

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.10>

Григоренко О.Я.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Борисенко М.Ю.¹, к.ф.-м.н.,
Бойчук О.В.², к.ф.-м.н.

A.Ya. Grigorenko¹, Dr Sci., Prof.,
M.Yu. Borysenko¹, Ph.D.,
O.V. Boychuk², Ph.D.

Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів

Determination of the frequencies and forms of free vibrations of pentagonal plates by the finite-element method

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 83000, м. Київ, вул. Нестерова, 3, e-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com.

¹ Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS of Ukraine, 83000, Kyiv, Nesterov st., 3, e-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com.

² Миколаївський національний аграрний університет, 54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9, e-mail: boychuklena27@gmail.com.

² Nikolaev National Agrarian University, 54030, Nikolaev, Georgy Gongadze st., 9, e-mail: boychuklena27@gmail.com.

Визначаються методом скінченних елементів (МСЕ) частоти та форми вільних коливань ізотропної тонкої п'ятикутної пластини правильної форми з різними варіантами жорсткого закріплення на краях. Проводиться порівняння отриманих результатів для деяких п'ятикутних пластин з результатами отриманих для квадратних пластин еквівалентної маси з відповідними граничними умовами. Представленні форми коливань досліджуваних пластин та встановлена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями і жорстко закріпленими краями. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні МСЕ.

Ключові слова: метод скінченних елементів, п'ятикутна пластина, частота та форма вільних коливань.

Frequencies and modes of free vibrations of an isotropic thin pentagonal plate of regular shape with various configurations of rigid attachment at the edges are determined using the finite element method (FEM). The results obtained for some pentagonal plates are compared with the results obtained for square plates of an equivalent mass with corresponding boundary conditions. We present the vibration modes of the studied plates and the topology of the vibration modes for some of the considered plates corresponding to the square plates with free edges and rigidly fixed edges. The reliability of the obtained results is ensured by the use of a substantiated mathematical model, the correct formulation of the problem and the practical convergence of the calculated frequencies when using the FEM.

Keywords: finite element method, pentagonal plate, frequency and shape of free vibrations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

При проектуванні інженерних споруд, сучасних будівель, корпусів різноманітних машин та конструкцій широко застосовують пластини різної форми з різними варіантами закріплення. Необхідно мати інформацію про динамічні параметри таких пластин, зокрема інформацію про розподіл частот і форм вільних

коливань, оскільки в реальних умовах експлуатації потрібно уникати резонансних режимів. У зв'язку з цим постає актуальна проблема механіки та прикладної математики про поширення аналітичних, чисельних та експериментальних методів до розв'язання задач динаміки пластин різної форми.

В рамках класичної теорії тонких пластин

для визначення частот і форм вільних коливань використовується багато різних методів [9-11]. Поряд з аналітичними та експериментальними методами розв'язування задач динаміки теорії пластин та оболонки широкого практичного застосування набули чисельні методи, а саме методом скінчених елементів. Цей метод є основою роботи багатьох сучасних програм для інженерного розрахунку. Однією з таких програм є FEMAP з розв'язувачем NX Nastran [5]. Запропонований програмний засіб використовується в ряді досліджень [1-3, 6]. Розглянемо деякі публікації присвячені даній тематиці.

В [3] визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталої товщини на основі двох чисельних методів, а саме, МСЕ, який реалізовано на FEMAP, і методом Релея-Рітца, який модифіковано та реалізовано на ЕОМ в середовищі Delphi. В [2] досліджуються динамічні характеристики тонкої ізотропної жорстко закріпленої квадратної пластини за допомогою реалізації неklasичного експерименту Хладні та МСЕ. Описується методика проведення експерименту і чисельного розрахунку. В [6] розглядаються тонкі пластини трикутної, квадратної та п'ятикутної форми з вільними краями. Проведено порівняльний аналіз розрахованих частот вільних коливань та встановлені залежності власних частот від фізичних та механічних характеристик матеріалу у вигляді коефіцієнтів. В [1] МСЕ досліджується тонка квадратна пластинка з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями та проводиться порівняльний аналіз розрахованих власних частот квадратної пластини з частотами, які отримані чисельно та експериментально іншими авторами [4].

В [12] досліджено коливання вільних полігональних і заокруглених полігональних пластин за допомогою покращеного метода Рітца на класі гомотопічних форм. Представленні перші п'ять частот власних коливань пластин правильної форми та еволюція форм коливань. В [7] для визначення основної частоти коливань тонких пружних паралелограмних пластин запропоновано використовувати метод інтерполяції з введеною геометричною характеристикою пластини, яка є відношенням внутрішнього конформного радіуса до зовнішнього конформного радіуса. В [8] розглянуто коливання пружних ізотропних трапецієподібних пластин, запропоновано використовувати метод інтерполяції форм-фактора для визначення значення основної частоти.

Метою даної роботи є визначення методом

скінчених елементів частот та форм вільних коливань ізотропної тонкої п'ятикутної пластини правильної форми з різними варіантами жорсткого закріплення на краях, порівняння отриманих результатів для деяких п'ятикутних пластин з результатами отриманих для квадратних пластин еквівалентної маси з відповідними граничними умовами та встановлення топології форм коливань.

Основні співвідношення

Рівняння руху пластини в МСЕ за відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, який відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях пластини всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) в рівняння руху пластини визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де ω_j – частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань при відсутності дисипації енергії і демпфування використовує, як основний, метод Ланцоша [5].

Побудова розрахункової моделі

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію п'ятикутної пластини правильної форми зі стороною $a = 106,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ і товщиною $d = 0,003 \text{ м}$. Площа п'ятикутної пластини еквівалентна площі квадратної пластини [3]. В якості матеріалу задавався алюміній з модулем Юнга $E = 110 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,34$, густиною $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$. Пластинка досліджувалась при різних варіантах жорстко (С) закріплених країв і вільних (F) країв (рис.1). Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони $1,5 \text{ мм}$. Проводився розрахунок частот і форм

вільних коливань п'ятикутних пластин з різними граничними умовами.

Результати

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі,

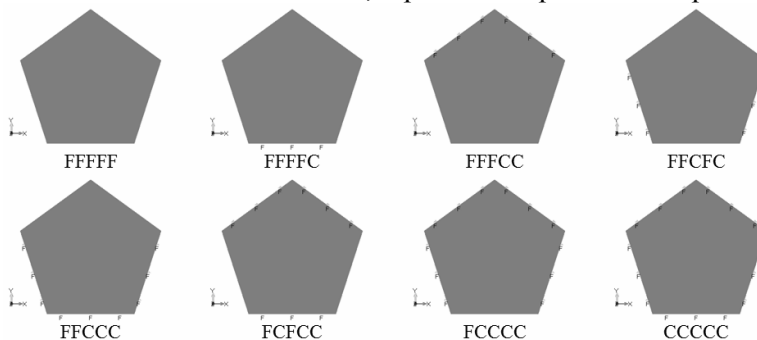


Рис. 1. Варіанти закріплення пластини

і вільних країв, які представлені в таблиці 1. Для наочності результати представлені у вигляді гістограм (рис. 2). Порівняння перших трьох форм коливань всіх розглянутих пластин представлені на рис. 3-5. Порівняння перших десяти частот для п'ятикутної пластини і квадратної пластини [3] еквівалентної маси з жорстко закріпленими всіма краями наведено в таблиці 2 та гістограмі (рис. 6).

Встановлена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями [1, 12] (рис. 7) і жорстко закріпленими краями [3] (рис. 8).

розв'язком тестових задач [3] та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу скінченних елементів.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вісьма різними варіантами жорсткого закріплення країв

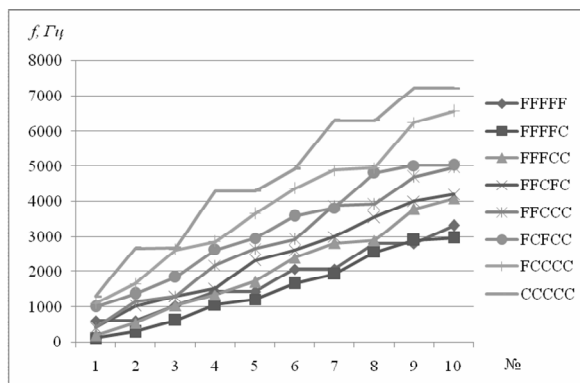


Рис. 2. Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин

Таблиця 1

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин

№	<i>f, Гц</i>							
	FFFFF	FFFFC	FFFC	FFCC	FFCC	FCFC	FCFC	FCFC
1	604	119	197	403	404	1013	1101	1300
2	604	293	537	1031	1161	1377	1649	2673
3	1039	615	1039	1305	1306	1833	2625	2675
4	1429	1061	1352	1524	2174	2623	2863	4302
5	1429	1212	1713	2317	2663	2967	3652	4304
6	2071	1659	2401	2619	2928	3583	4378	4919
7	2071	1931	2825	3010	3887	3815	4889	6319
8	2812	2562	2899	3549	3922	4816	4953	6320
9	2812	2905	3789	4011	4702	5022	6265	7224
10	3322	2977	4088	4209	4961	5027	6578	7228

Висновки

У роботі визначені частоти та форми вільних коливань ізотропних тонких п'ятикутних пластин правильної форми з різними варіантами жорсткого закріплення на краях. При цьому отримані такі конкретні результати:

1. Частоти п'ятикутної пластини з вільними кра-

ями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення.

2. Із збільшенням кількості закріплених торців відповідні частоти зростають.

3. Частоти пластини з жорстко закріпленими краями більші ніж в два рази за відповідні

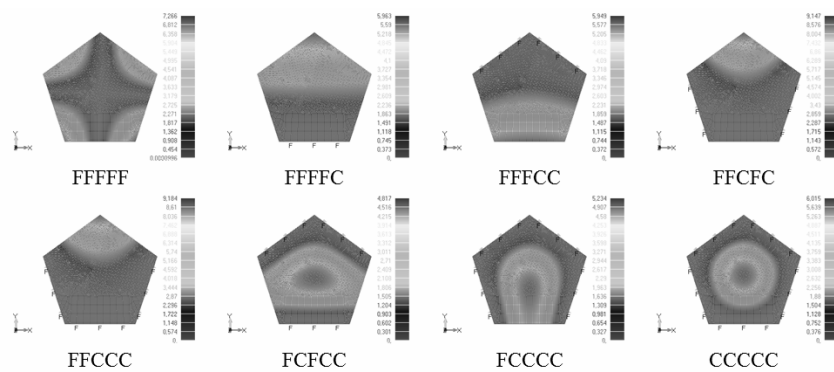


Рис. 3. Перша форма вільних коливань п'ятикутних пластин

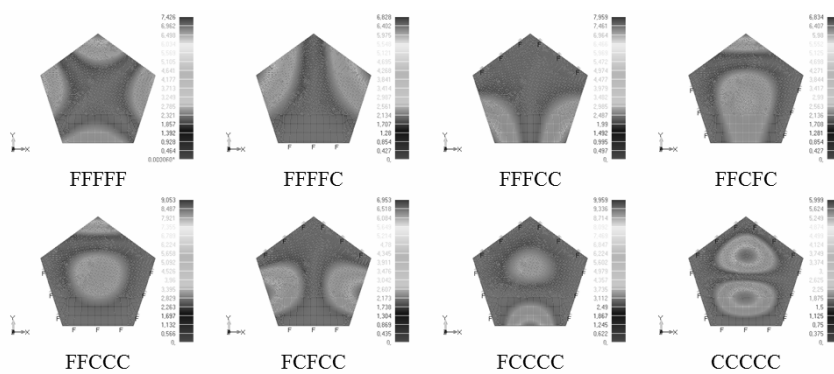


Рис. 4. Друга форма вільних коливань п'ятикутних пластин

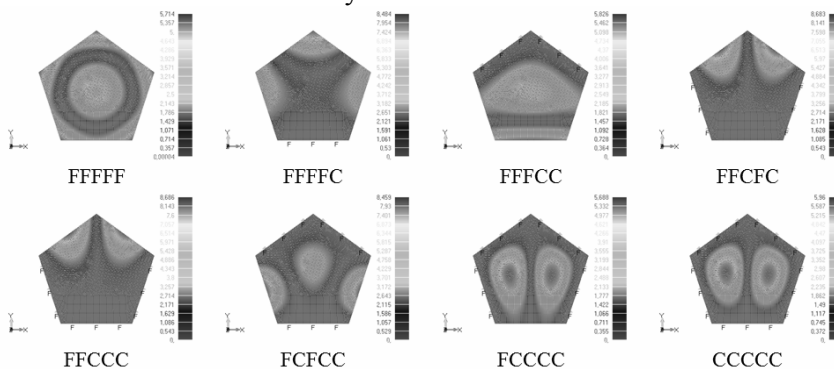


Рис. 5. Третя форма вільних коливань п'ятикутних пластин

Таблиця 2

Частоти вільних коливань п'ятикутної і квадратної пластини

№	$f, \Gamma y$	
	CCCCC	CCCC [3]
1	1300	1373
2	2673	2789
3	2675	2789
4	4302	4096
5	4304	4972
6	4919	4997
7	6319	6211
8	6320	6211
9	7224	7900
10	7228	7900

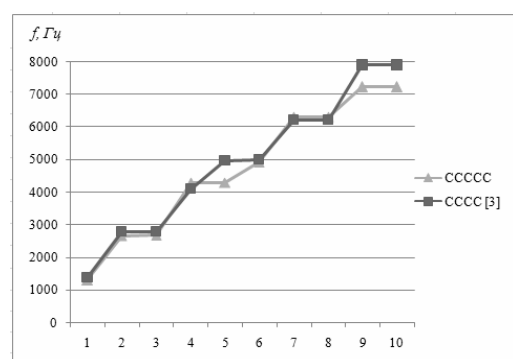


Рис. 6. Частоти вільних коливань п'ятикутної і квадратної пластини з вільними краями.

4. Від варіанту жорсткого закріплення однакової кількості торців суттєво залежать перші частоти.

5. Спостерігається мала розбіжність відповідних частот та подібність форм коливань для пластин з парами закріплення: FFCFC і

FFCCC; FCCCC і CCCCC.

6. Частоти вільних коливань п'ятикутної і квадратної пластин з жорстко закріпленими краями мають незначну розбіжність.

7. Наведена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями і жорстко закріпленими краями.

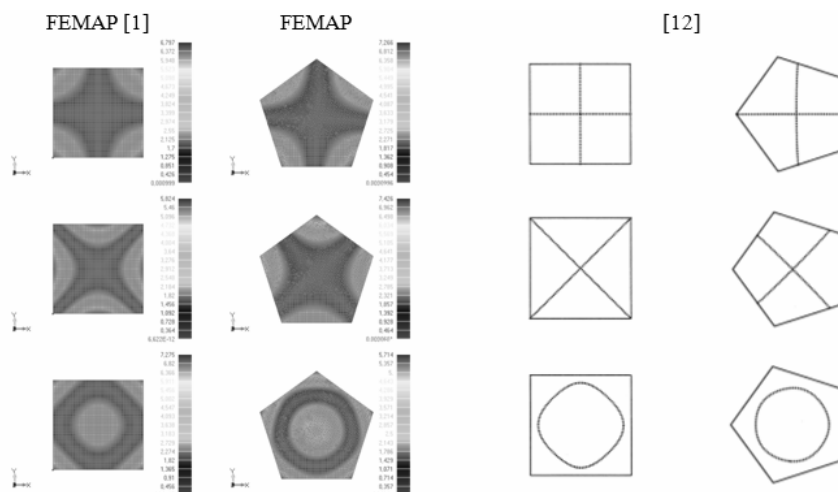


Рис. 7. Топологія форм коливань пластин з вільними краями

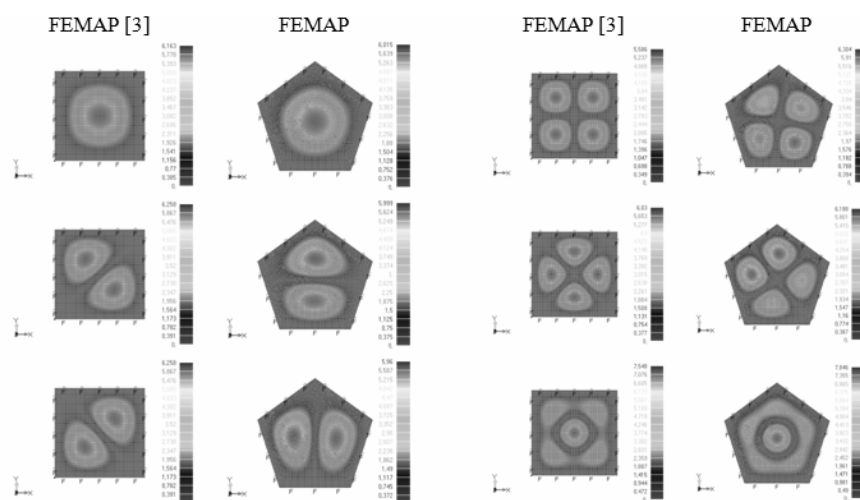


Рис. 8. Топологія форм коливань пластин з жорстко закріпленими краями

Список використаних джерел

1. Борисенко М.Ю. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів / М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук, І.А. Борисенко, Ю.О. Роговцов // Геометричне моделювання та інформаційні технології, 2016. – №2. – С. 29-33.
2. Григоренко О.Я. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин / О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук,

References

1. BORYSENKO M.Y., BOYCHUK O.V., BORYSENKO I.A., ROGOVTSOV Y.O. (2016) Computer modeling of free vibration of thin plates with different materials. *Science Journal of Geometric modeling and information technologies*. – No. 2. – P. 29-33.
2. GPIGORENKO O.Y., BORYSENKO M.Y., BOYCHUK O.V., NOVYTSKYI V.S. (2019) Application of experimental and numerical methods to the study of the free vibrations or rec-

- В.С. Новицький // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, 2019. – №29. – С. 103-112.
3. Григоренко О.Я. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів / О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук, В.С. Новицький // Вісник Запорізького національного університету, серія фізико-математичні науки, 2019. – №1. – С. 33-41.
 4. Мелешко В.В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1990) до наших дней / В.В. Мелешко, С.О. Папков // Акустичний вісник. – 2009. – Т. 12, № 4. С. 34-51.
 5. Рудаков К. М. FEMAP. Геометричне та скінченно-елементне моделювання конструкцій у MSC. visual Nastran for Windows. – К.: НТУУ «КПІ», 2005. – 218 с.
 6. Borysenko M. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone / M. Borysenko, A. Zavhorodnii, R. Skupskyi // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2019. – Vol.18, №1. – P. 5–13.
 7. Chernyaev A.A. Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration / A.A. Chernyaev // Proc. Eng. 2017. – Vol. 206. – P. 31–34.
 8. Korobko A.V. Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique / A.V. Korobko, A.A. Chernyaev, V.I. Korobko // Proc. Eng. 2017. – Vol.206. – P. 25–30.
 9. Leissa A.W. The Free Vibration of Rectangular Plates / A. W. Leissa // Journal of Sound and Vibration. – 1973. – Vol. 31. – P. 257-293.
 10. Leissa A.W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods / A. W. Leissa // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 287. – P. 961-978.
 11. Tomotika S.LX. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges / S. Tomotika // Philosophical Magazine. – 1936. – Ser.7, Vol. 21, No. 142. – P. 745-760.
 12. Wang C.Y. Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates // International Journal of Acoustics and Vibration, 2015 – Vol. 20, №2. – P. 107-112.
 3. GPIGORENKO O.Y., BORYSENKO M.Y., BOYCHUK O.V., NOVYTSKYI V.S. (2019) Numerical analysis of free vibrations for rectangular plates based different approaches. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences.* – No. 1. – P. 33-41.
 4. MELESHKO V.V., PAPKOV S.O. (2009) Flexural vibration of elastic rectangular plates with free edges: from Chladni (1809) and Ritz (1990) to the present day. *Akustychnyi visnyk.* – Vol. 12, No. 4. – P. 34-51.
 5. RUDAKOV K.N. (2005) *FEMAP. The Geometric and finite element modeling of structures in MSC. visual Nastran for Windows.* Kyiv: NTUU «KPI».
 6. BORYSENKO M., ZAVHORODNII A., SKUPSKYI R. (2019) Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* – Vol. 18, No. 1. – P. 5–13.
 7. CHERNYAEV A.A. (2017) Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration. *Procedia Engineering.* – Vol. 206. – P. 31–34.
 8. KOROBKO A.V., CHERNYAEV A.A. KOROBKO V.I. (2017) Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique. *Procedia Engineering.* – Vol. 206. – P. 25–30.
 9. LEISSA A.W. (1973) The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration.* – Vol. 31. – P. 257-293.
 10. LEISSA A.W. (2005) The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration.* – Vol. 287. – P. 961-978.
 11. TOMOTIKA S.LX. (1936) The transverse vibration of a square plate clamped at four edges. *Philosophical Magazine.* – Ser.7, Vol. 21, No. 142. –P. 745-760.
 12. WANG C.Y. (2015) Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates. *International Journal of Acoustics and Vibration.* – Vol. 20, No. 2. – P. 107-112.

Надійшла до редколегії 10.02.2020