Журнал обчислювальної та прикладної математики
2023, № 1
Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.95
MSC 35A20

EXISTENCE IN SCHWARTZ SPACE AND SOLUTIONS PROPERTIES OF THE HOPF–TYPE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

V. Samoilenko, Yu. Samoilenko
Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: {valsamyul, yuliiasam1976}@gmail.com

ІСНУВАННЯ У ПРОСТОРІ ШВАРЦА ТА ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТИПУ РІВНЯННЯ ХОПФА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко
Механіко-математичний факультет, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: {valsamyul, yuliiasam1976}@gmail.com

Abstract. The issue of the existence of solutions of the Cauchy problem for a first-order quasi-linear differential equation with partial derivatives and variable coefficients is considered. The studied equation is a generalization of the classic Hopf equation, which is used in the study of many mathematical models of hydrodynamics. This equation arises when constructing approximate (asymptotic) solutions of the Korteweg–de Vries equation and other equations with variable coefficients and a singular perturbation, in particular, when finding their asymptotic step-type soliton-like solutions. For the mentioned differential equation of the first order, the solution of the Cauchy problem is obtained in analytical form, and the statement about sufficient conditions for the existence of solutions of the initial problem in the space of rapidly decreasing functions is proved. A similar problem for a first-order differential equation with partial derivatives with variable coefficients and quadratic nonlinearity is considered.
Keywords: Cauchy problem, quasi-linear equation, Hopf equation, Korteweg–de Vries equation, asymptotic solutions, rapidly decreasing functions.

Анотація. Розглянуто питання про існування розв'язків задачі Коші для квазілінійного диференціального рівняння першого порядку із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Досліджуване рівняння є узагальненням класичного рівняння Хопфа, яке використовується при вивченні багатьох математичних моделей гідродинаміки. Це рівняння виникає при побудові наближених (асимптотичних) розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза та інших рівнянь інтегровного типу зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням, зокрема, при знаходженні їх асимптотичних солітоноподібних розв'язків типу сходинки. Для згаданого диференціального рівняння першого порядку в аналітичному вигляді отримано розв'язок задачі Коші та доведено твердження про достатні умови існування розв'язків початкової задачі у просторі швидко спадних функцій. Розглянуто аналогічну задачу для диференціального рівняння першого порядку із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю.

Ключові слова: задача Коші, квазілінійне рівняння, рівняння Хопфа, рівняння Кортевега–де Фріза, асимптотичні розв'язки, швидко спадні функції.

Вступ

При математичному моделюванні різних процесів техніки і явищ природознавства виникає необхідність дослідження питань про існування у різних функціональних просторах роз'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Одним із класичних прикладів таких рівнянь є рівняння Хопфа, яке використовується для опису вільного руху нестисливого середовища [1]. Це рівняння можна отримати при граничному переході $\mu \to 0$ як з рівняння Бюргерса [2]

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \tag{1}$$

тобто у випадку зникаючої в'язкості, так і з рівняння Кортевега–де Фріза

$$u_t + uu_x = \mu u_{xxx}. \tag{2}$$

Нагадаємо, що рівняння (1) було запропоновано Йоганном Бюргерсом у 1939 році в якості досить простої математичної моделі для опису поширення ударної хвилі в рідині [3, 4].

Рівняння Хопфа

$$u_t + uu_x = 0 \tag{3}$$

розглядалося у багатьох працях в якості математичної моделі нелінійних процесів в гідро- і газодинаміці, для якого вивчалися питання про існування різних типів його розв'язків [5–7].

Рівняння (3) і дотепер залишається важливим і цікавим об'єктом дослідження, оскільки використовується при математичному моделюванні хвильових процесів в диспергуючих середовищах [8, 9], паводкових явищ [10], хвиль в транспортних потоках [11, 12].

Про рівняння Хопфа часто згадують як про рівняння, яке описує низку ефектів, притаманних виключно нелінійним системам. Одним з таких ефектів є явище градієнтної катастрофи. Суть цього явища полягає в тому, що за скінченний час розв'язки рівняння Хопфа можуть *руйнуватися*, коли їх частинні похідні стають необмеженими. Дійсно, якщо розглянути задачу Коші для рівняння (3) з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

то розв'язок задачі Коші (3), (4) можна знайти методом характеристик [13] і записати у неявному вигляді:

$$u = \varphi(x - ut). \tag{5}$$

Звідси легко отримуємо співвідношення

$$u_x = \frac{\varphi'}{1 + t\varphi'}, \quad u_t = \frac{-u\varphi'}{1 + t\varphi'}. \tag{6}$$

Очевидно, що $u_x \to \infty$, $u_t \to \infty$, якщо початкова функція $\varphi(x)$ є спадною на деякому інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Саме таке руйнування розв'язку і називається *градієнтною катастрофою* [14]. Зауважимо, що це явище властиве лише нелінійним системам.

З іншого боку, в якості математичних моделей часто розглядаються диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які описують процеси в середовищах зі змінними характеристиками [14–16].

Наприклад, рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами використовується для математичного опису поширення хвиль в неоднорідних середовищах [15, 17], зокрема, це рівняння виникає при побудові асимптотичних солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням [18, 19].

При побудові таких асимптотичних розв'язків з'являється задача про існування в просторі Шварца (просторі швидко спадних функцій) розв'язків рівняння типу рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$a(x, t)u_t + b(x, t)uu_x = 0 \tag{7}$$

та задачі Коші для рівняння (7) з початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Саме така задача вивчається у роботі. Тут розглядаються квазілінійні та лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, для яких отримано формули для їх загальних розв'язків.

За допомогою цих формул з'ясовано умови, за яких досліджувані рівняння, зокрема рівняння вигляду (7), мають розв'язки у просторі швидко спадних функцій. Отримані результати сформульовані у вигляді теорем, що супроводжуються необхідними доведеннями.

Основні позначення і поняття

Через $S = S(\mathbb{R})$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbb{R}$ функцій, які для всіх цілих невід'ємних чисел m задовольняють нерівність [20]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (D_x^m u)^2\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2\right)^m u^2 dx < \infty,$$

а через $C^\infty(0, T; S)$ — простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbb{R} \times [0; T]$ функцій $u(x, t)$ зі значеннями в просторі $S = S(\mathbb{R})$, тобто таких функцій, які для всіх цілих невід'ємних чисел m задовольняють умову [18, 20]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty.$$

Рівняння Хопфа

Розглянемо спочатку класичне рівняння Хопфа (3) і з'ясуємо питання про існування неперервно диференційовних та швидко спадних розв'язків відповідної задачі Коші.

Мають місце такі твердження.

Лема 1. *Нехай початкова функція $\varphi(x) \not\equiv 0$ належить простору $S(\mathbb{R})$. Тоді неперервно диференційовний розв'язок задачі Коші (3), (4) існує лише на скінченному інтервалі.*

Доведення. Оскільки функція $\varphi = \varphi(x)$ належить простору швидко спадних функцій, то існує такий інтервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$, що $\varphi'(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$.

Дійсно, точки a, b, які обмежують інтервал $(a; b)$, можна визначити, знайшовши точки локального максимуму чи точки локального мінімуму початкової функції $\varphi(x)$. Принаймні одна з таких точок (локального максимуму чи локального мінімуму для функції $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$) обов'язково існує.

Якщо x^* — точка локального максимуму для функції $\varphi(x)$, то можна покласти $a = x^*$, а в якості значення b взяти $+\infty$ за умови, що функція $\varphi(x)$ не має точок локального мінімуму на проміжку $(x^*; +\infty)$.

Якщо на інтервалі $(x^*; +\infty)$ початкова функція $\varphi(x)$ має хоча б один локальний мінімум, то в якості значення b потрібно взяти найменше значення точки $x_* \in (x^*; +\infty)$, в якій функція $\varphi(x)$ досягає локального мінімуму.

Тоді з нерівності $\varphi'(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$ та з формул для похідних (6) слідує, що розв'язок задачі Коші (3), (4) може існувати лише на деякому скінченному інтервалі.

Аналогічні міркування можна здійснити у випадку, коли початкова функція $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ не має жодної точки локального максимуму, а має лише одну точку локального мінімуму. □

Зауваження 1. Якщо в якості початкових даних в умові леми 1 розглянути функції

$$\varphi_1(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_2(x) = e^{-x^2} \sin x \in S(\mathbb{R}),$$

то можна переконатися в можливості існування однієї або багатьох (навіть нескінченної кількості) точок локального екстремуму початкової функції $\varphi(x)$.

Зауваження 2. З леми 1 слідує, що у випадку, коли початкова функція $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$, є сенс розглядати розв'язки задачі Коші (3), (4) лише на скінченному часовому інтервалі, тобто на множині $\mathbb{R} \times [0; T]$, де $T >$

0 — деяке дійсне число. Хоча при цьому розв'язок задачі Коші (3), (4), очевидно, існує на інтервалі $[0;\omega_+) \supset [0;T]$. Значення ω_+ визначається із умови:

$$1 + t\varphi'(x - tu(x,t)) > 0 \ \text{ для всіх } \ t \in [0;\omega_+), \ x \in \mathbb{R}.$$

Тому у подальшому вивчається питання про властивості розв'язків задачі Коші (3), (4), які визначені на обмеженій за часовою змінною множині $\mathbb{R} \times [0;T]$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми 1 і задача Коші (3), (4) має на* $\mathbb{R}\times[0;T]$ *обмежений розв'язок* $u = u(x,t) \in C^{(1)}(\mathbb{R}\times[0;T])$. *Тоді похідні* $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Враховуючи формули (6) для похідних $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$, робимо висновок про те, що твердження леми 1 достатньо довести для частинної похідної $u_x(x,t)$, бо $u_t(x,t)$ є добутком двох функцій: частинної похідної $u_x(x,t)$ і функції $u = u(x,t)$, яка обмежена згідно припущень леми 1.

Функція $u = u(x,t)$ є неперервно диференційовною для всіх $(x;t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$, а отже права частина рівності

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x - tu)}{1 + t\varphi'(x - tu)}$$

— неперервно диференційовна для всіх $(x;t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$.

Звідси слідує існування додатнього числа α, для якого виконується нерівність $|1 + t\varphi'(x)| > \alpha$ для всіх $(x;t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$.

Це дозволяє зробити висновок про те, що похідна $u_x(x,t)$ як добуток функції $\varphi'(x)$, яка належить простору швидко спадних функцій, і обмеженої функції

$$1/\left(1 + t\varphi'(x)\right)$$

є швидко спадною функцією про кожному значенні $t \in [0;T]$. Останнє еквівалентне властивості $u_x(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$.

Звідси, зокрема знаходимо

$$\partial^{n+m}u/\partial x^n \partial t^m \in C^\infty(0,T;S)$$

для всіх цілих невід'ємних чисел n, m за умови $n + m > 0$.

Тому похідна $u_t(x,t)$, яка задається формулою

$$u_t(x,t) = \frac{-u\varphi'(x - tu)}{1 + t\varphi'(x - tu)} = -uu_x(x,t),$$

належить простору $C^\infty(0,T;S)$. □

Зауваження 3. З доведення теореми 1 випливає властивість

$$u = u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0;T]),$$

бо вирази для частинних похідних

$$\partial^{n+m}u/\partial x^n \partial t^m \in C^\infty(0,T;S)$$

для всіх цілих невід'ємних чисел n, m можна отримати рекурентним чином, використовуючи співвідношення (6).

Рівняння типу рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо тепер рівняння (7), з якого у випадку сталих коефіцієнтів слідує рівняння Хопфа (3). Використовуючи метод характеристик [13], за умови неперервності коефіцієнтів рівняння (7), побудуємо загальний розв'язок цього рівняння і знайдемо умови, за яких побудований розв'язок належить простору швидко спадних функцій.

Загальний розв'язок

Загальний розв'язок рівняння (7) можна записати у вигляді довільної функції від незалежних перших інтегралів його системи характеристик, яка має вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь і записується таким чином

$$\frac{dt}{a(x,t)} = \frac{dx}{b(x,t)} = \frac{du}{0}. \tag{9}$$

Очевидно, що система характеристик (9) має перший інтеграл $u = c_1$, де $c_1 \in \mathbb{R}$, а інший перший інтеграл визначається зі звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \frac{b(x,t)}{a(x,t)}. \tag{10}$$

Рівняння (10) є нелінійним рівнянням першого порядку, яке при досить загальних умовах в деякому околі довільної точки $(x_0, t_0) \in \mathbf{R} \times (0; T)$ має розв'язок

$$x = \varphi(t, c_1), \;\; t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta), \;\; \delta > 0,$$

що задовольняє початкову умову $x_0 = \varphi(t_0, c_1)$. Це означає, що рівняння (10) має перший інтеграл вигляду

$$\psi(x, t, c_1) = c_2, \quad (x, t, c_1) \in \mathbf{R} \times (t_0 - \delta; t_0 + \delta) \times \mathbf{R}.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (7) записується у неявному вигляді таким чином

$$\Phi(u, \psi(x, t, u)) = 0, \tag{11}$$

де $\Phi(\xi, \eta) \in C^\infty(\Xi; \mathbf{R})$ — така довільна функція, для якої виконується властивість: повна похідна за змінною u від функції в лівій частині рівності (11) не дорівнює нулеві, тобто $d\Phi(u, \psi(x, t, u))/du \neq 0$ для всіх $(x, t, u) \in G$, де G — область значень змінних (x, t, u) відображення

$$G \ni (x, t, u) \to (u, \psi(x, t, u))$$

за умови, що існує хоча б одна точка $(\xi_0, \eta_0) \in \Xi$, для якої справджується рівність

$$\Phi(\xi_0, \eta_0) = 0.$$

Зауваження 4. Тут і у подальшому через Ξ позначено множину визначення функції $\Phi(\xi, \eta)$, яку можна описати через множини визначення функцій $u = u(x, t)$ та $\psi = \psi(x, t, u(x, t))$.

У частинному випадку, коли коефіцієнти рівняння (7) — функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, допускають факторизацію за змінними x, t, тобто мають місце співвідношення

$$a(x,t) = A_1(x)A_2(t) \neq 0, \quad b(x,t) = B_1(x)B_2(t) \neq 0, \tag{12}$$

формула (11) для загального розв'язку $u = u(x,t)$ рівняння (7) дещо спрощується і розв'язок $u = u(x,t)$ можна записати у неявному вигляді таким чином [21]:

$$\Phi\left(u, \int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\,d\sigma - u\int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\,d\sigma\right) = 0. \tag{13}$$

Тут $\Phi(\xi,\eta) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ — така функція, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині рівності (13) не дорівнює нулеві при всіх $(x,t,u) \in G$, де G — область значень змінних (x,t,u) відображення

$$G \ni (x,t,u) \to \left(u, \int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\,d\sigma - u\int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\,d\sigma\right)$$

за умови, що існує хоча б одна точка $(\xi_0,\eta_0) \in \Xi$, для якої виконується рівність

$$\Phi(\xi_0,\eta_0) = 0.$$

Отримані формули дозволяють знайти достатні умови існування у просторі швидко спадних функцій $C^\infty(0,T;S)$ розв'язку рівняння (7).

Має місце твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення:*

1) *функції $a(x,t)$, $b(x,t)$ в рівнянні (7) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову факторизації (12);*
2) *функція $A_1(x)/B_1(x)$ обмежена для всіх $x \in \mathbb{R}$ та існує така стала $C_1 > 0$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність*

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\,d\sigma\right| \geq C_1\,|x - x_0|\,;$$

3) *існують такі сталі $M_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності*

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\frac{A_1(x)}{B_1(x)}\right| \leq M_n;$$

4) *функція $\Phi(\xi,\eta)$ в (13) належить простору $C^\infty(\Xi;\mathbb{R})$, її похідні є обмеженими, а $\Phi_\eta(\xi,\eta) \in S(\mathbb{R})$ щодо $\eta \in \mathbb{R}$ для всіх $\xi \in Pr_{O\xi}\Xi$, де $Pr_{O\xi}\Xi$ — проекція множини Ξ на вісь $O\xi$;*
5) *рівняння (13), що неявним чином задає функцію $u = u(x,t)$, має обмежений розв'язок $u(x,t) \in C^{(1)}(\mathbb{R} \times [0;T])$;*

6) *існує така стала $C > 0$, що повна похідна від функції в лівій частині (13) за змінною u вздовж розв'язку $u = u(x,t)$ рівняння (7) задовольняє на множині $\mathbb{R} \times [0;T] \times U$ нерівність*

$$\left| \frac{d}{du}\, \Phi \left(u, \int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\, d\sigma - u \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\, d\sigma \right) \right| \geq C, \tag{14}$$

де множина $U = \{u \in \mathbb{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]\}$.

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Із співвідношення (13) знаходимо частинні похідні за змінними x та t функції $u(x,t)$:

$$u_x(x,t) = -\frac{A_1(x)}{B_1(x)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\, d\sigma \right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \tag{15}$$

$$u_t(x,t) = u(x,t) \frac{B_2(t)}{A_2(t)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\, d\sigma \right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \tag{16}$$

Тут вирази для похідних Φ_ξ, Φ_η записано при відповідних значеннях величин ξ, η, які природнім чином визначаються з (13).

Розглянемо спочатку вираз у правій частині рівності (15).

Згідно умов теореми 2 похідна $\Phi_\eta(\xi,\eta)$ належить простору швидко спадних функцій $S(\mathbb{R})$ щодо змінної $\eta \in \mathbb{R}$ для всіх ξ з області визначення функції $\Phi_\eta(\xi,\eta)$ (умова 4), функція $A_1(x)/B_1(x)$ та всі її похідні є обмеженими для всіх $x \in \mathbb{R}$ (умови 2, 3). Тоді, враховуючи нерівність (14) для повної похідної функції $\Phi_\eta(\xi,\eta)$ за u, бачимо, що при кожному $t \in [0;T]$ похідна $u_x(x,t)$ належить простору швидко спадних за змінною x функцій.

Беручи до уваги, що функція $u(x,t)$ є обмеженою (умова 5), неперервно диференційовна функція $B_2(t)/A_2(t)$ визначена на скінченному замкненому інтервалі $[0;T]$, з рівності (16) отримуємо, що при кожному $t \in [0;T]$ похідна $u_t(x,t)$ належить простору швидко спадних за змінною x функцій.

Аналогічно доводимо, що старші похідні за змінними x, t розв'язку $u(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ також належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Звідси випливає, що похідні

$$u_x(x,t), u_t(x,t)$$

належать простору $C^\infty(0,T;S)$. □

Задача Коші

Розглянемо задачу Коші для рівняння (7) з початковою умовою (8).

Як і у випадку, який розглянуто вище, розв'язок задачі Коші (7), (8) можна записати неявним чином, використовуючи перші інтеграли системи характеристик.

Дійсно, враховуючи формули для перших інтегралів

$$u = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\, d\sigma - c_1 \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\, d\sigma = c_2, \quad x_0, c_2 \in \mathbb{R},$$

аналогічно формулі (5) шуканий розв'язок $u = u(x,t)$ можна записати таким чином

$$u = \varphi\left(f\left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\, d\sigma - u \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\, d\sigma \right)\right), \tag{17}$$

де функція $\varphi = \varphi(x)$ — початкова функція з умови (8), а $f = f(y)$ — обернена до функції

$$y = y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\, d\sigma. \tag{18}$$

Формула (17) для розв'язку $u(x,t)$ задачі Коші (7), (8) дає можливість отримати достатні умови належності його похідних простору $C^\infty(0,T;S)$.

Має місце твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі припущення:*

1) *мають місце умови 1) – 3) теореми 2;*
2) *функція $\varphi = \varphi(x)$ в (8) належить простору $S(\mathbb{R})$;*
3) *функція $f = f(y)$, яка є оберненою до функції $y = y(x)$, що визначена формулою (18), є нескінченно диференційовною та для всіх $y \in \mathbb{R}$ і деяких сталих $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$ задовольняє нерівність*

$$|f(y)| \geq C_1 |y + C_2|;$$

4) *похідні функції $f = f(y)$ при кожному $y \in \mathbb{R}$ задовольняють співвідношення*

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \leq \left(M_k |y| + N_k \right)^{l_k},$$

де M_k, N_k, l_k — деякі додатні сталі, $k \in \mathbf{N}$;

5) *справджується нерівність*

$$\left| 1 + \frac{d}{dy}\, \varphi(f(y)) \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(t)}{A_2(t)} \right| \geq C$$

для деякої сталої $C > 0$ і всіх $(x,t,u) \in \mathbb{R} \times [0;T] \times U$, де множина $U = \{u \in \mathbb{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]\}$, та

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{A_1(\sigma)}{B_1(\sigma)}\, d\sigma - u \int\limits_{0}^{t} \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\, d\sigma, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Для доведення теореми проаналізуємо вирази для похідних $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$. Із співвідношення (17) знаходимо:

$$u_x(x,t) = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} \left(1 + \frac{d}{dy}\,\varphi(f(y)) \int\limits_0^t \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\,d\sigma \right)^{-1} \frac{d}{dy}\,\varphi(f(y)), \tag{20}$$

$$u_t(x,t) = -\frac{B_2(t)}{A_2(t)} \left(1 + \frac{d}{dy}\,\varphi(f(y)) \int\limits_0^t \frac{B_2(\sigma)}{A_2(\sigma)}\,d\sigma \right)^{-1} \frac{d}{dy}\,\varphi(f(y)), \tag{21}$$

де y визначено формулою (19).

Відповідно до умов теореми 3 функція $A_1(x)/B_1(x)$ та всі її похідні є обмеженими для всіх $x \in \mathbb{R}$, функція $B_2(t)/A_2(t)$ визначена на скінченному замкненому інтервалі $[0;T]$, а отже, як неперервно диференційовна функція, є обмеженою. Оскільки початкова функція $\varphi(x)$ належить простору $S(\mathbb{R})$ (умова 2 теореми 3), то отримуємо, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Звідси випливає, що похідні вищих порядків $\partial^{n+m}u/\partial^n x\,\partial t^m$, де n, m — цілі невід'ємні числа, для яких $n+m>0$, при кожному $t \in [0;T]$ теж належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Це означає, що функції

$$u_x(x,t), \quad u_t(x,t)$$

належать простору $C^\infty(0,T;S)$. $\square$

Диференціальне рівняння з квадратичною нелінійністю

При побудові [22] асимптотичних багатофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами виникає задача, що пов'язана із вивченням розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю і змінними коефіцієнтами. Це рівняння визначає головний член регулярної частини асимптотики і має вигляд

$$a(x,t)u_t + uu_x - a(x,t)\frac{b_t(x,t)}{b(x,t)}u - \frac{b_x(x,t)}{b(x,t)}u^2 = 0. \tag{22}$$

Існування розв'язку

Загальний розв'язок рівняння (22) можна знайти за допомогою методу характеристик, визначивши перші інтеграли системи характеристик

$$\frac{dt}{a(x,t)} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{[a(x,t)b_t(x,t)u + b_x(x,t)u^2]b^{-1}(x,t)}.$$

Як і вище, розглянемо випадок, коли коефіцієнти рівняння (22) задовольняють умову факторизації і мають вигляд

1) $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(x)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$,

   або

2) $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$.

У випадку 1) система характеристик для рівняння (22) записується у вигляді

$$\frac{dt}{a_1(x)a_2(t)} = \frac{dx}{u} = \frac{b(x)du}{b'(x)\,u^2},$$

і має два перших інтеграли

$$\varphi(x,u) = c_1, \quad \psi(x,t,u) = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

де

$$\varphi(x,u) = \frac{u}{b(x)}, \quad \psi(x,t,u) = \frac{u}{b(x)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\xi)}{b(\xi)}\, d\xi, \tag{24}$$

початкові точки $t_0 \in [0;T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ є довільними.

Тоді загальний розв'язок рівняння (22) можна записати у неявному вигляді таким чином

$$\Phi\left(\varphi(x,u), \psi(x,t,u)\right) = 0. \tag{25}$$

Тут $\Phi(\varphi,\psi) \in C^\infty(\Xi;\mathbb{R})$ — така функція, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (25) не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G значень змінних (x,t,u), при яких визначено відображення $(x,t,u) \to (\varphi,\psi)$, де $\varphi = \varphi(x,u)$, $\psi = \psi(x,t,u)$, і припускається, що існує хоча б одна точка $(\varphi_0,\psi_0) \in \Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0,\psi_0) = 0$.

Формула (25) для загального розв'язку $u(x,t)$ диференціального рівняння (22) дає можливість отримати достатні умови належності його похідних простору $C^\infty(0,T;S)$.

Має місце твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) *коефіцієнти рівняння (22) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(x)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$, де функція $a_1(x)$ обмежена для всіх $x \in \mathbb{R}$, а функція $b(x)$ для деякого $\rho > 0$ задовольняє нерівність $|b(x)| \geq \rho$, $x \in \mathbb{R}$;*
2) *існують такі сталі K_n, $M_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності*

$$\left| \frac{d^n}{dx^n}\, b(x) \right| \leq K_n, \quad \left| \frac{d^n}{dx^n} a_1(x) \right| \leq M_n;$$

3) *існує така стала $\gamma > 0$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність*

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\, d\eta \right| \geq \gamma\, |x - x_0|\,,$$

4) *функція $\Phi(\xi,\eta)$ в (25) належить простору $C^\infty(Pr_{O\xi}\Xi;S)$, де $Pr_{O\xi}\Xi$ — проекція множини $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ на вісь $O\xi$;*
5) *рівняння (25) має обмежений розв'язок $u(x,t) \in C^{(1)}(\mathbb{R} \times [0;T])$;*

6) *існує така стала $C > 0$, що повна похідна від функції в лівій частині (25) за змінною u задовольняє для всіх $(x,t,u) \in \mathbb{R} \times [0;T] \times U$ нерівність*

$$\left| \frac{d}{du}\,\Phi\left(\frac{u}{b(x)}, \frac{u}{b(x)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\,d\eta\right)\right| \geq C,$$

де множина $U = \{u \in \mathbb{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]\}$.

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Для доведення теореми проаналізуємо вирази для частинних похідних $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ розв'язку $u(x,t)$, який згідно умов теореми є обмеженим. Із співвідношення (25) знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[u\frac{b'(x)}{b(x)}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \left(a_1(x) + \frac{b'(x)u}{b(x)}\int\limits_0^t\frac{d\eta}{a_2(\eta)}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right]\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\int\limits_0^t\frac{d\eta}{a_2(\eta)}\right]^{-1}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{a_2(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\int\limits_0^t\frac{d\eta}{a_2(\eta)}\right]^{-1}, \tag{27}$$

З умов теореми 4, з (26), (27) випливає, що при кожному $t \in [0;T]$ похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Дійсно, вирази для цих похідних містять похідні від функції $\Phi(\xi,\eta)$, яка згідно припущень належить простору $C^\infty(Pr_{O\xi}\Xi; S)$, де $Pr_{O\xi}\Xi$ — проекція множини $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ на вісь $O\xi$, і є швидко спадною функцією стосовно змінної x, від якої ця функція залежить згідно (24), (25). Множниками біля похідних функції $\Phi(\xi,\eta)$ є обмежені згідно умов 1), 2), 5), 6) функції.

Звідси випливає, що похідні вищих порядків $\partial^{n+m}u/\partial^n x\,\partial t^m$, де n, m — цілі невід'ємні числа, для яких $n+m > 0$, при кожному $t \in [0;T]$ теж належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Це означає, що функції $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$, якщо розв'язок $u(x,t)$ є обмеженим. □

Розглянемо тепер випадок 2), коли $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$.

Система характеристик для рівняння (22) у цьому випадку записується таким чином

$$\frac{dt}{a_1(x)a_2(t)} = \frac{dx}{u} = \frac{b(t)du}{a_1(x)a_2(t)b'(t)},$$

і має два перших інтеграли

$$\varphi(t,u) = \frac{u}{b(t)}, \tag{28}$$

$$\psi(x,t,u) = \frac{u}{b(t)}\int\limits_0^t\frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}d\eta - \int\limits_{x_0}^{x}a_1(\eta)\,d\eta. \tag{29}$$

Загальний розв'язок рівняння (22) зображується у неявному вигляді за допомогою формули

$$\Phi\left(\varphi(t,u), \psi(x,t,u)\right) = 0. \tag{30}$$

Тут функція $\Phi(\varphi,\psi) \in C^\infty(\Xi;\mathbb{R})$ — така, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (30) не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G значень змінних (x,t,u), при яких визначено відображення $(x,t,u) \to (\varphi,\psi)$, де $\varphi = \varphi(t,u)$, $\psi = \psi(x,t,u)$, і припускається, що існує хоча б одна точка $(\varphi_0,\psi_0) \in \Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0,\psi_0) = 0$.

Сформулюємо достатні умови існування обмежених розв'язків рівняння (22), похідні від яких є швидко спадними функціями.

Має місце твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови:*

1) *коефіцієнти рівняння (22) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $a(x,t) = a_1(x)a_2(t)$, $b(x,t) = b(t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$, де $b(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0;T]$;*
2) *функція $a_1(x)$ обмежена для всіх $x \in \mathbb{R}$, існує така стала $\rho > 0$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність*
$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} a_1(\eta)\, d\eta \right| \geq \rho \left| x - x_0 \right|;$$
3) *існують такі сталі $M_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності*
$$\left| \frac{d^n}{dx^n} a_1(x) \right| \leq M_n;$$
4) *функція $\Phi(\xi,\eta)$ в (30) належить простору $C^\infty(Pr_{O\xi}\Xi; S)$, де $Pr_{O\xi}\Xi$ — проекція множини $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ на вісь $O\xi$;*
5) *рівняння (30) має обмежений розв'язок $u(x,t) \in C^{(1)}(\mathbb{R} \times [0;T])$;*
6) *існує така стала $C > 0$, що повна похідна від функції в лівій частині (30) за змінною u задовольняє для всіх $(x,t,u) \in \mathbb{R} \times [0;T] \times U$ нерівність*
$$\left| \frac{d}{du}\, \Phi\left(\frac{u}{b(t)}, \frac{u}{b(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta - \int\limits_{x_0}^{x} a_1(\eta)\, d\eta \right) \right| \geq C,$$
де множина $U = \{u \in \mathbb{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]\}$.

Тоді похідні $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Для доведення теореми розглянемо вирази для частинних похідних $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ розв'язку $u(x,t)$. Продиференціювавши (30), знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1(x) b(t) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\, d\eta \right]^{-1}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[u\frac{b'(t)}{b(t)}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \left(u\frac{b'(t)}{b(t)}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}d\eta - \frac{b(t)}{a_2(t)} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(\xi)}{a_2(\xi)}d\xi \right]^{-1}. \tag{32}$$

Аналогічно, як і вище, аналізуючи ці вирази для похідних $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$, враховуючи припущення теореми 5 стосовно функції $\Phi(\varphi,\psi)$ в формулі (30) та умови теореми стосовно коефіцієнтів рівняння (22), з (31), (32) отримуємо, що при кожному $t \in [0;T]$ похідні $u_x(t,x)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Звідси також випливає, що похідні вищих порядків $\partial^{n+m}u/\partial^n x\,\partial t^m$, де n, m — цілі невід'ємні числа, для яких $n+m>0$, при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Це означає, що функції $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$, якщо розв'язок $u(x,t)$ є обмеженим. □

Задача Коші

Перейдемо до вивчення питання про існування швидко спадних розв'язків задачі Коші для рівняння (22) з початковою умовою

$$u(x,0) = g_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

де функція $g_0(x) \in S(\mathbb{R})$.

Як і раніше, розглянемо випадки 1) і 2). Нехай спочатку $b(x,t) = b(x)$.

Випадок $b(x,t) = b(x)$. Використовуючи метод характеристик, розв'язок задачі Коші (22), (33) можна записати неявним чином за допомогою формули:

$$u = b(x)\, G\left(f\left(\frac{u}{b(x)}\int\limits_{0}^{t} \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\,d\eta \right)\right), \tag{34}$$

де $G(\xi) = g_0(\xi)/b(\xi)$, а функція $f = f(y)$ — обернена до функції

$$y = y(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)}\,d\eta. \tag{35}$$

Формула (34) для розв'язку задачі Коші (22), (33) дає можливість отримати достатні умови належності його похідних простору $C^\infty(0,T;S)$.

Має місце твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються припущення:*

1) *мають місце умови 1) – 3), 5) теореми 4;*
2) *функції $b'(x)$, $g_0(x)$ належать простору $S(\mathbb{R})$;*
3) *функція $f = f(y)$, яка обернена до функції $y = y(x)$, що визначена формулою (35), задовольняє нерівність $|f(y)| \ge C_1|y + C_2|$ для всіх $y \in \mathbb{R}$ і деяких сталих $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$;*

4) *функція $f = f(y)$ нескінченно диференційовна і її похідні при всіх $y \in \mathbb{R}$ задовольняють нерівності*

$$\left| f^{(k)}(y) \right| \leq (M_k|y| + N_k)^{l_k},$$

де M_k, N_k, l_k — деякі додатні сталі, $k \in \mathbf{N}$;

5) *існує така стала $C > 0$, що для всіх $(x, t, u) \in \mathbb{R} \times [0; T] \times U$ має місце нерівність*

$$\left| 1 - \frac{d}{dz} G(f(z)) \int_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right| \geq C,$$

де множина $U = \{u \in \mathbb{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0; T]\}$,

$$z = z(x,t) = \frac{u(x,t)}{b(x)} \int_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} - \int_{x_0}^x \frac{a_1(\eta)}{b(\eta)} d\eta. \tag{36}$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0, T; S)$.

Доведення. Для доведення теореми проаналізуємо вирази для частинних похідних $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ розв'язку $u(x,t)$. Продиференціювавши співвідношення (34) за змінними x, t, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(a_1(x) \frac{d}{dz} (G(f(z))) - b'(x) G(f(z)) + u \frac{b'(x)}{b(x)} \int_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{d}{dz} G(f(z)) \int_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right)^{-1}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{b(x) a_2(t)} \frac{d}{dz} (G(f(z))) \left(1 - \frac{d}{dz} G(f(z)) \int_0^t \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \right)^{-1}, \tag{38}$$

де функцію $z = z(x,t)$ визначено формулою (36).

Оскільки $g_0(x), b'(x)$ належить простору $S(\mathbb{R})$, то враховуючи нерівність $|b(x)| \geq \gamma > 0$ (умова 1 теореми 4) та умови 1, 5 теореми 6, отримуємо, що при кожному $t \in [0; T]$ похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору швидко спадних за змінною x функцій.

Звідси, з урахуванням умови 2) теореми 4) та умови 4 теореми 6 також випливає, що похідні вищих порядків $\partial^{n+m} u / \partial^n x \, \partial t^m$, де n, m — цілі невід'ємні числа, для яких $n + m > 0$, при кожному $t \in [0; T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Це означає, що функції $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0, T; S)$, якщо розв'язок $u(x,t)$ є обмеженим. $\square$

Випадок $b(x,t) = b(t)$. Перейдемо тепер до розгляду випадку 2), коли $b(x,t) = b(t)$, і проаналізуємо розв'язок задачі Коші (22), (33). Відповідно до методу характеристик розв'язок цієї задачі Коші можна записати неявним чином у вигляді співвідношення:

$$u = G\left(f\left(\frac{u}{b(t)}\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta - \int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)\,d\eta\right), t\right), \tag{39}$$

де $G(\xi,t) = g_0(\xi)/b(t)$.

Тут, як і раніше, функція $f = f(y)$ — є оберненою до функції

$$y = y(x) = -\int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)d\eta. \tag{40}$$

Використовуючи формулу (39), можна отримати умови, які є достатніми для існування обмеженого розв'язку $u(x,t)$, похідні якого є швидко спадними функціями.

Має місце твердження.

Теорема 7. *Нехай виконуються такі припущення:*

1 *мають місце умови 1) – 4) теореми 5;*
2 *функція $f = f(y)$, яка є оберненою до функції $y = y(x)$, що визначена формулою (40), задовольняє нерівність $|f(y)| \ge C_1|y+C_2|$ для всіх $y \in \mathbb{R}$ і деяких сталих $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$;*
3 *функція $f = f(y)$, є нескінченно диференційовною і її похідні при всіх $y \in \mathbb{R}$ задовольняють нерівності*

$$\left|f^{(k)}(y)\right| \le (M_k|y| + N_k)^{l_k},$$

де M_k, N_k, l_k — деякі дійсні додатні сталі, $k \in \mathbf{N}$;
4 *існує така стала $C > 0$, що для всіх $(x,t,u) \in \mathbb{R}\times[0;T]\times U$ має місце нерівність*

$$\left|1 - \frac{1}{b(t)}\frac{d}{dy}G(f(y))\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta\right| \ge C,$$

де множина $U = \{u \in \mathbb{R} : u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R}\times[0;T]\}$,

$$y = \frac{u}{b(t)}\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}d\eta - \int\limits_{x_0}^x a_1(\eta)d\eta. \tag{41}$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенням попередніх теорем і використовує формули для частинних похідних $u_x(x,t)$,

$u_t(x,t)$, які можна отримати із співвідношення (39) за допомогою диференціювання за змінними x, t. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -a_1(x)\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\left(1-\frac{1}{b(t)}\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta\right)^{-1}, \qquad (42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{u^2}{a_2(t)} - u\frac{b'(t)}{b^2(t)}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\left(1-\frac{1}{b(t)}\frac{\partial}{\partial y}G(f(y),t)\int\limits_0^t \frac{b(\eta)}{a_2(\eta)}\,d\eta\right)^{-1}, \qquad (43)$$

де $y = y(x)$ визначено формулою (41).

Враховуючи умови теореми 7, зокрема, властивості коефіцієнтів рівняння (22), функцій $g_0(x)$, $f(y)$, обмеженість функції $u(x,t)$, з формул (42), (43) отримуємо, що похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій.

Аналогічно, обчисливши похідні вищого порядку, легко помітити, що функції $\partial^{n+m}u/\partial^n x\,\partial t^m$, де n, m — такі довільні цілі невід'ємні числа, що $n+m > 0$, при кожному $t \in [0;T]$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій. □

Лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами

Існування розв'язку у просторі $C^\infty(0,T;S)$

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \qquad (44)$$

коефіцієнти якого $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ визначенні для $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;T]$, є нескінченно диференційовними і на множині їх визначення задовольняють умову

$$a(x,t)\,b(x,t) \neq 0. \qquad (45)$$

Рівняння вигляду (44) з'являється при побудові регулярної частини асимптотичних солітоноподібних розв'язків для рівнянь інтегровного типу зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням [18, 22, 23], коли, зокрема, виникає питання про існування розв'язків цього рівняння у просторі $C^\infty(0,T;S)$. Дослідимо це питання, скориставшись формулою для загального розв'язку рівняння (44), який побудуємо методом характеристик.

Система характеристик для рівняння (44) записується у вигляді співвідношень

$$\frac{dt}{a(x,t)} = \frac{dx}{b(x,t)} = \frac{du}{f(x,t)-c(x,t)u},$$

звідки отримуємо диференціальні рівняння для перших інтегралів:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(x,t)}{a(x,t)}, \qquad (46)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{c(x,t)}{b(x,t)}u + \frac{f(x,t)}{b(x,t)}. \tag{47}$$

Рівняння (46) є нелінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, яке при досить загальних умовах в околі довільної точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0; T]$ має локальний розв'язок $x = h(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $c_1 \in \mathbb{R}$, що задовольняє початкову умову $h(t_0, c_1) = x_0$. Зауважимо, що у загальному випадку цей розв'язок не є глобальним, тобто може існувати лише на скінченному чи напівскінченному інтервалі.

Розглядаючи рівність $x = h(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, як рівняння стосовно c_1, знаходимо перший інтеграл системи характеристик для (44), який позначимо $\varphi(x,t) = c_1$. Крім того, з рівності $x = h(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, знаходимо співвідношення $t = g(x, c_1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Рівняння (47) є лінійним неоднорідним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, з якого знаходимо ще один перший інтеграл системи характеристик для рівняння (44), який можна записати у явному вигляді $\psi(x,t,u) = c_2$, де

$$\psi(x,t,u) = [u - B(x,t)]\, e^{A(x,t)}, \tag{48}$$

$$A(x,t) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{c(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}{b(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}\, d\tau, \tag{49}$$

$$B(x,t) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{A(\tau,t) - A(x,t)} \frac{f(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}{b(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}\, d\tau. \tag{50}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (44) записується у неявному вигляді за допомогою формули

$$\Phi\left(\varphi(x,t), \psi(x,t,u)\right) = 0. \tag{51}$$

Тут $\Phi(\varphi, \psi) \in C^\infty(\Xi; \mathbb{R})$ — така функція, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (51) не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G значень змінних (x,t,u) відображення $(x,t,u) \to (\varphi, \psi)$, де позначено $\varphi = \varphi(x,t)$, $\psi = \psi(x,t,u)$ і припускається, що існує хоча б одна точка $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0, \psi_0) = 0$.

Має місце твердження.

Теорема 8. *Нехай виконуються припущення:*

1) *функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ в (44) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову (45);*
2) *функції $A(x,t)$, $B(x,t)$, що визначені формулами (49), (50), належать простору $C^\infty(0,T;S)$;*
3) *перший інтеграл $\varphi(x,t) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, системи характеристик для рівняння (44) визначений при всіх $x \in \mathbb{R}$ і задовольняє при всіх $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$ і деяких $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ нерівність*

$$|\varphi(x,t)| \geq \alpha\, |x + \beta|\,;$$

4) *похідні функції* $\varphi = \varphi(x,t)$ *задовольняють при всіх* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ *нерівності*

$$\left| \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial t^m} \varphi(x,t) \right| \leq (M_{nm}|x| + N_{nm})^{l_{nm}},$$

де M_{nm}, N_{nm}, l_{nm} *— деякі додатні сталі,* $n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$*;*

5) *функція* $u = u(x,t)$, *яка неявним чином визначається із співвідношення (51), — неперервно диференційовна і обмежена для всіх* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$*;*

6) *функція* $\Phi(\varphi, \psi)$ *належить простору* $C^\infty(\Xi; \mathbb{R})$*, її похідні є обмеженими, а* $\Phi_\varphi(\varphi, \psi) \in S(\mathbb{R})$ *щодо* $\varphi \in \mathbb{R}$ *для всіх* $\psi \in Pr_{O\psi}\Xi$*, де* $Pr_{O\psi}\Xi$ *— проекція множини* Ξ *на вісь* $O\psi$*;*

7) *існує така стала* $C > 0$*, що для всіх* $(\varphi, \psi) \in \Xi$ *виконується нерівність*

$$\left| \frac{\partial}{\partial \psi} \Phi(\varphi, \psi) \right| \geq C.$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ *належать простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Для доведення теореми 8 розглянемо похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$. Маємо:

$$u_x = -e^{-A} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}(u - B) + \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$u_t = -e^{-A} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}(u - B) + \frac{\partial B}{\partial t},$$

де функції $A = A(x,t)$, $B = B(x,t)$ визначено формулами (49), (50).

З умови 2 теореми 8 випливає, що функція $A = A(x,t)$ є обмеженою на множині $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Тоді, враховуючи умови 3, 4 теореми 8, отримуємо, що функції

$$e^{-A} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad e^{-A} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

належать простору $C^\infty(0,T;S)$, бо є добутками обмеженої і швидко спадних функцій.

Оскільки розв'язок рівняння (51) — функція $u(x,t)$, обмежений, то з умов 2, 5, 6 теореми 8 слідує, що функції $u_x(x,t), u_t(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$. □

Задача Коші у просторі $C^\infty(0,T;S)$

Розглянемо питання про існування у просторі швидко спадних функцій розв'язку задачі Коші для рівняння (44) з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{52}$$

де $u_0 \in S(\mathbb{R})$.

Розв'язок задачі Коші (44), (52) можна побудувати у явному вигляді за допомогою методу характеристик, використовуючи знайдені вище перші інтеграли системи характеристик [13,21]. Маємо:

$$u(x,t) = e^{-A(x,t)} \left[e^{C(x,t)} u_0(h(0, \varphi(x,t)) - D(x,t) \right] + B(x,t), \tag{53}$$

де

$$C(x,t) = \int\limits_{x_0}^{h(0,\varphi(x,t))} \frac{c(\tau, g(\tau, \varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))}{b(\tau, g(\tau, \varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))} d\tau,$$

$$D(x,t) = \int\limits_{x_0}^{h(0,\varphi(x,t))} e^{A(\tau,0)} \frac{f(\tau, g(\tau, \varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))}{b(\tau, g(\tau, \varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))} d\tau,$$

точка $x_0 \in \mathbb{R}$ є довільною.

Аналіз формули (53) дає можливість отримати достатні умови існування розв'язку задачі Коші (44), (52) у просторі швидко спадних функцій.

Має місце твердження.

Теорема 9. *Нехай виконуються умови 1 – 4 теореми 8, функції*

$$u_0(h(0,\varphi(x,t)), \quad C(x,t), \quad D(x,t)$$

належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Тоді розв'язок задачі Коші (44), (52) належить простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Оскільки функція $e^{-A(x,t)}$ обмежена для всіх $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T]$, то із формули (53) слідує $u(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$. □

Зауваження 5. Для лінійного рівняння встановлено умови, за яких розв'язок задачі Коші належить простору $C^\infty(0,T;S)$ на відміну від розглянутих вище випадків задач Коші для квазілінійних рівнянь, коли простору $C^\infty(0,T;S)$ належать похідні розв'язку $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$.

Приклад 1. Розглянемо задачу Коші

$$u_t + u_x = -4\,\mathrm{ch}^{-3}\,(x+t)\,\mathrm{sh}\,(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T], \tag{54}$$

$$u(x,0) = \mathrm{ch}^{-2}\,x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

Система характеристик для рівняння (54) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{du}{dx} = -4\,\mathrm{ch}^{-3}\,(x+t)\,\mathrm{sh}\,(x+t),$$

звідки знаходимо перші інтеграли

$$x - t = c_1, \quad u - \mathrm{ch}^{-2}(x+t) = c_2.$$

Поклавши

$$\varphi(x,t) = x - t, \quad \psi(x,t,u) = u - \mathrm{ch}^{-2}(x+t),$$

знаходимо

$$g(x,c_1) = x - c_1, \quad h(t,c_1) = t + c_1.$$

Легко переконатися, що умови теореми 9 виконуються, а отже, задача Коші (54), (55) має розв'язок у просторі $C^\infty(0,T;S)$, де $T > 0$ — деяке (довільне, але фіксоване) число.

Зауважимо також, шо розв'язок задачі Коші (54), (55) можна записати у явному вигляді:

$$u(x,t) = \mathrm{ch}^{-2}(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

який, очевидно, є глобальним і належить простору $C^\infty(\mathbb{R}; S)$.

Заключні коментарі

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку виникають при аналізі багатьох математичних моделей. Властивості розв'язків таких рівнянь є більш загальними ніж властивості розв'язків звичайних диференціальних рівнянь першого порядку зі змінними коефіцієнтами, а, отже, їх дослідження є складнішою задачею. Складність таких задач зростає, коли розв'язки таких рівнянь потрібно будувати у певних функціональних просторах, зокрема, у просторі $C^\infty(0, T; S)$.

У роботі досліджено питання про існування швидко спадних розв'язків рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами, серед яких рівняння типу рівняння Хопфа, рівняння з квадратичною нелінійністю та неоднорідне лінійне диференціальне рівняння.

Отримано достатні умови існування розв'язків вказаних рівнянь та задач Коші для них у просторі швидко спадних функцій. Якщо у випадку квазілінійних рівнянь отримано достатні умови належності похідних розв'язку $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ простору $C^\infty(0, T; S)$, то у випадку лінійного рівняння встановлено умови, за яких розв'язок відповідних задач належить простору $C^\infty(0, T; S)$.

При доведенні теорем суттєво використовується метод характеристик, за допомогою якого побудовано загальні розв'язки згаданих рівнянь та задач Коші для них. Такі умови записуються через умови на коефіцієнти рівняння і початкові функції та мають конструктивний характер.

Отримані результати продемонстровано на прикладі класичного рівняння Хопфа та задачі Коші для неоднорідного лінійного рівняння першого порядку.

Робота була підтримана Міністерством освіти і науки України: грант Міністерства освіти і науки України на перспективний розвиток наукового напряму «Математичні та природничі науки» у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Література

1. Sedov L. I. Mechanics of continuous media. In 2 volumes. Series in Theoretical and Applied Mechanics. Vol. 4. World Scientific, 1997. 1368 p.
2. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.* 1950. Vol. 3. P. 201–230.
3. Burgers J. M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Afdeeling natuurkunde (Eerste sectie).* 1939. Deel XVII, no. 2. P. 1–53.
4. Burgers J. M. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. *Proceedings of the section of sciences. Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen.* Amsterdam. 1940. Vol. XLII, no. 1. P. 2–12.

5. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук.* 1957. Том 12, № 2. С. 3–73.
6. Hopf E. On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order. *Journ. Math. Mech.* 1969. Vol. 19, № 6. P. 483–487.
7. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. М.: Изд-во Центра прикл. исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, 1999. 96 с.
8. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио. 1977. 368 с.
9. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. *Proc. Roy. Soc.* (London). 1965. Vol. 229 A. P. 281–316.
10. Lighthill M. J. Group velocity. *Journ. of the Institute of Mathematical Applications.* 1965. Vol. 1. P. 1–28.
11. Gazis D. C. Mathematical theory of automobile traffic. *Science.* 1967. Vol. 157. P. 273–281.
12. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. 1965. Vol. 229 A. P. 317–345.
13. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 470 с.
14. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. Москва: Наука, 1988. 368 с.
15. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 624 с.
16. Maslov V. P., Omel'yanov G. A. Geometric asymptotics for PDE. American Math. Society, Providence. 2001. 243 p.
17. Солитоны. Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. Москва: Мир, 1983. 408 с.
18. Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами. *Укр. мат. журн.* 2005. Том 58, № 1. С. 111–124.
19. Самойленко Ю. І. Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок). *Математичний вісник НТШ.* 2010. Том 7. С. 227–242.
20. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений. *Труды семинара им. И.Г. Петровского.* 1988. Том 13. С. 56–105.
21. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. ВПЦ «Київський університет». 2010. 527 с.
22. Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні багатофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами. *Укр. мат. журн.* 2014. Том 66, № 12. С. 1640–1657.
23. Lyashko S. I., Samoilenko V. Hr., Samoilenko Yu. I., Lyashko N. I. Asymptotic analysis of the Korteweg-de Vries equation by the nonlinear WKB technique. *Mathematical Modeling and Computing.* 2021. Vol. 8, № 3. P. 368–378.

Надійшла: 22.10.2021 / Прийнята: 10.05.2023