_i(t) \ |^2 \ dt \right)^{1/2}, \quad t \in [a,b]. \tag{3.150}$$

Покажемо, що досліджувати задачу з імпульсним впливом (3.145)–(3.147) можна, розглядаючи її як внутрішню крайову задачу ("interface BVP's" [116]). Для того, щоб показати цей зв'язок, введемо $\varphi x(\cdot)$ — k–вимірний лінійний обмежений векторний функціонал

$$\varphi := col(\varphi_1, ..., \varphi_p) : D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to \mathbb{R}^k, \quad k := k_1 + k_2 + ... + k_p,$$

$$\varphi_i : D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to \mathbb{R}^{k_i}, \ (i = 1, ..., p)$$

наступним чином

$$\begin{cases} \varphi_1 x := E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + M_1)x(\tau_1-) \\ \varphi_2 x := E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + M_2)x(\tau_2-) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p x := E_p x(\tau_p+) - (E_p + M_p)x(\tau_p-) \end{cases} \tag{3.151}$$

та запишемо імпульсну дію (3.146) як крайову умову

$$\varphi x(\cdot) = \gamma + \varepsilon J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{3.152}$$

де $\gamma = col(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p) \in \mathbb{R}^k$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$.

Об'єднаємо таким чином отриману внутрішню крайову умову (3.152) із заданою крайовою умовою (3.147) і отримаємо $(k + q)$ умов на невідому n-вимірну вектор-функцію $x(t)$:

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \in \mathbb{R}^{k+q}, \tag{3.153}$$

де

$$\mathfrak{L} := \begin{bmatrix} \varphi \\ S \end{bmatrix}, \ \delta := \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \ J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) := \begin{bmatrix} J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \\ J_2(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Тепер слабконелінійну імпульсну крайову задачу (3.145)-(3.147) можна розглядати як слабконелінійну крайову задачу (3.145), (3.153). Аналогічно, як у роботі [6], можна встановити необхідну та достатню умови розв'язності та зв'язок між цими умовами для отриманої таким чином слабконелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь (3.145), (3.153).

Отже, шукаємо розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (3.145), (3.153), визначений у такому класі вектор-функцій

$$x = x(t,\varepsilon): \quad x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

і який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \tilde{\Phi}(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t), \tag{3.154}$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q}. \tag{3.155}$$

яка детально розглянута у роботі [20]. Наведемо відомий критерій розв'язності породжуючої крайової задачі (3.154), (3.155) [77].

Теорема 3.3.1. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \le \min(k+q, r_1)$. *Тоді однорідна імпульсна крайова задача (3.154), (3.155)* $(f(t) = 0, \delta = 0)$ *має* r *лінійно-незалежних розв'язків вигляду:*

$$x(t,c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r,$$

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D,\ r = r_1 - \operatorname{rank} Q.$$

Неоднорідна крайова задача (3.154), (3.155) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуютьcя умови:

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}}(\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) = 0, \tag{3.156}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = k + q - \operatorname{rank} Q,$$

та має r*-параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків:*

$$x(t,c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) + F(t), \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{3.157}$$

Тут $\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$, $\Psi(t) = \int\limits_a^t \tilde{\Phi}(s)ds$ — відповідно, $n \times (m+n)$ та $n \times m$ вимірні матриці; $D = \Big[I_m - \int\limits_a^b \Big[A(s)\Psi(s) + B(s)\tilde{\Phi}(s)\Big]ds, -\int\limits_a^b A(s)ds\Big]$ — $m \times (m+n)$ вимірна матриця, $\tilde{f}(t) = \int\limits_a^t f(s)ds$, $\tilde{b} = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\Big]ds$, $F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}$, I_m, I_n — одиничні матриці відновідних порядків; P_D, P_{D^*} — $(m+n)\times(m+n)$, $m \times m$ -вимірні матриці, відповідно, ортопроектори на ядро та коядро матриці D; $P_{D_{r_1}}$ $(P_{D^*_{d_1}})$ — матриця, яка складається із повної системи r_1 (d_1) лінійно-незалежних стовпчиків (рядків) матриці ортопроектора P_D (P_{D^*}). Матриця $Q = \mathfrak{L}(\Psi_0(\cdot))P_{D_{r_1}}$– $(k+q) \times r_1$-вимірна і побудована згідно [77]; D^+ (Q^+) — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до D (Q) матриця. P_Q, P_{Q^*}, відповідно, $r_1 \times r_1$, $(k+q)\times(k+q)$-вимірні матриці, ортопроектори на ядро та коядро матриці Q; P_{Q_r} $(P_{Q^*_{d_2}})$ — матриця, яка складається з повної системи r (d_2) лінійно-незалежних стовпчиків (рядків) матриці P_Q (P_{Q^*}) [95].

Далі, розв'язок (3.157) породжуючої крайової задачі (3.154), (3.155) — $x(t,0) = x_0(t, c_r)$ будемо називати породжуючим розв'язком слабконелінійної імпульсної крайової задачі (3.145)–(3.147), де $c_r \in \mathbb{R}^r$ — невідома константа, яка буде визначена нижче.

3.3.1. Необхідна умова існування розв'язку.

Розглянемо критичний випадок, коли відповідна однорідна породжуюча крайова задача (3.154), (3.155) $(f(t) = 0,\ \delta = 0)$ має нетривіальні розв'язки $x(t, c_r) = x_0(t, c_r)$, які визначаються формулою (3.157). Спочатку встановимо необхідну умову розв'язності крайової задачі (3.145), (3.153). Справедливим буде наступне твердження.

Теорема 3.3.2. (Необхідна умова). *Нехай слабконелінійна імпульсна крайова задача* (3.145)–(3.147) *має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r)$ (3.157) *з векторною константою* $c_r = c_r^0$ $(r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$.

Тоді константа c_r^0 *обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант*

$$P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b\Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)dsd\tau+$$
$$+B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau\Bigg]ds=0, \quad (3.158)$$

$$P_{Q_{d_2}^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0)-\mathfrak{L}\Bigg(\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)dsd\tau+$$
$$+\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Bigg[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)dsd\tau+$$
$$+B(t)\int\limits_a^b K(t,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)ds\Bigg]dt\Bigg)\Bigg\}=0, \quad (3.159)$$

$$d_1=m-\operatorname{rank}D, \quad d_2=k+q-\operatorname{rank}Q.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 5.4 [95] та теореми 4.5 [30]. У випадку періодичних задач, константа c_r^0 має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку. Тому у класичній періодичній задачі відповідне рівняння для систем звичайних диференціальних рівнянь називають рівнянням для породжуючих амплітуд [32, 68]. По аналогії, будемо називати систему рівнянь (3.158), (3.159) — системою рівнянь для породжуючих констант імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь (3.145)–(3.147).

Якщо система рівнянь (3.158), (3.159) розв'язна, то константа $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ визначає той породжуючий розв'язок (3.157) $x(t,c_r) = x_0(t,c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t,\varepsilon)$ вихідної імпульсної крайової задачі (3.145)–(3.147) (а це те саме, що розв'язок внутрішньої крайової задачі (3.145), (3.153)) при $\varepsilon = 0$. Якщо ж система рівнянь (3.158), (3.159) не має розв'язку, то й імпульсна крайова задача (3.145)–(3.147) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні корені системи рівнянь для породжуючих констант (3.158), (3.159). Таким чином, необхідною умовою розв'язності імпульсної крайової задачі (3.145)–(3.147) є вимога, щоб система рівнянь (3.158), (3.159) мало хоча один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$.

3.3.2. Достатня умова існування розв'язку. Для отримання достатньої умови існування розв'язку вихідної імпульсної крайової задачі виконаємо заміну змінних у внутрішній крайовій задачі (3.145), (3.153):

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon).$$

Тоді у нових змінних будемо шукати умови існування розв'язку $y(t, \varepsilon)$:

$$y(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{y}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у нульовий розв'язок $y(t, 0) = 0$ крайової задачі:

$$\dot{y}(t) - \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)y(s) + B(s)\dot{y}(s)\Big] ds =$$

$$= \varepsilon \int_a^b K(t, s) Z\big(x_0(s, c_r^0) + y(s, \varepsilon), s, \varepsilon\big) ds, \quad (3.160)$$

$$\mathfrak{L}y(\cdot) = \varepsilon J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big). \quad (3.161)$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$ та неперервну диференційовність за Фреше векторного функціонала $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по першій компонентій в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у вектор-функції $Z(x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ і у векторному функціоналі $J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big)$ лінійні частини по y і члени нульового порядку по ε. Тоді має місце розклад

$$Z(x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)y(t, \varepsilon) + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (3.162)$$

$$J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\big) = J(x_0(\cdot, c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (3.163)$$

де

$$Z(x_0(t,c_r^0),t,0)\in C[a,b],\ J(x_0(\cdot,c_r^0))=J(x_0(\cdot,c_r^0),0),$$

$$A_1(t)=A_1(t,c_r^0)=\frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t,c_r^0)}\in C[a,b],$$

$\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціоналу $J\big(x_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$.

Згідно з [65], лінійний оператор $\mathfrak{L}_1 = J'(x_0)$ є похідною Фреше від векторного функціонала $J\big(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$ в точці $x = x_0(t,c_r^0)$. Нелінійна вектор-функція $R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить класу $C^1(\|y\| \le \mu),\ L_2[a,b],\ C[0,\varepsilon_0]$. При цьому маємо

$$R(0,t,0)=0,\quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y}=0,\quad R_1(0,0)=0,\quad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial y}=0.$$

Врахувавши розклад нелінійностей (3.162), (3.163) у крайовій задачі (3.160), (3.161) отримаємо наступну задачу

$$\dot y(t)-\Phi(t)\int_a^b\Big[A(s)y(s)+B(s)\dot y(s)\Big]ds=h(t,\varepsilon), \tag{3.164}$$

$$\mathfrak{L}y(\cdot)=\varepsilon\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0))+\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}, \tag{3.165}$$

розв'язок якої будемо шукати у наступному вигляді

$$y(t,\varepsilon)=X_r(t)c+\bar y(t,\varepsilon),\ c=c(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r,$$

$X_r(t)=\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}$ — $n\times r$-вимірна матриця, $c\in\mathbb{R}^r$ невідома константа, яка буде визначена нижче і

$$\bar y(t,\varepsilon)=\varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0))+\mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\mathfrak{L}F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}+F_0(t,\varepsilon).$$

Згідно з теоремою 3.3.1, неоднорідна крайова задача (3.164), (3.165) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde b_0(\varepsilon)=0, \tag{3.166}$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\varepsilon J\big(x_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)-\mathfrak{L}F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}=0. \tag{3.167}$$

Тут $\tilde b_0(\varepsilon) = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde h(s,\varepsilon) + B(s)h(s,\varepsilon)\Big]ds$ — $n \times 1$-вимірний вектор-стовпчик, компоненти якого належать простору $C[0,\varepsilon_0]$,

$$h(t,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_a^b K(t,s)\Big[Z(x_0(s,c_r^0),s,0) + A_1(s)y(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds =$$

$$= \varepsilon\Big(h_1(t)c + h_2^0(t,\varepsilon)\Big),$$

$$h_1(t) = \int\limits_a^b K(t,s)A_1(s)X_r(s)ds,$$

$$h_2^0(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\Big[Z(x_0(s,c_r^0),s,0) + A_1(s)\bar y(s,\varepsilon) + R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$F_0(t,\varepsilon) = \tilde h(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\tilde b_0(\varepsilon) = F_0^1(t) + F_0^2(t,\varepsilon),$$

$$F_0^1(t) = \tilde h_1(t) + \Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde h_1(s) + B(s)h_1(s)\Big]ds,$$

$$F_0^2(t,\varepsilon) = \tilde h_2^0(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde h_2^0(s,\varepsilon) + B(s)h_2^0(s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\tilde h(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h(s,\varepsilon)ds,\ \ \tilde h_1(t) = \int\limits_a^t h_1(s)ds,\ \ \tilde h_2^0(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h_2^0(s,\varepsilon)ds.$$

Враховуючи, що $y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar y(t,\varepsilon)$ із (3.166), (3.167) отримаємо наступну систему для відшукання невідомого вектора-констант $c \in \mathbb{R}^r$:

$$P_{D^*_{d_1}}\Big\{\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde h_1(s) + B(s)h_1(s)\Big]ds\Big\}c =$$

$$= -P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde h_2^0(s,\varepsilon) + B(s)h_2^0(s,\varepsilon)\Big]ds, \quad (3.168)$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1X_r(\cdot) - \mathfrak{L}F_0^1(\cdot)\Big\}c = -P_{Q^*_{d_2}}\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1\bar y(\cdot,\varepsilon) +$$

$$+ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L}F_0^2(\cdot,\varepsilon)\Big\}. \quad (3.169)$$

Враховуючи рівняння для породжуючих констант (3.158), (3.159), система рівнянь (3.168), (3.169) набуде вигляду

$$P_{D^*_{d_1}}\Big\{\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{h}_1(s)+B(s)h_1(s)\Big]ds\Big\}c=$$

$$=-P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{e}^0_2(s,\varepsilon)+B(s)e^0_2(s,\varepsilon)\Big]ds,\quad (3.170)$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)-\mathfrak{L}F^1_0(\cdot)\Big\}c=-P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1\bar{y}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)-\mathfrak{L}F^3_0(\cdot,\varepsilon)\Big\}.\quad (3.171)$$

Тут

$$e(t,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)y(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds=\varepsilon\Big(h_1(t)c+e^0_2(t,\varepsilon)\Big),$$

$$e^0_2(t,\varepsilon)=\int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)\bar{y}(s,\varepsilon)+R(y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\tilde{F}_0(t,\varepsilon)=\tilde{e}(t,\varepsilon)+\Psi_0(t)D^+\rho_0(\varepsilon)=F^1_0(t)+F^3_0(t,\varepsilon),$$

$$F^3_0(t,\varepsilon)=\tilde{e}^0_2(t,\varepsilon)+\Psi_0(t)D^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{e}^0_2(s,\varepsilon)+B(s)e^0_2(s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\rho_0(\varepsilon)=\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{e}(s,\varepsilon)+B(s)e(s,\varepsilon)\Big]ds,\ \tilde{e}(t,\varepsilon)=\int\limits_a^t e(s,\varepsilon)ds,\ \tilde{e}^0_2(t,\varepsilon)=\int\limits_a^t e^0_2(s,\varepsilon)ds.$$

Систему (3.170), (3.171) можна записати наступним чином

$$\tilde{B}_0c=g,\quad (3.172)$$

де $(d_1+d_2)\times r$-вимірна матриця

$$\tilde{B}_0:=\begin{bmatrix}P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{h}_1(s)+B(s)h_1(s)\Big]ds\\ P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1X_r(\cdot)-\mathfrak{L}F^1_0(\cdot)\Big\}\end{bmatrix},$$

та $(d_1 + d_2) \times 1$-вимірна вектор-функція

$$g := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{e}^0_2(s,\varepsilon) + B(s)e^0_2(s,\varepsilon)\Big]ds \\ -P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1\bar{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L}F^3_0(\cdot,\varepsilon)\Big\} \end{bmatrix}.$$

Система (3.172) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\tilde{B}^*_0} g = 0. \tag{3.173}$$

Оскільки вектор-функція g містить невідомі величини, то для того, щоб конструктивно скористатися цією умовою, замість (3.173) будемо вимагати, щоб виконувалася умова $P_{\tilde{B}^*_0} = 0$, яка еквівалентна умові

$$\operatorname{rank} \tilde{B}_0 = d_1 + d_2, \quad d_1 + d_2 \leq r. \tag{3.174}$$

Тут $P_{\tilde{B}^*_0}$ — $(d_1 + d_2) \times (d_1 + d_2)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ на нуль-простір $N(\tilde{B}^*_0)$.

Розв'язавши систему (3.172), приходимо до наступної еквівалентної операторної системи

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar{y}(t,\varepsilon),$$

$$c = \tilde{B}^+_0 g, \tag{3.175}$$

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c^0_r)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L}F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_0(t,\varepsilon).$$

Введемо $u = col(y(t,\varepsilon), c, \bar{y}(t,\varepsilon))$ та запишемо систему (3.175) у нових змінних

$$u = L^{(1)}u + \hat{F}u, \tag{3.176}$$

де

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & X_r(t) & I_n \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1\varphi = \tilde{B}_0^+ \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau dt + \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau\Big]ds \\ \\ -P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1\varphi(\cdot) - \mathfrak{L}\Big(\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau + \\ +\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau dt + \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau\Big]ds\Big)\Big\} \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{B}_0^+\ \bar{g} \\ \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ -\mathfrak{L}F_0(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_0(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\bar{g} := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau dt + \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\Big]ds \\ \\ -P_{Q^*_{d_2}}\Big\{R_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L}\Big(\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau + \\ +\Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b \Big[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(t,\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau dt + \\ +B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\Big]ds\Big)\Big\} \end{bmatrix}.$$

Систему (3.175) запишемо у вигляді:

$$(I_\theta - L^{(1)})u = \hat{F}u, \quad \theta = 2n + r.$$

Квазітрикутний блочний матричний оператор $(I_\theta - L^{(1)})$ завжди має обернений, тому систему (3.175) можна записати наступним чином

$$u = \hat{S}u, \quad \hat{S} := (I_\theta - L^{(1)})^{-1}\hat{F}.$$

За рахунок вибору ε та околу породжуючого розв'язку, враховуючи структуру оператора $\hat{F}$, аналогічно як і в [32,68], можна показати, що оператор $\hat{S}$ є оператором стиску [54], який діє з простору $D_2\big([a,b];\mathbb{R}^n\big) \times C\big([0,\varepsilon_0];\mathbb{R}^r\big) \times D_2\big([a,b];\mathbb{R}^n\big)$ в себе з відповідною нормою. Отже, операторне рівняння $u = \hat{S}u$ буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти як $u = \lim\limits_{v\to\infty} u_v, \quad u_v = \hat{S}u_{v-1},$ де $u_0 = col(y_0, c_0, \bar{y}_0) = 0$. Повертаючись до вихідної крайової задачі (3.145), (3.147), для знаходження розв'язку будемо мати наступний ітераційний процес.

На першому кроці ітераційного процесу отримаємо крайову задачу

$$\dot{y}_1(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)y_1(s) + B(s)\dot{y}_1(s)\Big]ds = \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)Z\big(x_0(s,c_r^0),s,0\big)ds, \quad (3.177)$$

$$\mathfrak{L}y_1(\cdot) = \varepsilon J\big(x_0(\cdot,c_r^0),0\big), \quad (3.178)$$

яка розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{D^*_{d_1}}\int\limits_a^b \Bigg[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)ds d\tau +$$
$$+ B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau\Bigg]ds = 0,$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - \mathfrak{L}\Bigg(\int\limits_a^{\cdot}\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)ds d\tau +$$
$$+ \Psi_0(\cdot)D^+\int\limits_a^b\Bigg[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)ds d\tau +$$
$$+ B(t)\int\limits_a^b K(t,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)ds\Bigg]dt\Bigg)\Bigg\} = 0.$$

Ці умови виконуються, оскільки породжуючий розв'язок задовольняє умови (3.158), (3.159) внаслідок вибору константи $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$. Перше наближення $y_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (3.160), (3.161) вважаємо рівним

$\bar{y}_1(t,\varepsilon)$. Тоді

$$y_1(t,\varepsilon) = \bar{y}_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - \mathfrak{L}F_1(\cdot,\varepsilon)\Big\} + F_1(t,\varepsilon),$$

де

$$F_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\int_a^t\int_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)dsd\tau +$$
$$+\varepsilon\Psi_0(t)D^+\int_a^b\Big[A(s)\int_a^s\int_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r^0),s,0)dsd\tau +$$
$$+B(s)\int_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau\Big]ds.$$

На другому кроці ітераційного процесу маємо крайову задачу:

$$\dot{y}_2(t) - \Phi(t)\int_a^b\Big[A(s)y_2(s) + B(s)\dot{y}_2(s)\Big]ds = \varepsilon\int_a^b K(t,s)\Big[Z(x_0(s,c_r^0),s,0)+$$
$$+A_1(s)\Big[X_r(t)c_1 + \bar{y}_1(s,\varepsilon)\Big] + R(y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds, \quad (3.179)$$

$$\mathfrak{L}y_2(\cdot) = \varepsilon\Big\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1\Big[X_r(\cdot)c_1 + \bar{y}_1(\cdot,\varepsilon)\Big] + R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}. \quad (3.180)$$

З необхідної та достатньої умов розв'язності цієї крайової задачі отримаємо алгебраїчну, відносно $c_1 \in \mathbb{R}^r$, систему:

$$\tilde{B}_0c_1 = \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}}\int_a^b\Big[A(s)\tilde{e}_2^1(s,\varepsilon) + B(s)e_2^1(s,\varepsilon)\Big]ds \\ -P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1\bar{y}_1(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L}F_1^3(\cdot,\varepsilon)\Big\}\end{bmatrix}. \quad (3.181)$$

Тут

$$F_1^3(t,\varepsilon) = \tilde{e}_2^1(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+\int_a^b\Big[A(s)\tilde{e}_2^1(s,\varepsilon) + B(s)e_2^1(s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$e_2^1(t,\varepsilon) = \int_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)\bar{y}_1(s,\varepsilon) + R(y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds, \quad \tilde{e}_2^1(t,\varepsilon) = \int_a^t e_2^1(s,\varepsilon)ds,$$

яка при умові (3.174) буде розв'язна. Тоді перше наближення c_1 до $c(\varepsilon)$ має вигляд:

$$c_1 = \tilde{B}_0^{+} \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{e}_2^1(s,\varepsilon) + B(s)e_2^1(s,\varepsilon)\Big] ds \\ -P_{Q^*_{d_2}} \Big\{ \mathfrak{L}_1 \bar{y}_1(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L} F_1^3(\cdot,\varepsilon) \Big\} \end{bmatrix}.$$

Друге наближення $y_2(t,\varepsilon)$ до шуканого $y(t,\varepsilon)$ має вигляд:

$$y_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_1 + \bar{y}_2(t,\varepsilon).$$

Продовжуючи ітераційний процес, з операторної системи (3.175) для знаходження розв'язку $y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$ крайової задачі (3.160), (3.161) отримаємо наступну ітераційну процедуру:

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$c_k = \tilde{B}_0^{+} \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{e}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)e_2^k(s,\varepsilon)\Big] ds \\ -P_{Q^*_{d_2}} \Big\{ \mathfrak{L}_1 \bar{y}_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathfrak{L} F_k^3(\cdot,\varepsilon) \Big\} \end{bmatrix}, \qquad (3.182)$$

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^{+} \Big\{ J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathfrak{L}_1 y_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \mathfrak{L} F_k(\cdot,\varepsilon) \Big\} + F_k(t,\varepsilon).$$

Тут

$$F_k(t,\varepsilon) = \tilde{h}_k(t,\varepsilon) + \Psi_0(t) D^{+} \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_k(s,\varepsilon) + B(s)h_k(s,\varepsilon)\Big] ds = F_0^1(t) + F_k^2(t),$$

$$F_0^1(t) = \tilde{h}_1(t) + \Psi_0(t) D^{+} \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s) + B(s)h_1(s)\Big] ds,$$

$$F_k^2(t,\varepsilon) = \tilde{h}_2^k(t,\varepsilon) + \Psi_0(t) D^{+} \int_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)h_2^k(s,\varepsilon)\Big] ds,$$

$$h_k(t,\varepsilon) = \varepsilon \Big(h_1(t) + h_2^k(t,\varepsilon) \Big),$$

$$h_1(t) = \int\limits_a^b K(t,s)A_1(s)X_r(s)ds,$$

$$h_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)\bar{y}_{k-1}(s,\varepsilon) + R(y_{k-1}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\tilde{h}_k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h_k(s,\varepsilon)ds, \quad \tilde{h}_1(t) = \int\limits_a^t h_1(s)ds, \quad \tilde{h}_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t h_2^k(s,\varepsilon)ds,$$

$$e_k(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(h_1(t) + e_2^k(t,\varepsilon)\Big),$$

$$e_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^b K(t,s)\Big[A_1(s)\bar{y}_{k-1}(s,\varepsilon) + R(y_{k-1}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]ds,$$

$$\tilde{e}_k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t e_k(s,\varepsilon)ds, \quad \tilde{e}_2^k(t,\varepsilon) = \int\limits_a^t e_2^k(s,\varepsilon)ds.$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 3.3.3. (Достатня умова) *Нехай породжуюча крайова задача (3.154), (3.155), при виконанні умов (3.156), має r-параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t,c_r)$(3.157)* ($r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q$). *Тоді для кожної дійсної векторної константи $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (3.158), (3.159) та при виконанні умови (3.174), слабконелінійна крайова задача (3.145)–(3.147) має хоча б один розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$ і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу (3.182) та формулою* $x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_k(t,\varepsilon)$, $(k = 0,1,2,...)$.

Теорема 3.3.4. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Для того, щоб слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (3.145)–(3.147) мала розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ необхідно, щоб константа c_r^0 була дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (3.158), (3.159) і достатньо, щоб виконувалася умова (3.174).*

Більше того, якщо $d_1 + d_2 = r$, *умова (3.174) означає, що* $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ *є простим коренем системи рівнянь для породжуючих констант (3.158), (3.159).*

ВИСНОВКИ ДО ТРЕТЬОГО РОЗДІЛУ

У третьому розділі дисертаційної роботи встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків нетерових крайових задач для слабконелінійних інтегральних рівнянь типу Гамерштейна та систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Запропоновано ітераційні схеми побудови наближених розв'язків. Для інтегрального рівняння типу Гамерштейна роглянуто випадок невиродженого інтегрального оператора.

РОЗДІЛ 4
ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА З КЕРУВАННЯМ

Різноманітним задачам з керуванням для функціонально-диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь і їх систем присвячено багато публікацій. Одним із напрямків є підхід, який ґрунтується на залученні апарату теорії псевдообернених операторів [95, 96, 99]. В даному розділі, в межах цього підходу, встановлено необхідні та достатні умови розв'язності крайових задач для інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням та знайдено загальний вигляд їх розв'язку.

Нагадаємо, що в другому розділі було розглянуто питання розв'язності слабкозбуреної крайової задачі у випадку, коли породжуюча задача не мала розв'язку. В цьому розділі наведемо інший підхід, де збурення породжуючої задачі проводиться за допомогою введення у її праву частину керування (постійного або змінного).

4.1. Інтегральні рівняння типу Фредгольма зі сталим керуванням

4.1.1. Загальний вигляд розв'язку інтегрального рівняння. Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ інтегральне рівняння з керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds \cdot u. \tag{4.1}$$

Тут сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$ ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f \in L_2[a,b]$ – відомі, а функцію $x \in L_2[a,b]$ та керування $u \in \mathbb{R}$ – потрібно визначити.

Будемо вважати, що інтегральне рівняння без керування

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t),$$

тобто рівняння (2.1), при деяких неоднорідностях $f \in L_2[a,b]$ не має розв'язку.

Ставиться питання знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в праву частину рівняння (2.1) керування $\int\limits_a^b K_1(t,s)x(s)ds \cdot u$, рівняння (4.1) стає розв'язним.

Використовуючи перехід, описаний для рівняння (2.1) у підрозділі 2.1, зведемо рівняння (4.1) до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь з керуванням.

Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Використовуючи позначення (2.3) та (2.50):

$$x_i = \int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

отримаємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь з керуванням

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}x_j \cdot u, \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо систему (4.2) у вигляді операторного рівняння в просторі ℓ_2

$$\Lambda z = g + \Lambda_1 z u, \tag{4.3}$$

де матриці Λ, Λ_1, вектор-стовпчики z та g визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54):

$$z = col\Big(x_1, \ \ x_2, \ \ \ldots, \ \ x_i, \ \ \ldots\Big) \in \ell_2, \quad g = col\Big(f_1, \ \ f_2, \ \ \ldots, \ \ f_i, \ \ \ldots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1-a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Операторне рівняння для рівняння (4.3) без керування має вигляд (2.6):

$$\Lambda z = g.$$

Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язків неоднорідного рівняння з керуванням (4.1), при умові, що породжуюче рівняння (2.1), а, отже і операторне рівняння (2.6), не мають розв'язків. Виникає питання: чи можна за допомогою введення у праву частину рівняння (2.6) керування $\Lambda_1 z \cdot u$, зробити операторне рівняння (4.3), а, отже і вихідне інтегральне рівняння (4.1), розв'язними?

Так як операторне рівняння без керування (2.6) не має розв'язку, то умова (2.14) теореми 2.1.2 не виконується. Згідно цієї теореми неоднорідне рівняння (4.3) є розв'язним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 z u) = 0. \tag{4.4}$$

Звідси,

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 z u = -P_{\Lambda_r^*} g. \tag{4.5}$$

Введемо позначення

$$\Delta := P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1. \tag{4.6}$$

Таким чином, враховуючи (4.6), отримаємо

$$\Delta z u = -P_{\Lambda_r^*} g. \tag{4.7}$$

За умови

$$P_{\Delta_{r_1}^*} P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad r_1 \le r \tag{4.8}$$

алгебраїчна система (4.7) буде розв'язною відносно zu та за теоремою 2.1.2 її розв'язок буде мати вигляд

$$zu = P_{\Delta}c - \Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g, \quad \forall c \in l_2. \tag{4.9}$$

Тут P_{Δ} – матриця-ортопроектор на ядро матриці Δ, $P_{\Delta^*_{r_1}}$ – матриця, яка складається із повної системи r_1 лінійно-незалежних рядків матриці P_{Δ^*}, що є ортопроектором на коядро матриці Δ, Δ^{+} – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до матриці Δ матриця.

Зазначимо, що за умови $P_{\Delta} = 0$, система (4.7) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$zu = -\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.10}$$

Підставимо у рівняння (4.3) замість zu вираз (4.10), отримаємо

$$\Lambda z = g - \Lambda_1\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.11}$$

Згідно з теоремою 2.1.2 рівняння (4.11) буде розв'язним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g) = 0, \tag{4.12}$$

та один із розв'язків рівняння (4.11) має вигляд

$$z = \Lambda^{+}(g - \Lambda_1\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g). \tag{4.13}$$

Зазначимо, що за умови $P_{\Lambda_r} = 0$ цей розв'язок буде єдиним.

Знайдемо явний вигляд функції постійного керування. Для цього домножимо рівність (4.13) на u справа та порівняємо з рівностю (4.10). Маємо

$$(\Lambda^{+}(g - \Lambda_1\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g))u = -\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.14}$$

Введемо позначення

$$\tilde{F} := \Lambda^{+}(g - \Lambda_1\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g), \tag{4.15}$$

тоді рівність (4.14) перепишеться у вигляді

$$\tilde{F}u = -\Delta^{+}P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.16}$$

Згідно з теоремою 2.1.2 рівняння (4.16) є розв'язним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\tilde{F}^*}\Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g = 0. \tag{4.17}$$

Один із розв'язків рівняння (4.16) зображається у вигляді

$$u = -\tilde{F}^+\Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{4.18}$$

Зазначимо, що за умови $P_{\tilde{F}} = 0$ цей розв'язок є єдиним.

Тут $P_{\tilde{F}}$ ($P_{\tilde{F}^*}$) – матриця-ортопроектор на ядро (коядро) матриці $\tilde{F}$, $\tilde{F}^+$ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до матриці $\tilde{F}$ матриця.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1.1. *Нехай операторне рівняння без керування (2.6) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Delta_{r_1}^*} P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g) = 0,$$

то один із розв'язків операторного рівняння (4.3) буде мати вигляд (4.13), а за умови

$$P_{\tilde{F}^*}\Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g = 0$$

керування u визначатиметься представленням (4.18). Якщо виконуються додаткові умови

$$P_{\Delta} = 0, \quad P_{\Lambda_r} = 0, \quad P_{\tilde{F}} = 0,$$

то розв'язок z рівняння (4.3) та керування u будуть єдиними.

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння з керуванням (4.3), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням (4.1). Для цього використаємо перехід, описаний у підрозділі 2.1, згідно якого можна зробити висновок про те, що множина елементів

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{4.19}$$

і є шуканою сім'єю розв'язків вихідного інтегрального рівняння (4.1). Отже тепер сформулюємо критерій розв'язності інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням (4.1).

Теорема 4.1.2. *Нехай інтегральне рівняння (2.1) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Delta^*_{r_1}} P_{\Lambda^*_r} g = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g) = 0,$$

то один із розв'язків інтегрального рівняння (4.1) буде мати вигляд (4.19), а за умови

$$P_{\tilde{F}^*} \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g = 0$$

керування и визначатиметься представленням (4.18). Якщо виконуються додаткові умови

$$P_{\Delta} = 0, \quad P_{\Lambda_r} = 0, \quad P_{\tilde{F}} = 0,$$

то розв'язок $\{x(t), u\}$ рівняння (4.1) буде єдиним.

4.1.2. Приклад. Проілюструємо наведені вище теоретичні викладки на конкретному прикладі. Розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds = f(t) + \int\limits_0^{\pi} K_1(t,s) x(s) ds \cdot u. \tag{4.20}$$

Породжуюче до нього рівняння має вигляд

$$x(t) - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds = f(t). \tag{4.21}$$

У нашому випадку ядро $K(t,s)$ є виродженим та симетричним. Отже, замість системи $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ ми можемо взяти систему власних функцій оператора

$$(Kw)(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(t+s) w(s) ds. \tag{4.22}$$

Неважко переконатись, що ортонормовані функції $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t$ і $\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t$ є власними функціями оператора (4.22), які відповідають характеристичним числам $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ відповідно.

Зведемо рівняння (4.20) та (4.21) до рівнянь виду (4.3) та (2.6). Отримаємо

$$\Lambda z = g + \Lambda_1 z u, \tag{4.23}$$

$$\Lambda z = g, \tag{4.24}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} x(t)\cos t dt, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} x(t)\sin t dt, \tag{4.26}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} f(t)\cos t dt, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin t dt, \tag{4.27}$$

$$\tilde{a}_{11} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} K_1(t,s)\cos t\cos s dt ds, \ \tilde{a}_{12} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} K_1(t,s)\cos t\sin s dt ds, \tag{4.28}$$

$$\tilde{a}_{21} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} K_1(t,s)\sin t\cos s dt ds, \ \tilde{a}_{22} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} K_1(t,s)\sin t\sin s dt ds. \tag{4.29}$$

Використовуючи формули (1.3), (1.4), отримаємо матриці

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

В нашому випадку одиниця є власним значенням оператора K кратності 1. Тобто, ми маємо критичний випадок. І, згідно з теоремою 2.1.2, справедливим є наступний результат.

Твердження. *Однорідне рівняння (4.24)* $(g = 0)$ *має розв'язок*

$$z = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{4.31}$$

Неоднорідне рівняння (4.24) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$f_1 = 0 \tag{4.32}$$

та має розв'язок

$$z = \begin{pmatrix} c \\ \frac{1}{2} f_2 \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{4.33}$$

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що при різних неоднорідностях $f(t)$ умова розв'язності (4.32) може виконуватись або не виконуватись. Наприклад, при $f(t) = \cos t + \sin t$ умова (4.32) не виконується, тобто неоднорідне рівняння (4.24) не має розв'язку. При $f(t) = \sin t$ умова розв'язності (4.32) виконується.

Дослідимо питання: якщо рівняння (4.24) не має розв'язку, то чи можна зробити його розв'язним, ввівши у праву частину рівняння (4.24) керування $\Lambda_1 z \cdot u$? Для цього скористаємося теоремою 4.1.1, тобто перевіримо виконання умов (4.8), (4.12), (4.17). Згідно позначення (4.6) та співвідношення (4.30), маємо

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Скориставшись формулами (1.3), отримаємо

$$\Delta^+ = \lim_{\omega \to +0} (\Delta^* \Delta + \omega I)^{-1} \Delta^* = \frac{1}{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

$$P_\Delta = \frac{1}{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{12}^2 & -\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{12} \\ -\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{11}^2 \end{pmatrix}, \quad P_{\Delta^*_{r_1}} = 0. \tag{4.36}$$

Можливі два випадки:

1) Якщо $\Delta = 0$, тоді $\Delta^+ = 0$, і, керування u не існуватиме та рівняння (4.23) не буде мати розв'язку z .

2) Якщо $\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2 \neq 0$, тоді $\Delta \neq 0$ та $\Delta^+ \neq 0$.

Оскільки $P_{\Delta^*_{r_1}} = 0$, то умова (4.8) виконується завжди, тобто рівняння (4.23) завжди буде розв'язним відносно zu. Згідно (4.36) $P_\Delta \neq 0$ завжди, тобто рівняння (4.23) має сім'ю розв'язків. Перевіримо виконання умови (4.12):

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde a_{11} & \tilde a_{12}\\ \tilde a_{21} & \tilde a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\tilde a_{11}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\\ \frac{\tilde a_{12}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}f_1\\ \frac{\tilde a_{21}\tilde a_{11}+\tilde a_{22}\tilde a_{12}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}f_1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\begin{pmatrix}0\\ f_2\tilde a_{11}^2 + f_2\tilde a_{12}^2 - \tilde a_{21}\tilde a_{11}f_1 - \tilde a_{22}\tilde a_{12}f_1\end{pmatrix} = 0.$$

Отже, умова (4.12) також виконується завжди, тобто рівняння (4.23) завжди розв'язне відносно z. Оскільки $P_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \neq 0$, то розв'язок рівняння (4.23) не єдиний. Залишилось перевірити виконання умови (4.17). Згідно (4.15) та (4.30), маємо

$$\tilde F = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde a_{11} & \tilde a_{12}\\ \tilde a_{21} & \tilde a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\tilde a_{11}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\\ \frac{\tilde a_{12}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}\right) = \tag{4.37}$$

$$= \frac{1}{2(\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2)}\begin{pmatrix}0\\ f_2\tilde a_{11}^2 + f_2\tilde a_{12}^2 - \tilde a_{21}\tilde a_{11}f_1 + \tilde a_{22}\tilde a_{12}f_1\end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Звідси отримуємо, що

$$\tilde F^+ = \frac{1}{f_2\tilde a_{11}^2 + f_2\tilde a_{12}^2 - \tilde a_{21}\tilde a_{11}f_1 + \tilde a_{22}\tilde a_{12}f_1}\begin{pmatrix}0 & 2(\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2)\end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

$$P_{\tilde F^*} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_{\tilde F} = 0. \tag{4.40}$$

Підставимо (4.35), (4.40) в умову (4.17):

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\tilde a_{11}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\\ \frac{\tilde a_{12}}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\tilde a_{11}^2+\tilde a_{12}^2}\begin{pmatrix}\tilde a_{11}f_1\\ 0\end{pmatrix} = 0. \tag{4.41}$$

Згідно (4.32) та (4.41) умова (4.17) буде справджуватися при будь-якому $\tilde{a}_{11}$.

Знайдемо вигляд розв'язку z та керування u рівняння (4.23). Припустимо, що $K_1(t,s) = \cos(2t - s)$. Скориставшись формулами (1.3), (1.4), (4.28), (4.29), (4.30), маємо

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \Delta^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

$$P_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\Delta^*_{r_1}} = 0. \tag{4.43}$$

Умови (4.8) та (4.12) виконуються. Отже, оскільки $P_\Delta \neq 0$, то zu визначається не єдиним чином. Залишилось перевірити виконання умови (4.17). Згідно зображення (4.15) та формули (4.30) маємо

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{8}{\pi}} \end{pmatrix}, \quad P_{\tilde{F}} = 0, \quad P_{\tilde{F}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Тоді

$$P_{\tilde{F}^*} \Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.45}$$

Таким чином, умова (4.17) виконується і рівняння (4.23) буде розв'язним відносно u. Один із розв'язків рівняння (4.23) має вигляд

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

$$u = -\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{8}{\pi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}, \tag{4.47}$$

і один із розв'язків вихідного інтегрального рівняння (4.20), згідно з теоремою 4.1.2, дорівнює

$$x = \frac{\sin t}{2}, \quad u = -\frac{3}{2}. \tag{4.48}$$

4.1.3. Критерій розв'язності крайової задачі. Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ лінійну крайову задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds \cdot u, \tag{4.49}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Jx(\cdot)u. \tag{4.50}$$

Тут сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$ ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f \in L_2[a,b]$, обмежені лінійні векторні функціонали $S = col\Big(S_1,\ \ S_2,\ \ \ldots,\ \ S_p\Big) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$ і $J = col\Big(J_1,\ \ J_2,\ \ \ldots,\ \ J_p\Big) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$, $S_i, J_i : L_2[a,b] \to \mathbb{R}$, вектор $\alpha = col\Big(\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \ldots,\ \ \alpha_p\Big) \in \mathbb{R}^p$ – відомі, а функцію $x \in L_2[a,b]$, та керування $u \in \mathbb{R}$ – потрібно визначити.

Будемо вважати, що породжуюча задача, отримана з (4.49), (4.50) при $u = 0$,

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t),$$

$$Sx(\cdot) = \alpha,$$

тобто задача (2.1), (2.2), при деяких неоднорідностях $f \in L_2[a,b]$ та $\alpha \in \mathbb{R}^p$ не має розв'язку.

Ставиться питання знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в праву частину задачі (2.1), (2.2) керування $\int_a^b K_1(t,s)x(s)ds \cdot u$, $Jx(\cdot)u$, задача (4.49), (4.50) стає розв'язною.

Як і в підрозділі 2.1, задачу (4.49), (4.50) можна звести до крайової задачі з керуванням для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь. Використовуючи позначення (2.3) та (2.50):

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int_a^b \int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

приходимо до крайової задачі з керуванням для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = f_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij} x_j \cdot u, \quad i = \overline{1, \infty}, \tag{4.51}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_\nu \varphi_j(\cdot) x_j = \alpha_\nu + \sum_{j=1}^{\infty} J_\nu \varphi_j(\cdot) x_j \cdot u, \quad \nu = \overline{1, p}, \tag{4.52}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо задачу (4.51), (4.52) у вигляді операторного рівняння в просторі ℓ_2

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ W_1 \end{bmatrix} zu = q + U_1 zu, \tag{4.53}$$

де матриці Λ, Λ_1, W, W_1, вектор-стовпчики z та g визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54), (2.106):

$$z = col\Big(x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_i, \ \dots\Big) \in \ell_2, \quad g = col\Big(f_1, \ f_2, \ \dots, \ f_i, \ \dots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1 - a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$W := S\Phi(\cdot), \quad W_1 := J\Phi(\cdot).$$

Операторне рівняння без керування для рівняння (4.53) має вигляд (2.107):

$$Uz = q.$$

Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язків крайової задачі (4.49), (4.50) при умові, що породжуюча задача (2.1), (2.2), а, отже і операторне рівняння (2.107), не мають розв'язків. Виникає питання: чи можна за допомогою введення у праву частину рівняння (2.107) керування $U_1 zu$, зробити рівняння (4.53), а, отже і вихідну задачу (4.49), (4.50) розв'язними?

Так як операторне рівняння без керування (2.107) не має розв'язку, то умови (2.109), (2.110) теореми 2.3.1 не виконуються. Згідно цієї теореми неоднорідне рівняння (4.53) є розв'язним тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 zu) = 0, \tag{4.54}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha + W_1 zu - W\Lambda^+(g + \Lambda_1 zu)) = 0. \tag{4.55}$$

Звідси,

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 zu = -P_{\Lambda_r^*} g, \tag{4.56}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) zu = P_{Q_{d_1}^*}(W\Lambda^+ g - \alpha).$$

Ввівши позначення

$$\Theta := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 \\ P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) \end{bmatrix}, \quad \varrho := -\begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*} g \\ P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - W\Lambda^+ g) \end{bmatrix}, \tag{4.57}$$

отримаємо

$$\Theta zu = \varrho. \tag{4.58}$$

За умови $P_{\Theta_{r_1}^*}\varrho = 0,\ r_1 \leq (r + d_1)$, алгебраїчна система (4.58) буде розв'язною відносно zu та її розв'язок буде мати вигляд

$$zu = P_\Theta c + \Theta^+ \varrho, \quad \forall c \in \ell_2. \tag{4.59}$$

Тут P_Θ – матриця-ортопроектор на ядро матриці Θ, $P_{\Theta_{r_1}^*}$ – матриця, яка складається із повної системи r_1 лінійно-незалежних рядків матриці P_{Θ^*}, що є ортопроектором на коядро матриці Θ, Θ^+ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до Θ матриця.

Зазначимо, що за умови $P_\Theta = 0$, система (4.58) матиме єдиний розв'язок

$$zu = \Theta^+ \varrho. \tag{4.60}$$

Підставивши у рівняння (4.53) замість zu вираз (4.60), отримаємо

$$Uz = q + U_1\Theta^+\varrho. \tag{4.61}$$

Рівняння (4.61) буде розв'язним тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) = 0, \tag{4.62}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho) = 0, \tag{4.63}$$

та його розв'язок матиме вигляд

$$\begin{gathered} z = P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2} + \Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho)+ \\ +P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho), \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \end{gathered} \tag{4.64}$$

Зазначимо, що за умови $P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} = 0$ розв'язок рівняння (4.61)

$$z = \Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho) \tag{4.65}$$

є єдиним.

Знайдемо явний вигляд функції постійного керування u. Для цього домножимо рівність (4.65) на u справа та прирівняємо до рівності (4.60). Введемо наступне позначення:

$$F := \Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho), \tag{4.66}$$

тоді будемо мати

$$Fu = \Theta^+\varrho. \tag{4.67}$$

За теоремою 2.1.2 умова розв'язності для (4.67) має вигляд

$$P_{F^*}\Theta^+\varrho = 0. \tag{4.68}$$

Один із розв'язків рівняння (4.67) має вигляд

$$u = F^+\Theta^+\varrho. \tag{4.69}$$

Зазначимо, що за умови $P_F = 0$, цей розв'язок є єдиним.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1.3. *Нехай операторне рівняння без керування (2.107) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}}\varrho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) = 0, \quad P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho) = 0,$$

то один із розв'язків рівняння (4.53) буде мати вигляд (4.64), а за умови

$$P_{F^*}\Theta^+\varrho = 0$$

керування и визначатиметься формулою (4.69). Якщо виконуються умови

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} = 0, \quad P_F = 0,$$

то розв'язок $\{z, u\}$ *рівняння (4.53) буде єдиними.*

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння (4.53), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідної крайової задачі (4.49), (4.50). Для цього використаємо перехід, описаний у підрозділі 2.1. Згідно цього підходу множина елементів $x(t)$, які визначається співвідношенням

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i(t) = \Phi(t)z = \Phi(t)(\Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) + \\ + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho)). \tag{4.70}$$

є шуканою сім'єю розв'язків вихідної крайової задачі (4.49), (4.50).

Теорема 4.1.4. *Нехай крайова задача без керування (2.1), (2.2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}}\varrho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) = 0, \quad P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho) = 0,$$

то один із розв'язків крайової задачі (4.49), (4.50) буде мати вигляд (4.70), а за умови

$$P_{F^*}\Theta^+\varrho = 0$$

керування и визначатиметься формулою (4.69). Якщо виконуються умови

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} = 0, \quad P_F = 0,$$

то розв'язок $\{x(t), u\}$ *задачі (4.49), (4.50) буде єдиним.*

4.2. Інтегральні рівняння типу Фредгольма зі змінним керуванням

4.2.1. Умови розв'язності інтегрального рівняння. Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ інтегральне рівняння з керуванням

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int\limits_a^b K_1(t,s)u(s)ds. \qquad (4.71)$$

Тут сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$ ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ та функція $f \in L_2[a,b]$ – відомі, а функцію $x \in L_2[a,b]$ та керування $u \in L_2[a,b]$ – необхідно визначити.

Будемо вважати, що породжуюче інтегральне рівняння без керування

$$x(t) - \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t)$$

тобто рівняння (2.1), при деяких неоднорідностях $f \in L_2[a,b]$ не має розв'язку.

Ставиться задача знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в праву частину рівняння (2.1) керування $\int\limits_a^b K_1(t,s)u(s)ds$, рівняння (4.71) стає розв'язним.

Зведемо рівняння (4.71) до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь з керуванням. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Використовуючи (2.3) та (2.50):

$$x_i = \int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

та вводячи додатково позначення

$$u_i = \int\limits_a^b u(t)\varphi_i(t)dt, \qquad (4.72)$$

від рівняння (4.71) приходимо до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь з керуванням

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}u_j, \quad i = \overline{1, \infty}, \tag{4.73}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо систему (4.73) у вигляді операторного рівняння у просторі ℓ_2

$$\Lambda z = g + \Lambda_1 v, \tag{4.74}$$

де матриці Λ, Λ_1, вектор-стовпчики z та g визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54):

$$z = col\Big(x_1, \ \ x_2, \ \ \dots, \ \ x_i, \ \ \dots\Big) \in \ell_2, \ g = col\Big(f_1, \ \ f_2, \ \ \dots, \ \ f_i, \ \ \dots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1-a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

$$v = col\Big(u_1, \ \ u_2, \ \ \dots, \ \ u_i, \ \ \dots\Big) \in \ell_2. \tag{4.75}$$

Операторне рівняння без керування для рівняння (4.74) має вигляд (2.6):

$$\Lambda z = g.$$

Виникає питання: чи можна за допомогою введення у праву частину рівняння (2.6) керування $\Lambda_1 v$, зробити рівняння (4.74), а, отже і вихідне інтегральне рівняння (4.71), розв'язними? Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язку неоднорідного рівняння (4.71), при умові, що породжуюче рівняння (2.1), а, отже і операторне рівняння (2.6), не мають розв'язків.

Так як операторне рівняння без керування (2.6) є нерозв'язним, то умова (2.14) не виконується. Згідно теореми 2.1.2 неоднорідне рівняння (4.74) є розв'язним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 v) = 0. \tag{4.76}$$

Звідси,

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 v = -P_{\Lambda_r^*}g.$$

Використовуючи позначення (4.6), отримаємо

$$\Delta v = -P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.77}$$

За умови

$$P_{\Delta_{r_1}^*}P_{\Lambda_r^*}g = 0, \quad r_1 \leq r \tag{4.78}$$

алгебраїчна система (4.77) буде розв'язною відносно v, та її розв'язок матиме вигляд

$$v = P_{\Delta}c - \Delta^+ P_{\Lambda_r^*}g, \quad \forall c \in \ell_2. \tag{4.79}$$

Тут P_{Δ} – матриця-ортопроектор на ядро матриці Δ, $P_{\Delta_{r_1}^*}$ – матриця, яка складається із повної системи r_1 лінійно-незалежних рядків матриці P_{Δ^*}, що є ортопроектором на коядро матриці Δ, Δ^+ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до матриці Δ матриця.

Зазначимо, що за умови $P_{\Delta} = 0$, система (4.77) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$v = -\Delta^+ P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.80}$$

Підставивши у рівняння (4.74) замість v вираз (4.80), отримаємо

$$\Lambda z = g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda_r^*}g. \tag{4.81}$$

За теоремою 2.1.2, рівняння (4.81) буде розв'язним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda_r^*}g) = 0 \tag{4.82}$$

і його розв'язок має вигляд

$$z = P_{\Lambda_r} c_r + \Lambda^+(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g), \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{4.83}$$

Зазначимо, що за умови $P_{\Lambda_r} = 0$ розв'язок рівняння (4.81) є єдиним. Має місце наступна теорема.

Теорема 4.2.1. *Нехай операторне рівняння без керування (2.6) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Delta^*_{r_1}} P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g) = 0,$$

то рівняння (4.74) буде мати хоча б один розв'язок z вигляду (4.83), а керування v визначатиметься представленням (4.79). Якщо виконуються умови $P_\Delta = 0$, $P_{\Lambda_r} = 0$, то розв'язок z системи (4.74) та керування v будуть єдиними.

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння з керуванням (4.74), можна зробити висновок про існування розв'язку вихідного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням (4.71). Для цього використаємо перехід, описаний у підрозділі 2.1. Згідно цього підходу, існує елемент $x \in L_2[a, b]$ такий, що має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{4.84}$$

де

$$\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t), \;\; \varphi_2(t), \;\; \ldots, \;\; \varphi_i(t), \;\; \ldots \Big),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$.

Аналогічним чином визначається керування $u(t)$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i(t) = \Phi(t) v. \tag{4.85}$$

Пара $\{x(t), u(t)\}$, що визначається співвідношеннями (4.84), (4.85), і є шуканим розв'язком вихідного інтегрального рівняння (4.71).

Теорема 4.2.2. *Нехай інтегральне рівняння без керування (2.1) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Delta^*_{r_1}} P_{\Lambda^*_r} g = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda^*_r} g) = 0,$$

то інтегральне рівняння з керуванням (4.71) буде мати хоча б один розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ (4.84), (4.85). За додаткових умов $P_\Delta = 0$, $P_{\Lambda_r} = 0$ розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ рівняння (4.71) буде єдиним.

4.2.2. Приклад.

Розглянемо інтегральне рівняння з керуванням

$$x(t) - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(t+s) x(s) ds = f(t) + \int\limits_0^\pi K_1(t,s) u(s) ds \tag{4.86}$$

за умови, що рівняння

$$x(t) - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(t+s) x(s) ds = f(t) \tag{4.87}$$

не має розв'язку.

У нашому випадку ядро $K(t,s)$ є виродженим та симетричним. Отже, замість системи $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ ми можемо взяти систему власних функцій оператора

$$(Kw)(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(t+s) w(s) ds. \tag{4.88}$$

Неважко переконатись, що ортонормовані функції $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t$ та $\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t$ є власними функціями оператора (4.88), які відповідають характеристичним числам $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ відповідно.

Зведемо рівняння (4.86) та (4.87) до рівнянь виду (4.74) та (2.6). Використовуючи позначення (2.3), (2.50), (4.72), отримаємо

$$\Lambda z = g + \Lambda_1 v, \tag{4.89}$$

$$\Lambda z = g, \tag{4.90}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\quad \Lambda_1=\begin{pmatrix}\tilde a_{11}&\tilde a_{12}\\\tilde a_{21}&\tilde a_{22}\end{pmatrix},$$

$$z=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \tag{4.91}$$

$$x_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi x(t)\cos t dt,\quad x_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi x(t)\sin t dt,$$

$$f_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi f(t)\cos t dt,\quad f_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi f(t)\sin t dt,$$

$$\tilde a_{11}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi K_1(t,s)\cos t\cos s dtds,\ \tilde a_{12}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi K_1(t,s)\cos t\sin s dtds,$$

$$\tilde a_{21}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi K_1(t,s)\sin t\cos s dtds,\ \tilde a_{22}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi K_1(t,s)\sin t\sin s dtds, \tag{4.92}$$

$$u_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi u(t)\cos t dt,\quad u_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\pi u(t)\sin t dt.$$

Скориставшись формулами (1.3), (1.4), отримаємо

$$\Lambda^+=\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad P_\Lambda=P_{\Lambda^*}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}. \tag{4.93}$$

В нашому випадку одиниця є власним значенням оператора K (4.88) кратності 1. Тобто, ми маємо критичний випадок. І, згідно з теоремою 2.1.2, справедливим є наступний результат.

Твердження. *Однорідна система (4.90)* ($g=0$) *має розв'язок*

$$z=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix},\quad \forall c\in\mathbb{R}. \tag{4.94}$$

Неоднорідна система (4.90) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int\limits_0^\pi f(t)\cos t dt=0 \tag{4.95}$$

та має розв'язок

$$z = \begin{pmatrix} c \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{4.96}$$

Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що при різних неоднорідностях $f(t)$ умова розв'язності може виконуватись або не виконуватись. При $f(t) = \sin t$ умова розв'язності (4.95) виконується, а, наприклад, при $f(t) = \cos t + \sin t$ умова (4.95) не виконується, тобто неоднорідне рівняння (4.90) не має розв'язку. Знайдемо умови на керування $\int\limits_a^b K_1(t,s)u(s)ds$, при якому рівняння (4.86) буде розв'язним. Для цього скористаємося теоремою 2.1.2, тобто перевіримо виконання умов (4.78), (4.82). Згідно (4.6), (4.91), (4.93) маємо

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}.$$

Отже, матимемо

$$\Delta^+ = \gamma \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{12} \end{pmatrix}, \quad P_{\Delta^*_{r_1}} = 0,$$

$$P_\Delta = \gamma \begin{pmatrix} \tilde{a}_{12}^2 & -\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{12} \\ -\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{11}^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2}.$$

Можливі два випадки:

1) $\Delta = \Delta^+ = 0$ $(\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2 = 0)$. Тоді керування v не існуватиме, і алгебраїчне рівняння (4.89) не буде мати розв'язку z.

2) $\Delta \neq 0$ та $\Delta^+ \neq 0$ $(\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2 \neq 0)$. Оскільки $P_{\Delta^*_{r_1}} = 0$, то умова (4.78) виконується завжди, тобто рівняння (4.89) завжди буде розв'язним відносно v. Перевіримо виконання умови (4.82)

$$P_{\Lambda_r^*}(g - \Lambda_1 \Delta^+ P_{\Lambda_r^*} g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\tilde{a}_{11} \\ \gamma\tilde{a}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2) - f_1(\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22}\tilde{a}_{12}) \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, умова (4.82) виконується для будь-якої матриці Λ_1 та алгебраїчне рівняння (4.89) завжди буде розв'язним відносно z.

Знайдемо явний вигляд керування v та розв'язку z рівняння (4.89). Нехай $K_1(t,s) = 2\cos t \cos s$. Скориставшись формулами (4.92), (4.93), маємо

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; g = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} \pi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^+ = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (4.78) виконується, а умова $P_D = 0$ не виконується, то керування v буде визначатися не єдиним чином і матиме вигляд

$$v = P_\Delta c - D^+ P_{\Lambda_r^*} g =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 - \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1 \in \mathbb{R}.$$

У нашому випадку $P_{\Lambda_r} \neq 0$, тому рівняння (4.89) буде мати сім'ю розв'язків

$$z = P_{\Lambda_r} c + \Lambda^+(g + \Lambda_1 v) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ c_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c_2 \\ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}, \; \forall c_2 \in \mathbb{R}.$$

Скориставшись формулами (4.84) та (4.85), знайдемо явний вигляд керування $u(t)$ та розв'язку $x(t)$ інтегрального рівняння (4.86)

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \left(c_1 \sqrt{2\pi} \sin t - \cos t \right), \; \forall c_1 \in \mathbb{R},$$
$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(c_2 \sqrt{8} \cos t + \sqrt{\pi} \sin t \right), \; \forall c_2 \in \mathbb{R}.$$

4.2.3. Необхідні та достатні умови існування розв'язку крайової задачі. Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння з керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)u(s)ds, \qquad (4.97)$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Ju(\cdot). \qquad (4.98)$$

Тут сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$ ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f \in L_2[a,b]$, обмежені лінійні векторні функціонали $S = col\Big(S_1,\ \ S_2,\ \ \dots,\ \ S_p\Big) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$ і $J = col\Big(J_1,\ \ J_2,\ \ \dots,\ \ J_p\Big) : L_2[a,b] \to \mathbb{R}^p$, $S_i, J_i : L_2[a,b] \to \mathbb{R}$ та вектор $\alpha = col\Big(\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \dots,\ \ \alpha_p\Big) \in \mathbb{R}^p$ – відомі, а функції $x \in L_2[a,b]$ та $u \in L_2[a,b]$ – шукані.

Будемо вважати, що породжуюча задача без керування

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t),$$

$$Sx(\cdot) = \alpha,$$

тобто задача (2.1), (2.2), при деяких неоднорідностях $f \in L_2[a,b]$ та $\alpha \in \mathbb{R}^p$ не має розв'язку.

Ставиться задача знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в праву частину задачі (2.1), (2.2) керування $\int_a^b K_1(t,s)u(s)ds,\ \ Ju(\cdot)$, задача (4.97), (4.98) стає розв'язною.

Зведемо задачу (4.97), (4.98) до крайової задачі з керуванням для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь. Використовуючи позначення (2.3), (2.50), (4.72):

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \quad u_i = \int_a^b u(t)\varphi_i(t)dt,$$

$$a_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int_a^b \int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

від задачі (4.97), (4.98) приходимо до крайової задачі з керуванням для зліченно-вимірної системи алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}u_j, \quad i = \overline{1, \infty}, \tag{4.99}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_\nu \varphi_j(\cdot) x_j = \alpha_\nu + \sum_{j=1}^{\infty} J_\nu \varphi_j(\cdot) u_j, \quad \nu = \overline{1, p}, \tag{4.100}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо задачу (4.99), (4.100) у вигляді операторного рівняння в просторі ℓ_2

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ W_1 \end{bmatrix} v = q + U_1 v, \tag{4.101}$$

де матриці Λ, Λ_1, W, W_1, вектор-стовпчики z, g, v визначаються формулами (2.7), (2.8), (2.54), (2.106), (4.75):

$$z = col\Big(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_i, \ \ldots\Big) \in \ell_2, \quad g = col\Big(f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_i, \ \ldots\Big) \in \ell_2,$$

$$v = col\Big(u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_i, \ \ldots\Big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1 - a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1i} & \ldots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \ldots & \tilde{a}_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$W := S\Phi(\cdot), \quad W_1 := J\Phi(\cdot).$$

Операторне рівняння без керування для рівняння (4.101) має вигляд (2.107):

$$Uz = q.$$

Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язку неоднорідної крайової задачі (4.97), (4.98), при умові, що задача без керування (2.1), (2.2), а, отже і операторне рівняння (2.107), не мають розв'язків. Виникає питання: чи можна за допомогою введення у праву частину рівняння (2.107) керування $\Lambda_1 v$, $W_1 v$, зробити рівняння (4.101), а, отже і вихідну крайову задачу для інтегрального рівняння з керуванням (4.97), (4.98), розв'язними?

Так як операторне рівняння без керування (2.107) не має розв'язку, то умови (2.109), (2.110) теореми 2.3.1 не виконуються. Згідно цієї теореми неоднорідне рівняння (4.101) є розв'язним тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 v) = 0, \tag{4.102}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha + W_1 v - W\Lambda^+(g + \Lambda_1 v)) = 0. \tag{4.103}$$

Звідси,

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 v = -P_{\Lambda_r^*} g,$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)v = P_{Q_{d_1}^*}(W\Lambda^+ g - \alpha).$$

Використовуючи позначення (4.57), отримаємо

$$\Theta v = \varrho. \tag{4.104}$$

За умови

$$P_{\Theta_{r_1}^*}\varrho = 0, \quad r_1 \le (r + d_1) \tag{4.105}$$

алгебраїчна система (4.104) буде розв'язною відносно v та її розв'язок буде мати вигляд

$$v = P_\Theta c + \Theta^+\varrho, \quad \forall c \in \ell_2. \tag{4.106}$$

Зазначимо, що за умови $P_\Theta = 0$, система (4.104) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$v = \Theta^+\varrho. \tag{4.107}$$

Підставивши у рівняння (4.101) замість v вираз (4.107), отримаємо

$$Uz = q + U_1\Theta^+\varrho. \tag{4.108}$$

За теоремою 2.3.1, рівняння (4.108) буде розв'язним тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 \Theta^+ \varrho) = 0, \tag{4.109}$$

$$P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+ \varrho) = 0 \tag{4.110}$$

і його розв'язок має вигляд

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + \Lambda^+(g + \Lambda_1 \Theta^+ \varrho) +$$

$$+ P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+ \varrho), \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{4.111}$$

Зазначимо, що за умови $P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} = 0$ розв'язок рівняння (4.108) є єдиним. Має місце наступна теорема.

Теорема 4.2.3. *Нехай операторне рівняння без керування (2.107) є нерозв'язним. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta_{r_1}^*} \varrho = 0, \quad P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 \Theta^+ \varrho) = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+ \varrho) = 0,$$

то операторне рівняння (4.101) буде мати хоча б один розв'язок $\{z, v\}$ *вигляду (4.111) та (4.106). Якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta} = 0, \quad P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} = 0,$$

то розв'язок $\{z, v\}$ *рівняння (4.101) буде єдиним.*

Використовуючи отримані результати для операторного рівняння (4.101), можна зробити висновки про існування розв'язку вихідної крайової задачі (4.97), (4.98). Таким чином, якщо рівняння (4.101) має хоча б один розв'язок $\{z, v\}$ то згідно теореми Ріса-Фішера, існують елементи $x \in L_2[a, b]$, $u \in L_2[a, b]$ такі, що мають місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \quad u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i(t) = \Phi(t) v. \tag{4.112}$$

Пара $\{x(t), u(t)\}$, що визначається співвідношеннями (4.112), і є шуканим розв'язком вихідної крайової задачі (4.97), (4.98).

Теорема 4.2.4. *Нехай крайова задача без керування (2.1), (2.2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}}\varrho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1\Theta^+\varrho) = 0, \quad P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\varrho) = 0,$$

то крайова задача (4.97), (4.98) з керуванням буде мати хоча б один розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ *вигляду (4.112). За додаткових умов*

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} = 0,$$

розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ *крайової задачі (4.97), (4.98) буде єдиним.*

ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ

Четвертий розділ дисертації присвячено дослідженню лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням та крайовим задачам для них. Розглянуто випадок, коли породжуюча крайова задача є розв'язною не при всіх неоднорідностях. Наведено необхідні та достатні умови, при яких вводячи в праву частину породжуючої крайової задачі керування, отримана крайова задача стає розв'язною. Знайдено явний вигляд таких керувань. Розглянуто випадки сталого та змінного керування.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

- Знайдено умови існування та загальний вигляд розв'язку лінійної нетерової крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядро якого є невиродженим. Встановлено критерій розв'язності слабкозбуреної крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма, у припущенні, що відповідна породжуюча задача є нерозв'язною. Побудовано загальний вигляд розв'язку такої задачі у вигляді частини ряду з сингулярністю, який збігається при фіксованому, достаньо малому параметрі.
- Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків нетерових крайових задач для слабконелінійних інтегральних рівнянь типу Гамерштейна та систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Запропоновано ітераційні схеми побудови наближених розв'язків. Для інтегрального рівняння типу Гамерштейна роглянуто випадок невиродженого інтегрального оператора.
- Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку нетерової крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням, за умови, що задача без керування є нерозв'язною. Розглянуто випадки змінного та сталого керувань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азбелев Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматулина. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматулина. – М: Институт компьютерных исследований. – 2002. — 384 с.
3. Аткинсон Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф.В. Аткинсон // Мат. сборник. Нов. сер. – 1951. – 28, № 1. – С. 3-14.
4. Богатов Е.М. Из истории нелинейных интегральных уравнений / Е.М. Богатов, Р.Р. Мухин // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2016. – Т. 24, № 2. – С. 77-114.
5. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.
6. Бойчук О.А. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь / О.А. Бойчук, І.А. Головацька // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 314-321.
7. Бойчук О.А. Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь / О.А. Бойчук, І.А. Головацька // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 4. — С. 460-474.
8. Бойчук А.А. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев // Докл. АН УССР. Сер. А. № 8. – 1990. – С. 3-6.
9. Бойчук А.А. Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев, А.А. Покутный // Український математичний журнал. – 2013. – Т. 65, № 2. – С. 163-174.

10. Бойчук А.А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев, А.М. Самойленко. — К: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
11. Бойчук О.А. Слабкозбурені інтегральні рівняння / О.А. Бойчук, Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 2. – С. 151-160. (English translation: Boichuk O.A. Weakly Perturbed Integral Equations / O.A. Boichuk, N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 223, No.3. – P. 199-209. DOI: 10.1007/s10958-017-3348-x)
12. Бойчук О.А. Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова/ О.А. Бойчук, С.А. Кривошея // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 8. – С. 1021–1026.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.:Наука, 1967. — 572 с.
14. Бойчук А.А. Автономные слабонелинейные краевые задачи/ А.А. Бойчук, С.М. Чуйко // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 10. – С. 1668-1674.
15. Бойчук А.А. Краевые задачи и дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.А. Бойчук, А.М. Самойленко // Успехи мат. наук. – 1995. – Т. 50, № 4. – С. 94-95.
16. Бойчук А.А. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / А.А. Бойчук, А.М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 564–568.
17. Бойчук А.А. Метод Вишика-Люстерника для слабовозмущенных интегральных уравнений / А.А. Бойчук, Н.А. Козлова, В.А. Ферук // VII международная научная конференция "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры", 8-9 октября 2015. Материалы конференции. – Актобе, Республика Казахстан. – 2015. – С. 25-29.
18. Бойчук А.А. Оператор Грина критической квазипериодической краевой задачи/ А.А. Бойчук // ДАН Украины. – 1993. – №10. – С. 9-12.

19. Бойчук А.А. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях / А.А. Бойчук, Н.А. Перестюк, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 9. — С. 1516-1521.

20. Бондар І.А. Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь / І.А. Бондар // Буковинський математичний журнал. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2014. — Т. 2, № 4. — С. 7-11.

21. Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

22. Вишик М.И. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. – 1960. – 15, вып. 3. – С. 3-80.

23. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

24. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 572 с.

25. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

26. Гаврилюк І.П. Методи обчислень. У 2-х частинах / І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров. – К.: Вища школа, 1995. – Ч.1. – 376 с. – Ч.2. – 431 с.

27. Гильберт Д. Избранные труды. Том II. Анализ. Физика. Проблемы. Personalia / Д. Гильберт. – М.: Факториал, 1998. – 608 с.

28. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи матем. наук. – 1961. – Т. 16, вып. № 3. – С. 171-174.

29. Головацька І.А. Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь / І.А. Головацька // Нелінійні коливання. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 151-164.

30. Головацька І.А. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь / І.А. Головацька // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2013. — 1. — С. 71-74.

31. Гохберг И.Ц. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов / И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
32. Гребеников Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. — М.: Наука, 1979. — 432с.
33. Журавльов В.П. Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі / В.П. Журавльов // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла". – 2014. – Вип. 25, № 1. – С. 57–69.
34. Журавльов В.П. Лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі / В.П. Журавльов // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 4. – С. 57-64.
35. Журавльов В.П. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь у банаховому просторі / В.П. Журавльов // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Сер. Математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 51-57.
36. Журавлев В.Ф. Краевые задачи для интегральных уравнений с вырожденным ядром/ В.Ф. Журавлев // Нелинейные колебания. – 2012, Т. 15, № 1. – С. 36-52.
37. Канторович Л.В. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
38. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1975. – 352 с.
39. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., ВИНИТИ, М. – 1987. – Т. 30. – С. 3-103.
40. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Буковинський мат. журн. – 2016. – Т.4, № 1-2. – С. 82-86.

41. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, 19-21 травня 2016 р. Тези доповідей. – Ужгород, Україна. – 2016. – С. 79.
42. Козлова Н.О. Крайова задача для інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.А. Степанця (1942-2007), 28 травня - 3 червня 2017 р. Тези доповідей. – Слов'янськ, Україна. – 2017. – С. 62.
43. Козлова Н.О. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25-27 травня 2016 р. Тези доповідей. – Львів, Україна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kozlova.pdf
44. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 1. – С. 58-66. (English translation: Kozlova N.O. Noetherian Boundary-Value Problems for Integral Equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No.3. – P. 266-275. DOI: 10.1007/s10958-017-3298-3)
45. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference "Modelling and stability", May 27-29, 2015. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2015. – С. 55.
46. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р. Матеріали конф. Т. 1. Диферен-

ціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ, Україна. – 2016. – С. 143-146.

47. Козлова Н.О. Один подход к исследованию слабовозмущенных краевых задач для интегральных уравнений / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Международная научная конференция "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", посвященная 75-летию доктора физ.-мат. наук, профессора С.Т. Сафаровича, 29-30 октября 2015 г. Материалы конференции. – Душанбе, Республика Таджикистан. – 2015. – С. 111-112.
48. Козлова Н.О. Слабкозбурені лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь/ Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Вісник Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 65-70.
49. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (1936-1992), 28-30 вересня 2016. Матеріали конференції. – Чернівці, Україна. – 2016. – С. 57.
50. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння типу Гамерштейна / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фіз.-мат. наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д.І. Мартинюка (1942-1996), 19-21 травня 2017 року. Матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський, Україна. – 2017. – С. 56.
51. Козлова Н.О. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII Internation Conference "Modelling and stability", 24-26 May, 2017. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2017. – С. 66.

52. Козлова Н.О. Фредгольмові інтегральні рівняння з керуванням / Н.О. Козлова // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2015. – С. 150.

53. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа (4-е изд.) / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва М.: Наука. – 1976. – С. 544.

54. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1968. — 455 с.

55. Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

56. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

57. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1971. – 104 с.

58. Крылов Н.Н. Введение в нелинейную механику / Н.Н. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

59. Лучка А.Ю. Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения / А.Ю. Лучка // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 82-96.

60. Лучка А.Ю., Нестеренко О.Б. Проекційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями та керуванням / А.Ю. Лучка // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 208-216.

61. Лучка А.Ю. Побудова розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями / А.Ю. Лучка, В.Ф. Мельничук // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 215-222.

62. Лучка А.Ю. Апроксимаційно-ітеративний метод для слабконелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями / А.Ю. Лучка, В.Ф. Мельничук // Нелінійні коливання. – 2012. – 15, № 1. – С. 89-111.

63. Лучка А.Ю. Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями / А.Ю. Лучка, О.Б. Нестеренко // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 5. – С. 672-679.

64. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы / А.Ю. Лучка. – Киев: Наукова думка, 1993. – 288 с.

65. Люстерник Л.Ю. Краткий курс функционального анализа: Уч. пособие / Л.Ю. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.

66. Ляшко И.И. Методы вычислений / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатько. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с.

67. Макаров В.Л. FD-метод – экспоненциальная скорость сходимости / В.Л. Макаров // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. – Вип. 82. – С. 69-74.

68. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. — М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

69. Михайлец В.А. Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач / В.А. Михайлец, Н.В. Рева // Доповіді НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23-27.

70. Михайлец В.А. Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / В.А. Михайлец, Н.В. Рева // Зб. праць Ін-ту мат-ки НАН України. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 227-239.

71. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Учебное пособие для вузов / С.Г. Михлин. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 234 с.

72. Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. – 1943. – 7, № 3. – С. 147-163.

73. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. Петровский. – 1948. – 122 с.

74. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. 5-е издание / И.Г. Петровский. – М.: Физматлит, 2009. – 136 с.

75. Пытьев Ю.П. Псевдообратный оператор. Свойства и применения / Ю.П. Пытьев // Мат. сб. Нов. сер. – 1982. – 118, № 1. – С. 19-49.

76. Рис Ф.О. О линейных функциональных уравнениях / Ф.О. Рис // Успехи математических наук. – 1935. – Вып. 1. – С. 175-199.

77. Самойленко А.М. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром/ А.М. Самойленко, О.А. Бойчук, С.А. Кривошея// Укр. мат. журн. – 1996. – 48, №11. – С. 1576-1579.

78. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння з імпульсною дією / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк. – Київ: Вища школа, 1987.

79. Самойленко А.М. Диференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.

80. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев: Наукова думка, 1986. – 224 с.

81. Самойленко А.М. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, в пространстве ограниченных числовых последовательностей / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский, В.А. Недокис // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, №3. – С. 391-415.

82. Самусенко П. Асимптотичне інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь / П. Самусенко, М. Шкіль // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2014. – Вип. 1. – С. 34-41.

83. Соколов Ю.Д. Метод усреднения функциональных поправок / Ю.Д. Соколов // Киев: Наукова думка. – 1968. – 336 с.

84. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
85. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 299 с.
86. Турбин А.Ф. Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы / А.Ф. Турбин // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. – 1974. – 14, №3. – С. 772-776.
87. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 307 с.
88. Хорн Р. Матричный анализ Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
89. Akhmet M.U. Asymptotic behavior of linear impulsive integro-differential equations / M.U. Akhmet, M.A. Tleubergenova, O. Yilmaz // Computers and Mathematics with Applications. — 2008. — Vol. 56. — P. 1071-1081.
90. Akhmet M.U. Control of a boundary value problem for a linear impulsive integro-differential system / M.U. Akhmet, R.D. Seilova // Integral and integro-differential equations. — 2000. — 36, № 10. — P. 1369-1376.
91. Boichuk A. Boundary value problems for impulse differential systems / A. Boichuk // Universitatis Jagellonicae Acta Mathematica. — 1998. — Vol. XXXVI. — P. 187-192.
92. Boichuk A. Boundary-Value Problems for Weakly Nonlinear Delay Differential Systems / A. Boichuk, J. Diblik, D. Khusainov, M. Ruzickova. – Abstr.Appl. Anal. 2011. – 2011, Article ID 631412. — 19 p.
93. Boichuk A. Bounded Solutions of Impulsive Differential Systems / A. Boichuk, M. Langerova, J. Skorikova // Functional Differential Equations. — 2011. — Vol. 18, № 1-2. — P. 89-99.
94. Boichuk A.A. Bounded solutions of linear differential equations in a Banach space / A.A. Boichuk, A.A. Pokutnii // Nonlinear Oscil., 9, No.1, 1—12. – 2006. (in Ukraine).

95. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. — VSP, Utrecht–Boston, 2004. — 323 p.

96. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2nd edition / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. – Inverse and Ill-Posed Problems Series 59. De Gruyter, Berlin, 2016.

97. Boichuk A.A. A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Differential Equations. – 2001. – Vol.37, №4. – P. 464-471.

98. Bondar I. Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action / I. Bondar // Tatra Mountains Mathematical Publications (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014). — 2015. – 63. – P. 73-87. DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.

99. Bondar I. Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations / I. Bondar, M. Gromyak, N. Kozlova // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 17, No.1. – P. 69-84. DOI: 10.18514/MMN.2016.1897.

100. Carleman T. Sur la resolution de certaines equations integrales / T. Carleman // Mat. Ark. Astronom. – Fys. 16, no. 26 – 1922.

101. Conti R. Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations / R. Conti // Boll. Unione. Math. ital. – 1967. – 22, №2. – P. 135-178.

102. Fredholm E.I. Sur une classe d'equations fonctionnelles / E.I. Fredholm // Acta Math. – 1903. – V. 27 – P. 365-390.

103. Fredholm E.I. Sur une nouvelle methode pour la resolution du probleme de Dirichlet / E.I. Fredholm // Kong. Vetenskaps. – Akademiens Forh. Stockholm. – 1900. – P. 39-46.

104. Golovatska I. Weakly perturbed boundary-value problems of integro–differential equations / I. Golovatska // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2013. — 54. – P. 61-71.

105. Hammerstein A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen / A. Hammerstein // Acta Math. – 1930. – Vol. 54. – P. 117–176. – P. 120.

106. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integral equations / N. Kozlova, V. Feruk // 7th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" (MADEA-7), September 08-13, 2015. Abstracts. – Baku, Azerbaijan. – 2015. – P. 89.

107. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integro-differential equations / N. Kozlova, V. Feruk // Nonlinear analysis and application: 3rd international scientific conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik, April 01-03, 2015. Book of abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2015. – P. 32.

108. Kozlova N.O. Weakly nonlinear integral equations / N.O. Kozlova // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008), 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2017. – С. 70.

109. Kozlova N.O. Weakly perturbed linear boundary value problems for the Fredholm integral equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, September 20-24, 2016. Book of abstracts. – Lviv, Ukraine. – 2016. – P. 85.

110. Maurey B. Operator Theory and Exotic Banach Spaces, Online Lecture Notes / B. Maurey // https://webusers.imj-prg.fr/ bernard.maurey/articles/csp.pdf

111. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix (Abstract) / E.H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – № 26. – P. 394-395.

112. Penrose R. A. Generalized inverse for matrices / R.A. Penrose // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – 51, № 3. – P. 406–413.

113. Samoilenko A.M. Numerical-Analytic Methods for the Investigation of Solutions of Boundary-Value Problems / A.M. Samoilenko, N.I. Ronto // Kiev: Naukova Dumka, 1986.

114. Samusenko P. Asymptotic integration of singularly perturbed linear systems of differential-algebraic equations / P. Samusenko // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 17, No. 2. – P. 1033-1047.

115. Stewart G.W. Fredholm, Hilbert, Schmidt: Three Fundamental Papers on Integral Equations, translated with commentary by. G.W. Stewart, 2011. Available at http://www.cs.umd.edu/ stewart/FHS.pdf

116. Zettl A. Adjoint and Self-Adjoint BVP's with Interface Conditions / A. Zettl // SIAM J.Appl.Math. Vol.16, No. 4. – 1968.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць за темою дисертації

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 1. – С. 58-66. (English translation: Kozlova N.O. Noetherian Boundary-Value Problems for Integral Equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No.3. – P. 266-275. DOI: 10.1007/s10958-017-3298-3)
2. Бойчук О.А. Слабкозбурені інтегральні рівняння / О.А. Бойчук, Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 2. – С. 151-160. (English translation: Boichuk O.A. Weakly Perturbed Integral Equations / O.A. Boichuk, N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 223, No.3. – P. 199-209. DOI: 10.1007/s10958-017-3348-x)
3. Bondar I. Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations / I. Bondar, M. Gromyak, N. Kozlova // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 17, No.1. – P. 69-84. DOI: 10.18514/MMN.2016.1897
4. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Буковинський мат. журн. – 2016. – Т.4, № 1-2. – С. 82-86.
5. Козлова Н.О. Слабкозбурені лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь/ Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Вісник Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 65-70.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integro-differential equations / N. Kozlova, V. Feruk // Nonlinear analysis and application: 3rd international scientific conference on memory of corresponding member of National

Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik, April 01-03, 2015. Book of abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2015. – P. 32.

2. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference "Modelling and stability", May 27-29, 2015. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2015. – С. 55.
3. Козлова Н.О. Фредгольмові інтегральні рівняння з керуванням / Н.О. Козлова // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2015. – С. 150.
4. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integral equations / N. Kozlova, V. Feruk // 7th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" (MADEA-7), September 08-13, 2015. Abstracts. – Baku, Azerbaijan. – 2015. – P. 89.
5. Бойчук А.А. Метод Вишика-Люстерника для слабовозмущенных интегральных уравнений / А.А. Бойчук, Н.А. Козлова, В.А. Ферук // VII международная научная конференция "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры", 8-9 октября 2015. Материалы конференции. – Актобе, Республика Казахстан. – 2015. – С. 25-29.
6. Козлова Н.О. Один подход к исследованию слабовозмущенных краевых задач для интегральных уравнений / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Международная научная конференция "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", посвященная 75-летию доктора физ.-мат. наук, профессора С.Т. Сафаровича, 29-30 октября 2015 г. Материалы конференции. – Душанбе, Республика Таджикистан. – 2015. – С. 111-112.
7. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р. Матеріали конф. Т. 1. Диферен-

ціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ, Україна. – 2016. – С. 143-146.

8. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, 19-21 травня 2016 р. Тези доповідей. – Ужгород, Україна. – 2016. – С. 79.
9. Козлова Н.О. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25-27 травня 2016 р. Тези доповідей. – Львів, Україна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kozlova.pdf
10. Kozlova N.O. Weakly perturbed linear boundary value problems for the Fredholm integral equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, September 20-24, 2016. Book of abstracts. – Lviv, Ukraine. – 2016. – P. 85.
11. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (1936-1992), 28-30 вересня 2016. Матеріали конференції. – Чернівці, Україна. – 2016. – С. 57.
12. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння типу Гамерштейна / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фіз.-мат. наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д.І. Мартинюка (1942-1996), 19-21 травня 2017 року. Матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський, Україна. – 2017. – С. 56.

13. Козлова Н.О. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII Internation Conference "Modelling and stability", 24-26 May, 2017. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2017. – С. 66.
14. Козлова Н.О. Крайова задача для інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.А. Степанця (1942-2007), 28 травня - 3 червня 2017 р. Тези доповідей. – Слов'янськ, Україна. – 2017. – С. 62.
15. Kozlova N.O. Weakly nonlinear integral equations / N.O. Kozlova // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008), 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2017. – С. 70.