

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему:

**Принцип великих відхилень для деяких класів
марковських процесів**



Виконав студент 4-го курсу
Демченко Ярослав Трохимович



Науковий керівник:
професор, доктор фіз.-мат. наук
Самойленко Ігор Валерійович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та
рекомендована до захисту в ЕК, протокол №9 ____ від "23" травня 2023р.

Завідувач кафедри ДО

проф. Іксанов О.М.

Зміст	1
1 Вступ	2
2 Ланцюги Маркова з неперервним часом	4
3 Процеси з незалежними приростами	10
4 Процеси з локально незалежними приростами	13
5 Принцип великого відхилення	14
6 Принцип великих відхилень для середніх граничних теорем	22
7 Принцип великих відхилень для ергодичних марковських процесів	23
8 Великі відхилення для стохастичних адитивних функціоналів	26
9 Висновок	41
10 Список літератури	42

Теорія великих відхилень стосується асимптотичної поведінки віддалених хвостів послідовностей розподілів ймовірностей. Вона має застосування в багатьох областях, включаючи статистику, комунікаційні мережі, теорію інформації, статистичну механіку, чутливе до ризику управління та системи масового обслуговування.

Перші точні результати великих відхилень були отримані Гаральдом Крамером наприкінці 1930-х років, який застосував їх для моделювання страхового бізнесу. Він дав результат за принципом великого відхилення (ПВВ) для суми незалежних і однаково розподілених (н.о.р) випадкових величини з функцією інтенсивності, вираженою степеневим рядом. Загальна абстрактна структура для ПВВ була запропонована С.Р.С. Варадхан у 1966 році. На той час єдиними сучасними принципами великого відхилення були: Шільдера (ПВВ для броунівського руху), Санова (ПВВ для ергодичних процесів) і Фрейдліна та Вентцелла (ПВВ для дифузій Іто) з деякою абстрактною основою ПВВ. Вирішальний крок вперед було зроблено завдяки серії робіт Донскера та Варадхана, починаючи з середини 1970-х років, у яких вони розробили систематичну теорію великих відхилень для емпіричних вимірювань н.о.р. і марківських величин. За свій фундаментальний внесок у цю сферу Варадхан отримав премію Абеля 2007 року. Уніфікований підхід, включаючи нерівномірну та гіпоеліптичну дифузії, завдяки Д.В. Струк.

У цій роботі ми встановлюємо кілька результатів великих відхилень для стохастичних адитивних функціоналів, які сильно або слабо збігаються при різних масштабах. Вводимо необхідні позначення, визначення та викладаємо основні факти та результати, пов'язані з нашим дослідженням. Крім того, такі фундаментальні об'єкти, як ланцюги Маркова, марковські процеси та деякі з їхніх підродин, включаючи їхні властивості, а також представлена основа для нашого аналізу.

Ми представляємо поняття перемикання та перемикаючих процесів за допомогою адитивних функціоналів процесів з локально незалежними природами, що підлягають марковському перемиканню у схемі розщеплення фаз

та злиття. Метод заснований на розбитті фазового простору на непересічні класи $E_k, k \in V$ і подальше об'єднання цих класів у різні стани $k \in V$. Встановлено принцип великого відхилення для принципу злиття фаз і теорії середнього наближення. Ці результати опубліковані в [1]. Для принципу злиття фаз результат великого відхилення був отриманий через міркування ПВВ для ергодичних процесів. Результат великого відхилення для теореми середньої апроксимації випливає з підходу слабкої збіжності. Тобто ми представляємо нормалізовані логарифми очікувань як варіаційні формули, які інтерпретуються як функції мінімальної вартості пов'язаних задач стохастичного оптимального керування.

Також ми вивчимо адитивні функціонали, пов'язані з функціональними центральними граничними теоремами, використовуючи зовсім інші методи. Ми встановлюємо функціональні майже скрізь центральні граничні теореми та виводимо принцип великого відхилення через функцію інтенсивності для процесів Орнштейна-Уленбека та розкладання мартингала адитивних функціоналів. Ці результати опубліковані в [2]. Нарешті, ми викладаємо деякі ідеї для майбутньої роботи, включаючи розширення результатів, отриманих для адитивних функціоналів у безперервному часі та для стохастичних адитивних функціоналів.

2 Ланцюги Маркова з неперервним часом

4

Розглянемо сімейство марковських ядер $\{P_t = P_t(x, B), t \in \mathbb{R}_+\}$. Нехай $x(t) \geq 0$ адаптований стохастичний процес зі значеннями в (E, \mathcal{B}_E) , визначених на Ω . Процес $x(t), t \geq 0$, називається однорідним за часом Марковським процесом, якщо для будь-яких фіксованих $s, t \in \mathbb{R}_+$ та $B \in \mathcal{B}_E$,

$$\mathbb{P}(x(t+s) \in B | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(x(t+s) \in B | x(s)) = P_t(x(s), B), (\text{м.н.}) \quad (1)$$

Коли властивість Маркова 1 виконується для будь-якого кінцевого часу зупинки τ , замість детермінованого часу s , ми говоримо, що марковський процес $x(t), t \geq 0$ задовольняє сильну марківську властивість і що процес $x(t)$ є сильним марківським процесом. На банаховому просторі $B(E)$, оператор ймовірності переходу P_t визначається як

$$P_t \varphi(x) = \mathbb{E}_x(\varphi(x(t))) = \int_E \varphi(y) P_t(x, dy), \varphi \in B(E) \quad (2)$$

Це контрактивний оператор, тобто $\|P_t \varphi\| \leq \|\varphi\|$. Рівняння Чепмена-Колмогорова еквівалентна наступному

$$P_t P_s = P_{t+s}, \text{ для будь-яких } t, s \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

який називається напівгрупова властивість. Марковський процес $x(t), t \geq 0$ має астаціонарний розподіл π якщо для будь-якого $B \in \mathcal{B}_E$,

$$\pi(B) = \int_E \pi(dx) P_t(x, B), \pi(E) = 1, t \geq 0 \quad (4)$$

Марковський процес $x(t), t \geq 0$ ергодичний якщо для кожного $\varphi \in B(E)$ маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(x(s)) ds = \int_E \pi(dx) \varphi(x), \mathbb{P}_\mu - \text{м.н.} \quad (5)$$

для будь-якої ймовірності μ на $(|E, \mathcal{B}_E)$.

Стационарний проектор Π , ергодичного марковського процесу зі стационарним розподілом π , визначається як

$$\Pi\varphi(x) := \int_E \pi(dx) \varphi(y) \mathbb{1}(x) = \hat{\varphi} \mathbb{1}(x), \hat{\varphi} := \int_E \pi(dx) \varphi(x) \quad (6)$$

де $\mathbb{1}(x) = 1$ для всіх $x \in E$. Маємо $\Pi^2 = \Pi$.

Розглянемо марковський процес $x(t), t \geq 0$ з траєкторіями в $\mathcal{D}[0, \infty]$ і напівгрупою $\{P_t, t \geq 0\}$. Лінійний оператор $Q : B(E) \rightarrow B(E)$ визначений як

$$Q\varphi = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (P_t\varphi - \varphi), \quad (7)$$

де границя існує в нормі, називається інфінітезимальний оператор. Нехай область визначення оператора \mathcal{D} є підмножиною $B(E)$, для яких існує зазначена вище межа. Марковська напівгрупа $P_t \geq 0$ називається рівномірно безперервна на $B(E)$, якщо

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t - I\| = 0 \quad (8)$$

де I є тотожним оператором на $B(E)$.

Однорідний у часі марковський процес називається (чисто) розривним або стрибкоподібним, якщо його напівгрупа є рівномірно неперервною. У цьому

випадку процес залишається в будь-якому стані протягом додатного (стробо) часу, а після виходу зі стану він переходить безпосередньо в інший. Цей процес ми назвемо стрибкоподібний марковський процес.

Нехай $x(t), t \geq 0$ однорідний у часі стрибкоподібний марковський процес. Нехай $\tau_n, n \geq 0$ час стрибка, для якого $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq \dots$. Випадковий процес $x_n, n \geq 0$ визначений як $x_n = x(\tau_n), n \geq 0$, називається вбудований ланцюг Маркова марковського процесу $x(t), t \geq 0$.

Нехай $P(x, B)$ ймовірність переходу $x_n, n \geq 0$. Інфінітезимальний генератор Q стрибкоподібного марковського процесу $x(t), t \geq 0$, є

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)] \quad (9)$$

де ядро $P(x, B)$ є ядром переходу вбудованого ланцюга Маркова, і $q(x) \in E$ – функція інтенсивності стрибків. Якщо марковський процес $x(t)$ має стаціонарний розподіл π , тоді вбудований ланцюг Маркова x_n також має стаціонарний розподіл ρ і має такі властивості:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q := \int_E \pi(dx)q(x). \quad (10)$$

Приклад 2.1 Інфінітезимальний генератор пуассонівського процесу. Нехай S_1, S_2, \dots незалежні однаково розподілені випадкові величини такі, що $\mathbb{P}(S_n > t) = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$. Нехай $T_1 = S_1, T_n = S_1 + \dots + S_n, n \geq 2$. Процес $N_t, t \geq 0$ визначений як $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_n \leq t}$ є марковським процесом відносно природної фільтрації $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s : s \leq t\}$ і його траєкторії $t \rightarrow N_t$ є неперервні справа ступінчасті функції зі стрибками висоти 1 на T_n і вони належать до $\mathcal{D}[0, \infty]$. Випадкова величина N_t має розподіл Пуассона

$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \mathbb{E}(n_t) = \lambda t \quad (11)$$

Ми можемо розглядати однорідний за часом процес Пуассона $N_t, t \geq 0$ як з сімейства Марковських на станах $E = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ з імовірнісною мірою \mathbb{P}_x такою, що $N_0 = x, x \in E$ і функцією ймовірносних переходів

$$\mathbb{P}(t, x, \{z\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{1}{(z-x)!} (\lambda t)^{z-x}, & z \geq x \\ 0, & z < x \end{cases} \quad (12)$$

Нехай \mathbb{L} інфінітезимальний генератор цього сімейства. Тоді для будь-якого $\varphi \in B(E)$ маємо

$$\mathbb{L}\varphi(x) = \lambda(\varphi(x+1) - \varphi(x)) \quad (13)$$

Приклад 2.2 Інфінітезимальний генератор процесу відновлення.

Процес відновлення описується так само, як і процес Пуассона, але час між надходженнями S_n тепер є випадковими величинами з функцією розподілу f на \mathbb{R}_+ не обов'язково експоненціальний. Моменти T_n називаються моментами відновлення. Функція $m(t) = \mathbb{E}(N_t)$, очікуване значення процесу підрахунку в момент часу t , називається функцією відновлення і він задовольняє наступному рівнянню відновлення:

$$m(t) = F(t) + \int_0^t F(t-s) dm(s), F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad (14)$$

Процес відновлення не є процесом Маркова, але якщо ми позначимо остан-

ній стрибок часу $\nu(t) = \sup\{k : T_k \leq t\}$, а час після останнього стрибка $\tau_t = t - T_{\nu(t)}$, потім сполучений процес $x_t = (N_t, \tau_t), t \geq 0$ стає марковським процесом у $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Рівень небезпеки, що відповідає щільності відновлення f , є $\lambda(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ де $\bar{F}(t) = \int_t^\infty f(s)ds$ є функцією виживання. Якщо початкова точка $x = (n, \tau)$, потім через короткий час δ процес знаходиться на $n, \tau + \delta$ або за один крок від $(n + 1), \delta'$ для деяких $\delta' \in (0, \delta)$. Отже, для будь-якої обмежено вимірної функції $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ бачимо, припускаючи, що $\tau \rightarrow \varphi(n, \tau)$, що інфінітезимальний генератор процесу $x(t), t \geq 0$ має такий вигляд

$$\mathbb{L}\varphi(n, \tau) = \lim_{\delta \downarrow 0} [\mathbb{E}_{(n, \tau)} \varphi(x_\delta) - \varphi(n, \tau)] = \frac{d}{d\tau} \varphi(n, \tau) + \lambda(\tau) [\varphi(n + 1, 0) - \varphi(n, \tau)] \quad (15)$$

Приклад 2.3 Сполучений марковський процес.

Нехай $x(t), t \geq 0$ – неоднорідний стрибкоподібний марковський процес. Тоді інфінітезимальний генератор зв'язаного марковського процесу $(t, x(t)), t \geq 0$ визначається таким чином:

$$\mathbb{L}\varphi(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + Q\varphi(\cdot, x) \quad (16)$$

де область визначення $\mathbb{L} \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) = \mathcal{C}^{1,0}(\mathbb{R}_+ \times E)$

Приклад 2.4 Процес приросту.

Нехай $x(t), t \geq 0$ чистий стрибкоподібний марковський процес (тобто без зміщення та дифузії) із простором станів E і інфінітезимальним генератором Q , і нехай $\nu(t), t \geq 0$ – відповідний процес підрахунку стрибків і $x_n, n \geq 0$ – вбудований ланцюг Маркова. Нехай a дійснозначна вимірна функція на

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} a(x_k), t \geq 0 \quad (17)$$

Тоді інфінітезимальний генератор зв'язаного марковського процесу $(\alpha(t), (t)), t \geq 0$ є

$$\mathbb{L} = Q + Q_0[\Gamma(x) - I] \quad (18)$$

де $\Gamma(x)\varphi(u) := \varphi(u + a(x))$, $Q_0\varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)\varphi(y)$ та I є тотожним оператором.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ стохастичний базис, і $x(t), t \geq 0$ стохастичний процес, адаптованим до фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ зі значеннями в \mathbb{R}^d .

Кажуть, що процес $x(t), t \geq 0$ має незалежні прирости, якщо для будь-яких $s, t \in \mathbb{R}_+$ при $s < t, x(t) - x(s)$ не залежить від \mathcal{F}_s .

Якщо фільтрація $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ є природною фільтрацією процесу, то ця властивість еквівалентна властивості незалежності приросту: для будь-яких $n \geq 1$ та $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, випадкові величини $x(t_0), x(t_1) - x(t_0), \dots, x(t_n) - x(t_{n-1})$ незалежні.

Якщо крім того, $x(t)$ має стаціонарні прирости, тобто $x(t)x(c)$ залежить лише від t , то процес $x(t)$ називають процесом зі стаціонарними незалежними приростами.

Основні властивості процесів зі стаціонарними незалежними приростами полягають у тому, що їхні розподіли нескінченно діляться і мають марковську властивість. Нехай

$$\phi_t(\lambda) := \mathbb{E} \exp(i\lambda(x((t+s) - x(s)))) \quad (19)$$

це характеристична функція приростів. Тоді вона задовольняє властивість напівгруп:

$$\phi_{t+s}(\lambda) = \phi_t(\lambda)\phi_s(\lambda) \quad (20)$$

і може бути представлена як $\phi_t(\lambda) = \exp[t\psi(\lambda)]$. Тоді кумулянт $\psi(\lambda)$ має формулу Леві-Хінчина:

$$\psi(\lambda) = i\lambda a - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} [e^{i\lambda z} - 1 - i\lambda z] \mathbb{1}_{\{|z| \leq 1\}} H(dz), \quad (21)$$

де H це спектральна міра і задовольняє наступні умови

$$\int_{|z| \leq 1} z^2 H(dz) < \infty, \quad \int_{|z| > 1} H(dz) < \infty, \quad (22)$$

Процеси зі стаціонарними незалежними приростами задовольняють вла-¹¹стивість Маркова, тобто ймовірності переходів породжуються марковською напівгрупою

$$\Gamma_t \varphi(u) := \mathbb{E} \varphi(u + x(t)). \quad (23)$$

Генератор напівгрупи 23 з кумулянтю 21 має наступне представлення:

$$\Gamma \varphi(u) = a \varphi'(u) - \frac{\sigma^2}{2} \varphi''(u) + \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u + v) - \varphi(u) - v \varphi'(u) \mathbb{1}_{(|v| \leq 1)}] H(dv) \quad (24)$$

Найважливішими процесами зі стаціонарними незалежними приростами є броунівський рух, процес Пуассона та процес Леві.

Стандартний процес Вінера з кумулянтю $\psi(\lambda) = -\sigma^2 \lambda^2 / 2$ має генератор $\Gamma \varphi(u) = \sigma^2 \varphi''(u) / 2$.

Складений процес Пуассона $x(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k$, де $\nu_t, t \geq 0$ є однорідним процесом Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$ і $\xi_k, k \geq 1$ - це незалежна однаково розподілена послідовність реальних випадкових величин, незалежних від $\nu(t), t \geq 0$, із загальною функцією розподілу F , має кумулянт вигляду

$$\psi(\lambda) = \lambda \int_{\mathbb{R}} [e^{i\lambda z} - 1] F(dz) \quad (25)$$

і інфінітезимальну твірну вигляду

$$\Gamma \varphi(u) = \lambda \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u + v) - \varphi(u)] F(dv) \quad (26)$$

Однорідний марковський процес можна однозначно пов'язати з процесом з незалежними приростами $x(t)$ через

$$\xi(t) := x(s+t) - x(s) + u, s \geq 0, u \in \mathbb{R}^d \quad (27)$$

Напівгрупа $\Gamma_t \varphi(u) = \mathbb{E}_u \varphi(\xi(t)) = \mathbb{E} \varphi(u + x(t))$ має таку чудову властивість: нехай $S_v : \mathcal{B}_d \rightarrow \mathcal{B}_d$ оператором зсуву, $S_v \varphi(u) = \varphi(u + v)$; $\Gamma_t S_v \varphi(u) = S_v \Gamma_t \varphi(u)$ для будь-яких $u, v \in \mathbb{R}^d$. Марковські процеси з властивістю, що їх напівгрупа комутує з оператором $S_v, v \in \mathbb{R}^d$ називають однорідні в просторі. Таким чином, процеси зі стаціонарними незалежними приростами можна ідентифікувати в певному сенсі як марковські процеси, які є однорідним як у часі, так і в просторі.

4 Процеси з локально незалежними приростами

Розглянуті процеси з локально незалежними приростами є стрибкоподібними марковськими процесами з дрейфом і без дифузійної частини. Ці процеси ще називають слабо диференційовані марковські процеси або кусково-детерміновані марковські процеси. Варто зауважити, що такі процеси включають строго незалежні процеси приросту. Ці процеси визначаються інфінітезимальним генератором Γ наступним чином

$$\Gamma\varphi(u) = a(u)\varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)]\Gamma(u, dv) \quad (28)$$

зі швидкістю дрейфу $a(u)$, ядром інтенсивності $\Gamma(u, dv)$ таким, що $\Gamma(u, dv) \in \mathbb{R}_+$ і задовольняє наведені вище умови спектральної міри. Зрозуміло, що коли $d > 1$, маємо

$$v\varphi'(u) = \sum_{k=1}^d v_k \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u). \quad (29)$$

Нехай нам дано евклідов простір \mathbb{R}^d з Борелівською σ -алгеброю \mathcal{B}_d та компактний вимірний простір (E, \mathcal{E}) . Ми вважаємо сімейство однорідних у часі марковських процесів $\eta(t; x), t \geq 0, x \in E$, з траєкторіями в $\mathcal{D}[0, \infty]$, з локально незалежними приростами. Ці процеси приймають значення в евклідовому просторі \mathbb{R}^d ($d \geq 1$), і залежать від стану $x \in E$, а їх інфінітезимальні генератори задані формулою

$$\Gamma(x)\varphi(u) = a(u; x)\varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)]\Gamma(u, dv; x) \quad (30)$$

Швидкість дрейфу $a(u; x)$ і міра випадкових стрибків $\Gamma(u, dv; x)$ залежать від стану $x \in E$.

Нехай $X^n, n \in \mathbb{N}$ послідовність випадкових величин, визначених у ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ і отримання значень у повному роздільному метричному просторі (\mathcal{X}, d) . Теорія великих відхилень фокусується на випадкових величинах $\{X^n\}$, для яких ймовірності $\mathbb{P}\{X^n \in A\}$ експоненціально збігаються до 0 для класу борелівських наборів A . Експоненціальна швидкість спадання цих ймовірностей виражається через функцію I відображення \mathcal{X} в $[0, \infty]$. Ця функція називається функцією інтенсивності, якщо вона має компактний рівень наборів, тобто для кожного $M < \infty$ множина рівня $\{x \in \mathcal{X} : I(x) \leq M\}$ є компактною підмножиною \mathcal{X} . Функція, що має компактні множини рівня, автоматично є напівнеперервною знизу і досягає свого інфімуму на будь-якій непорожній замкнутій множині.

Визначення 5.1 Кажуть, що послідовність $\{X^n\}$ задовольняє принцип великого відхилення на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I , якщо виконуються такі дві умови:

(1) Верхня межа великого відхилення: для кожної закритої підмножини F з \mathcal{X}

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{X^n \in F\} \leq - \inf_{x \in F} I(x) \quad (31)$$

(2) Нижня межа великого відхилення: для кожної відкритої підмножини G з \mathcal{X}

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{X^n \in G\} \geq - \inf_{x \in G} I(x) \quad (32)$$

Визначення 5.2 Нехай I функція інтенсивності на \mathcal{X} . Кажуть, що послідовність $\{X^n\}$ задовольняє принцип Лапласа на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I якщо для всіх обмежених неперервних функцій

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{\exp[-nh(X^n)]\} = - \inf_{x \in \mathcal{X}} \{h(x) + I(x)\}. \quad (33)$$

Принцип великого відхилення можна сформулювати в термінах принципу Лапласа використовуючи такі фундаментальні результати.

Теорема 5.3 Припустимо, що послідовність $\{X^n\}$ задовольняє принцип великого відхилення на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I . Тоді для всіх обмежених безперервних функцій h , що відображають \mathcal{X} на \mathbb{R} , виконується рівняння 33, а отже, і послідовність $\{X^n\}$ задовольняє принцип Лапласа на \mathcal{X} . Обернена теорема Варадхана також належить Варадхану, і вона стверджує:

Теорема 5.4 Принцип Лапласа передбачає принцип великого відхилення з тією ж функцією інтенсивності. Точніше, якщо I функція інтенсивності на \mathcal{X} і границя 33 справедлива для всіх обмежених неперервних функцій h , тоді $\{X^n\}$ задовольняє принцип великого відхилення на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I .

Визначення 5.5 Послідовність $\{X^n\}$ називається експоненціально щільною, якщо для будь-якого $M \in (0, \infty)$ існує компактна множина K така, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{X^n \in K^c\} \leq -M \quad (34)$$

Наступна теорема є ще однією оберненою до теореми Варадхана за Брайком.

Теорема 5.6 (Теорема Брайка) Якщо послідовність $\{X^n\}$ є експоненціально щільною і якщо границя

$$\Lambda(h) := \lim_{n \rightarrow \infty} \log \mathbb{E}\{\exp[-nh(X^n)]\} \quad (35)$$

існує для всіх обмежених неперервних функцій h , тоді $\{X^n\}$ задовольняє принцип великого відхилення на \mathcal{X} з функцією інтенсивності

$$I(x) := - \inf_{h \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X})} \{h(x) + \Lambda(h)\} \quad (36)$$

і $\Lambda(h) = - \inf_{x \in \mathcal{X}} \{h(x) + I(x)\}$.

Якщо послідовність випадкових величин задовольняє принцип Лапласа (або, еквівалентно, ПВВ) з деякою функцією інтенсивності, тоді функція інтенсивності є унікальною. Теорема Припустимо, що $\{X^n\}$ задовольняє принцип

Лапласа на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I з функцією інтенсивності J . Тоді $I(\xi) = J(\xi)$ для усіх $\xi \in \mathcal{X}$.

Безперервне зображення послідовності випадкових величин, що задовольняє принцип Лапласа (або ПВВ), також задовольняє принцип Лапласа (або ПВВ). Ця властивість проілюстрована в наступній теоремі.

Теорема 5.7 (Принцип скорочення) Нехай \mathcal{X} і \mathcal{Y} польські простори, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ неперервна функція і I функція інтенсивності на \mathcal{X} .

(1) Для будь-якого $y \in \mathcal{Y}$

$$J(y) := \inf\{I(x) : x \in \mathcal{X}, y = f(x)\}. \quad (37)$$

є функцією інтенсивності на \mathcal{Y} , де інфімум над порожньою множиною приймається за ∞ .

(2) Якщо $\{X^n\}$ задовольняє принцип Лапласа на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I , тоді $f(X^n)$ задовольняє принцип Лапласа на \mathcal{Y} з функцією інтенсивності J . Інша важлива властивість принципу Лапласа полягає в тому, що він зберігається в суперекспоненціальному наближенні. **Теорема** Нехай $\{X^n\}$ і $\{Y^n\}$ випадкові змінні, визначеними на тому самому ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ і приймає значення в \mathcal{X} . Припустимо, що $\{X^n\}$ задовольняє принцип Лапласа на \mathcal{X} з функцією інтенсивності I , і що $\{Y^n\}$ є суперекспоненціально замкнутою (експоненціально еквівалентною) до \mathcal{X} у такому розумінні: для кожного $\delta > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{d(Y^n, X^n) > \delta\} = -\infty \quad (38)$$

Тоді $\{Y^n\}$ задовольняє принцип Лапласа на \mathcal{X} з тією ж функцією інтенсивності I .

Приклади

Роль великих відхилень в оцінці різниці між усередненим за часом значенням і його очікуванням, коли ця різниця є значною, найкраще можна зрозуміти на наступному прикладі. Припустимо, що $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ є послідовністю незалежних однаково розподілених (н.о.р.) випадкових величин,

наприклад, нормально розподілених із середнім значенням 0 і дисперсією 1. Тоді

$$\mathbb{E}[e^{\theta(X_1+\dots+X_n)}] = e^{n(\theta^2/2)} \quad (39)$$

З іншого боку, $\mathbb{E}[e^{\theta(X_1+\dots+X_n)}] = e^{n\theta(S_n/n)}$ і оскільки $\frac{S_n}{n}$ майже напевно збігається до нуля (закон великих чисел), це далі дорівнює $\mathbb{E}[e^{o(n)}]$ що відрізняється від $e^{o(n)}$.

Дійсно, якщо припустити, що $\theta > 0$, для будь-якого $a > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{\theta S_n}] \geq e^{n\theta a} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq a\right\} = e^{n\theta a} e^{-(na^2/2)+o(n)} = e^{n(a\theta-a^2/2)+o(n)} \quad (40)$$

Оскільки $a > 0$ вибрано довільно,

$$\mathbb{E}[e^{\theta S_n}] \geq e^{n \sup_{a>0}(\theta a - a^2/2) + o(n)} = e^{n\theta^2/2 + o(n)} \quad (41)$$

Найпростішим прикладом, для якого можна розрахувати ймовірності великих відхилень, є підкидання монети.

1. Великі відхилення для суми н.о.р. випадкових величин. Розглянемо послідовність незалежних кидків правильної монети. Ймовірність того, що k раз із n випаде "Герб" є $P(n, k) = C_n^k 2^{-n} \simeq \frac{\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2} 2^{-n}}{\sqrt{2\pi} e^{-(n-k)} (n-k)^{n-k+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-k} k^{k+1/2}}$ за наближенням Стірлінга. Тому, $p(n, k) \simeq -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log n - (n-k + \frac{1}{2}) \log(1 - \frac{k}{n}) - (k + \frac{1}{2}) \log \frac{k}{n} - n \log 2$. Якщо $k \simeq nx$, тоді

$$\log P(n, k) \simeq -n[\log 2 + x \log x + (1-x) \log(1-x)] + o(n) = -nH(x) + o(n) \quad (42)$$

де $H(x)$ є інформацією Кульбака-Лейблера або відносною ентропією $\text{Binomial}(x, 1/2)$ відносно $\text{Binomial}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Крім того, якщо f_i це спостережувані частоти в n випробуваннях поліномі-

ального розподілу з ймовірностями $\{p_i\}$ для окремих комірок, то

18

$$p(n, p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_k) = \frac{n!}{f_1! \dots f_k!} p_1^{f_1} \dots p_k^{f_k} \quad (43)$$

Подібний розрахунок із використанням наближення Стірлінга можна отримати, якщо припустити $f_i \approx nx_i$,

$$\log P(n, p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_k) = -nH(x_1, \dots, x_k; p_1, \dots, p_k) + \quad (44)$$

де $H(x, p)$ це інформаційне число Кульбака-Лейблера

$$H(x) = \sup_{i=1}^k x_i \log \frac{x_i}{p_i} \quad (45)$$

Будь-який розподіл ймовірностей може бути апроксимований розподілом, зосередженим на скінченному наборі, і емпіричний розподіл із вибірки розміром n буде мати мультиноміальний розподіл. Тому очікувано, що ймовірність $p(n, \mu, \nu)$, що емпіричний розподіл $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ з n незалежних спостережень з розподілом μ близький до ν має задовольняти

$$\log P(n, \mu, \nu) = -nH(n\mu|\mu) + o(n) \quad (46)$$

де $H(\nu|\mu)$ це знову інформаційне число Кульбака-Лейблера

$$\int \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu = \int \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad (47)$$

Величину $H(\nu|\mu)$ також називають відносною ентропією ν відносно μ . Це суворо доведено Сановим.

Теорема 5.8 Нехай μ є ймовірнісною мірою на польському просторі \mathcal{X} . Нехай для $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{X}$ визначимо $L_n(X) := \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta_{X_m}$. Нехай $\tilde{\mu}_n \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(\mathcal{X}))$ є розподілом під μ функції L_n . Потім клас $\{\tilde{\mu}_n : n \geq 1\}$ задовольняє принцип великого відхилення з функцією інтенсивності $I(\cdot) = H(\cdot|\mu)$ де

$$H(\nu|\mu) = \begin{cases} \int f \log(f) d\mu & \text{якщо } \nu \ll \mu \text{ і } f = \frac{d\nu}{d\mu} \\ \infty & \text{інакше} \end{cases} \quad (48)$$

є відносною ентропією ν відносно μ . Класичним прикладом, для якого обчислюється функція інтенсивності, є теорема Крамера.

Нехай X_1, X_2, \dots є н.о.р. d -вимірні випадкові вектори, де X_1 розподілена за ймовірнісним законом $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$. Розглянемо емпіричні середні $\hat{S}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Кумулянтна генеруюча функція пов'язана із законом μ визначається як

$$\Lambda(\lambda) := \log \mathbb{E}[e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}] \quad (49)$$

де $\langle \lambda, X_1 \rangle := \sum_{j=1}^d \lambda_j x_j$ є звичайним скалярним добутком в \mathbb{R}^d .

Нехай μ_n розподілена як \hat{S}_n і $\bar{x} := \mathbb{E}[X_1]$. Коли \bar{x} існує і є скінченним і $\mathbb{E}[|X_1 - \bar{x}|^2] < \infty$, тоді \hat{S}_n збігається за ймовірністю до \bar{x} . Тому $\mu_n(F) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якої закритої множини F такої, що $\bar{x} \notin F$.

Теорема 5.9 (Теорема Крамера) Припустимо, що $\Lambda(\lambda) < \infty$ для усіх достатньо малих $|\lambda|$. Тоді послідовність значень μ_n задовольняє ПВВ на \mathbb{R}^d , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(A) = - \inf_{x \in A} \Lambda^*(x) \quad (50)$$

де функція інтенсивності

$$\Lambda^*(x) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{ \langle \lambda, x \rangle - \Lambda(\lambda) \} \quad (51)$$

є перетворення Фенхеля-Лежандра функції $\Lambda(\lambda)$.

2. Приклад великих відхилень шляху для випадкового блукання та броунівського руху

Нехай X_1, X_2, \dots є послідовністю н.о.р. випадкових величин, що набувають значень в \mathbb{R}^d з кумулятивною твірною функцією $\Lambda(\lambda)$, визначеною в 49, є скінченною для всіх $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Нехай

$$Z_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (52)$$

і нехай μ_n буде розподілена за законом $Z_n(\cdot)$. Тоді

Теорема 5.10 (Теорема Могульського) Значення μ_n задовольняють принцип великого відхилення з функцією інтенсивності

$$I(\phi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\phi'(t)) dt, & \text{якщо } \phi \in \mathcal{A}_0[0, 1] \\ \infty & \text{інакше} \end{cases} \quad (53)$$

де Λ^* є перетворенням Фенхеля-Лежандра функції $\Lambda(\cdot)$.

З цього випливає ще один важливий результат — принцип великого відхилення для броунівського руху. Розглянемо стандартний броунівський рух $(B(t), t \in \mathbb{R}_+)$, і $X_n(t) = \frac{B(t)}{\sqrt{n}}$, де n є великим параметром. Оскільки $X_n(t) - X_n(s)$ мають розподіл Гауса із середнім 0 і дисперсією $\frac{t-s}{n}$, послідовність випадкових величин задовольняє ПВВ з функцією інтенсивності $\frac{x^2}{2(t-s)}$. Розглянемо тепер вектор $(X_n(t_i), i = 1, 2, \dots, k)$, де $t_1 < t_2 \dots < t_k$. За властивістю незалежності приростів, k - розмірний вектор $(X_n(t_i) - X_n(t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, k), t_0 = 0$, задовольняє ПВВ з функцією інтенсивності $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{x_i^2}{t_i - t_{i-1}}$. Тому, за принцип згортання, вектори $(X_n(t_i), i = 1, 2, \dots, k)$ задовольняють

ПВВ з функцією інтенсивності $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}$. Це означає, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ і великих n

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{|X_n(t) - x_i| \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, k\} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 (t_i - t_{i-1}) \quad (54)$$

,

Тому, якщо $(x(t), t \in [0, 1])$ є абсолютно неперервною функцією, то, розглядаючи все більш малі проміжки на $[0, 1]$ слід очікувати, що

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{|X_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon\} \approx -\frac{1}{2} \int_0^1 x'(t)^2 dt \quad (55)$$

,

таким чином функція інтенсивності має дорівнювати $\frac{1}{2} \int_0^1 x'(t)^2 dt$ для абсолютно безперервних функцій починаючи з нуля. Права сторона прямує до $-\infty$ якщо x або не є абсолютно безперервним, або якщо він не починається з нуля.

Теорема 5.11 (теорема Шільдера) Нехай $\mathcal{A}_0([0, 1])$ визначає усі абсолютно неперервні функції ϕ , що задовольняють $\phi(0) = 0$. Тоді $X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} B(t)$ задовольняє принцип великого відхилення на $\mathcal{C}[0, 1]$ з функцією інтенсивності

$$I(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \phi'(t)^2 dt, & \text{якщо } \phi \in \mathcal{A}_0([0, 1]) \\ \infty & \text{інакше} \end{cases} \quad (56)$$

Це твердження можна узагальнити до дифузії Іто шляхом застосування різних принципів згортання.

Нехай B є стандартним броунівським рухом і X_t^ε це процес дифузії що є єдиним розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \sqrt{\varepsilon}dB_t, 0 \leq t \leq 1, X_0^\varepsilon = 0 \quad (57)$$

де $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є рівномірно неперервною функцією.

Теорема 5.12 (Теорема Фрейдліна-Вентцеля) Клас $\{X_t^\varepsilon\}$ задовольняє ПВВ на $\mathcal{C}_0([0, 1])$ з функцією інтенсивності

$$I(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 |\phi'(t) - b(\phi(t))|^2 dt, & \text{якщо } f \in \mathcal{A}_0([0, 1]) \\ \infty & \text{інакше} \end{cases} \quad (58)$$

6 Принцип великих відхилень для середніх граничних теорем

Основним математичним об'єктом цього розділу є сімейство зв'язаних марковських процесів $(\varepsilon(t), x(t)), t \geq 0$, які називають перемикаючими і перемикаючими процесами відповідно. Перемикаючий процес описує еволюцію системи і є стохастичним функціоналом процесу $\eta(t; x), t \geq 0, x \in E$ з локально незалежними приростами. Для того, щоб зменшити складність фазового простору, перемикаючі процеси, які описують випадкові зміни в еволюції системи, є процесом Маркова зі стрибками, що розглядаються в розбитому просторі $E = \bigcup_{k=1}^N E_k, E_k \cap E_{k'} = \emptyset, k \neq k'$ з непересічними компонентами, і мають ергодичну властивість для кожного класу E_k . Вводячи параметра ε визначаємо марковський процес зі стрибками на розбитому фазовому просторі з малими перехідними ймовірностями між станами системи та далі об'єднуємо класи $E_k, k = 1, 2, \dots, N$ в різні стани $k, 1 \leq k \leq N$. Середня гранична теорема стохастичного адитивного функціонала з швидко масштабованим процесом перемикання отримана за допомогою мартингальної характеристики та розв'язку задачі сингулярного збурення для звідно-оборотних операторів. Ми зацікавлені в пошуку принципу великого відхилення для цієї послідовності стохастичних адитивних функціоналів. Використовуючи підхід

слабкої збіжності Дюпої та Елліса [13], принцип великого відхилення виведено для послідовності випадкових блукань, побудованих таким чином, що вони мають той самий розподіл, що й послідовність лінійної інтерполяції вибірок стохастичних адитивних функціоналів.

7 Принцип великих відхилень для ергодичних марковських процесів

Нехай $x(t), t \in \mathbb{R}_+$ є марковським однорідним у часі процесом на компактному метричному просторі X, \mathcal{B}_X є борелівською сигма-алгеброю на X і $\mathcal{M}(X)$ простір ймовірнісних значень на \mathcal{B}_X . Введемо випадкову величину на \mathcal{B}_X

$$\nu_t(B) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{x(s) \in B} ds, B \in \mathcal{B}_X \quad (59)$$

Теорема Припустимо, що процес $x(t), t \in \mathbb{R}_+$ є ергодичним марковським процесом. Тоді справедливий наступний результат великого відхилення

$$-\inf_{m \in \Gamma^\circ} I(m) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log$$

де функція інтенсивності $I : \mathcal{M}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ визначається як

$$I(m) = -\inf \left(\int (\phi(x))^{-1} Q \phi(x) m(dx) : \phi \in \mathcal{D}(Q), \phi > 0 \right) \quad (61)$$

і $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(X))$ є борелівською сигма-алгеброю на $\mathcal{M}(X)$.

Зазвичай $\Gamma = \{\nu \in \mathcal{M}(X) | d(\nu, m) > \delta, I(m) = 0\}$ де d це деяка метрика на $\mathcal{M}(X)$.

Функція інтенсивності $I(m)$ задовольняю наступні властивості

(i) $I(m) \geq 0$ для всіх $m \in \mathcal{M}(X)$, і $I(m) = 0$ тоді і тільки тоді якщо m є інваріантною мірою для ергодичного марковського процесу, (ii) $I(m)$ опукла

$$I(sm_1 + (1 - s)m_2) \leq sI(m_1) + (1 - s)I(m_2), m_i \in \mathcal{M}(X), i = 1, 2; 0 < s < 1 \quad (62)$$

(iii) $I(m)$ є напівнеперервною знизу функцією, тобто

$$\liminf_{m_n \rightarrow m} I(m_n) \geq I(m) \quad (63)$$

(iv) Для будь-якого $b > 0$ множина $C_b(I) = \{m : I(m) \leq b\}$ є компактною, а функція $I(m)$ неперервна на цьому компактї.

Ми проілюструємо концепцію розбитого фазового простору в наступному прикладї.

Приклад

Розглянемо марковський процес із чотирма станами $x(t), t \in \mathbb{R}_+$ на розбитому фазовому просторї $E = \{1, 2, 3, 4\} = E_1 \cup E_2, E_1 = \{1, 2\}, E_2 = \{3, 4\}$ створеному через

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Марковський процес $x(t)$ є ергодичним в обох E_1 і E_2 зі стаціонарними розподїлами $\pi_1 = (\frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1})$ та $\pi_2 = (\frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2})$

Тепер проаналїзуємо сингулярно збуренї марковські процеси, ввівши малий параметр $\varepsilon > 0$, що призводить до сингулярно збуреної системи, що включає два часових множника, фактичний час t і розтягнутий час $\frac{t}{\varepsilon}$. Оскільки процес $x(t)$ є ергодичним на E_1, E_2 , систему можна розкласти, а стани марковського процесу можна агрегувати.

Нехай $x^\varepsilon(t)$ є ланцюгом Маркова на E згенерований з $Q + \varepsilon Q_1$ з Q визначеною вище і Q_1 заданою як

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ -0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ -0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \quad (65)$$

і $x^\varepsilon(\frac{t}{\varepsilon})$ є марковським процесом, незмінним у часі, з генератором $Q^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}Q + Q_1$.

Зверніть увагу, що для малих ε , марковський процес $x^\varepsilon(\frac{t}{\varepsilon})$ частіше переходить у межах кожного блоку та рідше з одного блоку на інший. Щоб краще зрозуміти основний процес, ми розглянемо об'єднаний процес $\hat{x}^\varepsilon(t) := m(x^\varepsilon(\frac{t}{\varepsilon}))$ отриманих шляхом агрегування станів у k -ому блоку в один стан k і вивчимо його асимптотичну поведінку.

Теорема 3.6 стверджує, що граничний процес є процесом Маркова на об'єднаному прості $\hat{E} = \{1, 2\}$ визначеному твірною матрицею $\hat{Q} = (\hat{q}_{kr}, 1 \leq k, r \leq 2)$, де \hat{q}_{kr} задовольняє (3.1.7). Для цього прикладу $q_1 = \frac{2\lambda_1\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}$, $q_2 = \frac{2\lambda_2\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}$, $p_{11} = -1$, $p_{1,2} = 1$, $p_{21} = 1$, $p_{22} = -1$. Таким чином,

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{2\lambda_1\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} & \frac{2\lambda_1\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} \\ \frac{2\lambda_2\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} & -\frac{2\lambda_2\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \quad (66)$$

Примітка Об'єднаний процес $\hat{x}^\varepsilon(t)$, на відміну від його границі $\hat{x}(t)$, не є однорідним у часі.

Розглянемо тепер робочий час $\hat{x}(t)$ визначений як

$$\nu_t(B) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\hat{x}(s) \in B} ds \quad (67)$$

для будь-якого $B \in \mathcal{B}_{\hat{E}}$. Згідно ергодичної теореми, міра ν_t збігається до ергодичного розподілу ρ при $t \rightarrow \infty$. Як приклад, нехай \mathcal{M} є множиною всіх ймовірнісних значень на $\{0, 1\}$ визначеними за $\{(p, 1-p, 0 \leq p \leq 1)\}$ і $d(x, y) = |x| + |y|$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Тоді з теореми 3.12 випливає, що для $\rho = (p_0, 1-p_0)$ і $\Gamma = \{(p, 1-p) | d((p, 1-p), (p_0, 1-p_0)) > \delta\}$, $\mathbb{P}(\nu_t \in \Gamma) \sim \exp(-tI(p_0 + \delta, 1-p_0 - \delta))$ для великих t з

$$I(m) = - \inf \left\{ \int_{\hat{E}} \frac{(\hat{Q}\phi)(y)}{\phi(y)} m(dy) : \phi \in \mathcal{D}(\hat{Q}), \phi(y) > 0, \forall y \in \{0, 1\} \right\} = - \inf \left\{ \lambda p \left(\frac{\phi(2)}{\phi(1)} \right) - \right. \\ \left. (68) \right.$$

для $m = (p, 1 - p)$.

Інфімум досягається при $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{1}{p} - 1 \right)}$ і $I(m) = \lambda p + \mu(1 - p) - 2\sqrt{\lambda\mu p(1 - p)}$.

8 Великі відхилення для стохастичних адитивних функціоналів

Розглянемо сімейство стохастичних адитивних функціоналів $\xi^\varepsilon, t \geq 0$ представлене як

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi^\varepsilon(0) + \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x^\varepsilon\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)), t \geq 0, \varepsilon > 0 \quad (69)$$

Сімейство сполучених марковських процесів $(\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)), t \geq 0, \varepsilon > 0$ на $\mathbb{R}^d \times E$ має інфінітезимальний генератор $\mathbb{L} = \frac{1}{\varepsilon}Q + Q_1 + \Gamma^\varepsilon(x)$ з областю визначення $\mathcal{D}(\mathbb{L}^\varepsilon)$ щільною в $C(\mathbb{R}^d \times E)$ і граничний процес $(\hat{\xi}(t), \hat{x}(t)), t \geq 0$ є марковським процесом на $\mathbb{R}^d \times E$.

Наша мета — показати принцип великого відхилення для цього сімейства стохастичних адитивних функціоналів із функцією інтенсивності I визначеної як

$$- \inf_{\Gamma^\circ} I \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \{ \xi^\varepsilon \in \Gamma \} \leq \limsup \varepsilon \log \mathbb{P} \{ \xi^\varepsilon \in \Gamma \} \leq - \inf_{\bar{\Gamma}} I \quad (70)$$

де $\Gamma^\circ, \bar{\Gamma}$ представляють внутрішнє відповідно замикання множини Γ . В окремому випадку, коли ми беремо $\Gamma = \{ \xi(t) : \| \xi(t) - \hat{\xi}(t) \| > \delta \}$ можна отримати асимптотичну поведінку $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, T]} \| \xi^\varepsilon(t) - \hat{\xi}(t) \| > \delta)$.

Твердження 8.1 Якщо послідовність ξ^ε задовольняє принцип велико-

го відхилення на $D([0, T], \mathbb{R}^d)$ з функцією інтенсивності $I_u(\varphi)$, то для всіх обмежених неперервних функцій $h : D([0, T], \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} h(\xi^\varepsilon) \right] \right\} = - \inf_{\varphi \in D([0, T], \mathbb{R}^d)} \{ h(\varphi) + I_u(\varphi) \} \quad (71)$$

Принцип Лапласа передбачає принцип великого відхилення з тією ж функцією інтенсивності.

Твердження 8.2 Якщо I_u є функцією інтенсивності на $D([0, T], \mathbb{R}^d)$ і границя 71 справедлива для всіх обмежених неперервних функцій h , то послідовність ξ^ε задовольняє принцип великого відхилення на $D([0, T], \mathbb{R}^d)$ з функцією інтенсивності I .

Лема 8.3 Припустимо, що для кожного фіксованого $k \in \hat{E}$, сімейство $\xi_t^\varepsilon := \xi_t^\varepsilon(u; k)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$ задовольняє принцип великого відхилення з функцією інтенсивності $I_{u,k}$. Якщо \hat{x}_t це стаціонарний процес на \hat{E} , то $\xi_t^\varepsilon(u; \hat{x}(t))$ задовольняє принцип великого відхилення з функцією швидкості $I_u(\varphi) = \min \{ I_{u,k}(\varphi) : 1 \leq k \leq N \}$.

Доведення: Оскільки для кожного фіксованого $k \in \hat{E}$, сімейство $\xi_t^\varepsilon := \xi_t^\varepsilon(u; k)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$ задовольняють принцип великого відхилення з функцією інтенсивності $I_{u,k}$, маємо

$$\varepsilon \log \mathbb{P}(\xi^\varepsilon \in \Gamma | \hat{x}^\varepsilon = k) \sim - \inf_{\Gamma} I_{u,k}. \quad (72)$$

Позначимо $b_k^\varepsilon := \mathbb{P}(\xi^\varepsilon \in \Gamma | \hat{x}^\varepsilon = k)$, $b_k := \inf_{\Gamma} I_{u,k}$ та $p_k = \mathbb{P}(\hat{x}^\varepsilon = k)$. Таким чином $\varepsilon \log b_k^\varepsilon \sim -b_k$ і тому $b_k^\varepsilon = \exp(-\frac{1}{\varepsilon} b_k + c_k^\varepsilon)$, $c_k^\varepsilon = o(\frac{1}{\varepsilon})$.

Ми хочемо довести, що $\varepsilon \log \mathbb{P}(\xi^\varepsilon \in \Gamma) \sim - \min b_1, \dots, b_N$. Можемо припустити, що $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_N$ і $0 < p_i < 1$, $1 \leq i \leq N$ без втрати загальності.

Оскільки $\mathbb{P}(\xi^\varepsilon \in \Gamma) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(\xi^\varepsilon \in \Gamma | \hat{x}^\varepsilon = k) \mathbb{P}(\hat{x}^\varepsilon = k)$, цього достатньо, щоб довести, що $\varepsilon \log(b_1^\varepsilon p_1 + \dots + b_N^\varepsilon p_N) \sim -b_1$, що еквівалентно до $\frac{1}{b_1^\varepsilon p_1 + \dots + b_N^\varepsilon p_N} \sim \frac{1}{b_1^\varepsilon p_1}$. Це правда оскільки $\frac{b_i^\varepsilon}{b_1^\varepsilon} = \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(b_i - b_1 + \varepsilon(c_i^\varepsilon - c_1^\varepsilon)))$ прямує до 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 8.4 Для абсолютно безперервних функцій φ з $D([0, T], \mathbb{R}^d)$, де $T > 0$ довільно фіксоване, задовільняючи $\varphi(0) = u$, і для кожного фіксованого $k \in \hat{E}$, визначимо

$$I_{u,k}(\varphi) := \int_0^T L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); k) dt, \quad (73)$$

де L згодом визначається 81. Для всіх інших функцій в $D([0, T], \mathbb{R}^d)$, $I_{u,k}(\varphi := \infty)$. Тоді сім'я $\xi^\varepsilon, \varepsilon > 0$ задовольняє принцип великого відхилення з функцією інтенсивності

$$I_u(\varphi) = \min\{I_{u,k}(\varphi) : 1 \leq k \leq N\} \quad (74)$$

Доведення: Це буде здійснено в декілька кроків. Для ясності виникла необхідність викласти ряд відомих результатів, які ми переформулювали та адаптували до нашої ситуації.

Крок 1

Розглянемо мартингальну задачу для генератора L^ε і його зв'язок із експоненціальною мартингальною проблемою [8] за допомогою перетворення H^ε визначеного як

$$H^\varepsilon f := \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}f} \mathbb{L}^\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}f} \quad (75)$$

Важливим кроком є доведення збіжності H^ε для відповідного набору послідовностей f^ε до оператора H в тому сенсі, що якщо f^ε збігається до f при

Розглянемо тестові функції $f^\varepsilon(u, x) = f(u) + \varepsilon \log \varphi^\varepsilon(u, x)$, $\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u, m(x)) + \varepsilon \varphi_1(u, x)$, де $f, \varphi^\varepsilon(u, x)$ обмежені, вимірні, неперервно диференційовні функції на $u \in \mathbb{R}^d$, з обмеженою першою похідною та рівномірно неперервні на E , збіжні до функції $f(u)$. Тоді, $H^\varepsilon f^\varepsilon$ збігається до Hf ,

$$Hf(u; x) := a(u; x)f'(u) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{vf'(u)} - 1 - vf'(u))\Gamma(u, dv; x) \quad (76)$$

Застосовуючи стаціонарний проектор $\Pi : B(E) \rightarrow \hat{E}$, визначений як

$$\Pi\varphi(x) := \int_E \rho(dx)\varphi(y)\mathcal{K}(x) \quad (77)$$

(де $\mathcal{K}(x) = 1$ для всіх $x \in E$), отримуємо

$$\hat{H}f(u; k) = \hat{a}(u; k)f'(u) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{vf'(u)} - 1 - vf'(u))\hat{\Gamma}(u, dv; k) \quad (78)$$

де

$$\hat{a}(u; k) = \int_{E_k} \pi_k(dx)a(u; x) \text{ та } \hat{\Gamma}(u, dv; k) = \int_{E_k} \pi_k(dx)\Gamma(u, dv; k) \quad (79)$$

Ключову роль відіграє функція в u та p на \mathbb{R} визначена як

$$H(u, p; k) := \hat{a}(u; k)p + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{vp} - 1 - vp)\hat{\Gamma}(u, dv; k) \quad (80)$$

і має такі властивості:

- (Ia) для кожного $p \in \mathbb{R}^d$ і кожного $k \in \hat{E}$, $\sup_{u \in \mathbb{R}^d} H(u, p; k) < \infty$;
 (Ib) для кожного $k \in \hat{E}$, $H(u, p; k)$ є неперервною функцією від (u, p) in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Для u та q на \mathbb{R}^d ми визначаємо перетворення Феншеля-Лежандра

$$L(u, q; k) := \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \{pq - H(u, p; k)\} \quad (81)$$

Крок 2. Можна довести наступні властивості функції Фенхеля-Лежандра.

Лема 8.5 Функції $H(u, p; k)$ і $L(u, q; k)$ визначені відповідно як 80 і 81, мають такі властивості

- (a) Для кожного $u \in \mathbb{R}^d$, $k \in \hat{E}$, $H(u, p; k)$ є скінченною опуклою функцією від $p \in \mathbb{R}^d$, яка є диференційованою для всіх p . На додаток, $H(u, p; k)$ є неперервною функцією від $(u, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$
 (b) Для кожного $u \in \mathbb{R}^d$, $k \in \hat{E}$, $L(u, p; k)$ є опуклою функцією від $q \in \mathbb{R}^d$. На додаток, $L(u, p; k)$ є невід'ємною напівнеперервною знизу функцією від $(u, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

(c) $L(u, p; k)$ є рівномірно надлінійною у сенсі:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{q \in \mathbb{R}^d: \|q\|=N} \frac{1}{\|q\|} L(u, q; k) = \infty \quad (82)$$

(d) Для кожного $u \in \mathbb{R}^d$, $k \in \hat{E}$, відносний простір $ri(dom L(u, \Delta; k)) = ri(conv S_{\mu(\cdot|u, k)})$ зокрема $L(u, q; k)$ дорівнює ∞ для $u \in \mathbb{R}^d$ і $q \in (cl(conv S_{\mu(\cdot|u, k)}))^c$. Для будь якого $q \in ri(dom L(u, \cdot; k))$ існує $v = v(u, q; k)$ такого, що $\nabla_v H(u, v(u, q; k); k) = q$. На додачу,

$$L(u, q; k) = v(u, q; k)q - H(u, v(u, q; k); k) \quad (83)$$

(e) Припустимо додатково, що для даного $u \in \mathbb{R}^d$, $\text{conv}S_{\mu(\cdot/\mu)}$, має непорожній простір. Тоді $H(u, v; k)$ є строго опуклою функцією $v \in \mathbb{R}^d$, $\text{int}(\text{dom}L(u, \cdot; k))$ є непорожнім, для кожного $q \in \text{int}(\text{dom}L(u, \cdot; k))$ існує унікальне значення v таке, що $\nabla_v H(u, v(u, q; k); k) = q$, і $L(u, \cdot; k)$ диференціюється на $\text{int}(\text{dom}L(u, \cdot; k))$.

(f) Для кожного $u, q \in \mathbb{R}^d, k \in \hat{E}$,

$$L(u, q; k) = \inf \left\{ R(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot|u, k)) : \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} v \nu(dv) = q \right\} \quad (84)$$

і інфімум завжди досягається. Якщо $L(u, q; k) < \infty$, то інфімум досягається однозначно. $R(\cdot \parallel \cdot)$ це відносна ентропія, визначена як $R(\nu \parallel \theta) := \int (\log \frac{d\nu}{d\theta}) d\nu$ кругом, де ν абсолютно неперервна відносно θ . Інакше $R(\nu \parallel \theta) := \infty$.

(g) Існує стохастичне ядро $\nu(dv|u, k)$ на \mathbb{R}^d заданому так, що $\mathbb{R}^d \hat{E}$ задовольняє для u та v на \mathbb{R}^d ,

$$R(\nu(\cdot|u, k) \parallel \mu(\cdot|u, k)) = L(u, q; k) \text{ та } \int_{\mathbb{R}^d} v \nu(dv|u, k) = q \quad (85)$$

(h) Якщо $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ задовольняє $R(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot|u, k)) < \infty$ для $u \in \mathbb{R}^d, k \in \hat{E}$, тоді $\int_{\mathbb{R}^d} \|v\| \nu(dv) < \infty$ і

$$R(\nu(\cdot|u, k) \parallel \mu(\cdot|u, k)) \geq L(u, \int_{\mathbb{R}^d} v \nu(dv); k). \quad (86)$$

Крок 3. Щоб довести принцип Лапласа для послідовності ξ^ε достатньо довести це для послідовності випадкових блукань X_n побудованих нижче.

Нехай h це будь-яке відображення обмеженої неперервної функції з $D([0, T], \mathbb{R}^d)$ в \mathbb{R} . Доведемо границю Лапласа 71, коли $\varepsilon \rightarrow 0$ у будь-якій послідовності $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$, що збігається до 0. Зафіксуємо таку послідовність. Шляхом вибірки процесу ξ^{ε_n} певну кількість разів залежно від ε_n визначимо послідовність кусково-лінійних процесів $\{\zeta^n, n \in \mathbb{N}\}$ для яких доведемо принцип Лапласа. Потім ми покажемо, що послідовність суперекспоненціально замкнута на $\xi^{\varepsilon_n}, n \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо $T > 0$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$, нехай $c_n := \lfloor \frac{T}{\varepsilon_n} \rfloor$ (де $\lfloor x \rfloor$ представляє цілу частину x). Розглянемо вибірккову послідовність $\xi^{\varepsilon_n}(\frac{Tj}{c_n}), j = 0, 1, \dots, c_n - 1$. Визначимо $\zeta^n := \{\zeta^n(t), t \in [0, T]\}$ як

$$\zeta^n(t) = \xi^{\varepsilon_n}(\frac{Tj}{c_n}) + c_n(t - \frac{Tj}{c_n})(\xi^{\varepsilon_n}(\frac{T(j+1)}{c_n}) - \xi^{\varepsilon_n}(\frac{Tj}{c_n})) \quad (87)$$

для $t \in [\frac{Tj}{c_n}, \frac{T(j+1)}{c_n}]$, яка є лінійною інтерполяцією вибіркової послідовності $\xi^{\varepsilon_n}(\frac{Tj}{c_n}), j = 0, 1, \dots, c_n - 1$.

Для кожного фіксованого $k \in \hat{E}$, припустимо, що $\{v_j^n(u; k), u \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{N}_0\}$ є н.о.р. послідовністю випадкового векторного поля, що мають спільний розподіл

$$\mu^n(dv|u, k) := \mathbb{P}\{\frac{c_n}{T}(\xi^{\varepsilon_n}(\frac{T}{c_n}) - u) \in dv\} \quad (88)$$

який є стохастичним ядром на \mathbb{R}^d при $\mathbb{R}^d \hat{E}$. Будуємо випадкові блукання, що відповідають послідовності стохастичних ядер $\mu^n(dv|u, k)$ таким чином: для кожного $u \in \mathbb{R}^d, k \in \hat{E}, n \in \mathbb{N}$, розглянемо послідовність випадкових величин $\{X_j^n, j = 0, 1, \dots, c_n - 1\}$, що приймають значення в \mathbb{R}^d , де

$$X_{j+1}^n := X_j^n + \frac{T}{c_n}v_j^n(X_j^n; k), X_0^n = u \quad (89)$$

Припустимо, що послідовність випадкових векторів X_j^n інтерполюється в кусково-лінійний безперервний процес $X^n := \{X^n(t), t \in [0, T]\}$ через

$$X^n(t) = X_j^n + (t - \frac{Tj}{c_n})v_j^n(X_j^n; k), t \in [\frac{Tj}{c_n}, \frac{T(j+1)}{c_n}], j = 0, 1, \dots, c_n - 1 \quad (90)$$

Потім розподіл ζ^n такий самий, як розподіл X^n . Для кожного $n \in \mathbb{N}$, $u, p \in \mathbb{R}^d$, $k \in \hat{E}$, визначимо

$$H^n(u, p; k) := \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{vp} \mu^n(dv|u, k) \quad (91)$$

Крок 4. Покажемо, що функція $H(u, p; k)$, визначену в 81, можна записати як функцію, що створює момент стохастичного ядра $\mu(dv|u, k)$.

Лема 8.6 Для $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{R}^d$, $k \in E$, $s \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}^d$ і $\delta > 0$, визначимо:

$$N_p^\varepsilon(s; t) := \exp[\frac{1}{\varepsilon}(p(\xi^\varepsilon(t) - \xi^\varepsilon(s)) - \int_s^t H(\xi^\varepsilon(v), p; k)dv)] N_{p,u}^{\varepsilon_n}(t) := \exp[\frac{c_n}{T}(p(\xi^\varepsilon(t) - u) - \dots) \quad (92)$$

Справедливі наступні висновки: (а) $N_p^\varepsilon(s; t) \in \mathcal{F}_t^\varepsilon$ - мартингал для $t \in [s, T]$ і тому

$$\mathbb{E}_\mu\{N_p^\varepsilon(s; t)\} = \mathbb{E}_\mu\{N_p^\varepsilon(s; s)\} = 1 \quad (93)$$

(b) $N_p^{\varepsilon_n}(0; t \wedge \tau_{u,\delta}^n)$ є $\mathcal{F}_t^{\varepsilon_n}$ - мартингал для $t \in [0, T]$, отже

$$\mathbb{E}_u\{N_p^{\varepsilon_n}(0; t \wedge \tau_{u,\delta}^n)\} = \mathbb{E}_u\{N_p^{\varepsilon_n}(0; 0)\} = 1 \quad (94)$$

(c) Для будь-якого $p \in \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_u\{\tilde{N}_{p,u}^{\varepsilon_n}\left(\frac{T}{c_n}\right)\} \leq 1 \quad (95)$$

i

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_u\{\tilde{N}_{p,u}^{\varepsilon_n}\left(\frac{T}{c_n}\right) \wedge \tau_{u,\delta}^n\} \leq 1 \quad (96)$$

(d) Існує $\gamma_1 \in (0, \infty)$ така, що для будь-яких $u, p \in \mathbb{R}^d$

$$H(u, p) \geq p\hat{a}(u; k) \geq -\gamma_1\|p\| \quad (97)$$

(e) Для будь-якого $p \in \mathbb{R}^d$ існує $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ така, що

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_u\{(\tilde{N}_{p,u}^{\varepsilon_n}\left(\frac{T}{c_n}\right))^2\} \leq e^{\gamma_2} \quad (98)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_u \left\{ \left(\tilde{N}_{p,u}^{\varepsilon_n} \left(\frac{T}{c_n} \right) \wedge \tau_{u,\delta}^n \right)^2 \right\} \leq e^{\gamma_2} \quad (99)$$

(f) Для будь-якого $p \in \mathbb{R}^d$ і компактної підмножини $k \subseteq \mathbb{R}^d$, існує $M \in \mathbb{N}$ така, що

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{u \in k} \mathbb{E}_u \left\{ \tilde{N}_{p,u}^{\varepsilon_n} \left(\frac{T}{c_n} \right) \wedge \tau_{u,\delta}^n \right\} \geq e^{\gamma_3(\delta)} \quad (100)$$

де $\gamma_3(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Твердження 8.6 Для кожного $k \in \hat{E}$, виконуються такі висновки:

(а) існує надлінійна функція $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ така, що для будь-яких $\epsilon > 0, \delta > 0, s \in [0, T], t \in (s, T]$

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_{u,k} \left\{ \sup_{s \leq \sigma \leq t} \|\xi^\epsilon(\sigma) - \xi^\epsilon(s)\| \geq \delta \right\} \leq 2d \exp\left(-\frac{t-s}{\epsilon} f\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}(t-s)}\right)\right) \quad (101)$$

(b) для кожного $p \in \mathbb{R}^d$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} H^n(u, p; k) < \infty$

(c) для кожного $p \in \mathbb{R}^d$ і кожної компактної підмножини $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in K} |H^n(u, p; k) - H(u, p; k)| = 0 \quad (102)$$

(d) для кожного $u \in \mathbb{R}^d$, послідовність ймовірнісних вимірів $\mu^n(dv|u, k)$, $n \in \mathbb{N}$ слабо збігається до ймовірнісної міри $\mu(dv|u, k)$ на \mathbb{R}^d і для кожного $p \in \mathbb{R}^d$,

$$H(u, p; k) = \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{pv} \mu(dv|u, k). \quad (103)$$

Сімейство $\mu(dv|u, k)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $k \in \hat{E}$ визначає стохастичне ядро на \mathbb{R}^d при $\mathbb{R}^d \times \hat{E}$. Крім того, функція відображення $u \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu(\cdot|u, k) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ неперервна в топології слабкої збіжності на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Крок 5. Щоб вивчити принцип Лапласа для процесу X^n , нам потрібно перевірити асимптотичну поведінку

$$W^n(u) := -\frac{1}{c_n} \log \mathbb{E}_u(\exp(-c_n h(X^n))) \quad (104)$$

де \mathbb{E}_u позначає очікування відносно \mathbb{P}_u і h це будь-яке відображення обмеженої неперервної функції з $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ в \mathbb{R} . Ми покажемо, що це дорівнює мінімальній цільовій функції пов'язаної задачі стохастичного керування.

Тепер ми визначаємо задачу стохастичного керування, мінімальна цільова функція якої дає представлення функції $W^n(u)$. Керований процес є дискретним у часі процесом $\bar{X}_j^n, j = 0, 1, \dots, c_n - 1$, і для кожного t буде функція керування ν_j^n надаючи розподіли контрольованій випадковій величині, яка замінює цей шум за рахунок приростів. ν_j^n це стохастичні ядра на $(\mathbb{R}^d)^{j+1}$, що позначається $\nu_j^n(dv) = \nu_j^n(dv|\bar{X}_0^n, \dots, \bar{X}_j^n)$. Послідовність елементів керування $\{\nu_{1,j}^n, j = 0, 1, \dots, c_n - 1\}$ називається допустима послідовність керування.

Тоді, отримуємо варіаційне представлення W_u^n як

$$W^n(u) = \inf_{\nu_j^n} \bar{\mathbb{E}}_u = \left\{ \sum_{j=0}^{c_n-1} \left[\frac{1}{c_n} R(\nu_j^n(\cdot) || \mu(\cdot|\bar{X}_j^n, k)) \right] + h(\bar{X}^n) \right\} \quad (105)$$

де інфімум береться за всіма допустимими керуючими послідовностями

$\{\nu_j^n\}$. Для $n \in \mathbb{N}$ та $t \in [0, T]$, визначимо стохастичне ядро

$$\nu^n(dv|t) := \begin{cases} \nu_j^n(dv), & t \in [\frac{Tj}{c_n}, \frac{T(j+1)}{c_n}], j = 0, 1, \dots, c_n - 2 \\ \nu_{c_n-1}^n(dv), & t \in [\frac{T(c_n-1)}{c_n}, T] \end{cases} \quad (106)$$

Має місце наступне представлення

$$W^n(u) = \inf_{\nu_j^n} \bar{\mathbb{E}}_u \left\{ \int_0^T R(\nu_1^n(\cdot|t) || \mu(\cdot|\tilde{X}^n(t))) + h(\bar{X}^n) \right\} \quad (107)$$

де $\tilde{X}^n = \{\tilde{X}^n(t), t \in [0, T]\}$ є кусково-постійною інтерполяцією контрольованих випадкових величин $\{\bar{X}_j^n, j = 0, 1, \dots, c_n - 1\}$.

Крок 6. Верхня межа принципу Лапласа

Нехай $I_{u,k}(\varphi) := \int_0^T L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), k) dt$ де L це перетворення Лежандра-Фенхеля. Тоді $I_{u,k}$ є функцією інтенсивності і

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} \log \mathbb{E}_u(\exp(-c_n h(X^n))) \leq - \inf_{\varphi \in C([0, T], \mathbb{R}^d)} (I_{u,k}(\varphi) + h(\varphi)) \quad (108)$$

Дійсно, спочатку можна показати, що $I_{u,k}$ має компактні рівневі набори $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ за допомогою частин (b) і (c) твердження 3.21, звідки випливає, що $I_{u,k}$ є функцією інтенсивності. Тоді використовуючи частину (h) твердження 3.19, ми отримуємо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} W^n(u) \geq \inf_{\varphi \in C([0, T], \mathbb{R}^d)} (I_{u,k}(\varphi) + h(\varphi)) \quad (109)$$

Крок 7. Нижня межа принципу Лапласа.

Щоб довести нижню межу принципу Лапласа, нам потрібно охарактери-

зувати відносну внутрішню частину ефективної області $L(u, \cdot; k)$ в термінах стохастичного ядра $\mu(dv|u, k)$. Це зроблено в частині (d) твердження 3.19. Для A, b підмножин \mathbb{R}^d визначимо

$$A + B := \{u \in \mathbb{R}^d : u = a + b, a \in A, b \in B\} \quad (110)$$

Підмножина C з \mathbb{R}^d називається опуклим конусом, якщо вона має властивість, що для $c \in C, \lambda c \in C \forall \lambda \in [0, \infty)$. Позначимо як $\text{con}C$ опуклий конус C .

Можемо переписати $H(u, p; k)$ як

$$H(u, p; k) = \hat{b}(u; k)p + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{vp} - 1) \hat{\Gamma}(u, dv; k) \quad (111)$$

де

$$\hat{b}(u; k) = \hat{a}(u; k) - \int_{\mathbb{R}^d} v \hat{\Gamma}(u, dv; k) \quad (112)$$

Нехай $S_{\hat{\Gamma}(u,k)}$ опора $\hat{\Gamma}(u,k)$ і $T_{(u,k)} := \{\hat{b}(u; k)\} + \text{con}S_{\hat{\Gamma}(u,k)}$.

Відносна внутрішність $ri(\text{dom}L(u, \cdot; k)) = ri(T_{(u,k)})$ і виконуються наступні властивості: (a) Множини $\text{int}T_{(u,k)}$ не залежать від $(u, k) \in \mathbb{R}^d \times \hat{E}$

(b) $0 \in \text{int}T_{(u,k)}$

Також можна довести, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} W^n(u, k) \leq \inf_{\varphi \in C([0, T], \mathbb{R}^d)} (I_{uk}(\varphi) + h(\varphi)) \quad (113)$$

Це дає нижню межу принципу Лапласа для X^n .

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} \log \mathbb{E}_u(\exp(-c_n h(X^n))) \geq \inf_{\varphi \in C([0, T], \mathbb{R}^d)} (I_{u,k}(\varphi) + h(\varphi)) \quad (114)$$

Таким чином доведено принцип Лапласа для випадкового блукання X^n і це виконується для процесу ζ^n .

Крок 8. Принцип Лапласа виконується для послідовності ξ^{ε_n} оскільки $\xi^{\varepsilon_n}, \zeta^n$ є суперекспоненціально замкнутими, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \varepsilon_n \log \mathbb{P}_u(\rho(\xi^{\varepsilon_n}, \zeta^n) > \delta) = -\infty \quad (115)$$

де ρ це метрика Скорохода на $D([0, T], \mathbb{R}^d)$.

Таким чином, за твердженням 3.16 отримуємо принцип великого відхилення для послідовності випадкових величин $\xi_t^\varepsilon(u; k)$ з функцією інтенсивності

$$I_{u,k}(\varphi) = \int_0^T L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t); k) dt \quad (116)$$

Використовуючи лему 3.17, отримуємо принцип великого відхилення для послідовності стохастичних адитивних функціоналів ξ^ε з функцією інтенсивності $I_u(\varphi) = \min\{I_{u,k}(\varphi) : 1 \leq k \leq N\}$.

На цьому теорему доведено.

Цей принцип має багато застосувань, наприклад, визначення ймовірності виходу зі стабільної області визначення процесу. У деяких випадках інфімум

40
може бути явно знайдений за допомогою варіаційного числення. Клас абсолютно неперервних функцій на $[0, T]$ можна ототожнити з простором Соболева $H^{1,1}[0, T]$, а так як функція Фенхеля-Лежандра $L(u, q; k)$ задовольняє умови теореми існування Тонеллі, з цього випливає існування мінімізатора. Якщо $\varphi \in AC[0, T]$ є локальним мінімізатором функціоналу $L(\varphi, \varphi')$, то φ задовольнить рівняння Ейлера-Лагранжа, яке далі буде спрощено до рівняння Бельтрамі: $L(\varphi, \varphi') - \varphi' L_{\varphi'}(\varphi, \varphi') = C$, де C константа.

У цій роботі ми отримали кілька важливих результатів принципу великих відхилень для стохастичних адитивних функціоналів, які збігаються або розбігаються в різних масштабах. Ми навели необхідні терміни, визначення та представили основні факти та результати, пов'язані з нашим дослідженням. Крім того, ми розглянули такі фундаментальні об'єкти, як ланцюги Маркова, марковські процеси та їх підкласи, включаючи їхні властивості, які служать основою для аналізу. Ми також розглянули поняття перемикання та перемикаючих процесів за допомогою адитивних функціоналів процесів з локально незалежними приростами, які підлягають марковському перемиканню в схемі розщеплення фаз та злиття. Ми довели принцип великого відхилення для принципу злиття фаз і теорії середнього наближення. Крім того, вивчено адитивні функціонали, пов'язані з функціональними центральними граничними теоремами.

1. A. Oprisan and A. Korzeniowski, "Large deviations for ergodic processes in split spaces," *Dynamic Systems and Applications*, to appear, vol. 18, 2009.
2. A. Korzeniowski and A. Oprisan, "Large deviations for additive functionals of markov processes," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, to appear, vol. 53, pp. 441459, 2009.
3. I. Gikhman and A. Skorokhod, *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Springer-Verlag, 1987.
4. V. Korolyuk and V. Korolyuk, *Stochastic Models of Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
5. V. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. London: World Scientific, 2005.
6. M. Davis, *Markov Models and Optimization*. London: Chapman Hall, 1993.
7. A. Shiryaev, *Probability*. New York: Springer-Verlag, 1984.
8. D. W. Stroock and S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*. New York: Springer-Verlag, 1979.
9. S. Ethier and T. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*. New York: John Wiley Sons, 1986.
10. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley, 1968.
11. S. Varadhan, *Large Deviations and Applications*. Philadelphia, Pennsylvania: Society for industrial and applied mathematics, 1984.
12. A. Dembo and O. Zeitouni, *Handbook of Stochastic Analysis and Applications*. New York: Marcel Dekker, 2002.
13. P. Dupuis and R. Ellis, *A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations*. New York: John Wiley Sons, 1997.