

УДК 519.21

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.6>

Олег МАКАРЧУК, канд. фіз.-мат. наук, доц., докторант  
ORCID ID: 0000-0002-1001-8568  
e-mail: makarchuk@imath.kiev.ua; makolpet@gmail.com  
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Богдан ХАЛЕЦЬКИЙ, асп.  
ORCID ID: 0009-0004-5162-825X  
e-mail: aumykun@gmail.com

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

## СТРУКТУРА РОЗПОДІЛУ ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ

Відповідно до теореми Джессена – Вінтнера сума збіжного з ймовірністю одиниця випадкового ряду з незалежними дискретно розподіленими доданками має чистий лебегівський тип розподілу, тобто дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний. Теорема Леві надає необхідні та достатні умови того, що відповідний розподіл (розподіл типу Джессена – Вінтнера) є дискретним. У загальному випадку проблема знаходження критеріїв абсолютної неперервності (сингулярності) розподілів типу Джессена – Вінтнера є складною, тому розглядається дослідниками в певних класах.

Важливим класом розподілів, що відповідають теоремі Джессена – Вінтнера, є класичні згортки Бернуллі та їхні відповідні узагальнення (узагальнені згортки Бернуллі), що були предметом дослідження багатьох науковців. Інтерес до відповідної проблематики є високим і нині.

Особливі складнощі в дослідженні лебегівської структури розподілів типу Джессена – Вінтнера, зокрема в класі узагальнених згорток Бернуллі, виникають для випадку узагальнених згорток Бернуллі із суттєвими перекриттями. Для узагальнених згорток Бернуллі із суттєвими перекриттями класичні підходи теорії міри, що ґрунтуються зокрема на теоремі Какутані, у багатьох випадках дають змогу отримати лише певні достатні умови абсолютної неперервності (сингулярності) відповідної функції розподілу.

Крім класичної проблеми поглиблення теореми Джессена – Вінтнера для узагальнених згорток Бернуллі, актуальними є: проблема дослідження тополого-метричної структури спектра розподілу, фрактальний аналіз носіїв розподілу, асимптотичні властивості характеристичної функції на нескінченності тощо.

У пропонованій роботі визначені необхідні та достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілу одного класу узагальнених симетричних згорток Бернуллі. Відповідні результати є узагальненням результатів щодо лебегівської структури розподілу випадкової величини з незалежними  $s$ -ковими цифрами. Акцентовано також на доведенні того, що спектр відповідного класу розподілів, розглянутих у роботі, має додатну міру Лебега.

**Ключові слова:** структура розподілу, теорема Леві, теорема Джессена – Вінтнера, згортка Бернуллі, абсолютно неперервний розподіл, сингулярний розподіл.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 60G30, 11A67.

### Вступ

**Актуальність дослідження.** Нехай  $s \in \mathbb{N}, s > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – абсолютно збіжний ряд,  $A = (d_{ij})$  – матриця дійсних чисел, де  $i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, j \in \mathbb{N}$ , та для деякого  $L > 0$  виконується умова

$$|d_{ij}| \leq L \quad \forall i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Розглянемо множини

$$M = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n \mid x_n \in \{d_{0n}, \dots, d_{(s-1)n}\} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$T(d_{j_1 1}; d_{j_2 2}; \dots; d_{j_k k}) = \{\sum_{n=1}^k d_{j_n n} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n a_n \mid x_n \in \{d_{0n}, \dots, d_{(s-1)n}\} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

де  $j_l \in \{0; 1; \dots; s-1\}$  для кожного  $l \in \{1; 2; \dots; k\}$ .

Спектром  $S_G$  функції розподілу  $G(x)$  називають множину чисел  $t$  таких, що  $G(t + \varepsilon) - G(t - \varepsilon) > 0$  для кожного  $\varepsilon > 0$ .

Нехай  $(\psi_k)$  – послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, що набувають значень  $d_{0k}, \dots, d_{(s-1)k}$  з ймовірностями  $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(s-1)k}$  відповідно, причому  $\sum_{j=0}^{s-1} p_{jk} = 0$ . Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k a_k.$$

Ймовірнісну міру  $\psi(\cdot)$ , що відповідає випадковій величині  $\psi$ , називають узагальненою згорткою Бернуллі.

За теоремою Джессена – Вінтнера (Jessen, & Wintner, 1935) розподіл  $\psi$  є чистим. За теоремою Леві (Levy, 1931) розподіл  $\psi$  є дискретним, лише коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max(p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}) > 0.$$

**Об'єкт** дослідження – узагальнені симетричні згортки Бернуллі.

**Предметом** дослідження є лебегівська структура одного класу узагальнених симетричних згорток Бернуллі.

**Мета та завдання** роботи: визначити необхідні та достатні умови того, що відповідні розподіли класу узагальнених симетричних згорток Бернуллі, які розглянуто в роботі, мають дискретний, абсолютно неперервний (сингулярний) тип розподілу.

Якщо для деякого натурального  $M$  виконується така умова: для довільного натурального  $n \geq M$  та довільних наборів  $(j_1; j_2; \dots; j_n)$  і  $(i_1; i_2; \dots; i_n)$  таких, що  $j_l, i_l \in \{0; 1; \dots; s-1\}$  для кожного  $l \in \{1; 2; \dots; k\}$ , множини  $T(d_{j_1}; d_{j_2}; \dots; d_{j_k})$  та  $T(d_{i_1}; d_{i_2}; \dots; d_{i_k})$  мають не більш ніж одну спільну точку, то відповідні ймовірнісні міри  $\psi(\cdot)$  являють собою узагальнені симетричні згортки Бернуллі без суттєвих перекриттів. Інакше  $\psi(\cdot)$  є узагальненою симетричною згортокою Бернуллі із суттєвими перекриттями.

Проблемі вивчення лебегівської структури розподілу  $\psi$  для певних матриць  $A$  та послідовностей  $(a_n)$  присвячено велику кількість робіт (Гончаренко, Працьовитий, & Торбін, 2005; Albeverio et al., 2007b; Peres, Schlag, & Solomyak, 2000). Випадок  $a_n = \frac{1}{s^n}, d_{jn} = j$  для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s-1\}, n \in N$  розглянуто в роботі (Kakutani, 1948), де були знайдені необхідні та достатні умови сингулярності (абсолютної неперервності) розподілу  $\psi$ ; та в роботах (Chatterji, 1964; Marsaglia, 1971) для деяких часткових значень  $s$ . Топологічно подібним до класичного  $s$ -кового зображення є  $Q_s$ -зображення (Albeverio et al., 2002), що є частковим випадком загальнішого  $\tilde{Q}$ -зображення (Albeverio et al., 2007a). У роботах (Albeverio et al., 2002; Albeverio et al., 2007a) були знайдені необхідні та достатні умови дискретності й абсолютної неперервності (сингулярності) розподілу випадкової величини з незалежними  $\tilde{Q}$ -цифрами, що є узагальненням результатів роботи (Kakutani, 1948).

Добре відомо (Goncharenko, Pratsiovytyi, & Torbin, 2005), що за умови  $p_{jn} > 0$  для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s-1\}, n \in N$  множина  $S_{F_\psi}$  збігається з  $M$ . Топологічні та фрактальні властивості множини  $M$  для деяких послідовностей  $(a_n)$  і матриць  $A$  досліджували в роботах (Kenyon, 1997; Nitecki, 2015). Випадок  $a_n = \frac{1}{s^n}, d_{jn} = j$  для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s-1\}, n \in N$ , де  $(d_0, d_1, \dots, d_{s-1})$  – набір цілих чисел, що утворюють повну систему лишків за модулем  $s$ , розглянуто в роботі (Kenyon, 1997), де сформульовано гіпотезу про те, що  $\lambda(M) > 0$ , де  $\lambda(\cdot)$  – класична міра Лебега. Відповідну гіпотезу доведено в роботі (Nitecki, 2015) з використанням топологічних методів.

Методи дослідження: ймовірнісні міри, що фігурують у роботі (Kakutani, 1948) та їхні аналоги (Albeverio et al., 2007a) відповідають випадку узагальнених згорток Бернуллі без суттєвих перекриттів. Поглиблені варіанти теореми Какутані, дають змогу за певних умов разом з теоремою Леві розв'язати повністю проблему поглиблення теореми Джессена – Вінгнера у відповідних класах. У загальному випадку теорема Какутані дає змогу будувати певні класи мір еквівалентних (ортогональних) до класичної міри Лебега. У роботі (Albeverio et al., 2007b) був представлений підхід зі зведення проблеми поглиблення теореми Джессена – Вінгнера для одного класу узагальнених симетричних згорток Бернуллі із суттєвими перекриттями до відповідних розподілів з незалежними  $\tilde{Q}$ -цифрами. Потрібно зауважити, що реалізувати відповідний підхід роботи (Albeverio et al., 2007b) в загальному випадку достатньо важко.

У пропонованому дослідженні поглиблено результати робіт (Kakutani, 1948) та (Nitecki, 2015).

### 1. Лебегівська структура розподілу $\psi$ .

Надалі будемо розглядати випадок, коли для кожного натурального  $n: a_n = \frac{1}{s^n}$  та  $(d_{0n}; d_{1n}; \dots; d_{(s-1)n})$  є набором цілих чисел, що утворюють повну систему лишків за модулем  $s$  та задовольняють умову (1). Головним результатом цієї роботи є теорема 1, що являє собою поглиблення результатів роботи (Kakutani, 1948).

**Теорема 1.** Випадкова величина  $\psi$  має чистий розподіл, причому

1) дискретний лише тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max(p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}) > 0;$$

2) сингулярний лише тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max(p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}) = 0$$

та

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}} = 0;$$

3) абсолютно неперервний лише тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}} > 0.$$

Для доведення теореми 1 необхідно довести наступні лема.

**Лема 1.** Якщо

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (s \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jn}) = G < +\infty,$$

то  $F_\psi(x)$  задовольняє умову Ліпшиця

$$|F_\psi(x_1) - F_\psi(x_2)| \leq G|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in R.$$

**Доведення.** Ураховуючи теорему Леві, бачимо, що розподіл  $\psi$  є неперервним. Зрозуміло, що для довільної обмеженої послідовності цілих чисел  $(b_n)$  типи розподілів випадкових величин  $\psi$  та

$$\psi + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b_j}{s^j} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\psi_j + b_j}{s^j}$$

є однаковими. Отже, не обмежуючи загальності, нехай для кожного натурального  $n$

$$0 = d_{0n} < d_{1n} < \dots < d_{(s-1)n} \leq L. \quad (2)$$

Для кожного цілого  $r$  та натурального  $n$  розглянемо величину:

$$S(r; n) = \sum_{(j_1; j_2; \dots; j_n)} \prod_{k=1}^n p_{j_k k},$$

де сумування беремо за всіма наборами  $(j_1; j_2; \dots; j_n)$  таким, що  $j_k \in \{0; 1; \dots; s-1\}$  для кожного  $k \in \{1; \dots; n\}$  і виконується рівність

$$\frac{r}{s^n} = \sum_{k=1}^n \frac{d_{j_k k}}{s^k}. \quad (3)$$

Якщо рівність (3) не справджується за всіма відповідними наборами  $(j_1; j_2; \dots; j_n)$ , то покладемо  $S(r; n) = 0$ . Розглянемо функції

$$f_n(t) = \prod_{k=1}^n \sum_{j=0}^{s-1} p_{jk} t^{d_{jk} s^{-k}}.$$

Бачимо, що

$$f_n(t) = \sum_r S(r; n) t^{rs^{-n}}.$$

Розглянемо многочлени

$$h_n(t) = f_n(t^{s^n}) = \sum_r S(r; n) t^r.$$

Індукцією за  $n$  покажемо, що

$$S(r; n) \leq \prod_{k=1}^n \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jk} \quad \forall r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

За  $n = 1$  нерівність (4) очевидно виконується. Нехай умова (4) справджується для деякого натурального  $n$ . Зрозуміло, що

$$h_{n+1}(t) = h_n(t^{s^n}) \sum_{j=0}^{s-1} p_{j(n+1)} t^{d_{j(n+1)}},$$

звідки для заданого  $r$  існує ціле  $j$  таке, що  $d_{j(n+1)} \equiv r \pmod{s}$  і виконується умова

$$S(r; n+1) = S(r; n) p_{j(n+1)} \leq \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{j(n+1)} \cdot \prod_{k=1}^n \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jk} = \prod_{k=1}^{n+1} \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jk}.$$

Позначимо

$$W_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\psi_k}{s^k}$$

та обрахуємо величину

$$F_\psi\left(\frac{r+1}{s^n}\right) - F_\psi\left(\frac{r}{s^n}\right) = P\left(\psi \in \left[\frac{r}{s^n}; \frac{r+1}{s^n}\right]\right)$$

для натуральних  $n$  та  $r+1$ .

Ураховуючи умову (2), бачимо, що  $\psi \in \left[\frac{r}{s^n}; \frac{r+1}{s^n}\right]$  лише тоді, коли

$$\sum_{k=1}^n \frac{\psi_k}{s^k} = \frac{r-l}{s^n}; \quad W_{n+1} \in \left[\frac{l}{s^n}; \frac{l+1}{s^n}\right],$$

де  $l \in \{0; 1; \dots; \left[\frac{L}{s-1}\right]\}$ . Ураховуючи нерівність (4), маємо

$$\begin{aligned} F_\psi\left(\frac{r+1}{s^n}\right) - F_\psi\left(\frac{r}{s^n}\right) &= \sum_l P\left(\sum_{k=1}^n \frac{\psi_k}{s^k} = \frac{r-l}{s^n}\right) P\left(W_{n+1} \in \left[\frac{l}{s^n}; \frac{l+1}{s^n}\right]\right) = \\ &= \sum_l S(r-l; n) P\left(W_{n+1} \in \left[\frac{l}{s^n}; \frac{l+1}{s^n}\right]\right) \leq \prod_{k=1}^n \max_{0 \leq j \leq s-1} p_{jk} \sum_l P\left(W_{n+1} \in \left[\frac{l}{s^n}; \frac{l+1}{s^n}\right]\right) \leq \frac{G}{s^n}. \end{aligned}$$

Для натуральних  $m, k+1, n$  таких, що  $m > k$  маємо

$$F_\psi\left(\frac{m}{s^n}\right) - F_\psi\left(\frac{k}{s^n}\right) = \sum_{j=1}^{m-k} F_\psi\left(\frac{k+j}{s^n}\right) - F_\psi\left(\frac{k+j-1}{s^n}\right) \leq \frac{Gm}{s^n} - \frac{Gk}{s^n}.$$

Ураховуючи останню нерівність і неперервність  $F_\psi(x)$ , легко отримати потрібне. □

**Зауваження 1.** Якщо  $p_{ij} = \frac{1}{s} \forall i \in \{0; 1; \dots; s-1\}, j \in \mathbb{N}$ , то з лемми 1 розподіл  $\psi$  абсолютно неперервний і відповідно  $\lambda(M) > 0$ , що є поглибленням результату роботи (Nitecki, 2015).

**Лема 2.** Якщо виконується умова

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}} > 0,$$

то розподіл  $\psi$  абсолютно неперервний.

**Доведення.** Не обмежуючи загальності, нехай виконується умова (2). Нехай  $(\xi_k)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень  $(d_{0n}; d_{1n}; \dots; d_{(s-1)n})$  з рівними ймовірностями  $\frac{1}{s}$ . Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{s^k}.$$

За лемою 1 розподіл  $\xi$  абсолютно неперервний. Визначимо дві послідовності ймовірнісних просторів  $\{(\Omega_k, A_k, \mu_k)\}$  і  $\{(\Omega_k, A_k, \nu_k)\}$  так  $\Omega_k = \{d_{0k}; d_{1k}; \dots; d_{(s-1)k}\}$ ,  $\sigma$  – алгебра  $A_k$  визначена на всіх підмножинах  $\Omega_k$ :

$$\begin{aligned} \mu_k(d_{0k}) &= p_{0k}, \dots, \mu_k(d_{(s-1)k}) = p_{(s-1)k}; \\ \nu_k(d_{0k}) &= \frac{1}{s}, \nu_k(d_{1k}) = \frac{1}{s}, \dots, \nu_k(d_{(s-1)k}) = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що  $\mu_k \ll \nu_k$  для кожного  $k \in \mathbb{N}$ . Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів

$$(\Omega, A, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \mu_k); \quad (\Omega, A, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \nu_k).$$

За теоремою Какутані (Kakutani, 1948),  $\mu \ll \nu$  тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}} > 0.$$

Остання умова виконується за умовою теореми. Розглянемо вимірне відображення  $\Omega \xrightarrow{\varphi} M$ , визначене рівністю

$$\forall \omega \in \Omega: \varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{s^k}.$$

Визначимо образи  $\mu^*$  і  $\nu^*$  мір  $\mu$  і  $\nu$  під дією  $\varphi$  так:

$$\mu^*(E) = \mu(\varphi^{-1}(E)); \quad \nu^*(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$$

для довільної борелівської підмножини  $E$ . Міра  $\mu^*$  збігається з імовірнісною мірою  $P_\psi$ , а міра  $\nu^*$  – з імовірнісною мірою  $P_\xi$ , еквівалентною мірі Лебега. З абсолютної неперервності міри  $\mu$  відносно міри  $\nu$  випливає абсолютна неперервність міри  $\mu^*$  відносно міри  $\nu^*$ .

Оскільки  $\nu^* \sim \lambda$ , то розподіл  $\psi$  абсолютно неперервний.

**Лема 3.** Якщо виконуються умови

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{+\infty} \max(p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}) &= 0; \\ \prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}} &= 0, \end{aligned}$$

то розподіл  $\psi$  сингулярний.

**Доведення.** Не обмежуючи загальності, нехай виконується умова (2). Нехай

$$\tau_k = \sum_{j=1}^k \frac{\psi_j}{s^j}; \quad \eta_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_{k+n}}{s^n}.$$

Зрозуміло, що  $\psi = \tau_k + \frac{\eta_k}{s^k}$  для кожного натурального  $k$ . Очевидно, що випадкова величина  $\tau_k$  набуває значень  $c_1, c_2, \dots, c_{s^k}$  з імовірностями  $q_1, q_2, \dots, q_{s^k}$ , причому для довільного  $j \in \{1; 2; \dots; s^k\}$  існує набір чисел  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , кожне з яких належить множині  $\{0; 1; \dots; s-1\}$  і виконується рівність  $q_j = p_{\alpha_1 1} p_{\alpha_2 2} \dots p_{\alpha_k k}$ .

Маємо

$$F_\psi(x) = P\left(\tau_k + \frac{\eta_k}{s^k} < x\right) = \sum_{j=1}^{s^k} q_j \cdot P\left(c_j + \frac{\eta_k}{s^k} < x\right) = \sum_{j=1}^{s^k} q_j \cdot P\left(\eta_k < s^k \cdot (x - c_j)\right) = \sum_{j=1}^{s^k} q_j \cdot F_{\eta_k}(s^k \cdot (x - c_j)).$$

Припустимо, що  $F_\psi(x)$  абсолютно неперервна, тоді для кожного натурального  $k$  функція  $F_{\eta_k}(x)$  також абсолютно неперервна і, враховуючи останню рівність, маємо

$$p_\psi(x) = \sum_{j=1}^{s^k} q_j s^k p_{\eta_k}(s^k \cdot (x - c_j))$$

майже скрізь.

Позначимо

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p_\psi(x)} dx$$

та

$$B_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p_{\eta_k}(x)} dx.$$

Оскільки  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  для довільних невід'ємних чисел  $a, b$ , то маємо

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{s^k} q_j s^k p_{\eta_k}(s^k(x - c_j))} dx \leq \sum_{j=1}^{s^k} \sqrt{q_j s^k} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\eta_k} \cdot (s^k \cdot (x - c_j)) dx = \\ &= B_k \sum_{j=1}^{s^k} \frac{\sqrt{q_j s^k}}{s^k} = B_k \prod_{n=1}^k \sum_{j=1}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}}. \end{aligned}$$

Оскільки для кожного натурального  $k$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{(s-1)n}}{s^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L}{s^n} = \frac{L}{s-1},$$

то  $P\left(\eta_k \notin \left[0; \frac{L}{s-1}\right]\right) = 0$ , тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p_{\eta_k}(x)} dx = \int_0^{\frac{L}{s-1}} \sqrt{p_{\eta_k}(x)} dx \leq \int_0^{\frac{L}{s-1}} \frac{1 + p_{\eta_k}(x)}{2} dx = \frac{\frac{L}{s-1} + 1}{2}.$$

Отже, отримали

$$H \leq \prod_{n=1}^k \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{\frac{p_{jn}}{s}} \cdot \frac{\frac{L}{s-1} + 1}{2} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

звідки  $H = 0$ , тому майже скрізь  $p_{\psi}(x) = 0$ , прийшли до суперечності.

□

### Дискусія і висновки

Робота має теоретичний характер. Щодо випадкової величини  $\psi$ , розглянутій у роботі, актуальними є такі задачі: вивчення топологічної структури множини  $M$  та  $S_{F_{\psi}}$ ; знаходження необхідних і достатніх умов того, що  $F_{\psi}(x)$  задовольняє умову Ліпшиця; знаходження точних значень показників Гельдера для  $F_{\psi}(x)$ . Зауважимо, що для випадку  $s = 2, d_{0n} = 1, d_{1n} = 0$  для кожного  $n \in N$ , відомо (Nitecki, 2015), що  $M$  є скінченним об'єднанням відрізків, або множиною гомеоморфною множині Кантора або ж канторвалом. Навіть для попереднього випадку знайдені лише деякі достатні умови того, коли  $M$  є канторвалом. Топологічна структура  $S_{F_{\psi}}$  у більшості випадків добре вивчена для узагальнених симетричних згорток Бернуллі без суттєвих перекриттів (Goncharenko, Pratsiovytyi, & Torbin, 2005). Проблема знаходження необхідних і достатніх умов того, що  $F_{\psi}(x)$  задовольняє умову Ліпшиця та знаходження точних значень показників Гельдера для  $F_{\psi}(x)$  є відкритою навіть для класичних симетричних згорток Бернуллі (Peres, Schlag, & Solomyak, 2000).

Предметом подальших досліджень є задача вивчення топологічної структури множини  $M$  та лебегівської структури розподілу випадкової величини  $\psi$  за умови, що  $(d_{0n}; d_{1n}; \dots; d_{(s-1)n})$  не утворює повну систему лишків для нескінченної множини значень  $n$ .

**Внесок авторів:** Олег Макачук – концептуалізація та методика наукового дослідження; Богдан Халецький – аналіз джерел, підготовка огляду літератури, ідейна складова леми 1.

### Список використаних джерел

- Гончаренко, Я. В., Працьовитий, М. В., & Торбін, Г. М. (2005). Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, 6, 210–224.
- Albeverio, S., Koshmanenko, V. D., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2007a). On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent  $\bar{Q}$ -symbols. *Methods of functional analysis and topology*, 17(2), 97–111.
- Albeverio, S., Goncharenko, Y. V., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2007b). Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits. *Random Operators and Stochastic Equations*, 15(1), 89–97. <https://doi.org/10.1515/ROSE.2007.006>
- Albeverio, S., Koshmanenko, V. D., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2002). *Q-representation of real numbers and fractal probability distributions*. ArXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0308007>
- Chatterji, S. (1964). Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports". *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 3, 184–192. <https://doi.org/10.1007/BF00534907>
- Jessen, B., & Wintner, A. (1935). Distribution function and Riemann Zeta-function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 38(1), 48–88.
- Kakutani, S. (1948). Equivalence of infinite product measures. *Annals of Mathematics*, 49, 214–224. <https://doi.org/10.2307/1969123>
- Kenyon, R. (1997). Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Israel Journal of Mathematics*, 97, 221–238. <https://doi.org/10.1007/BF02774038>
- Levy, P. (1931). Sur les sries don't les termes sont des variables independantes. *Studia Mathematica*, 3(1), 119–155. <https://doi.org/10.4064/SM-3-1-119-155>
- Marsaglia, G. (1971). Random variables with independent binary digits. *Annals of Mathematical Statistics*, 42(2), 1922–1929. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177693058>
- Nitecki, Z. (2015). Cantorvals and subsum sets of null sequences. *The American mathematical monthly*, 122(9), 862–870. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.9.862>
- Peres, Y., Schlag, W., & Solomyak, B. (2000). Sixty years of Bernoulli convolutions. *Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability*, 46, 39–65. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8380>

### References

- Albeverio, S., Koshmanenko, V. D., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2007a). On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent  $\bar{Q}$ -symbols. *Methods of functional analysis and topology*, 17(2), 97–111.
- Albeverio, S., Goncharenko, Ya. V., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2007b). Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits. *Random Operators and Stochastic Equations*, 15(1), 89–97. <https://doi.org/10.1515/ROSE.2007.006>
- Albeverio, S., Koshmanenko, V. D., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2002). *Q-representation of real numbers and fractal probability distributions*. ArXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0308007>

- Chatterji, S. (1964). Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports". *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 3, 184–192. <https://doi.org/10.1007/BF00534907>
- Goncharenko, Ya. V., Pratsiovytyi, M. V., & Torbin, G. M. (2005). Topological-metric and fractal properties of the set of incomplete sums of a sign-positive series and distributions on it. *Scientific Journal of National Pedagogical Dragomanov University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences*, 6, 210–224.
- Jessen, B., & Wintner, A. (1935). Distribution function and Riemann Zeta-function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 38(1), 48–88.
- Kakutani, S. (1948). Equivalence of infinite product measures. *Annals of Mathematics*, 49, 214–224. <https://doi.org/10.2307/1969123>
- Kenyon, R. (1997). Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Israel Journal of Mathematics*, 97, 221–238. <https://doi.org/10.1007/BF02774038>
- Levy, P. (1931). On series whose terms are independent variables. *Mathematical Studies*, 3(1), 119–155. <https://doi.org/10.4064/SM-3-1-119-155>
- Marsaglia, G. (1971). Random variables with independent binary digits. *Annals of Mathematical Statistics*, 42(2), 1922–1929. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177693058>
- Nitecki, Z. (2015). Cantorvals and subsum sets of null sequences. *The American mathematical monthly*, 122(9), 862–870. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.9.862>
- Peres, Y., Schlag, W., & Solomyak, B. (2000). Sixty years of Bernoulli convolutions. *Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability*, 46, 39–65. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8380>

Отримано редакцією журналу / Received: 29.04.24

Прорецензовано / Revised: 07.03.25

Схвалено до друку / Accepted: 12.03.25

Oleg MAKARCHUK, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof., Doctoral Student  
ORCID ID: 0000-0002-1001-8568  
e-mail: makarchuk@imath.kiev.ua; makolpet@gmail.com  
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Bohdan KHALETSKY, PhD Student  
ORCID ID: 0009-0004-5162-825X  
e-mail: aumykun@gmail.com  
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine

## STRUCTURE OF THE DISTRIBUTION OF ONE CLASS OF GENERALIZED BERNOULLIE CONVOLUTIONS

According to the Jessen – Wintner theorem, the sum of a convergent with probability unity random series with independent discretely distributed terms has a pure Lebesgue type of distribution, i.e. discrete, absolutely continuous, or singular. Levi's theorem gives necessary and sufficient conditions for the corresponding distribution (Jessen-Wintner type distribution) to be discrete. In the general case, the problem of finding criteria for absolute continuity (singularity) of Jessen-Wintner type distributions is complex, therefore it is considered by researchers in certain classes.

An important class of distributions that satisfy the Jessen – Wintner theorem are classical Bernoulli convolutions and their corresponding generalizations (generalized Bernoulli convolutions), which have been the subject of research by many scientists. Interest in the corresponding problem is still high.

Special difficulties in the study of the Lebesgue structure of Jessen – Wintner type distributions, in particular in the class of generalized Bernoulli convolutions, arise for the case of generalized Bernoulli convolutions with substantial overlaps. For generalized Bernoulli convolutions with substantial overlaps, classical approaches of measure theory, based in particular on the Kakutani theorem, in many cases allow obtaining only certain sufficient conditions for the absolute continuity (singularity) of the corresponding distribution function.

In addition to the classical problem of deepening the Jessen-Wintner theorem for generalized Bernoulli convolutions, the following are relevant: the problem of studying the topological-metric structure of the distribution spectrum, fractal analysis of the distribution supports, asymptotic properties of the characteristic function at infinity, and others.

The paper specifies necessary and sufficient conditions for the absolute continuity and singularity of the distribution of one class of generalized symmetric Bernoulli convolutions. The corresponding results are a generalization of the results with respect to the Lebesgue structure of the distribution of a random variable with independent  $s$ -digits. The emphasis is also placed on proving that the spectrum of the corresponding class of distributions considered in the paper has a positive Lebesgue measure.

**Keywords:** distribution structure, Levy theorem, Jessen – Wintner theorem, Bernoulli convolution, absolutely continuous distribution, singular distribution.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.