Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Манікін Борис Ігорович

УДК 519.21

Дисертація

Асимптотичні властивості розв'язків рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами

112 — статистика

Подається на здобуття наукового степеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
Б. І. Манікін

Науковий керівник
Радченко Вадим Миколайович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2025

Анотація

Манікін Б. І. Асимптотичні властивості розв'язків рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «112 — статистика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2025.

В дисертаційному дослідженні переважно розглядаються стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних, керовані загальними стохастичними мірами, тобто випадковими мірами, від яких, взагалі кажучи, вимагається лише σ-адитивність за ймовірністю. Але при доведенні деяких тверджень на стохастичні міри накладаються додаткові обмеження, зокрема обмеженість при кожній фіксованій елементарній події. За довільною загальною стохастичною мірою можливо означити інтеграл, для якого буде виконуватися аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність. При цьому довільна вимірна обмежена функція буде інтегровною за кожною випадковою мірою.

Значна частина роботи присвячена дослідженню властивостей розв'язків деякого стохастичного параболічного рівняння, для якого випадковий вплив задано стохастичною мірою, визначеною на борелевих підмножинах області визначення просторової змінної. Іншими словами, стохастична міра визначена на борелевих підмножинах дійсної осі. Розв'язок рівняння розглядається як розв'язок деякого інтегрального рівняння, причому випадковий вплив задано, використовуючи інтеграл за стохастичною мірою. За припущення, що на кожному півінтервалі значення стохастичних мір збігаються до значення деякої граничної міри за ймовірністю, доведена збіжність розв'язків рівнянь, керованих відповідними мірами.

Також в дослідженні доведено так званий принцип усереднення, тобто збіжність розв'язків параболічних рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами, до розв'язку усередненого рівняння.

Окрему увагу було приділено дослідженню поведінки розв'язків параболічних рівнянь при нескінченному зростанні часової змінної. Показано, що за деяких умов на коефіцієнти оператора, які сформульовані у дисертаційному дослідженні, інтеграл за стохастичною мірою прямує до нуля при прямуванні часової змінної до нескінченності абсолютно та рівномірно за просторовою змінною. Використовуючи дане твердження, доведено, що до нуля прямує і розв'язок рівняння.

Окрім параболічного рівняння та його властивостей, в роботі також було розглянуто інтеграл за стохастичною мірою по d-вимірному брусу $[0, 1]^d$. При цьому предметом дослідження були властивості наведеного інтеграла як функції від параметра. Була побудована модифікація стохастичного інтеграла, яка є обмеженою та допускає представлення через часткові суми ряду Хаара. Даний результат був використаний для доведення теорем про неперервність та диференційовність траєкторій інтеграла за параметром. Отримані результати можуть бути застосовані для доведення неперервності та диференційовності розв'язків стохастичних рівнянь.

У даному дослідженні також вивчено властивості інтеграла за стохастичною мірою по множині $\prod_{s=1}^{d}[0, y_s]$, де $y = (y_1, \ldots, y_d) \in [0, 1]^d$. Вказаний інтеграл був розглянутий як випадкова функція від параметра y. Були сформульовані умови неперервності траєкторій інтеграла за параметром.

Нарешті, була поставлена крайова задача для рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою. Було сформульовано означення розв'язку вказаної задачі, наведено умови його існування та єдиності. Були доведені допоміжні твердження про неперервність траєкторій стохастичного інтеграла за Гельдером по просторовій та часовій змінній. З їх допомогою була доведена і неперервність траєкторій розв'язку рівняння за Гельдером. Дослідження закінчується висновками, в яких коротко перелічено отримані результати та наведено можливі напрямки подальших досліджень.

Дисертаційне дослідження носить теоретичний характер. Отримані результати можна розглядати як внесок до теорії міри та теорії випадкових процесів. Також можна очікувати, що з розвитком теорії інтегралів за загальними стохастичними мірами відповідні результати отримають і практичне застосування.

Ключові слова: стохастична міра, рівняння теплопровідності, параболічне рівняння, випадкові процеси, функції Хаара, неперервність за Гельдером, принцип усереднення, простори Бєсова, асимптотична поведінка.

Summary

Manikin B. I. Asymptotic properties of the solutions of equations which are driven by general stochastic measures. — Manuscript.

Doctor's of Philosophy, specialty "112 — Statistics" — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2025.

Stochastic partial differential equations, which are driven by general stochastic measures, are mainly considered in the thesis. A general stochastic measure is a measure, from which only σ-additivity in probability is required. However, we refer to some additional assumptions on stochastic measures, e. g. their trajectories' boundedness, in the formulation of several statements. We can define the integral with respect to each stochastic measure, and the analog of the Lebesgue dominated convergence theorem holds for this integral. Every bounded measurable function is integrable with respect to any stochastic measure.

A significant part of the paper is devoted to studying the properties of the solutions of stochastic parabolic equations, where the stochastic noise is set with a stochastic measure, which is defined on Borelian subsets of the real line. The solution of the equation is considered as a mild solution. In other words, it is the solution of the integral equation, where stochastic noise is represented as an integral with respect to stochastic measure. It was proved that, assuming that for each interval the corresponding values of the stochastic measures converge to the value of the limit measure, the solutions of the equations also converge to the solution of the equation driven by the limit measure.

The averaging principle, namely the convergence of the solutions of parabolic equations to the solution of the so-called averaging equation, was proved as well.

The particular attention was paid to the studying of the asymptotic behavior of the solution of a parabolic equation as the time variable goes to infinity. It was proved that the integral with respect to a general stochastic measure tends to zero as time variable tends to infinity under some assumptions on the parabolic operator's coefficients. The mentioned statement was used to prove that the solutions of the equations also converge to zero.

Besides the parabolic equation and its properties, the integral with respect to general stochastic measure on d-dimensional bar was considered among other objects. The properties of such integral were the subject of research. The version of the integral, which is bounded and can be represented via Fourier-Haar sums, was constructed. The previously mentioned result was applied to prove theorems about the continuity and differentiability of the integral's paths. These theorems can be used to prove the continuity and differentiability of stochastic equations' solutions.

The stochastic integral on the set of a kind $\prod_{s=1}^{d}[0, y_s]$, where $y = (y_1, \ldots, y_d) \in [0, 1]^d$, also was studied in the thesis. This integral was considered as a function of y. Its parameter continuity was proved under certain conditions.

Finally, the boundary-value problem for a stochastic heat equation was established. The definition of a problem's solution was given, and the conditions of the solution's existence and uniqueness were mentioned. Moreover, the auxiliary statements about Hölder continuity of the stochastic term in time and spatial variables were proved. The Hölder continuity of the solution of the equation was proved as well. The thesis ends with a conclusion, where the results are briefly summarized and directions for further investigations are mentioned.

The thesis is of a theoretical nature. Its results contribute to the theory of the measure and the theory of stochastic processes. As the theory of the integrals with respect to a general stochastic measure develops, its applications will be likely found.

Keywords: stochastic measure, heat equation, parabolic equation, stochastic processes, Haar functions, Hölder regularity, averaging principle, Besov spaces, asymptotic behavior.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результа-

ти дисертації

1. Manikin, B., Radchenko, V. Approximation of the solution to the parabolic equation driven by stochastic measure // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2021. Vol. 102. P. 145-156. https://doi.org/10.1090/tpms/1131
2. Manikin, B. Averaging principle for the one-dimensional parabolic equation driven by stochastic measure // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2022. Vol. 9 no. 2 P. 123–137 https://doi.org/10.15559/21-vmsta195
3. Manikin, B. Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2022. Vol. 9 no. 4 P. 483–498 https://doi.org/10.15559/22-vmsta213
4. Manikin, B., Radchenko, V. Sample path properties of multidimensional integral with respect to stochastic measure // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2024. Vol. 11 no. 4 P. 421–437 https://doi.org/10.15559/24-vmsta256
5. Manikin B. Heat equation with a general stochastic measure in a bounded domain // Modern Stochastics: Theory and Applications. https://doi.org/10.15559/24-VMSTA262

Публікації, які засвідчують апробацію результатів дисертації

1. Манікін Б. І. Асимптотична поведінка розв'язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою при $t \to \infty$// Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2022» м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2022. С. 17–18.
2. Манікін Б. І. Крайова задача для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2023» м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 42–43.
3. Манікін Б. І. Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною стохастичною мірою // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv,

Ukraine. June 1–3, 2023.
www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Manikin.pdf

4. Манікін Б. І. Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною випадковою мірою // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м. Київ, Україна: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 11–12 жовтня 2023. С. 170–171.
5. Манікін Б. І. Крайова задача для параболічного рівняння із загальною випадковою мірою // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2024» м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 11 квітня 2024. С. 35–36.
6. Манікін Б. І. Крайова задача для параболічного рівняння зі загальною стохастичною мірою // XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. м. Київ, Україна 9–11 травня 2024. С. 31–32.
7. Manikin B. Properties of the solutions of stochastic equations driven by general stochastic measure // Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024. Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine. December 16–18, 2024. p.75.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. XX Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2022“, 14 квітня, 2022, Київ, Україна.
2. XXI Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2023“, 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
3. International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine.
4. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня, 2023, Київ, Україна.
5. XXII Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2024“, 11 квітня, 2024, Київ, Україна.

6. XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9–11 травня, 2024, Київ, Україна.
7. Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2024", December 16–18, 2024, Kyiv, Ukraine.

Зміст

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

В роботі використовуються такі позначення:

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел,

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел,

$\mathbf{1}_A$ — індикатор множини A,

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір,

$\mathcal{B}(X)$ — борелева σ-алгебра підмножин X,

$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$ — послідовність ξ_n збігається до ξ за ймовірністю,

$\xi = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \xi_n$ — випадкова величина ξ є границею послідовності ξ_n за ймовірністю,

$L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — простір класів еквівалентності випадкових величин з топологією збіжності за ймовірністю,

λ_d — d-вимірна міра Лебега,

$\omega_{p,\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]}(f, r)$ — інтегральний модуль неперервності функції f в метриці L_p,

$\omega_{\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]}(f, r)$ — модуль неперервності функції f,

$B^{\alpha}_{p,p}([0, 1]^d)$ — простір Бєсова,

$p(t, x; s, y)$ — фундаментальний розв'язок параболічного рівняння,

$G(t, x; s, y)$ — функція Гріна,

$c^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(f)$ — коефіцієнти Фур'є-Хаара,

$S^{(d)}_{2^k}(f, x)$ — часткові суми ряду Хаара,

$d^{(a,b)}_{kn} = a + k2^{-n}(b - a)$,

$\Delta^{(a,b)}_{kn} = (d^{(a,b)}_{(k-1)n}, d^{(a,b)}_{kn}]$.

Через C будемо позначати додатні сталі, точне значення яких не є суттєвим.

ВСТУП

Актуальність теми. Стохастичні диференціальні рівняння — як звичайні, так і в частинних похідних — широко використовуються при побудові математичних моделей, які описують фізичні, біологічні, економічні та інші процеси. При цьому випадковий вплив зазвичай описується стохастичним інтегралом. Широко використовуються інтеграли за ортогональними мірами, зокрема за вінерівським процесом, інтеграли за мартингалами, інтеграли за гаусовими випадковими мірами.

В даному дисертаційному дослідженні розглядаються стохастичні рівняння параболічного типу, для яких випадковий вплив задано інтегралом по загальній стохастичній, або випадковій, мірі. Означення інтеграла за загальною стохастичною мірою від невипадкової функції , його основні властивості, а також приклади стохастичних мір буде наведено далі. При цьому деякі класичні стохастичні інтеграли можна представити як інтеграли за загальними випадковими мірами. Зауважимо, що в загальному випадку від загальних стохастичних мір та інтегралів по ним не вимагається регулярність, наявність моментів тощо. Основним недоліком використання інтеграла за загальною стохастичною мірою є відсутність прийнятного означення інтеграла від випадкової функції. Це означає, що стохастичний доданок у рівняннях не залежить від випадкової функції, що обмежує застосування одержаних результатів.

Увага приділяється таким властивостям розв'язків рівнянь, як існування, єдиність, неперервність за Гельдером, поведінка при нескінченному зростанні часової змінної, збіжність за умови збіжності інтеграторів. Широке коло розглянутих питань дає підстави сподіватися, що результати дослідження є актуальними.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційного дослідження є вивчення властивостей інтегралів за загальними стохастичними мірами та рівнянь з ними, зокрема асимптотичних властивостей. Саме дослідження полягає у виконанні наступних завдань:

- визначення умов збіжності розв'язків параболічних рівнянь за умови збіжності стохастичних мір;
- визначення умов збіжності розв'язків параболічних рівнянь до розв'язку усередненого рівняння;
- визначення умов збіжності розв'язків параболічних рівнянь до нуля при прямуванні часової змінної до нескінченності;
- дослідження властивостей інтеграла за загальною стохастичною мірою, якщо стохастична міра визначена на борелевій σ-алгебрі підмножин $[0, 1]^d$.

Мета і завдання відповідають об'єкту та предмету дослідження. **Об'єктом дослідження** є інтеграли за загальними стохастичними мірами та рівняння з ними. **Предметом дослідження** є неперервність та диференційовність траєкторій інтегралів, різноманітні властивості розв'язків параболічних рівнянь.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати, які викладено в дисертаційному дослідженні, є новими. Покажемо, в чому полягає відмінність отриманих результатів від попередніх робіт на близькі теми.

- В дослідженні доведено, що при збіжності загальних стохастичних мір у певному сенсі збігаються і відповідні розв'язки параболічних рівнянь. До того в роботі [53] аналогічне твердження було доведене для хвильового рівняння, а в роботі [47] — для рівняння теплопровідності. На відміну від перелічених робіт, у яких стохастична міра була визначена на борелевій σ-алгебрі підмножин відрізку $[0, T]$, в даному досліджені стохастична міра визначена на підмножинах дійсної осі.
- Також в дослідженні обґрунтовано принцип усереднення для параболічного рівняння, керованого загальною випадковою мірою. Іншими словами, наведено умови, за яких розв'язки стохастичних параболічних рівнянь збігаються до розв'язку усередненого рівняння. Вказані результати є уза-

гальненнями результатів статей [49] та [50], у яких розглядалися рівняння теплопровідності, керовані загальною стохастичною мірою. При цьому використовуються ті самі методи, що і у вказаних статтях.

- Було вивчено поведінку розв’язку параболічного рівняння при прямуванні часової змінної до нескінченності. На відміну від роботи [45] було розглянуто відносно широкий клас рівнянь, хоча результати, одержані у вказаній статті, не є наслідком теореми 5.1.1 даного дисертаційного дослідження.
- Було розглянуто властивості інтеграла за загальною стохастичною мірою, якщо стохастична міра визначена на борелевій σ-алгебрі підмножин $[0, 1]^d$, сформульовано умови, за яких інтеграл буде неперервним та диференційовним за параметром. Для випадку $d = 1$ подібна задача розглядалася у [40, Section 4], проте без формулювання умов диференційовності.
- Нарешті, в дослідженні доведено існування та єдиність розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою, показано неперервність розв’язку за Гельдером. Подібна задача була розглянута у [17], проте за належності просторової змінної $\mathbb{R}^d$ та відсутності крайової умови. Результати і деякі методи з вказаної статті використовуються у даному дослідженні.

Особистий внесок здобувача. Твердження, наведені у дисертаційному дослідженні, належать здобувачу. За результатами дисертації було зроблено п’ять публікацій у фахових виданнях: [52], [32], [31], [44] та [30]. З них дві роботи — [52] та [44] — опубліковані у співавторстві з науковим керівником, професором Радченком В. М. Професору Радченку В. М. належать постановка задачі, загальне керівництво роботою, приклади використання отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наукових конференціях, перелічених нижче.

1. XX Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2022“, 14 квітня, 2022, Київ, Україна.
2. XXI Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2023“, 14 квітня, 2023, Київ, Україна.

3. International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine.
4. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня, 2023, Київ, Україна.
5. XXII Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2024“, 11 квітня, 2024, Київ, Україна.
6. XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9–11 травня, 2024, Київ, Україна.
7. Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2024", December 16–18, 2024, Kyiv, Ukraine.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 5 статей у періодичних фахових виданнях [52, 32, 31, 44, 30], з них стаття [52] опублікована у виданні, яке індексується в наукометричних базах Scopus та Web of Science і входить до квартиля Q3, а статті [32, 31, 44, 30] опубліковані у виданні, яке індексується в наукометричних базах Scopus та Web of Science і входить до квартиля Q2.
- 7 тез доповідей на конференціях [1, 2, 3, 4, 5, 6, 33].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі списку літератури, вступу, огляду літератури, шести розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел (61 найменування) та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про представлення результатів на наукових конференціях. Повний обсяг дисертації становить 127 сторінок, основний текст складає 99 сторінок.

Зміст роботи. У **першому розділі** зроблено загальний огляд робіт на теми, які є близькими до теми дисертаційного дослідження, розглянуто їх зв'язок з висвітленими у дисертації питаннями.

У **другому розділі** вказано відомі твердження, які активно використовуються у подальших розділах. Зокрема, в *підрозділі 2.1* наведено означення *загальної стохастичної міри.* Дане поняття відіграє ключову роль у подальших міркуваннях. Якщо μ — стохастична міра, визначена на σ-алгебрі підмножин X, то для довільної вимірної обмеженої функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ можна визначити її інтеграл за стохастичною мірою $\int_X f d\mu$. Зауважимо, що для деяких стохастичних мір клас інтегровних функцій є більш широким. У вказаному підрозділі також містяться інші найпростіші властивості стохастичних мір та інтегралів за ними.

Підрозділ 2.2 присвячено методу оцінки інтегралу за стохастичною мірою, який переважно використовується в даній роботі. Показано, що за умови неперервності функції $q(\cdot,\cdot)$ за другим аргументом інтеграл $\eta(z) = \int_A q(z,s)d\mu(s)$, $A \subset [a,b]$, має модифікацію $\tilde{\eta}(z)$, яка може бути оцінена таким чином:

$$|\widetilde{\eta}(z)| \leqslant C_\mu(\omega)\left(|q(z,a)| + \|q(z,\cdot)\|_{B^{\varepsilon}_{22}([a,b])}\right).$$

У *підрозділі 2.3* наведено відомості з теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. При цьому введено оператор

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t},$$

нагадано означення та найпростіші властивості фундаментального розв'язку параболічного рівняння та функції Гріна, а у *підрозділі 2.4* нагадано означення функцій Хаара.

В **третьому розділі** доводиться збіжність за ймовірністю розв'язків інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s) f(s,y,u^{(n)}(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu^{(n)}(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds \end{aligned}$$

до розв'язку рівняння

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s) f(s,y,u(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds. \end{aligned}$$

Тут $p(t,x;s) := p(t,x;s,0)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = 0$, де $\mathcal{L}$ — параболічний оператор, коефіцієнти якого не залежать від просторової змінної,

$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, стохастичні міри визначені на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, функція $u_0 = u_0(x, \omega)$ вимірна, обмежена та неперервна за Гельдером з показником $\beta(u_0) \geqslant 1/2$ за змінною x на дійсній осі, функція $f = f(t, x, z)$ вимірна, обмежена, неперервна і, крім того, задовольняє умову Ліпшиця за змінними x та z, функція $\sigma = \sigma(t, x)$ вимірна, обмежена і, крім того, задовольняє умову Гельдера з показником $\beta(\sigma) > 1/2$ за змінною x. Також накладено умови на послідовність стохастичних мір $\{\mu^{(n)} \colon n \geqslant 1\}$: вважається, що для кожного півінтервалу $(x, y] \subset \mathbb{R}$ має місце збіжність $\mu^{(n)}((x, y]) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu((x, y])$, $n \to \infty$, набір випадкових величин $\{\mu^{(n)}(A),\ A \in \mathcal{B},\ n \geqslant 1\}$ обмежений за ймовірністю і для $\alpha > 0$ має місце збіжність $\sup_{A \subset \{|y| > c\}, n \geqslant 1} \mathrm{P}[|\mu^{(n)}(A)| > \alpha] \to 0$, $c \to \infty$.

Якщо наведені вище припущення справджуються, то для деяких модифікацій випадкових функцій u та $u^{(n)}$ має місце збіжність

$$\sup_{t \in [0,T], x \in \mathbb{R}} |u^{(n)}(t, x) - u(t, x)| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,\ n \to \infty.$$

Вказане твердження і представляє собою основний результат розділу.

У **четвертому розділі** доводиться збіжність розв'язків інтегральних рівнянь

$$u_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x - y; 0) u_0(y)\, dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t, x - y; s) f(s/\varepsilon, y, u_\varepsilon(s, y))\, dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t, x - y; s) \sigma(s/\varepsilon, y)\, ds,$$

де $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, до розв'язку усередненого рівняння

$$\bar{u}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x - y; 0) u_0(y)\, dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t, x - y; s) \bar{f}(y, \bar{u}(s, y))\, dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t, x - y; s) \bar{\sigma}(y)\, ds$$

при прямуванні ε до нуля. Тут функції $\bar{f}$ та $\bar{\sigma}$ визначаються зі співвідношень

$$\bar{f}(x, z) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s, x, z)\, ds, \quad \bar{\sigma}(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(s, x)\, ds.$$

Припускаємо, що функція $u_0 = u_0(x, \omega)$ вимірна, обмежена та неперервна за Гельдером з показником $\beta(u_0) \geqslant 1/2$ за змінною x на дійсній осі, функція $f = f(t, x, z)$

вимірна, обмежена, неперервна і, крім того, задовольняє умові Ліпшиця за змінними x та z, функція $\sigma = \sigma(t,x)$ вимірна, обмежена і, крім того, задовольняє умові Гельдера з показником $\beta(\sigma) > 1/2$ за змінною x. Також будемо вимагати обмеженість функцій $G_f(r,x,z) = \int_0^r (f(s,x,z) - \bar{f}(x,z))ds$ та $G_\sigma(r,x) = \int_0^r (\sigma(s,x) - \bar{\sigma}(x))\, ds$, а також інтегровність функції $|y|^{\tau(\mu)}$ за мірою μ при деякому $\tau(\mu) > 1/2$. Виявляється, що при цьому для кожного γ_1, яке належить інтервалу $(0, \min\{1/5, 1/2(1-1/(2\beta(\sigma)))\})$, має місце співвідношення

$$\sup_{\varepsilon>0, t\in[0,T], x\in\mathbb{R}} \varepsilon^{-\gamma_1} |u_\varepsilon(t,x) - \bar{u}(t,x)| < +\infty \quad \text{м.н.}$$

Вказаний результат є основним у даному розділі.

В **п'ятому розділі** розглядається розв'язок інтегрального рівняння

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s) f(s,y,u(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds$$

при $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$ та його поведінка при $t \to \infty$. Вважається, що $p(t,x;s)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = 0$, де $\mathcal{L}$ — параболічний оператор, коефіцієнти якого не залежать від просторової змінної, причому коефіцієнт $c(t)$ не перевищує деяку від'ємну сталу. Функція $f = f(t,x,z)$ вимірна, обмежена, неперервна і, крім того, задовольняє умові Ліпшиця за змінними x та z, а функція $u_0 = u_0(x,\omega)$ вимірна, обмежена та неперервна за Гельдером з показником $\beta(u_0) \geqslant 1/2$ за змінною x на дійсній осі. Функція $\sigma = \sigma(t,x)$ вимірна, обмежена сталою $C_\sigma(t)$, яка прямує до нуля при нескінченному зростанні t і, крім того, задовольняє умову Гельдера за змінною x з показником $\beta(\sigma) > 1/2$ та сталою $L_\sigma(t)$, яка прямує до нуля при нескінченному зростанні t. Тоді для деякої модифікації розв'язку $u(t,x)$ має місце збіжність

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| \to 0, \quad t \to \infty$$

для кожного $\omega \in \Omega$. Для доведення вказаного результату, який є основним у розділі, використовуються лема про збіжність інтеграла

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)ds$$

та лема, яка описує поведінку $p(t, x; s)$ при великих t.

В **шостому розділі** досліджуються деякі інтеграли за загальною стохастичною мірою по багатовимірним областям як функції від параметра. Зокрема, у *підрозділі 6.1* розглядається стохастичний інтеграл вигляду

$$\eta(z) = \int_{[0,1]^d} q(z, x)\, d\mu(x),\ z \in Z,$$

де $(z, x) \in Z \times [0, 1]^d$, досліджуються властивості його траєкторій. Має місце така лема: припустимо, що функція $q(z, x)$ є l разів диференційовною за змінною x, l-ті похідні є неперервними за Гельдером з деяким показником α, всі похідні та сталі Гельдера для l-тих похідних рівномірно обмежені деякою сталою C_q та виконується нерівність $l+\alpha > d/2$. Тоді існує модифікація $\tilde{\eta}(z)$ випадкової функції $\eta(z)$, яку можна представити як суму абсолютно та рівномірно збіжного ряду

$$\tilde{\eta}(z) = \int_{[0,1]^d} S_1^{(d)}(q, x)\, d\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[0,1]^d} (S_{2^k}^{(d)}(q, x) - S_{2^{k-1}}^{(d)}(q, x))\, d\mu(x),$$

що задовольняє нерівності $|\tilde{\eta}(z)| \leqslant C_q C_\mu^{(d)}(\omega)$. Вказане твердження використовується для доведення теорем. Зокрема, якщо додатково вимагати неперервність функції $q(z, x)$ за змінною z при довільному фіксованому x, то $\tilde{\eta}(z)$ також буде неперервною за z. Якщо ж вважати, що $Z = [a, b]$ і для похідних функції q по z виконуються умови леми, то $\tilde{\eta}(z)$ має обмежену похідну по змінній z, причому

$$\frac{d\tilde{\eta}(z)}{dz} = \int_{[0,1]^d} \frac{\partial q(z, x)}{\partial z}\, d\mu(x).$$

У *підрозділі 6.2* розглядається стохастичний інтеграл

$$\xi(y) = \int_{\prod_{s=1}^d [0, y_s]} q(x)\, d\mu(x),$$

де дійснозначна функція $q(x)$ неперервна на $[0, 1]^d$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in [0, 1]^d$. Будемо накладати такі додаткові умови на стохастичну міру μ: вважатимемо, що випадкова функція $\mu(x) = \mu(\prod_{i=1}^d [0, x_i])$ має неперервні траєкторії, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{d-2} \omega_{[0,1]^d}(\mu, 2^{-k})$ збігається м. н. Тоді, якщо додатково вважати, що $q(x)$ неперервно диференційовна d разів на $[0, 1]^d$, то існує модифікація $\tilde{\xi}$ функції ξ, яка буде неперервною на $[0, 1]^d$.

Сьомий розділ присвячено дослідженню розв'язку крайової задачі

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2\Delta_x u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))dx + \sigma(t,x)d\mu(t)\,, & (t,x) \in D_T, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in S_T, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in B\,. \end{cases}$$

Тут B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $D_T = (0,T] \times B$, $S_T = (0,T] \times \partial B$, Δ_x — оператор Лапласа

$$\Delta_x g(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2}.$$

Будемо шукати розв'язок крайової задачі як розв'язок інтегрального рівняння

$$u(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy \\ + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy. \quad (1)$$

Тут $G(t,x;s,y)$ — функція Гріна крайової задачі

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, & (t,x) \in D_T, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in S_T, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in B, \end{cases}$$

де $\mathcal{L}u = a^2\Delta_x u - \frac{\partial u}{\partial t}$. Будемо також вважати, що $u_0 = u_0(x,\omega)$ є обмеженою і неперервною при довільному фіксованому $\omega \in \Omega$, функція $f = f(t,x,z)$ вимірна, обмежена, неперервна і, крім того, задовольняє умові Ліпшиця за змінною z та умові Гельдера за змінною x, функція $\sigma = \sigma(t,x)$ є неперервною за Гельдером за обома змінними з показником Гельдера, більшим за 1/2. Якщо, крім того, вимагати достатню гладкість межі області B, розв'язок рівняння (1) існує і є єдиним. За умови того, що стохастична міра μ має обмежені траєкторії, розв'язок буде неперервним за Гельдером на $[\delta,T] \times \bar{B}\prime$ за змінною x, а якщо додатково припустити неперервність траєкторій μ за Гельдером, то розв'язок буде неперервним за Гельдером на $[\delta,T] \times \bar{B}\prime$ і по змінній t. При цьому $\delta > 0$, $B' \subset B$, $d(\partial B, \bar{B}') > 0$.

У **висновках** повторено основні результати дисертаційного дослідження.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Стохастичні міри та інтеграли за ними. Стохастичні міри, або функції множин зі значеннями в $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір, привертають увагу науковців з середини XX сторіччя. Вони використовувалися переважно для побудови інтегралів. Скінченно адитивні м. н. функції множин, значеннями яких є випадкові величини, були введені у [7], там же були розглянуті інтеграли за вказаними мірами. В статтях [36, 37, 38] вказані міри та інтеграли за ними були досліджені за додаткової умови незалежності їх значень для неперетинних множин. Означення та властивості α-стійких мір та інтегралів за ними викладено в монографії [55], а властивості ортогональних мір і відповідних інтегралів — у [21, 25].

В даному дисертаційному дослідженні розглядаються загальні стохастичні міри, тобто стохастичні міри, від яких вимагається σ-адитивність за ймовірністю. Конструкція інтегралів за вказаними мірами наведена у [27]. Для побудови інтеграла використовується твердження про обмеженість за ймовірністю множини значень стохастичної міри, сформульоване і доведене у [29]. Приклади стохастичних мір, що задовольняють вказане означення, наведені у [27, 43]. При цьому деякі відомі стохастичні інтеграли від невипадкових функцій виявляються частковими випадками інтегралів по загальним стохастичним мірам.

Диференціальні рівняння, керовані загальними стохастичними мірами. Стохастичні диференціальні рівняння, зокрема рівняння в частинних похідних, є поширеним засобом дослідження систем, які підпадають під випадкові впливи. При цьому випадковий вплив може задаватися інтегралом за вінерівським процесом [61], процесом Леві [35], дробовим броунівськиим рухом [34], процесом Ерміта [57] тощо.

У статті [39] В. М. Радченком було розглянуто рівняння теплопровідності, кероване загальною стохастичною мірою:

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dt + f(t,x,u(t,x))\, dt + \sigma(t,x)\, d\mu(x), & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

При цьому вважається, що стохастична міра визначена на борелевих підмножинах дійсної осі та не залежить від часової змінної t та розв'язку рівняння u. В статті було доведено існування та єдиність розв'язку, неперервність його траєкторій за Гельдером. Згодом аналогічні твердження були доведені для хвильового рівняння [9, 12, 15, 16], кабельного рівняння [46], рівняння Бюргерса [51]. Рівняння теплопровідності, кероване загальною стохастичною мірою, при мірі, визначеній на підмножинах $[0,T]$, було розглянуто у [41, 17].

З іншого боку, у статті [11] рівняння (1.1) було розглянуто у більш загальній формі:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\, dt + \sigma(t,x)\, d\mu(x) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.2}$$

де через $\mathcal{L}$ позначається параболічний оператор

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}.$$

Наведене рівняння стало об'єктом подальшого дослідження, яке продовжується в тому числі і даною роботою. При цьому зауважимо, що в статті [59] розглядається рівняння, кероване так званою σ-скінченною стохастичною мірою, яке є узагальненням (1.2).

Для рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами, також досліджувалась збіжність розв'язків рівнянь при збіжності відповідних їм стохастичних мір. Зокрема, для рівняння теплопровідності умови збіжності були отримані у [47]. Аналогічний результат для хвильового рівняння викладено у [53]. Отримані результати дозволяють, зокрема, отримувати наближення розв'язків з використанням рядів Фур'є.

Низка робіт присвячена дослідженню стохастичного принципу усереднення для рівнянь, аналогічних наведеним вище, тобто доведенню збіжності розв'язків рівнянь до розв'язку усередненого рівняння у певному сенсі. Зокрема, в статті [49] обґрунтовано принцип усереднення для рівняння (1.2) при $f \equiv 0$, в той час як у роботі [50] аналогічне твердження було доведене без додаткової умови на функцію f. Для кабельного рівняння принцип усереднення був доведений у [8], а для рівняння теплопровідності з дробовою похідною — у [56]. Стохастичне рівняння, для якого випадковий вплив задано симетричним інтегралом за загальною стохастичною мірою, було досліджено з точки зору принципу усереднення у [48].

Відносно недослідженими залишаються властивості розв'язків рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами, при великих значеннях часової та просторової змінної. У статтях [14, 10, 13] було доведено прямування розв'язків рівнянь (1.1) та (1.2) до нуля при прямуванні абсолютної величини просторової змінної до нескінченності. З іншого боку, в роботі [45] була доведена збіжність розв'язків рівняння (1.1) до нуля при прямуванні часової змінної до нескінченності за додаткової умови $f \equiv 0$.

Розділ 2

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

2.1. Стохастичні міри

У даному дисертаційному дослідженні будемо розуміти поняття загальної стохастичної міри і інтегралу за стохастичною мірою в тому ж сенсі, як і у роботах [27] та [43].

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — повний ймовірнісний простір. Для довільної випадкової величини $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ введемо позначення

$$\|\xi\| = \sup\{\delta\colon P(\xi > \delta) > \delta\}.$$

Тепер позначимо через $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простір класів еквівалентності випадкових величин з метрикою $\rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$. При цьому збіжність в L_0 еквівалентна збіжності за ймовірністю.

Нехай тепер X — довільна множина, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин X.

Означення 2.1.1. ([43, Definition 1.1]) σ-адитивне за ймовірністю відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to X$ називається загальною стохастичною мірою.

На практиці інколи зручніше перевіряти таку сукупність умов:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \text{ якщо } A \cap B = \varnothing, \tag{2.1}$$

$$\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0, \text{ якщо } A_n \downarrow \varnothing. \tag{2.2}$$

Надалі будемо опускати слово „загальний“ там, де така дія не призводить до непорозумінь.

Наведемо конструкцію інтеграла від дійснозначної $\mathcal{B}$-вимірної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ за стохастичною мірою μ. Спочатку припустимо, що функція f проста:

$$f = \sum_{i=1}^{M} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \qquad A_i \in \mathcal{B}.$$

В такому випадку покладемо

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{M} a_i \mu(A_i).$$

Для того, щоб означити інтеграл у загальному випадку, для простої вимірної функції f введемо функціонал

$$\rho_\mu(f) = \sup_{|\varphi|\leqslant 1,\, \varphi - \text{проста}} \left\| \int_X f\varphi\, d\mu \right\|.$$

Означення 2.1.2. ([27, Definition 7.1.1]) Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ інтегровна за загальною стохастичною мірою μ, якщо існує така послідовність простих функцій $\{f_n\colon n \geqslant 1\}$, що

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x \in X$$

і

$$\rho_\mu(f_n - f_m) \to 0,\ n,\, m \to \infty.$$

Позначається $f \in L(\mu)$. При цьому

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Наведемо деякі властивості означеного таким чином інтеграла.

Твердження 2.1.1. *Нехай f, f_n, $g\colon X \to \mathbb{R}$ — деякі $\mathcal{B}$-вимірні функції, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $C > 0$, μ — довільна стохастична міра.*

1. *([27, Proposition 7.1.1(i)]) Якщо f, $g \in L(\mu)$, то $\alpha f + \beta g \in L(\mu)$, причому*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

2. *([27, Proposition 7.1.1(ii)]) Якщо $g \in L(\mu)$ і $|f(x)| \leqslant |g(x)|\ \forall x \in X$, то $f \in L(\mu)$.*
3. *([43, Lemma 1.6]) Якщо $|f(x)| \leqslant C\ \forall x \in X$, то $f \in L(\mu)$.*
4. *([27, Proposition 7.1.1(iii)]) Якщо f_n, $g \in L(\mu)$, $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|\ \forall x \in X$, $n \geqslant 1$ та $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x \in X$, то $f \in L(\mu)$, причому*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f d\mu.$$

5. *([43, Lemma 1.7]) Якщо* $|f(x)| \leqslant C \ \forall x \in X$, *то*

$$\left\| \int_X f d\mu \right\| \leqslant 16 \sup_{A \in \mathcal{B}} \| C\mu(A) \|.$$

Також означимо

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Наведемо приклади стохастичних мір.

Приклад 2.1.1. Нехай μ — ортогональна міра зі структурною функцією m, $|m(A)| < \infty \ \forall A \in \mathcal{B}$. Така функція множин розглядається, зокрема, у [21, Section 5.3]. За означенням (див. [21, p. 193, b.]), μ — загальна стохастична міра. Зауважимо, що ортогональною мірою буде, зокрема, функція множин $\mu(A) = \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}_A(t) \, dW(t)$, де інтеграл розуміється у сенсі Іто (означення і властивості інтегрла для багатовимірного випадку наведені, зокрема, у [26]). При цьому структурна функція має вигляд $\mu(A) = d!\lambda_d(A)$, де λ_d є d-вимірною мірою Лебега.

Приклад 2.1.2. Нехай μ — α-стійка випадкова міра, визначена на σ-алгебрі множин (див. [55, Definition 3.3.1]) зі скінченною мірою $m(A)$. Тоді μ буде σ-адитивною м. н., а, отже, і стохастичною мірою за означенням.

Приклад 2.1.3. Нехай функція множин $\mu \colon \mathcal{B}([0,1]^d) \to L_0$ задається співвідношенням

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(t) \, dZ_H^q(t),$$

де Z_H^q — процес Ерміта (див. [18]), $H = (H_1, \ldots, H_d)$, $1/2 < H_i < 1$. Тоді $\mu(A)$ є коректно визначеною і задовольняє означенню стохастичної міри. Дійсно, умова (2.1) випливає з лінійності інтеграла, а умова (2.2) — з представлення μ через інтеграл за вінерівським процесом (формула (4.12) у [57]) та аналогу теореми Лебега про мажоровану збіжність (п.4 твердження 2.1.1). Також зауважимо, що дробовий броунівський рух є частковим випадком процесу Ерміта при $q = 1$.

Надалі будемо вважати, що $X \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}$ — борелева σ-алгебра підмножин X.

2.2. Оцінювання інтегралів за стохастичною мірою та простори Бєсова

Нехай $f \in L_p(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i])$. Нагадаємо означення модуля неперервності:

$$\omega_{p,\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]}(f,r) = \sup_{|h|\leqslant r} \left(\int_{I_h} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

$$\omega_{\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]}(f,r) = \sup_{x \in I_h, |h|\leqslant r} |f(x+h) - f(x)|,$$

$$I_h = \{x \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \colon x + h \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]\},$$

де $h \in \mathbb{R}^d$. Тепер введемо позначення

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,p}([0,1]^d)} = \|f\|_{L_p([0,1]^d)} + \left(\int_0^1 (\omega_{p,[0,1]^d}(f,r))^p r^{-\alpha p - 1} \, dr \right)^{1/p}.$$

Тоді клас функцій

$$B^\alpha_{p,p}([0,1]^d) = \{f \in L_p([0,1]^d) \colon \|f\|_{B^\alpha_{p,p}([0,1]^d)} < +\infty\}$$

з нормою $\|\cdot\|_{B^\alpha_{p,p}([0,1]^d)}$ буде лінійним нормованим простором, який і будемо називати простором Бєсова.

Вищенаведене означення нескладно поширити на довільний брус. Скажімо, якщо $f \in L_p([a,b])$, то

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,p}([a,b])} = \|f\|_{L_p([a,b])} + \left(\int_0^{b-a} (\omega_{p,[a,b]}(f,r))^p r^{-\alpha p - 1} \, dr \right)^{1/p},$$

а

$$B^\alpha_{p,p}([a,b]) = \{f \in L_p([a,b]) \colon \|f\|_{B^\alpha_{p,p}([a,b])} < +\infty\}.$$

Нехай тепер $X = [a,b]$, $\mathcal{B}$ — борелева σ-алгебра підмножин X. Розглянемо інтеграл вигляду

$$\eta(z) = \int_A q(z,s) \, d\mu(s), \tag{2.3}$$

де змінна z належить деякій параметричній множині Z, а $A \in \mathcal{B}$. Також введемо позначення

$$d_{kn}^{(a,b)} = a + k2^{-n}(b-a), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^n, \quad \Delta_{kn}^{(a,b)} = (d_{(k-1)n}^{(a,b)}, d_{kn}^{(a,b)}], \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^n\,,$$

$$q_n(z,s) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} q\big(z, d_{(k-1)n}^{(a,b)}\big)\mathbf{1}_{\Delta_{kn}^{(a,b)}}(s).$$

Виявляється, що справедлива така лема:

Лема 2.2.1. ([42, Lemma 3]) Нехай всі траекторії $q(z,\cdot)$ функції $q(z,s)\colon Z \times [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервні на $[a,b]$. Тоді випадковий процес $\eta(z)$, заданий співвідношенням (2.3), має модифікацію

$$\begin{aligned}\widetilde{\eta}(z) = &\int_A q_0(z,s)\,d\mu(s)\\ &+ \sum_{n\geqslant 1}\Big(\int_A q_n(z,s)\,d\mu(s) - \int_A q_{n-1}(z,s)\,d\mu(s)\Big)\end{aligned} \tag{2.4}$$

таку, що для всіх $\beta > 0$, $\omega \in \Omega$, $z \in Z$

$$\begin{aligned}|\widetilde{\eta}(z)| &\leqslant |q(z,a)\mu(A)| + \sum_{n\geqslant 1}\sum_{1\leqslant k \leqslant 2^n} |q(z, d_{(k-1)n}^{(a,b)}) - q(z, d_{(k'-1)(n-1)}^{(a,b)})||\mu(\Delta_{kn}^{(a,b)} \cap A)|\\ &\leqslant |q(z,a)\mu(A)| + \Big\{\sum_{n\geqslant 1} 2^{n\beta}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |q(z, d_{kn}^{(a,b)}) - q(z, d_{(k-1)n}^{(a,b)})|^2\Big\}^{1/2}\\ &\quad\times \Big\{\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n\beta}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(a,b)} \cap A)|^2\Big\}^{1/2},\end{aligned} \tag{2.5}$$

де $\Delta_{kn}^{(a,b)} \subset \Delta_{k'(n-1)}^{(a,b)}$.

Скориставшись [24, Theorem 1.1], можемо переписати (2.5) у вигляді

$$|\widetilde{\eta}(z)| \leqslant |q(z,a)\mu(A)| + C\|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\varepsilon}([a,b])}\Big\{\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n\beta}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(a,b)} \cap A)|^2\Big\}^{1/2}, \tag{2.6}$$

де $\varepsilon = (\beta+1)/2$. Також використаємо таке твердження:

Лема 2.2.2. ([39, Lemma 3.1]) Нехай $\phi_l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l \geqslant 1$ — вимірні функції, причому $\tilde{\phi}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} |\phi_l(x)|$ інтегровна за μ по $\mathbb{R}$. Тоді

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}} \phi_l\,d\mu\Big)^2 < \infty \quad \text{м. н.}$$

Як наслідок отримуємо, що

$$\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n\beta} \sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(a,b)} \cap A)|^2 < +\infty \quad \text{м. н.} \tag{2.7}$$

Звідси випливає, що для оцінки зверху $|\widetilde{\eta}(z)|$ нам досить оцінити $\|q(z,\cdot)\|_{B^{\varepsilon}_{22}([a,b])}$ та $|q(z,a)|$.

2.3. Параболічні рівняння

Нагадаємо деякі відомості з теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. Спочатку розглянемо таку задачу Коші для параболічного рівняння:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -f(t,x), & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тут $\mathcal{L}$ — параболічний оператор:

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}. \tag{2.9}$$

Нехай виконуються такі умови:

Умова 2.3.1. Функції a, b, c неперервні та обмежені на $[0,T] \times \mathbb{R}$. Крім того, вони задовольняють нерівностям

$$|a(t,x_1) - a(t,x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^{\lambda},\ t \in [0,T],\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},$$
$$|b(t,x_1) - b(t,x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^{\lambda},\ t \in [0,T],\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},$$
$$|c(t,x_1) - c(t,x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^{\lambda},\ t \in [0,T],\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},$$
$$|a(t_1,x) - a(t_2,x)| \leqslant M|t_1 - t_2|^{\lambda},\ t_1,\ t_2 \in [0,T],\ x \in \mathbb{R},$$
$$a(t,x) \geqslant \delta,\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}$$

для деяких λ, δ, $M > 0$.

Умова 2.3.2. Функція u_0 неперервна та обмежена на $\mathbb{R}$.

Умова 2.3.3. Функція f неперервна та обмежена на $[0,T] \times \mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^{\lambda},\ t \in [0,T],\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}.$$

Якщо виконуються умови 2.3.1–2.3.3, то згідно з [23, Section 4, Theorem 2] існує єдиний обмежений розв'язок (2.8), який допускає представлення у вигляді

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y)f(s,y)dy.$$

Через $p(t,x;s,y)$ будемо позначати фундаметальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = 0$ (див. означення в [23, p. 483]). [23, Section 4, Theorem 1] стверджує, що за умови 2.3.1 при x, $y \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,t)$ справедливі такі оцінки:

$$|p(t,x;s,y)| \leqslant C(t-s)^{-1/2} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{(t-s)}}, \tag{2.10}$$

$$\left|\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial x}\right| \leqslant C(t-s)^{-1} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{(t-s)}}, \tag{2.11}$$

$$\left|\frac{\partial^2 p(t,x;s,y)}{\partial x^2}\right| \leqslant C(t-s)^{-3/2} e^{-\frac{\varkappa|x-y|^2}{t-s}}, \tag{2.12}$$

$$\left|\frac{\partial p(t,x;s,y)}{\partial t}\right| \leqslant C(t-s)^{-3/2} e^{-\frac{\varkappa|x-y|^2}{t-s}}, \tag{2.13}$$

де $\varkappa > 0$.

Тепер розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -f(t,x), & (t,x) \in D_T, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in S_T, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in B. \end{cases} \tag{2.14}$$

Тут B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $D_T = (0,T] \times B$, $S_T = (0,T] \times \partial B$, оператор $\mathcal{L}$ задано співвідношенням

$$\mathcal{L}u(t,x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + c(t,x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}.$$

Наведемо означення, сформульоване у [23, p. 437].

Означення 2.3.1. Поверхня $\bar{S}$ належить класу $A^{m+\beta}$ (A^m) в $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^{d+1}$), якщо для довільної точки P поверхні $\bar{S}$ існує сфера з центром в точці P та функція χ, що належить класу $C^{m+\beta}$ (C^m) і для деякого $i \leqslant d$ задовольняє рівність

$$x_i = \chi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \qquad (x_i = \chi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d, t))$$

всередині сфери.

Будемо накладати такі умови:

Умова 2.3.4. Функції a_{ij}, b_i, c неперервні та обмежені на $[0,T]\times\bar{B}$. Крім того, вони задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned}|a_{ij}(t,x_1)-a_{ij}(t,x_2)|&\leqslant M|x_1-x_2|^{\lambda},\ t\in[0,T],\ x_1,\ x_2\in\bar{B},\\ |b_i(t,x_1)-b_i(t,x_2)|&\leqslant M|x_1-x_2|^{\lambda},\ t\in[0,T],\ x_1,\ x_2\in\bar{B},\\ |c(t,x_1)-c(t,x_2)|&\leqslant M|x_1-x_2|^{\lambda},\ t\in[0,T],\ x_1,\ x_2\in\bar{B},\\ |a_{ij}(t_1,x)-a_{ij}(t_2,x)|&\leqslant M|t_1-t_2|^{\lambda},\ t_1,\ t_2\in[0,T],\ x\in\bar{B},\\ \sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(t,x)\delta_i\delta_j&\geqslant C|\delta|^2,\ t\in[0,T],\ x\in\bar{B}\end{aligned}$$

для деяких λ, $M>0$ і всіх $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_d)\in\mathbb{R}^d$.

Умова 2.3.5. Функція u_0 неперервна та обмежена на $\bar{B}$.

Умова 2.3.6. Функція f неперервна та обмежена на $[0,T]\times\bar{B}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\lambda},\ t\in[0,T],\ x_1,\ x_2\in\bar{B}.$$

Умова 2.3.7. Область B належить класу $A^{1+\lambda}$, $\lambda>0$.

Якщо виконуються умови 2.3.4–2.3.7, то згідно з [23, Section 4, Theorem 3] існує єдиний розв'язок (2.14), який допускає представлення у вигляді

$$u(t,x)=\int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy+\int_0^t ds\int_B G(t,x;s,y)f(s,y)dy.$$

Тут $G(t,x;s,y)$ — функція Гріна крайової задачі (2.14). Згідно з [28, Chapter IV, §16, Theorem 16.3], при x, $y\in\bar{B}$, $t\in[0,T]$, $s\in[0,t)$ справедливі такі оцінки:

$$|G(t,x;s,y)|\leqslant M(t-s)^{-d/2}e^{-\frac{\varkappa|x-y|^2}{t-s}},\tag{2.15}$$

$$\left|\frac{\partial G(t,x;s,y)}{\partial x_i}\right|\leqslant M(t-s)^{-(d+1)/2}e^{-\frac{\varkappa|x-y|^2}{t-s}},\tag{2.16}$$

$$\left|\frac{\partial G(t,x;s,y)}{\partial t}\right|\leqslant M(t-s)^{-d/2-1}e^{-\frac{\varkappa|x-y|^2}{t-s}}.\tag{2.17}$$

Ми будемо використовувати наступні позначення, які були використані, зокрема, у [20, Chapter 3, Section 2].

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \big(|x_1-x_2|^2+|t_1-t_2|\big)^{1/2}, \quad P=(t_1,x_1),\ Q=(t_2,x_2);\\ \|u\|_{\alpha}^{D} &= \sup_{D}|u| + \sup_{P,Q\in D}\frac{|u(P)-u(Q)|}{d(P,Q)^{\alpha}};\\ \|u\|_{1+\alpha}^{D} &= \|u\|_{\alpha}^{D} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\alpha}^{D}. \end{aligned}$$

Тепер припустимо, що $R\subset S_T\cup(\{0\}\times\bar{B})$. Позначимо

$$\bar{d}_P = d((S_\tau\cup(\{0\}\times\bar{B}))\setminus R, P),$$

де τ — часова координата точки P, а також

$$\begin{aligned} \bar{d}_{PQ} &= \min(\bar{d}_P,\bar{d}_Q);\\ M_{p,j}^{R,D}[g] &= \sup_{P\in D}\bar{d}_P^{\,p+j}|D_x^j g(P)|;\\ M_{p,j+\alpha}^{R,D}[g] &= \sup_{P,Q\in D}\bar{d}_{PQ}^{\,p+j+\alpha}\frac{|D_x^j g(P)-D_x^j g(Q)|}{d(P,Q)^{\alpha}};\\ \|g\|_{p,m}^{R,D} &= \sum_{j=0}^{m}(M_{p,j+\alpha}^{R,D}[g]+M_{p,j}^{R,D}[g]). \end{aligned}$$

(див. [20, Chapter 4, Section 7]). Зауважимо, що функції $\|\cdot\|_{1+\alpha}^{D}$ та $\|\cdot\|_{p,m}^{R,D}$ є нормами, а простори функцій зі скінченними нормами $\|\cdot\|_{1+\alpha}^{D}$ та $\|\cdot\|_{p,m}^{R,D}$ є банаховими (див. [20, Chapter 3, Theorem 3]). Використавши дані позначення, можемо, зокрема, сформулювати таке твердження:

Лема 2.3.1. ([19, Theorem1]) Нехай виконується умова 2.3.4, $u_0\equiv 0$, функція f неперервна на $[0,T]\times\bar{B}$, $S\in A^{2+\lambda}$. Тоді

$$\|u\|_{1+\delta}\leqslant K\sup_{[0,T]\times\bar{B}}|f(t,x)|,$$

де $\delta<1$, стала K залежить лише від δ та оператора $\mathcal{L}$.

При отриманні тверджень про збіжність розв'язку задачі Коші до нуля при прямуванні часової змінної до нескінченності важливу роль відіграє наступна лема:

Лема 2.3.2. ([23, Theorem 10 §1]) Нехай обмежена функція u задовольняє (2.8), причому

$$|a(t,x)| \leqslant M\left(x^2+1\right), \qquad |u_0(x)| \leqslant M_1,$$
$$|b(t,x)| \leqslant M\sqrt{x^2+1}, \qquad |f(t,x)| \leqslant M_2,$$
$$c(t,x) \leqslant M_3.$$

Тоді для всіх $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$

$$|u(t,x)| \leqslant e^{M_3 t}(M_1+M_2 t).$$

2.4. Функції Хаара

Спочатку наведемо означення функцій Хаара від однієї змінної $\chi_n(x)$, де $x \in [0,1]$. Введемо позначення

$$\begin{aligned}
&\Delta_n = \Delta_j^i = \left((i-1)2^{-j}, i2^{-j}\right), \quad \bar{\Delta}_n = \left[(i-1)2^{-j}, i2^{-j}\right],\\
&\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1), \quad \bar{\Delta}_1 = [0,1],\\
&\Delta_n^+ = \left(\Delta_j^i\right)^+ = \left((i-1)2^{-j}, (2i-1)2^{-j-1}\right) = \Delta_{j+1}^{2i-1},\\
&\Delta_n^- = \left(\Delta_j^i\right)^- = \left((2i-1)2^{-j-1}, i2^{-j}\right) = \Delta_{j+1}^{2i},
\end{aligned}$$

де $n = 2^j + i$, $j \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2^j$. Покладемо $\chi_1 \equiv 1$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \bar{\Delta}_n,\\ 2^{j/2}, & x \in \Delta_n^+,\\ -2^{j/2}, & x \in \Delta_n^-, \end{cases} \tag{2.18}$$

де $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ обирається зі співвідношення $2^j+1 \leqslant n \leqslant 2^{j+1}$. При цьому значення функцій χ_n на кінцях інтервалів Δ_n^+ та Δ_n^- визначається за формулами

$$\chi_n(x) = \left(\chi_n(x-)+\chi_n(x+)\right)/2, \quad \text{якщо } x \in (0,1),$$
$$\chi_n(0) = \lim_{x\to 0^+}\chi_n(x), \quad \chi_n(1) = \lim_{x\to 1^-}\chi_n(x).$$

У багатовимірному випадку можемо означити функції Хаара за допомогою рівності

$$\chi_{n_1,\ldots,n_d}^{(d)}(x) = \chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\ldots\chi_{n_d}(x_d),$$

де $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0,1]^d$, χ_{n_s}, $s = 1, 2, \dots d$ задані співвідношенням (2.18). Для функції $f \in L_1([0,1]^d)$ розглянемо коефіцієнти Фур'є-Хаара

$$c^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(f) = \int_{[0,1]^d} f(x)\chi^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(x)\,dx,$$

та часткові суми ряду Фур'є-Хаара

$$S^{(d)}_{2^k}(f,x) = \sum_{n_1,\dots,n_d \in \mathbb{N}^{(d)}_k} c^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(f)\chi^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(x), \tag{2.19}$$

де $\mathbb{N}^{(d)}_k = \{1, 2, \dots, 2^k\}^d$. Будемо користуватися твердженням про збіжність ряду Фур'є-Хаара, яке є наслідком співвідношення (14) у [54, Lemma 2] при $p = \infty$.

Лема 2.4.1. Якщо $f \in C([0,1]^d)$, то

$$\sup_{x\in[0,1]^d} |S^{(d)}_{2^k}(f,x) - f(x)| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Розділ 3

НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

У даному розділі викладено результати статті [52]

3.1. Постановка задачі

Розглянемо формальне стохастичне рівняння вигляду

$$\begin{cases}\mathcal{L}u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(x) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R},\\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}.\end{cases} \tag{3.1}$$

Оператор $\mathcal{L}$ задано співвідношенням (2.9), проте функції a, b, c не залежать від просторової змінної. Іншими словами,

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}. \tag{3.2}$$

При цьому умова 2.3.1 перепишеться таким чином:

Умова 3.1.1. Функції a, b, c неперервні на $[0,T]$. Крім того, функція a задовольняє нерівностям

$$|a(t_1) - a(t_2)| \leqslant M|t_1 - t_2|^{\lambda},\ t_1,\, t_2 \in [0,T], \qquad a(t) \geqslant \delta,\ t \in [0,T],$$

для деяких сталих λ, δ, $M > 0$.

Нагадаємо, що за виконання умови 2.3.1 існує фундаментальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = 0$. Більш того, коли оператор (2.9) має вигляд (3.2), фундаментальний розв'язок однорідний за просторовою змінною:

$$p(t,x;s,y) = p(t,x-y;s,0).$$

Будемо позначати $p(t,x-y;s) := p(t,x-y;s,0)$. Також сформулюємо умови на функції u_0, f та σ:

Умова 3.1.2. Функція $u_0 = u_0(x,\omega)$ вимірна на $\mathbb{R}\times\Omega$ і задовольняє нерівностям

$$|u_0(x,\omega)| \leqslant C_{u_0}(\omega)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega,$$
$$|u_0(x_1,\omega) - u_0(x_2,\omega)| \leqslant L_{u_0}(\omega)|x_1 - x_2|^{\beta(u_0)}\ \forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega$$

для деяких сталих L_{u_0}, $C_{u_0} > 0$, $1 \geqslant \beta(u_0) \geqslant 1/2$.

Умова 3.1.3. Функція f вимірна та обмежена на $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|f(t,x_1,z_1) - f(t,x_2,z_2)| \leqslant L_f(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|)\ \forall t \in [0,T],\ x_1,\ x_2,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$$

для деякої сталої $L_f > 0$.

Умова 3.1.4. Функція σ вимірна та обмежена на $[0,T]\times\mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)| \leqslant L_\sigma|x_1 - x_2|^{\beta(\sigma)}\ \forall t \in [0,T],\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$$

для деяких випадкових сталих $L_\sigma > 0$, $1 > \beta(\sigma) > 1/2$.

Розв'язком (3.1) будемо вважати вимірну функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds\int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)f(s,y,u(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y)\int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \quad (3.3)$$

причому рівність виконується м.н. для довільної пари (t,x). Рівняння (3.3) було розглянуто у [11]. Там же було доведено існування та єдиність розв'язку (3.3), його неперервність за Гельдером по змінним t та x за умов 3.1.1–3.1.4. Єдиність розв'язку розуміється в наступному сенсі: якщо функції u та $\tilde{u}$ є розв'язками (3.3), то $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)$ м. н. для довільної пари $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$.

Будемо розглядати наближення розв'язків (3.3) розв'язками таких інтегральних рівнянь:

$$u^{(n)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds\int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)f(s,y,u^{(n)}(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu^{(n)}(y)\int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \quad (3.4)$$

де $\{\mu^{(n)}\colon n \geqslant 1\}$ — послідовність стохастичних мір. Будемо вимагати збіжність $\mu^{(n)}$ до μ у певному сенсі. Кажучи більш строго, будемо накладати такі умови:

Умова 3.1.5. Для кожного півінтервалу $(x, y]$, x, $y \in \mathbb{R}$, має місце збіжність:

$$\mu^{(n)}((x, y]) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu((x, y]), \quad n \to \infty.$$

Умова 3.1.6. Набір випадкових величин $\{\mu^{(n)}(A),\ A \in \mathcal{B},\ n \geqslant 1\}$ обмежений за ймовірністю.

Умова 3.1.7. Для кожного додатного числа α має місце збіжність:

$$\sup_{A\subset\{|y|>c\}, n\geqslant 1} \mathrm{P}\left[|\mu^{(n)}(A)| > \alpha\right] \to 0, \quad c \to \infty.$$

Також сформулюємо допоміжні твердження:

Лема 3.1.1. Нехай виконуються умови 3.1.5 та 3.1.6. Тоді для довільних фіксованих $\beta > 0$, $j \in \mathbb{Z}$ має місце збіжність:

$$\sum_{k\geqslant 0} 2^{-k\beta} \sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k} |(\mu^{(n)} - \mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Лема 3.1.2. Нехай виконуються умови 3.1.5–3.1.7. Тоді для довільного фіксованого $\beta > 0$ має місце збіжність:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geqslant 0} 2^{-k\beta} \sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k} |(\mu^{(n)} - \mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Вказані леми будуть доведені у підрозділі 3.3. Тепер сформулюємо та доведемо основне твердження розділу.

Теорема 3.1.1. *Нехай виконуються умови 3.1.1–3.1.7. Тоді існує модифікація* u *розв'язку* (3.3) *та модифікації* $u^{(n)}$ *розв'язків* (3.4)*, для яких має місце збіжність*

$$\sup_{t\in[0,T], x\in\mathbb{R}} |u^{(n)}(t, x) - u(t, x)| \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty.$$

3.2. Доведення теореми 3.1.1

Доведення. Оцінимо модуль різниці $|u^{(n)}(t,x) - u(t,x)|$:

$$\begin{aligned}
&|u^{(n)}(t,x) - u(t,x)| \\
&\quad\leqslant \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x-y;s)||f(s,y,u^{(n)}(s,y)) - f(s,y,u(s,y))|\,dy \\
&\qquad + \left| \int_{\mathbb{R}} d(\mu^{(n)} - \mu)(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds \right| \\
&\quad\leqslant L_f \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x-y;s)||u^{(n)}(s,y) - u(s,y)|\,dy + \left| \int_{\mathbb{R}} q(z,y)\,d(\mu^{(n)} - \mu)(y) \right|,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

де

$$q(z,y) = \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \quad z = (t,x). \tag{3.7}$$

Представимо інтеграл

$$\zeta^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}} q(z,y)\,d(\mu^{(n)} - \mu)(y)$$

у вигляді суми $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \zeta_j^{(n)}(z)$, де

$$\zeta_j^{(n)}(z) = \int_{(j,j+1]} q(z,y)\,d(\mu^{(n)} - \mu)(y), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Покажемо, що функція $q(z,y)$ неперервна за Гельдером на $[j,j+1]$ при довільних фіксованих $j \in \mathbb{Z}$, $z \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Звідси отримаємо, що для оцінки $\zeta_j^{(n)}(z)$ можна скористатися лемою 2.2.1. Розглянемо різницю $q(z,y+h) - q(z,y)$, де $h \in (0,1]$:

$$\begin{aligned}
q(z,y+h) - q(z,y) &= \int_0^t p(t,x-y-h;s)(\sigma(s,y+h) - \sigma(s,y))\,ds \\
&\quad + \int_0^t (p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s))\sigma(s,y)\,ds := I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Скориставшись (2.10) та умовою 3.1.4, маємо, що

$$|I_1| \leqslant Ch^{\beta(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} e^{-\frac{\varkappa|x-y-h|^2}{t-s}}\,ds \leqslant Ch^{\beta(\sigma)}. \tag{3.9}$$

Для оцінки I_2 скористаємося нерівностями

$$e^{-x} \leqslant C(\alpha)x^{-\alpha} \; \forall \alpha > 0, \, x > 0, \tag{3.10}$$

$$\int_{x-y-h}^{x-y} e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}} dv \leqslant \int_{-h/2}^{h/2} e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}} dv, \tag{3.11}$$

де при використанні першого співвідношення вважаємо, що $\alpha = (1-\beta(\sigma))/2$, а також знову пошлемося на умову 3.1.4:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leqslant C \int_0^t |p(t, x-y-h; s) - p(t, x-y; s)| ds = C \int_0^t \left| \int_{x-y-h}^{x-y} \frac{\partial p(t, v; s)}{\partial v} dv \right| ds \\ &\overset{(2.11)}{\leqslant} C \int_0^t \frac{ds}{t-s} \int_{x-y-h}^{x-y} e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}} dv \leqslant C \int_{-h/2}^{h/2} dv \int_0^t \frac{1}{t-s} e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}} ds \\ &\leqslant C \int_{-h/2}^{h/2} dv \int_0^t (t-s)^{\frac{-1-\beta(\sigma)}{2}} |v|^{\beta(\sigma)-1} ds \leqslant C h^{\beta(\sigma)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

З (3.9) та (3.12) випливає, що

$$|q(z, y+h) - q(z, y)| \leqslant C h^{\beta(\sigma)}.$$

Отже, існують модифікації $\widetilde{\zeta}_j^{(n)}(z)$ випадкових процесів $\zeta_j^{(n)}(z)$, які мають вигляд (2.4) і для всіх $\omega \in \Omega$, $z \in [0, T] \times \mathbb{R}$ задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{\zeta}_j^{(n)}(z) \right| &\leqslant |q(z, j)(\mu^{(n)} - \mu)((j, j+1])| \\ &+ \left\{ \sum_{k \geqslant 1} 2^{k\beta} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} \left| q(z, d_{ik}^{(j,j+1)}) - q(z, d_{(i-1)k}^{(j,j+1)}) \right|^2 \right\}^{1/2} \\ &\times \left\{ \sum_{k \geqslant 1} 2^{-k\beta} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} \left| (\mu^{(n)} - \mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)}) \right|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Поклавши $\widetilde{\zeta}^{(n)}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{\zeta}_j^{(n)}(z)$, одержимо, що

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{\zeta}^{(n)}(z) \right| &\leqslant \sum_{j \in \mathbb{Z}} |q(z, j)(\mu^{(n)} - \mu)((j, j+1])| \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k \geqslant 1} 2^{k\beta} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} \left| q(z, d_{ik}^{(j,j+1)}) - q(z, d_{(i-1)k}^{(j,j+1)}) \right|^2 \right\}^{1/2} \\ &\times \left\{ \sum_{k \geqslant 1} 2^{-k\beta} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} \left| (\mu^{(n)} - \mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)}) \right|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Оцінимо перший доданок у (3.13):

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)(\mu^{(n)}-\mu)((j,j+1])|\leqslant\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|(\mu^{(n)}-\mu)((j,j+1])|^2\Big\}^{1/2}.$$

Оцінимо $|q(z,j)|$ двома способами. По-перше, використавши (2.10) та умову 3.1.4, одержимо, що

$$|q(z,j)|\leqslant C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varkappa|x-j|^2}{t-s}}\,ds\leqslant C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\,ds=C\sqrt{t}\leqslant C.$$

Нехай тепер $|x-j|\geqslant m$, $m\in\mathbb{N}$. Тоді скористаємося (3.10) з $\alpha=1$:

$$|q(z,j)|\leqslant C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varkappa|x-j|^2}{t-s}}\,ds\leqslant C\int_0^t(t-s)^{\frac{1}{2}}|x-j|^{-2}\leqslant\frac{C}{m^2}.$$

Отже, для кожного $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)|^2\leqslant C\sum_{m\geqslant1}\frac{1}{m^4}<\infty. \tag{3.14}$$

А скориставшись лемою 3.1.2, маємо, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|(\mu^{(n)}-\mu)((j,j+1])|^2$$
$$\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant0}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2\xrightarrow{\mathrm{P}}0,\quad n\to\infty. \tag{3.15}$$

З (3.14) та (3.15) випливає, що

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)(\mu^{(n)}-\mu)((j,j+1])|\xrightarrow{\mathrm{P}}0,\quad n\to\infty. \tag{3.16}$$

Тепер перейдемо до оцінки другого доданку у (3.13). Для цього повернемося до оцінки різниці $q(z,y+h)-q(z,y)$ за умови, що $y,\ y+h\in[j,j+1]$, скориставшись її представленням у вигляді суми двох інтегралів, зробленому у (3.8). Припустимо, що $|x-w|\geqslant m\ \forall w\in[j,j+1]$, $m\in\mathbb{N}$; тоді I_1 оцінюється таким чином:

$$|I_1|\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_0^t(t-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa m^2}{t-s}}\,ds\leqslant\frac{Ch^{\beta(\sigma)}}{m^2}. \tag{3.17}$$

При цьому використали умову 3.1.4, (2.10) та (3.10). Тепер за цієї ж умови оцінимо I_2, скориставшись вже отриманими при доведенні (3.12) оцінками.

$$|I_2|\leqslant C\int_0^t\frac{ds}{t-s}\int_{x-y-h}^{x-y}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}}dv\leqslant Ch\int_0^t(t-s)^{-1}e^{-\frac{\varkappa m^2}{t-s}}ds\leqslant\frac{Ch}{m^2}\leqslant\frac{Ch^{\beta(\sigma)}}{m^2}. \tag{3.18}$$

З (3.9), (3.17), (3.12), (3.18) випливає, що, взявши $\beta \in (0,\, 2\beta(\sigma)-1)$, приходимо до оцінок

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big\{\sum_{k\geqslant 1}2^{k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|q(z,d_{ik}^{(j,j+1)})-q(z,d_{(i-1)k}^{(j,j+1)})|^2\Big\}^{1/2}$$
$$\leqslant C\Big\{\sum_{k\geqslant 1}2^{k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}2^{-2k\beta(\sigma)}\Big\}^{1/2}+\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^2}\Big\{\sum_{k\geqslant 1}2^{k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}2^{-2k\beta(\sigma)}\Big\}^{1/2}=C<\infty. \tag{3.19}$$

Підставивши отримані у (3.16) та (3.19) результати в (3.13), а також скориставшись лемою 3.1.2, одержимо, що

$$\hat{\zeta}^{(n)} := \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}}|\widetilde{\zeta}^{(n)}(z)| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n\to\infty.$$

Тепер повернемося до нерівності (3.6), продовживши ланцюг нерівностей з урахуванням вищенаведеної оцінки.

$$|u^{(n)}(t,x)-u(t,x)| \leqslant L_f\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}|p(t,x-y;s)|\sup_{y\in\mathbb{R}}|u^{(n)}(s,y)-u(s,y)|\,dy+\hat{\zeta}^{(n)}$$
$$\leqslant C\int_0^t\sup_{y\in\mathbb{R}}|u^{(n)}(s,y)-u(s,y)|ds+\hat{\zeta}^{(n)}.$$

Взявши супремум від лівої частини по x, одержимо, що

$$U_n(t)\leqslant C\int_0^t U_n(s)ds+\hat{\zeta}^{(n)},$$

де $U_n(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u^{(n)}(t,x)-u(t,x)|$. Зауважимо, що при довільному фіксованому $n\in\mathbb{N}$ функція $U_n(t)$ є обмеженою на $[0,T]$. А, значить, можемо використати нерівність Гронуолла:

$$U_n(t)\leqslant\hat{\zeta}^{(n)}e^{Ct}\leqslant\hat{\zeta}^{(n)}e^{CT},$$

звідки, взявши супремум від лівої частини по t і спрямувавши n до нескінченності, отримуємо твердження теореми. □

3.3. Доведення лем 3.1.1 та 3.1.2

Будемо користуватися такою нерівністю (див. [58, Lemma V.4.3 (a)]):

$$P\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varepsilon_k\right)^2 > \lambda\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right) > \frac{1}{3}(1-\lambda)^2, \tag{3.20}$$

де $\lambda \in (0,1)$, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — незалежні випадкові величини Бернуллі. Тепер перейдемо до доведення леми 3.1.1

Доведення. Припустимо, що твердження леми не виконується. Іншими словами, знайдеться таке $\alpha_0 > 0$, що для нескінченної кількості n справджується нерівність

$$P\Big[\sum_{k\geqslant 0}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 > \alpha_0\Big] > \alpha_0. \tag{3.21}$$

Нагадаємо, що ряд у (3.5) збігається для довільного n м. н., що випливає з (2.7). Звідси для кожного n, для якого виконується (3.21), знайдеться таке $\tilde{k}_n$, що

$$P\Big[\sum_{0\leqslant k\leqslant \tilde{k}_n}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 > \alpha_0\Big] > \alpha_0.$$

Також існують такі послідовності k_l, $n_l \to \infty$, що

$$P\Big[\sum_{k_l< k\leqslant k_{l+1}}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 > \alpha_0/2\Big] > \alpha_0/2. \tag{3.22}$$

Дійсно, в протилежному випадку знайшлося б таке k^*, що для всіх n, що задовольняють (3.21),

$$P\Big[\sum_{k^*< k\leqslant \tilde{k}_n}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 > \alpha_0/2\Big] < \alpha_0/2.$$

А за умовою 3.1.5

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant k^*}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty.$$

Отже, приходимо до суперечності з припущенням (3.21). Тепер введемо множини

$$\Omega_l = \Big\{\omega\in\Omega:\ \sum_{k_l< k\leqslant k_{l+1}}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 > \alpha_0/2\Big\};$$

як випливає з вищенаведеного, $P(\Omega_l) > \alpha_0/2$. Також на деякому іншому ймовірнісному просторі $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ введемо незалежні випадкові величини ε_{ik}, для яких $P'(\varepsilon_{ik} = 1) = P'(\varepsilon_{ik} = -1) = 1/2$. Можемо скористатися (3.20) для $\lambda = 1/4$ і отримати, що

$$P'\Big[\Big(\sum_{k_l<k\leqslant k_{l+1}}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\lambda_{ik}\varepsilon_{ik}\Big)^2 \geqslant (1/4)\sum_{k_l<k\leqslant k_{l+1}}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\lambda_{ik}^2\Big] \geqslant 1/8,$$

де $\lambda_{ik} = 2^{-k\beta/2}(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)}, \omega)$. Взявши інтеграл $\int_{\Omega_l} dP(\omega)$ від лівої та правої частини, приходимо до нерівності

$$P\times P'\Big[(\omega,\omega') : \Big(\sum_{k_l<k\leqslant k_{l+1}} 2^{-k\beta/2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\varepsilon_{jki}(\omega')(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})\Big)^2 > \alpha_0/8\Big] > \alpha_0/16.$$

Значить, знайдеться $\omega'_l \in \Omega'$ таке, що

$$P\Big[\omega\colon \Big(\sum_{k_l<k\leqslant k_{l+1}} 2^{-k\beta/2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\varepsilon_{ik}(\omega'_l)(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)}),\omega)\Big)^2 > \alpha_0/8\Big] > \alpha_0/16.$$

Можемо переписати дану нерівність через інтеграл за стохастичною мірою і отримати, що

$$P\Big[\Big|\int_{(j,+j+1]} g_l(y)\, d(\mu^{(n_l)}-\mu)\Big| > \sqrt{\alpha_0/8}\Big] > \alpha_0/16,$$

де $g_l(y) = \sum_{k_l<k\leqslant k_{l+1}} 2^{-k\beta/2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\varepsilon_{ik}(\omega'_l)\mathbf{1}_{\Delta_{ik}^{(j,j+1)}}(y)$. При цьому

$$|g_l(y)| \leqslant \sum_{k\geqslant k_l} 2^{-k\beta/2} = C_g 2^{-k_l\beta/2}.$$

Значить, можемо скористатися твердженням 2.1.1, п. 5, і одержати, що

$$\sup_{A\subset(j,+j+1]}\|C_g 2^{-k_l\beta/2}(\mu^{(n_l)}-\mu)(A)\| \geqslant \frac{1}{16}\Big\|\int_{(j,+j+1]} g_l(y)\, d(\mu^{(n_l)}-\mu)\Big\| \geqslant \frac{\alpha_0}{256}.$$

Спрямувавши l до нескінченності, отримаємо протиріччя з умовою 3.1.6. □

Зауважимо, що при доведенні вказаної леми скористалися тими самими методами, що і при доведенні [53, Lemma 1]. Тепер доведемо лему 3.1.2.

Доведення. Як і при доведенні попередньої леми, міркуємо від супротивного. Нехай існує таке $\alpha_0 > 0$, що для нескінченної кількості n справджується нерівність

$$P\Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant 0} 2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2 > \alpha_0\Big] > \alpha_0$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant 0}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2$ збігається м. н. за лемою 2.2.2. Значить, знайдуться такі $\tilde{j}_n$, що

$$P\Big[\sum_{|j|\leqslant\tilde{j}_n}\sum_{k\geqslant 0}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2>\alpha_0\Big]>\alpha_0.$$

Крім того, існують такі послідовності j_l, $n_l\to\infty$, що

$$P\Big[\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{k\geqslant 0}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2>\alpha_0/2\Big]>\alpha_0/2.$$

Дане твердження доводиться аналогічно до (3.22), лише замість умови 3.1.5 посилаємося на лему 3.1.1. З (2.7) випливає, що знайдуться k_l такі, що

$$P\Big[\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2>\alpha_0/2\Big]>\alpha_0/2.$$

Введемо в розгляд множини

$$\Omega_l=\Big\{\omega\in\Omega\colon\ \sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}2^{-k\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})|^2>\alpha_0/2\Big\}.$$

За вищедоведеним, $P(\Omega_l)>\alpha_0/2$. Також на деякому іншому ймовірнісному просторі $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ введемо незалежні випадкові величини ε_{ikj}, для яких $P'(\varepsilon_{ikj}=1)=P'(\varepsilon_{ikj}=-1)=1/2$. Можемо скористатися (3.20) для $\lambda=1/4$ і отримати, що

$$P'\Big[\Big(\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\lambda_{ikj}\varepsilon_{ikj}\Big)^2\geqslant(1/4)\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\lambda_{ikj}^2\Big]\geqslant 1/8,$$

де $\lambda_{ikj}=2^{-k\beta/2}(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)},\omega)$. Взявши інтеграл $\int_{\Omega_l}dP(\omega)$ від лівої та правої частини, приходимо до нерівності

$$P'\Big[\omega'\colon\ \Big(\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}2^{-k\beta/2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\varepsilon_{ikj}(\omega')(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)})\Big)^2>\alpha_0/8\Big]\geqslant 1/8.$$

Значить, знайдеться $\omega'\in\Omega'$ таке, що

$$P\Big[\omega\colon\Big(\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}2^{-k\beta/2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\varepsilon_{ikj}(\omega_l')(\mu^{(n_l)}-\mu)(\Delta_{ik}^{(j,j+1)}),\omega)\Big)^2>\alpha_0/8\Big]>\alpha_0/16.$$

Можемо переписати дану нерівність через інтеграл за стохастичною мірою і отримати, що

$$P\Big[\Big|\int_{\{y\colon j_l<|y|\leqslant j_{l+1}\}} g_l(y)\,d(\mu^{(n_l)}-\mu)\Big| > \sqrt{\alpha_0/8}\Big] > \alpha_0/16,$$

де $g_l(y)=\sum_{j_l<|j|\leqslant j_{l+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant k_l}2^{-k\beta/2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\varepsilon_{ikj}(\omega_l')\mathbf{1}_{\Delta_{ik}^{(j,j+1)}}(y)$. При цьому

$$|g_l(y)|\leqslant\sum_{k\geqslant 0}2^{-k\beta/2}=:C_g.$$

Значить, можемо скористатися твердженням 2.1.1, п. 5, і одержати, що

$$\sup_{A\subset\{y\colon j_l<|y|\leqslant j_{l+1}\}}\|C_g(\mu^{(n_l)}-\mu)(A)\|\geqslant\frac{1}{16}\Big\|\int_{\{y\colon j_l<|y|\leqslant j_{l+1}\}}g_l(y)\,d(\mu^{(n_l)}-\mu)\Big\|\geqslant\frac{\alpha_0}{256}.$$

Спрямувавши l до нескінченності, отримаємо протиріччя з умовою 3.1.7 □

3.4. Висновки

У розділі 3 розглянуто розв'язки стохастичних параболічних рівнянь, для яких випадковий вплив заданий з використанням загальної стохастичної міри. Показано, за яких умов на стохастичні міри розв'язки відповідних рівнянь збігаються за ймовірністю до розв'язку рівняння, керованого граничною мірою. Для цього, зокрема, доведено допоміжні твердження про збіжність сум із стохастичними мірами.

Отриманий результат можна застосовувати таким чином. Для деяких стохастичних мір μ можна побудувати послідовність мір $\mu^{(n)}$, які задовольняють умову теореми 3.1.1 і є дійсними знакозмінними мірами при довільному фіксованому $\omega\in\Omega$; відповідна конструкція наведена у [52, Example 2]. При цьому довільне рівняння, кероване мірою $\mu^{(n)}$, може бути розв'язане як нестохастичне при фіксованому $\omega\in\Omega$.

Розділ 4

УСЕРЕДНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

У даному розділі викладено результати статті [32].

4.1. Постановка задачі

Розглянемо формальне стохастичне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_\varepsilon(t,x)dt + f(t/\varepsilon, x, u_\varepsilon(t,x))\,dt + \sigma(t/\varepsilon, x)\,d\mu(x) = 0, & (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Оператор $\mathcal{L}$ задано співвідношенням (3.2), причому його коефіцієнти задовольняють умові 3.1.1. За даної умови фундаментальний розв'язок $p(t,x;s,y)$ рівняння $\mathcal{L}u = 0$ буде однорідним за просторовою змінною; як і в попередньому розділі, позначимо $p(t,x-y;s) := p(t,x-y;s,0)$. Також функція p задовольняє спряжене рівняння (див. [23, (4.17)]):

$$a(s)\frac{\partial^2 p(t,x-y;s)}{\partial y^2} - b(s)\frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial y} + c(s)p(t,x-y;s) + \frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial s} = 0.$$

Скориставшись оцінками (2.10)–(2.12), одержимо, що

$$\left|\frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial s}\right| \leqslant |c(s)||p(t,x-y;s)| + |b(s)|\left|\frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial y}\right| \\ + |a(s)|\left|\frac{\partial^2 p(t,x-y;s)}{\partial y^2}\right| \leqslant M(t-s)^{-3/2}e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}. \tag{4.2}$$

Будемо вважати, що функція u_0 задовольняє умову 3.1.2, а на функції f, σ накладемо такі умови:

Умова 4.1.1. Функція f вимірна та обмежена на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|f(t,x_1,z_1) - f(t,x_2,z_2)| \leqslant L_f(|x_1-x_2| + |z_1-z_2|)\ \forall t\in[0,+\infty),\ x_1,\ x_2,\ z_1,\ z_2\in\mathbb{R}$$

для деякої сталої $L_f > 0$.

Умова 4.1.2. Функція σ вимірна та обмежена на $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|\sigma(t, x_1) - \sigma(t, x_2)| \leqslant L_\sigma |x_1 - x_2|^{\beta(\sigma)} \; \forall t \in [0, +\infty), \, x_1, \, x_2 \in \mathbb{R}$$

для деяких сталих $L_\sigma > 0$, $1 > \beta(\sigma) > 1/2$.

Умова 4.1.3. Функції

$$\bar{f}(x, z) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s, x, z)\, ds, \quad \bar{\sigma}(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(s, x)\, ds \tag{4.3}$$

коректно визначені для всіх y, $v \in \mathbb{R}$.

Умова 4.1.4. Функції

$$\begin{aligned} G_f(r, x, z) &= \int_0^r \left(f(s, x, z) - \bar{f}(x, z)\right) ds, \\ G_\sigma(r, x) &= \int_0^r \left(\sigma(s, x) - \bar{\sigma}(x)\right) ds, \end{aligned}$$

обмежені на $[0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ та $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ відповідно.

Зауваження 4.1.1. Припустимо, що виконується умова 4.1.3. Якщо до того ж функції f та σ задовольняють умовам 4.1.1 та 4.1.2 відповідно, то їм задовольняють і функції $\bar{f}$ та $\bar{\sigma}$. Покажемо це на прикладі функції $\bar{f}$; доведення для $\bar{\sigma}$ аналогічне. Дійсно, припустимо, що виконується умова 4.1.1. Тоді функція $\bar{f}$ вимірна як границя вимірних функцій, обмеженість випливає з нерівності

$$\left|\bar{f}(y, v)\right| \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |f(s, y, v)|\, ds \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t C\, ds = C,$$

а виконання умови Ліпшиця — з нерівності

$$\begin{aligned} \left|\bar{f}(x_1, z_1) - \bar{f}(x_2, z_2)\right| &= \lim_{t \to \infty} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \big(f(s, x_1, z_1) - f(s, x_2, z_2)\big) ds \right| \\ &\leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \big|f(s, x_1, z_1) - f(s, x_2, z_2)\big| ds \leqslant L_f \big(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|\big). \end{aligned}$$

Значить, за виконання умов 4.1.1–4.1.3 функції

$$\begin{aligned} H_f(r, x, z) &= f(r, x, z) - \bar{f}(x, z), \\ H_\sigma(r, x) &= \sigma(r, x) - \bar{\sigma}(x), \quad r \geqslant 0, \; x, \; z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

обмежені.

Також будемо накладати умову на μ:

Умова 4.1.5. Функція $|y|^{\tau(\mu)}$ інтегровна за μ по $\mathbb{R}$ при деякому $\tau(\mu) > 1/2$.

Розв'язки (4.1) будемо розглядати як розв'язки інтегральних рівнянь

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)f(s/\varepsilon,y,u_\varepsilon(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s/\varepsilon,y)\,ds \quad (4.4)$$

Нашою метою є дослідження збіжності $u_\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x), \varepsilon \to 0^+$, де $\bar{u}$ — розв'язок усередненого рівняння

$$\begin{cases} \mathcal{L}\bar{u}(t,x)dt + \bar{f}(x,\bar{u}(t,x))\,dt + \bar{\sigma}(x)\,d\mu(x) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

якому відповідає інтегральне рівняння

$$\bar{u}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)\bar{f}(y,\bar{u}(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\bar{\sigma}(y)\,ds\,. \quad (4.5)$$

Тут функції $\bar{f}$, $\bar{\sigma}$ визначені співвідношенням (4.3). Нагадаємо, що у [11] було показано існування, єдиність та неперервність за Гельдером розв'язків рівнянь (4.4) та (4.5) за умов 3.1.1, 3.1.2, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.5. При цьому у статті [59] було показано, що вимагати виконання умови 4.1.5 необов'язково.

Для доведення теореми скористаємося алгоритмом, запропонованим у [50]. Сформулюємо допоміжні леми:

Лема 4.1.1. Нехай виконуються умови 3.1.1, 4.1.2, а $\tilde{\vartheta}$ — модифікація випадкового процесу

$$\vartheta(x,t) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \quad t \in [0,T], \quad (4.6)$$

задана співвідношенням (2.4). Тоді для довільного $\gamma < 1/4$ знайдеться випадкова стала $C = C(\omega,\gamma)$ така, що

$$|\tilde{\vartheta}(x,t_1) - \tilde{\vartheta}(x,t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|^\gamma$$

для всіх $t_1, t_2 \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$.

Лема 4.1.2. Нехай виконуються умови 3.1.1, 3.1.2, 4.1.1 4.1.2, а функція u є розв'язком рівняння (3.3). Тоді для неперервної модифікації функції u та довільного $\gamma < 1/4$ знайдеться випадкова стала $C = C(\omega,\gamma)$ така, що

$$|u(t_1,x) - u(t_2,x)| \leqslant C(\omega)(\ln t_2 - \ln t_1$$
$$+t_2 \ln t_2 - t_1 \ln t_1 - (t_2 - t_1)\ln(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{\gamma}).$$

для всіх $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}$.

Лема 4.1.3. Нехай функції $h(r,y,z)\colon [0,+\infty)\times\mathbb{R}\times Z \to \mathbb{R}$, $\bar{h}(y,z)\colon \mathbb{R}\times Z \to \mathbb{R}$ вимірні для кожного фіксованого z, а функції

$$H(r,y,z) = h(r,y,z) - \bar{h}(y,z), G(r,y,z) = \int_0^r (h(v,y,z) - \bar{h}(y,z))dv$$

обмежені на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}\times Z$. Крім того, функції φ_1, φ_2 вимірні на $[0,T]$ та задовольняють нерівності $0 \leqslant \varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t) \leqslant t$. Тоді

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} p(t,x-y;s)H(s/\varepsilon,y,z)ds\Big| \leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon > 0$, причому стала C не залежить від φ_1, φ_2.

Лема 4.1.4. Нехай функції $h(r,y) : [0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\bar{h}(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірні, а функції

$$H(r,y) = h(r,y) - \bar{h}(y), \quad G(r,y) = \int_0^r (h(v,y) - \bar{h}(y))dv$$

обмежені на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність:

$$\Big|\int_0^t p(t,x-y;s)H(s/\varepsilon,y)ds\Big| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}.$$

Леми 4.1.1–4.1.4 будуть доведені у підрозділі 4.3. Тепер сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 4.1.1. *Нехай виконуються умови 3.1.1, 3.1.2, 4.1.1–4.1.5,* u_ε *та* $\bar{u}$ *— неперервні модифікації розв'язків* (4.4) *та* (4.5). *Тоді для довільного* γ_1, *що належить інтервалу* $(0, \min\{1/5, 1/2(1-1/(2\beta(\sigma)))\})$, *має місце співвідношення*

$$\sup_{\varepsilon>0, t\in[0,T], x\in\mathbb{R}} \varepsilon^{-\gamma_1}|u_\varepsilon(t,x) - \bar{u}(t,x)| < +\infty \quad \textit{м.н.}$$

4.2. Доведення теореми 4.1.1

Доведення. Нехай

$$\vartheta_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s/\varepsilon,y)\,ds,$$
$$\bar{\vartheta}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\bar{\sigma}(y)\,ds.$$

Візьмемо модифікації $\vartheta_\varepsilon^{(1)}$ та $\bar{\vartheta}^{(1)}$ функцій ϑ_ε та $\bar{\vartheta}$, визначені співвідношенням (2.4). Тоді одержимо, що

$$\begin{aligned} &|u_\varepsilon(t,x) - \bar{u}(t,x)| \\ &\qquad \leqslant \Big|\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)(f(s/\varepsilon,y,u_\varepsilon(s,y)) - f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(s,y))\,dy\Big| \\ &\qquad +\Big|\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)(f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(s,y)) - \bar{f}(y,\bar{u}(s,y)))\,dy\Big| \\ &\qquad +|\vartheta_\varepsilon^{(1)}(t,x) - \bar{\vartheta}^{(1)}(t,x)| =: I_1 + I_2 + |\xi_\varepsilon|. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Спочатку оцінимо I_2. Для цього розділимо відрізок $[0,T]$ на n частин, довжина кожної з яких доівнює $\Delta = T/n$, і відповідним чином розіб'ємо множину інтегрування.

$$I_2 = \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)\big(f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(s,y)) - \bar{f}(y,\bar{u}(s,y))\big)\,dy\Big|.$$

Більше того, розіб'ємо кожен з доданків на 3 частини:

$$\begin{aligned} I_2 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \bigg(&\Big|\int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)\big(f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(s,y)) \\ &- f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(k\Delta,y))\big)\,dy\Big| \\ &+\Big|\int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)\big(f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(k\Delta,y)) - \bar{f}(y,\bar{u}(k\Delta,y))\big)\,dy\Big| \\ &+\Big|\int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)\big(\bar{f}(y,\bar{u}(k\Delta,y)) - \bar{f}(y,\bar{u}(s,y))\big)\,dy\Big|\bigg) \\ =: \sum_{k=0}^{n-1}&(I_{21}^{(k)} + I_{22}^{(k)} + I_{23}^{(k)}). \end{aligned}$$

Для кожного з доданків $I_{22}^{(k)}$ можна застосувати лему 4.1.3, де вважаємо, що $h(r,y,z) = f(r,y,\bar{u}(z,y))$, $\bar{h}(y,z) = \bar{f}(y,\bar{u}(z,y))$, $\varphi_1(t) = k\Delta \wedge t$, $\varphi_2(t) = (k+1)\Delta \wedge t$, $k \in \{0,\ldots,n-1\}$:

$$I_{22}^{(k)} \leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

Тепер оцінимо суму $\sum_{k=1}^{n-1} I_{21}^{(k)}$, скориставшись лемою 4.1.2:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} I_{21}^{(k)} &\leqslant L_f \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x-y;s)||\bar{u}(s,y)-\bar{u}(k\Delta,y)|\,dy \\ &\leqslant L_f C(\omega) \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} |p(t,x-y;s)|\big(\ln s - \ln k\Delta \\ &\quad + s\ln s - k\Delta\ln k\Delta - (s-k\Delta)\ln(s-k\Delta) + (s-k\Delta)^\gamma\big)ds \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} |p(t,x-y;s)| f_k(s)\,ds,\end{aligned} \tag{4.8}$$

де $\gamma \in (0,1/4)$, а функція f_k задана співвідношенням

$$f_k(s) = \ln s - \ln k\Delta + s\ln s - k\Delta\ln k\Delta - (s-k\Delta)\ln(s-k\Delta) + (s-k\Delta)^\gamma.$$

Оскільки f_k монотонно зростає на відрізку $[k\Delta,(k+1)\Delta]$ при довільному фіксованому $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, то можемо продовжити ланцюг нерівностей (4.8):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} I_{21}^{(k)} &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_k((k+1)\Delta) \int_{(k\Delta\wedge t,(k+1)\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x-y;s)|\,dy \\ &\leqslant C\sum_{k=1}^{n-1} f_k((k+1)\Delta)\Delta = C\Delta \sum_{k=1}^{n-1}\Big((\ln(k+1)\Delta - \ln k\Delta) \\ &\quad + ((k+1)\Delta\ln(k+1)\Delta - k\Delta\ln k\Delta) - \Delta\ln\Delta + \Delta^\gamma\Big) \\ &= C\Delta\Big(\ln n\Delta - \ln\Delta + n\Delta\ln n\Delta - \Delta\ln\Delta - (n-1)\Delta\ln\Delta + (n-1)\Delta^\gamma\Big) \\ &\overset{n\Delta=T}{=} CT(T+1)\frac{\ln n}{n} + \frac{n-1}{n}T\Big(\frac{T}{n}\Big)^\gamma \leqslant Cn^{-\gamma}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Окремо оцінимо доданок $I_{21}^{(0)}$. Для цього передусім розглянемо різницю $\bar{u}(t,x) - \bar{u}(0,x)$:

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t,x) - \bar{u}(0,x)| &= |\bar{u}(t,x) - u_0(x)| \\
&\leqslant \Big|\int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy\Big| + \Big|\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)\bar{f}(y,\bar{u}(s,y))\,dy\Big| \\
&\quad + \Big|\int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\bar{\sigma}(y)\,ds\Big| + |u_0(x)| \\
&\leqslant C(\omega)\int_{\mathbb{R}} t^{-1/2} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t}}\,dy + C\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (t-s)^{-1/2} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{(t-s)}}\,dy \\
&\quad + C(\omega)t^{\gamma} + C(\omega) \leqslant C(\omega).
\end{aligned}$$

Тепер нескладно отримати, що

$$\begin{aligned}
I_{21}^{(0)} &\leqslant L_f \int_{(0,\Delta\wedge t]} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x-y;s)||\bar{u}(s,y) - \bar{u}(0,y)|\,dy \\
&\leqslant C\int_{(0,\Delta\wedge t]} 1\,ds \leqslant Cn^{-1}; \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

додавши (4.9) та (4.10), одержимо, що $\sum_{k=0}^{n-1} I_{21}^{(k)} \leqslant C(\omega)n^{-\gamma}$, де $\gamma < 1/4$. Аналогічно доводиться, що $\sum_{k=0}^{n-1} I_{23}^{(k)} \leqslant C(\omega)n^{-\gamma}$. Звідси маємо, що

$$I_2 \leqslant C(\omega)(n|\varepsilon\ln\varepsilon| + n^{-\gamma}).$$

Покладемо $g(x) = x|\varepsilon\ln\varepsilon| + x^{-\gamma}$ і розглянемо поведінку даної функції при $x > 0$. Вона монотонно спадає при $x < x^*$, зростає при $x > x^*$ і набуває найменшого значення в точці x^*, де

$$g(x^*) = |\varepsilon\ln\varepsilon|^{\gamma/(\gamma+1)}(\gamma+1)\gamma^{-\gamma/(\gamma+1)}, \quad x^* = (\gamma/|\varepsilon\ln\varepsilon|)^{1/(\gamma+1)}.$$

Також помітимо, що

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+1)}{g(x)} &= \frac{(x+1)\varepsilon|\ln\varepsilon| + (x+1)^{-\gamma}}{x\varepsilon|\ln\varepsilon| + x^{-\gamma}} \\
&\leqslant \frac{x+1}{x}\mathbf{1}_{\{x\geqslant 1\}} + x^{\gamma}(x+1)\varepsilon|\ln\varepsilon|\mathbf{1}_{\{x<1\}} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-\gamma} \leqslant C.
\end{aligned}$$

Отже, можемо покласти $n = n^* := [x^*] + 1$ і отримати, що

$$I_2 \leqslant Cg(n^*) \leqslant C\,\frac{g(n^*)}{g(x^*)}g(x^*) \leqslant C\,\frac{g(x^*+1)}{g(x^*)}g(x^*) \leqslant C|\varepsilon\ln\varepsilon|^{\gamma/(\gamma+1)}.$$

Для кожного $\gamma_1 < 1/5$ можемо вибрати таке $\gamma < 1/4$, що $\gamma/(\gamma+1) < \gamma_1$. Отже,

$$I_2 \leqslant C(\omega)\varepsilon^{\gamma_1}. \tag{4.11}$$

Тепер перейдемо до оцінки ξ_ε, для чого розглянемо функцію

$$q(z,y) = \int_0^t p(t,x-y;s)(\sigma(s/\varepsilon,y) - \bar{\sigma}(y))ds, \quad z = (t,x,\varepsilon).$$

Передусім оцінимо різницю $q(z,y+h) - q(z,y)$ на відрізку $[j,j+1]$:

$$\begin{aligned} &q(z,y+h) - q(z,y) = J_1 + J_2 := \\ &\quad = \int_0^t p(t,x-y;s)\big(\sigma(s/\varepsilon,y+h) - \sigma(s/\varepsilon,y) - \bar{\sigma}(y+h) + \bar{\sigma}(y)\big)\,ds \\ &\qquad + \int_0^t \big(p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s)\big)\big(\sigma(s/\varepsilon,y+h) - \sigma(s/\varepsilon,y)\big)\,ds. \end{aligned}$$

Для оцінки J_1 скористаємося (2.10), умовою 4.1.2 та зауваженням 4.1.1.

$$|J_1| \leqslant 2L_\sigma h^{\beta(\sigma)} \int_0^t |p(t,x-y;s)|ds \leqslant Ch^{\beta(\sigma)}, \tag{4.12}$$

а для J_2 скористаємося оцінками з (3.12):

$$|J_2| \leqslant C\int_0^t |p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s)|ds \leqslant Ch^{\beta(\sigma)}. \tag{4.13}$$

Для оцінки $q(z,y+h) - q(z,y)$ через ε скористаємося лемою 4.1.4:

$$|q(z,y+h) - q(z,y)| \leqslant |q(z,y+h)| + |q(z,y)| \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{4.14}$$

Можемо додати нерівності (4.12) та (4.13), піднести їх суму до степеня $1-\theta$, $\theta \in [0,1]$ і домножити на (4.14), піднесену до степеня θ:

$$\begin{aligned} |q(z,y+h) - q(z,y)| &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)(1-\theta)}\varepsilon^{\theta/2}, \\ (\omega_{2,[j,j+1]}(q,r))^2 &\leqslant Ch^{2\beta(\sigma)(1-\theta)}\varepsilon^{\theta}. \end{aligned}$$

Крім того, за лемою 4.1.4

$$|q(z,y)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{\theta/2}, \quad \|q(z,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \leqslant C\sqrt{\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{\theta/2}.$$

При цьому

$$\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}((j,j+1])} < \varepsilon^{\theta/2}$$

за умови, що інтеграл

$$\int_0^1 v^{2\beta(\sigma)(1-\theta)-2\alpha-1}dv$$

скінченний. Це виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha < \beta(\sigma)(1-\theta) \Leftrightarrow \theta < 1 - \frac{\alpha}{\beta(\sigma)}. \tag{4.15}$$

При $\gamma_1 < \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2\beta(\sigma)})$ покладемо $\theta = 2\gamma_1$, $\alpha \in (1/2, \beta(\sigma)(1-2\gamma_1))$ і одержимо, що (4.15) виконується. Також зауважимо, що з (4.12) та (4.13) випливає, що функція $q(z,\cdot)$ неперервна на $[j,j+1]$ при фіксованих z, j, і можемо скористатися лемою 2.2.1:

$$\begin{aligned}
|\xi_\varepsilon| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} q(z,y)\,d\mu(y)\Big| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\int_{(j,j+1]} q(z,y)\,d\mu(y)\Big| \overset{(2.7)}{\leqslant} \sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)\mu((j,j+1])| \\
&+C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}\Big\{\sum_{n\geqslant 1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\mu(\Delta^{(j,j+1)}_{kn})|^2\Big\}^{1/2} \\
&\leqslant C\varepsilon^{\gamma_1}\Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu((j,j+1])| + \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big\{\sum_{n\geqslant 1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\mu(\Delta^{(j,j+1)}_{kn})|^2\Big\}^{1/2}\Big] \\
&\leqslant C\varepsilon^{\gamma_1}\Big[\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{2\tau(\mu)}(\mu((j,j+1]))^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{-2\tau(\mu)}\Big)^{1/2} \\
&+\Big(\sum_{n\geqslant 1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{2\tau(\mu)}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\mu(\Delta^{(j,j+1)}_{kn})|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{-2\tau(\mu)}\Big)^{1/2}\Big].
\end{aligned}$$

Для оцінки останньої суми двічі скористаємося лемою 2.2.2, взявши в якості ϕ_l такі послідовності функцій:

$$\{\phi_l(y),\ l\geqslant 1\} = \{(|j|+1)^{\tau(\mu)}\,\mathbf{1}_{(j,j+1]}(y),\ j\in\mathbb{Z}\},$$
$$\{\phi_l(y),\ l\geqslant 1\} = \{(|j|+1)^{\tau(\mu)}2^{n(1-2\alpha)/2}\mathbf{1}_{\Delta^{(j,j+1)}_{kn}}(y),\ j\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 1,\ 1\leqslant k\leqslant 2^n\}.$$

При цьому в обох випадках $\sum_{l=1}^{\infty}|\phi_l(y)| \leqslant C(1+|y|^{\tau(\mu)})$, а, значить, використання вказаної леми дійсно правомірне. Врахувавши також, що ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}}(|j|+1)^{-2\tau(\mu)}$ збігається, одержуємо, що

$$|\xi_\varepsilon| \leqslant C(\omega)\varepsilon^{\gamma_1}. \tag{4.16}$$

Підставивши (4.11) та (4.16) в (4.7), приходимо до такої нерівності:

$$|u_\varepsilon(t,x)-\bar{u}(t,x)| \leqslant C(\omega)\varepsilon^{\gamma_1} \\ + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} |p(t,x-y;s)||f(s/\varepsilon,y,u_\varepsilon(s,y)) - f(s/\varepsilon,y,\bar{u}(s,y))\,dy\,|$$

Зауважимо, що функції u_ε, u обмежені, звідки $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_\varepsilon(t,x)-\bar{u}(t,x)|<\infty$ м.н. Оскільки f задовольняє умову Ліпшиця, то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_\varepsilon(t,x)-\bar{u}(t,x)| \leqslant C\varepsilon^{\gamma_1} + C\int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_\varepsilon(s,x)-\bar{u}(s,x)|\,ds.$$

Застосувавши нерівність Гронуолла, одержуємо, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_\varepsilon(t,x)-\bar{u}(t,x)| \leqslant C(\omega)\varepsilon^{\gamma_1},$$

де стала $C(\omega)$ не залежить від t та ε. Взявши супремум по t від лівої частини, одержуємо твердження теореми. □

4.3. Доведення лем 4.1.1–4.1.4

Почнемо з доведення леми 4.1.1.

Доведення. Для довільних t_1 та t_2 таких, що $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$, покладемо

$$q(z,y)=\int_0^{t_2} p(t_2,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds - \int_0^{t_1} p(t_1,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \quad z=(t_1,t_2,x).$$

Тепер оцінимо різницю $q(z,y+h)-q(z,y)$ за умови y, $y+h\in[j,j+1]$, де $j\in\mathbb{Z}$.

Для цього розпишемо її у вигляді

$$\begin{aligned}
&q(z,y+h)-q(z,y)\\
&\quad=\int_0^{t_1}(p(t_2,x-y-h;s)-p(t_1,x-y-h;s))(\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y))ds\\
&\qquad+\int_0^{t_1}(p(t_2,x-y-h;s)-p(t_2,x-y;s)\\
&\qquad-p(t_1,x-y-h;s)+p(t_1,x-y;s))\sigma(s,y)ds\\
&\qquad+\int_{t_1}^{t_2}p(t_2,x-y-h;s)(\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y))ds\\
&\qquad+\int_{t_1}^{t_2}(p(t_2,x-y-h;s)-p(t_2,x-y;s))\sigma(s,y)ds\\
&\quad:=I_{11}+I_{12}+I_{21}+I_{22}:=I_1+I_2,
\end{aligned}$$

де $I_1=I_{11}+I_{12}$, $I_2=I_{21}+I_{22}$. Для оцінки I_{21} скористаємося умовою 4.1.2 та (2.10).

$$\begin{aligned}
|I_{21}|&\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa(x-y-h)^2}{t_2-s}}ds\\
&\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-1/2}ds=Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{4.17}$$

Тепер оцінимо I_{22}, використавши нерівності (3.10) та (3.11).

$$\begin{aligned}
|I_{22}|&\leqslant C\int_{t_1}^{t_2}|p(t_2,x-y-h;s)-p(t_2,x-y;s)|ds\\
&=C\int_{t_1}^{t_2}\left|\int_{x-y-h}^{x-y}\frac{\partial p(t_2,v;s)}{\partial v}dv\right|ds\\
&\overset{(2.11)}{\leqslant}C\int_{t_1}^{t_2}\frac{ds}{t_2-s}\int_{x-y-h}^{x-y}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t_2-s}}dv\leqslant C\int_{-h/2}^{h/2}dv\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{t_2-s}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t_2-s}}ds\\
&\leqslant C\int_0^{h/2}dv\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\gamma-1}v^{-2\gamma}ds\leqslant Ch^{1-2\gamma}(t_2-t_1)^{\gamma}.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

При цьому, оскільки $\gamma<1/4$, то $1-2\gamma>1/2$. Знову скориставшись умовою 4.1.2

та використавши (2.13), одержимо, що

$$\begin{aligned} |I_{11}| &\leqslant L_\sigma h^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} |p(t_2, x-y-h; s) - p(t_1, x-y-h; s)| ds \\ &\leqslant L_\sigma h^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau, x-y-h; s)}{\partial \tau} \right| d\tau \\ &\leqslant C h^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-3/2} e^{-\frac{\varkappa(x-y-h)^2}{\tau-s}} d\tau \\ &\leqslant C h^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-3/2} d\tau \leqslant C h^{\beta(\sigma)} (t_2 - t_1)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Тепер оцінимо I_{12}. З одного боку,

$$\begin{aligned} |I_{12}| &= \Big| \int_0^{t_1} (p(t_2, x-y-h; s) - p(t_1, x-y-h; s)) \sigma(s, y) ds \\ &\quad - \int_0^{t_1} (p(t_2, x-y; s) - p(t_1, x-y; s)) \sigma(s, y) ds \Big| \\ &\leqslant C \int_0^{t_1} |p(t_2, x-y-h; s) - p(t_1, x-y-h; s)| ds \\ &\quad + C \int_0^{t_1} |p(t_2, x-y; s) - p(t_1, x-y; s)| ds \\ &\leqslant C \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau, x-y-h; s)}{\partial \tau} \right| d\tau \\ &\leqslant C \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} (\tau - s)^{-3/2} d\tau \leqslant C (t_2 - t_1)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

З іншого боку, міркуючи по аналогії до доведення (4.18), одержуємо, що

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\leqslant C \int_0^{t_1} |p(t_2, x-y-h; s) - p(t_2, x-y; s)| ds \\ &\quad + C \int_0^{t_1} |p(t_1, x-y-h; s) - p(t_1, x-y; s)| ds \\ &\leqslant C \int_0^{h/2} dv \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\gamma_0 - 1} v^{-2\gamma_0} ds \\ &\quad + C \int_0^{h/2} dv \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\gamma_0 - 1} v^{-2\gamma_0} ds \leqslant C h^{1-2\gamma_0}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

де $\gamma_0 > 0$. Домноживши нерівність (4.20), піднесену до степеня 2γ, на нерівність (4.21), піднесену до степеня $1 - 2\gamma$, одержимо, що

$$|I_{12}| \leqslant (t_2 - t_1)^\gamma h^{(1-2\gamma)(1-2\gamma_0)}. \tag{4.22}$$

При достатньо близькому до нуля γ_0 показник степеня при h в нерівності (4.22) більше за 1/2. Врахувавши також оцінки (4.17), (4.18) та (4.19), одержимо, що

$$|q(z,y+h)-q(z,y)|\leqslant Ch^{\theta}(t_2-t_1)^{\gamma},\quad \theta>1/2. \tag{4.23}$$

Звідси, зокрема, випливає, що функція $q(z,y)$ є неперервною за y при довільному фіксованому z, і можемо застосувати лему 2.2.1. З неї випливає, що для відповідної модифікації $\tilde{\vartheta}$ процесу ϑ, заданого співвідношенням (4.6), мають місце нерівності

$$\begin{aligned}|\tilde{\vartheta}(t_1)-\tilde{\vartheta}(t_2)|&\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int_{(j,j+1]}q(z,y)\,d\mu(y)\right|\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)\mu((j,j+1])|\\&+C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}\left\{\sum_{n\geqslant1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\mu(\Delta^{(j,j+1)}_{kn})|^2\right\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Тепер оцінимо $q(z,y+h)-q(z,y)$, де y, $y+h\in[j,j+1]$, за умови виконання нерівності $|x-w|\geqslant m$ для всіх $w\in[j,j+1]$. При цьому оцінки (4.17)–(4.22) набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}|I_{21}|&\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa m^2}{t_2-s}}ds\leqslant C\frac{h^{\beta(\sigma)}}{m^2}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{1/2}ds\\&\leqslant C\frac{h^{\beta(\sigma)}}{m^2}(t_2-t_1)^{3/2},\\|I_{22}|&\leqslant C\int_{t_1}^{t_2}\frac{ds}{t_2-s}\int_{x-y-h}^{x-y}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t_2-s}}dv\leqslant Ch\int_{t_1}^{t_2}\frac{e^{-\frac{\varkappa m^2}{t_2-s}}}{t_2-s}ds\leqslant C\frac{h(t_2-t_1)}{m^2},\\|I_{11}|&\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_0^{t_1}ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\varkappa m^2}{\tau-s}}d\tau\leqslant C\frac{h^{\beta(\sigma)}}{m^2}\int_0^{t_1}ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-1/2}d\tau\\&\leqslant C\frac{h^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{3/2}}{m^2},\\|I_{12}|&\leqslant C\int_0^{t_1}ds\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-3/2}e^{-\frac{\varkappa m^2}{\tau-s}}d\tau\leqslant C(t_2-t_1)^{3/2},\\|I_{12}|&\leqslant C\int_0^{t_1}\frac{ds}{t_1-s}\int_{x-y-h}^{x-y}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t_1-s}}dv+C\int_0^{t_2}\frac{ds}{t_2-s}\int_{x-y-h}^{x-y}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t_2-s}}dv\leqslant Ch,\\|I_{12}|&\leqslant C(t_2-t_1)^{\gamma}h^{1-2\gamma/3},\end{aligned}$$

де використовуємо оцінку (3.10). Бачимо, що при таких j

$$|q(z,y+h)-q(z,y)|\leqslant C\frac{h^{\theta}(t_2-t_1)^{\gamma}}{m^2},\quad \theta>1/2. \tag{4.25}$$

Також зробимо зауваження щодо оцінки $q(z,y)$. Вказана функція допускає представлення у вигляді

$$q(z,y)=\int_0^{t_1}(p(t_2-s,x-y)-p(t_1-s,x-y))\sigma(s,y)\,ds \\ +\int_{t_1}^{t_2}p(t_2-s,x-y)\sigma(s,y)\,ds.$$

Перший з наведених інтегралів оцінюється аналогічно до I_{11}, другий — аналогічно до I_{12}. Звідси отримуємо, що

$$\begin{aligned}&|q(z,y)|\leqslant C(t_2-t_1)^{1/2},\\ &|q(z,y)|\leqslant C\frac{(t_2-t_1)^{3/2}}{m^2},\qquad \sup_{w\in[j,j+1]}|x-w|\geqslant m.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Скориставшись (4.23), (4.25) та (4.26), одержимо, що при $\alpha\in(1/2,\theta)$

$$\begin{aligned}&\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}\leqslant C(t_2-t_1)^{\gamma},\\ &\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}\leqslant C\frac{(t_2-t_1)^{\gamma}}{m^2},\qquad \sup_{w\in[j,j+1]}|x-w|\geqslant m.\end{aligned}$$

Можемо продовжити нерівності (4.24) таким чином:

$$\begin{aligned}|\tilde{\vartheta}(t_1)-\tilde{\vartheta}(t_2)|&\leqslant\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(z,j)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu((j,j+1])|^2\right)^{1/2}\\ &+C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}\left\{\sum_{n\geqslant1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\mu(\Delta^{(j,j+1)}_{kn})|^2\right\}^{1/2}\\ &\leqslant C(t_2-t_1)^{\gamma}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu((j,j+1])|^2\right)^{1/2}\\ &+C(t_2-t_1)^{\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left\{\sum_{n\geqslant1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\mu(\Delta^{(j,j+1)}_{kn})|^2\right\}^{1/2}\leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\gamma},\end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Наведемо доведення леми 4.1.2.

Доведення. Нехай $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$. Тоді за лемою 4.1.1

$$\begin{aligned}|u(t_1,x) - u(t_2,x)| \leqslant &\int_{\mathbb{R}} |p(t_1, x-y;0) - p(t_2,x-y;0)|\,|u_0(y)|\,dy \\ &+ \left| \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} p(t_1,x-y;s) f(s,y,u(s,y))\,dy \right. \\ &- \left. \int_0^{t_2} ds \int_{\mathbb{R}} p(t_2,x-y;s) f(s,y,u(s,y))\,dy \right| + C(\omega)(t_2-t_1)^{\gamma} \\ =:&\ J_1 + J_2 + C(\omega)(t_2-t_1)^{\gamma}.\end{aligned}$$

J_1 оцінюється таким чином:

$$\begin{aligned}J_1 &\leqslant C(\omega)\int_{\mathbb{R}} dy \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial p(\tau, x-y;0)}{\partial \tau}\right| d\tau \overset{(2.13)}{\leqslant} C(\omega)\int_{\mathbb{R}} dy \int_{t_1}^{t_2} \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{\tau}} d\tau \\ &= C(\omega)\int_{t_1}^{t_2} \tau^{-1} d\tau \int_{\mathbb{R}} \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{\tau}}\,dy = C(\omega)(\ln t_2 - \ln t_1).\end{aligned}$$

Тепер оцінимо J_2, скориставшись умовою 4.1.1.

$$\begin{aligned}J_2 &\leqslant \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t_1,x-y;s) - p(t_2,x-y;s)|\,|f(s,y,u(s,y))|\,dy \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{\mathbb{R}} p(t_2,x-y;s)\,|f(s,y,u(s,y))|\,dy \\ &\leqslant C\int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t_1,x-y;s) - p(t_2,x-y;s)|\,dy \\ &\quad + C(t_2-t_1) =: J_{21} + C(t_2-t_1).\end{aligned}$$

Залишилося побудувати ланцюг оцінок для інтеграла J_{21},

$$\begin{aligned}J_{21} &\leqslant C\int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} dy \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial p(\tau,x-y;s)}{\partial \tau}\right| d\tau \\ &\overset{(2.13)}{\leqslant} C\int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}} dy \int_{t_1}^{t_2} (\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{\tau-s}} d\tau \\ &= C\int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} (\tau-s)^{-1} d\tau \int_{\mathbb{R}} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{\tau-s}}\,dy \\ &= C\int_0^{t_1} (\ln(t_2-s) - \ln(t_1-s))ds \\ &= C(t_2\ln t_2 - t_1 \ln t_1 - (t_2-t_1)\ln(t_2-t_1)),\end{aligned}$$

звідки і випливає твердження леми. □

Доведемо тепер лему 4.1.3.

Доведення. Спочатку припустимо, що $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) \geqslant \varepsilon$. Представимо внутрішній інтеграл у вигляді суми $\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} = \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)-\varepsilon} + \int_{\varphi_2(t)-\varepsilon}^{\varphi_2(t)}$; при цьому

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\varphi_2(t)-\varepsilon}^{\varphi_2(t)} p(t, x-y; s) H(s/\varepsilon, y, z) ds\Big|$$
$$\leqslant C \int_{\varphi_2(t)-\varepsilon}^{\varphi_2(t)} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t, x-y; s)| dy \leqslant C\varepsilon. \quad (4.27)$$

А для іншого інтеграла маємо такий ланцюг нерівностей:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)-\varepsilon} p(t, x-y; s) H(s/\varepsilon, y, z) ds\Big| \\
&\quad = C\varepsilon \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big(p(t, x-y; s) G(s/\varepsilon, y, z)\Big|_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)-\varepsilon} \\
&\quad - \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)-\varepsilon} \frac{\partial p(t, x-y; s)}{\partial s} G(s/\varepsilon, y, z) ds\Big) dy\Big| \overset{(4.2)}{\leqslant} C\varepsilon \Big(\int_{\mathbb{R}} \big|p(t, x-y; \varphi_1(t))\big| dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \big|p(t, x-y; \varphi_2(t)-\varepsilon)\big| dy + \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)-\varepsilon} ds \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{t-s}}\Big) \qquad (4.28) \\
&\quad \leqslant C\varepsilon + C\varepsilon \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)-\varepsilon} \frac{ds}{t-s} = C\varepsilon\big(1 - \ln(\varepsilon + t - \varphi_2(t)) + \ln(t - \varphi_1(t))\big) \\
&\quad \leqslant C\varepsilon\big(1 + \min\{|\ln T|, |\ln \varepsilon|\}\big) \leqslant C\varepsilon |\ln \varepsilon|;
\end{aligned}$$

з (4.27) та (4.28) випливає твердження леми при вказаному обмеженні на φ_1, φ_2. Якщо ж $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) < \varepsilon$, то має місце такий аналог (4.27):

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} p(t, x-y; s) H(s/\varepsilon, y, z) ds\Big|$$
$$\leqslant C \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} ds \int_{\mathbb{R}} |p(t, x-y; s)| dy \leqslant C(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \leqslant C\varepsilon.$$

□

Нарешті наведемо доведення леми 4.1.4.

Доведення. Спочатку припустимо, що $t \geqslant \varepsilon$. За даної умови оцінюваний інтеграл допускає представлення $\int_0^t = \int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^t$. Перший доданок оцінюємо таким чином:

$$\Big|\int_0^{t-\varepsilon} p(t,x-y;s)H(s/\varepsilon,y)ds\Big| = \varepsilon\Big|p(t,x-y;s)G(s/\varepsilon,y)\Big|_0^{t-\varepsilon} - \int_0^{t-\varepsilon} \frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial s}G(s/\varepsilon,y)ds\Big| \overset{G(0,y)=0}{\leqslant} C\varepsilon\Big(|p(t,x-y;t-\varepsilon)| + \int_0^{t-\varepsilon}\Big|\frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial s}\Big|ds\Big) \overset{(4.2)}{\leqslant} C\sqrt{\varepsilon} + C\varepsilon\int_0^{t-\varepsilon} ds(t-s)^{-3/2} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.29}$$

Другий доданок оцінюємо зі співвідношення

$$\Big|\int_{t-\varepsilon}^{t} p(t,x-y;s)H(s/\varepsilon,y)ds\Big| \leqslant C\int_{t-\varepsilon}^{t}(t-s)^{-1/2}ds = C\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.30}$$

Отже, при вказаному обмеженні на t твердження леми випливає з (4.29) та (4.30). При $t < \varepsilon$ твердження леми доводиться аналогічно до (4.30). □

4.4. Висновки

В розділі 4 розглянуто розв'язки стохастичних параболічних рівнянь, для яких випадковий вплив заданий з використанням загальної стохастичної міри. Доведено принцип усереднення, тобто показана збіжність розв'язків рівнянь до розв'язку усередненого рівняння. Також сформульовано та доведено допоміжні твердження про параболічне рівняння. Зокрема, наведена оцінка розв'язку параболічного рівняння, яка виконується для довільної пари $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

Розділ 5

ПОВЕДІНКА РОЗВ’ЯЗКУ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ПРИ $t \to \infty$

У даному розділі викладено результати статті [31].

5.1. Постановка задачі, доведення основного результату

Будемо розглядати таке стохастичне рівняння:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(x) = 0, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.1}$$

тобто, рівняння (3.1), взяте на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Оператор $\mathcal{L}$ задано співвідношенням (3.2), а на його коефіцієнти будемо накладати таку умову:

Умова 5.1.1. Функції a, b, c неперервні та обмежені на $[0,+\infty)$. Крім того, функція a задовольняє нерівностям

$$|a(t_1) - a(t_2)| \leqslant M|t_1 - t_2|^\lambda,\ t_1,\, t_2 \in [0,+\infty), \qquad a(t) \geqslant \delta,\ t \in [0,+\infty),$$

для деяких λ, δ, $M > 0$.

За даної умови функції a, b, c також задовольняють умові (3.1.1) на довільному відрізку $[0,T]$, $T > 0$. Крім того, в даному розділі будемо вважати, що виконується наступна умова на функцію c.

Умова 5.1.2. Для деякої сталої $c_0 > 0$ має місце нерівність: $c(t) \leqslant -c_0\ \forall t \geqslant 0$.

Будемо припускати, що функції u_0, f задовольняють умовам 3.1.2 та 4.1.1 відповідно. Надалі також вважатимемо, що $|f(t,x,z)| \leqslant \varphi(t)$, де $\varphi(t) \in L_1([0,+\infty))$, а для функції σ виконується наступне:

Умова 5.1.3. Функція σ вимірна на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівностям

$$|\sigma(t,x)| \leqslant C_\sigma(t) \ \forall t \in [0,+\infty),\ x \in \mathbb{R},$$
$$|\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)| \leqslant L_\sigma(t)|x_1 - x_2|^{\beta(\sigma)} \ \forall t \in [0,+\infty),\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},$$

для деякої сталої $\beta(\sigma)$, $1 > \beta(\sigma) > 1/2$, і обмежених вимірних функцій C_σ, $L_\sigma\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, для яких має місце збіжність:

$$C_\sigma(s) \to 0,\ s \to \infty; \quad L_\sigma(s) \to 0,\ s \to \infty.$$

Розв'язок рівняння (5.1) будемо задавати співвідношенням (3.3), де $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Нагадаємо його властивості, наведені у [11]. При довільному фіксованому $T > 0$ рівняння (3.3) має єдиний розв'язок на $[0,T] \times \mathbb{R}$, який можна отримати зі співвідношення

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u^{(n)}(t,x). \tag{5.2}$$

При цьому $u^{(0)}(t,x) = 0$,

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;0)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x-y;s)f(s,y,u^{(n-1)}(s,y))\,dy \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \end{aligned} \tag{5.3}$$

а збіжність у (5.2) є збіжністю за ймовірністю. Отже, розв'язок (3.3) є єдиним і на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, причому він є границею за ймовірністю ітераційного процесу (5.3).

Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язку (3.3) нам знадобиться така допоміжна лема:

Лема 5.1.1. Для довільного фіксованого $\phi \in (0,1)$ та всіх $x \in \mathbb{R}$, $t > s > 0$ мають місце нерівності

$$|p(t,x;s)| \leqslant M(t-s)^{-1/2} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda), \tag{5.4}$$

$$\left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x}\right| \leqslant M(t-s)^{-1} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda), \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'}\right| \leqslant M(\phi)|x-x'|^\phi (t-s)^{-3/2} \\ \times \max\left\{e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}, e^{-\frac{\nu(x')^2}{t-s}}\right\} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda), \end{aligned} \tag{5.6}$$

де $\varkappa$, η, M — деякі додатні сталі, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ — функція Міттаг-Леффлера.

Доведення даного твердження буде наведено у підрозділі 5.1. Тепер скористаємося ним для доведення наступної важливої леми.

Лема 5.1.2. Нехай виконуються умови 5.1.1–5.1.3. Тоді випадкова функція

$$\nu(t,x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds$$

має модифікацію $\nu_1(t,x)$, для якої

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\nu_1(t,x)| \to 0,\ t\to\infty, \quad \forall\omega\in\Omega.$$

Доведення. Покладемо

$$q(z,y) = \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds, \quad z=(t,x).$$

Дана функція вже була розглянута при доведенні теореми 3.1.1 (див. (3.7)). При цьому була показана неперервність $q(z,y)$ як функції від y на $\mathbb{R}$ при довільному фіксованому z. Отже, можемо скористатися лемою 2.2.1 на кожному відрізку $[j,j+1]$, $j\in\mathbb{Z}$ і одержати, що

$$\begin{aligned}|\nu_1(t,x)| &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} |q(z,j)\mu((j,j+1])| + C\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])} \\ &\quad\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j,j+1)})|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |q(z,j)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu((j,j+1])|^2\right)^{1/2} \\ &\quad + C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|q(z,\cdot)\|^2_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}\right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j,j+1)})|^2\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{5.7}$$

для всіх $z=(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$. Бачимо, що для доведення твердження леми нам необхідно оцінити норму Бєсова $\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([j,j+1])}$, для чого розглянемо різницю $q(z,y+h)-q(z,y)$ при $y,\ y+h\in[j,j+1]$:

$$\begin{aligned}|q(z,y+h)-q(z,y)|\leqslant\int_0^t|p(t,x-y-h;s)-p(t,x-y;s)|\,|\sigma(s,y)|\,ds\\+\int_0^t|p(t,x-y-h;s)|\,|\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y)|\,ds=I_1+I_2.\end{aligned}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}\Omega_{MN}&=\big([s,+\infty)\times\mathbb{R}\big)\setminus\big([s,s+M)\times(y-N,y+N)\big),\\\Omega_{MN}^{\gamma}&=\{(t,x)\colon d(\Omega_{MN},(t,x))\leqslant\gamma\},\\\Theta_{MN}^{\gamma}&=(\Omega_{MN}^{2\gamma}\setminus\Omega_{MN})\cap\{t>s\}.\end{aligned}$$

Також будемо використовувати такі функції:

$$\begin{aligned}\eta_1(v)&=C_\eta e^{\frac{1}{|v|^2-1}}\mathbf{1}_{\{|v|<1\}},\quad v\in\mathbb{R}^2,\\\eta_\varepsilon(v)&=\varepsilon^{-2}\eta_1(v\varepsilon^{-1}),\\\Psi(t,x;s,y)&=\int_{\Omega_{MN}^{\gamma}}\eta_\gamma(t-v_1,x-v_2)\,dv,\quad v=(v_1,v_2),\end{aligned}\tag{5.8}$$

де стала C_η вибирається зі співвідношення $\int_{\mathbb{R}^2}\eta_1(v)\,dv=1$. Функції типу (5.8) застосовуються в теорії узагальнених функцій (див., зокрема, [60]). Нескладно бачити, що $\eta_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; крім того, $\eta_\varepsilon(v)=0$ при $|v|<\varepsilon$ і $\int_{\mathbb{R}^2}\eta_\varepsilon(v)\,dv=1$. Також зауважимо, що

$$\Big|\frac{\partial\eta_\varepsilon(v)}{\partial v_i}\Big|\leqslant C\varepsilon^{-3},\quad\Big|\frac{\partial^2\eta_\varepsilon(v)}{\partial v_i^2}\Big|\leqslant C\varepsilon^{-4},\quad i=1,2,\tag{5.9}$$

де стала C не залежить від ε. Дійсно,

$$\Big|\frac{\partial\eta_\varepsilon(v)}{\partial v_i}\Big|\leqslant\varepsilon^{-3}\max_{|v|\leqslant1}\Big|\frac{\partial\eta_1(v)}{\partial v_i}\Big|=C\varepsilon^{-3},$$

і аналогічно доводиться друга нерівність у (5.9). Тепер покажемо, що $\Psi(t,x;s,y)=0$ за умови, що (t,x) лежить поза множиною Ω_{MN}^{γ}. Дійсно, якщо $(t,x)\notin\Omega_{MN}^{2\gamma}$, то

$$\begin{aligned}d(\Omega_{MN},(t,x))>2\gamma\Rightarrow d(\Omega_{MN}^{\gamma},(t,x))>\gamma\\\Rightarrow(t-v_1,x-v_2)\notin B(0,\gamma)\ \forall(v_1,v_2)\in\Omega_{MN}^{\gamma}\\\Rightarrow\eta_\gamma(t-v_1,x-v_2)=0\ \forall(v_1,v_2)\in\Omega_{MN}^{\gamma}\Rightarrow\Psi(t,x;s,y)=0,\end{aligned}\tag{5.10}$$

де через $B(0,\gamma)$ будемо позначати кулю з центром в точці 0 і радіусом γ. Крім того,

$$0 \leqslant \Psi(t,x;s,y) = \int_{\Omega^{\gamma}_{MN}} \eta_\gamma(t-v_1, x-v_2)\,dv \overset{(*)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_\gamma(t-v_1,x-v_2)\,dv = 1, \quad (5.11)$$

причому рівність в $(*)$ має місце, якщо $B((t,x),\gamma) \subset \Omega^{\gamma}_{MN}$. Використавши (5.9), отримуємо такі оцінки для похідних Ψ:

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right| \leqslant C\gamma^{-1}, \quad \left|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right| \leqslant C\gamma^{-1}, \quad \left|\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right| \leqslant C\gamma^{-2}. \quad (5.12)$$

Тепер перейдемо до оцінки I_2, для чого розглянемо функцію

$$\tilde{p}(t,x;s,y) = p(t,x-y;s)\mathbf{1}_{\{t>s\}}\Psi(t,x;s,y);$$

будемо також вважати, що

$$\gamma < \min\{M/2, N/2\}. \quad (5.13)$$

Покажемо, що при фіксованих $s > 0$, $y \in \mathbb{R}$ $\tilde{p} \in C^{1,2}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ як функція від (t,x). Для цього досить перевірити існування та неперервність похідних при $t = s$. З одного боку, з нерівності (5.13) випливає, що прямокутник $\{(t,x)\colon |x-y| < N-2\gamma,\ 0 < t-s < M-2\gamma\}$ не перетинається з $\Omega^{2\gamma}_{MN}$; врахувавши також, що $\tilde{p}(t,x;s,y) = 0$ при $t \leqslant s$, одержимо, що $\tilde{p}(t,x;s,y) = 0$ в деякому околі точки $t = s$, $x = y$. З іншого боку, з обмеженості функції Ψ та її похідних, а також оцінок (2.10)–(2.13) випливає, що при $x \neq y$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(t,x;s,y) &\to 0,\ t \to s^+,\\
\frac{\partial\tilde{p}(t,x;s,y)}{\partial x} &\to 0,\ t \to s^+,\\
\frac{\partial\tilde{p}(t,x;s,y)}{\partial t} &\to 0,\ t \to s^+,\\
\frac{\partial^2\tilde{p}(t,x;s,y)}{\partial x^2} &\to 0,\ t \to s^+.
\end{aligned}$$

З зауваження до (5.11) випливає, що $\tilde{p}(t,x;s,y) = p(t,x-y;s)$ при $(t,x) \in \Omega_{MN}$, а з (5.10) — те, що $\tilde{p}(t,x;s,y) = 0$ за умови $(t,x) \in ([0,+\infty)\times\mathbb{R}) \setminus \Omega^{2\gamma}_{MN} \cup \{s \geqslant t\}$. Також відмітимо, що з обмеженості функції $p(t,x-y;s)$ на $\Omega^{2\gamma}_{MN} \cap \{t \leqslant T\}$ при довільному додатному T і (5.11) випливає, що функція $\tilde{p}(t,x;s,y)$ обмежена на $[0,T]\times\mathbb{R}$.

Тепер ми знаємо достатньо для того, щоб оцінити $\mathcal{L}\tilde{p}$. З одного боку, $\mathcal{L}\tilde{p}=0$ при $\tilde{p}=p$; з іншого боку, дана рівність виконується і при $\tilde{p}=0$. Отже, $\mathcal{L}\tilde{p}=0$ при $(t,x)\notin\Theta^{\gamma}_{MN}$. Якщо ж $(t,x)\in\Theta^{\gamma}_{MN}$, то

$$\mathcal{L}\tilde{p}=\mathcal{L}(p\Psi)=\Psi\mathcal{L}p+p\mathcal{L}\Psi+2a\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\overset{\mathcal{L}p=0}{=}p\mathcal{L}\Psi+2a\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Можемо скористатися нерівностями (5.4), (5.5), (5.12) і одержати, що

$$|\mathcal{L}\tilde{p}|\leqslant Ce^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t-s}}e^{\eta(t-s)}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})\left(\gamma^{-2}\frac{1}{\sqrt{t-s}}+\gamma^{-1}\frac{1}{t-s}\right)\tag{5.14}$$

при $(t,x)\in\Theta^{\gamma}_{MN}$. Зафіксуємо довільне γ з інтервалу $(0,1/3)$; без обмеження загальності будемо вважати, що $t>3\gamma$. Представимо інтеграл I_2 у вигляді

$$I_2=\int_0^{t-3\gamma}|p(t,x-y-h;s)|\,|\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y)|\,ds$$
$$+\int_{t-3\gamma}^{t}|p(t,x-y-h;s)|\,|\sigma(s,y+h)-\sigma(s,y)|\,ds=I_{21}+I_{22}.$$

Для оцінки інтегралу I_{21} скористаємося функцією $\tilde{p}(t,x;s,y)$, де $M=N=3\gamma$. Якщо при цьому $(t,x)\in\Theta^{\gamma}_{MN}$, то $t-s<3\gamma$; крім того, виконується одна з двох нерівностей: або $t-s>\gamma$, або $|x-y|>\gamma$. В першому випадку отримуємо такий наслідок (5.14):

$$|\mathcal{L}\tilde{p}|\leqslant Ce^{3\eta\gamma}\gamma^{-5/2}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(3\gamma)^{\lambda}).$$

В другому випадку

$$|\mathcal{L}\tilde{p}|\leqslant Ce^{3\eta\gamma}\gamma^{-7/2}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(3\gamma)^{\lambda}).$$

Приходимо до висновку, що

$$|\mathcal{L}\tilde{p}|\leqslant C(\gamma)\;\forall\,(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}.$$

Тепер можемо скористатися лемою 2.3.2 для довільного $T>t$ і одержати, що

$$|\tilde{p}(t,x;s,y)|\leqslant C(\gamma)e^{-c_0t}t,$$

де стала $C(\gamma)$ не залежить від T. Згадавши, що $\tilde{p}(t,x;s,y) = p(t,x-y;s)$ при $t-s > 3\gamma$, і скориставшись обмеженістю σ, приходимо до оцінки

$$|I_{21}| \leqslant C(\gamma)h^{\beta(\sigma)}e^{-c_0 t}t^2 \to 0,\ t \to \infty. \tag{5.15}$$

Для оцінки I_{22} використаємо умову 5.1.3 та нерівність (5.4):

$$\begin{aligned} |I_{22}| &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)} \int_{t-3\gamma}^{t} \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t-s}} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}) L_{\sigma}(s)\,ds \\ &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\sqrt{\gamma}e^{3\gamma\eta}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(3\gamma)^{\lambda}) \sup_{s\in[t-3\gamma,t]} |L_{\sigma}(s)| \to 0,\, t \to \infty. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Для оцінки I_1 знадобиться функція вигляду

$$\hat{p}(t,x;s,y,h) = (p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s))\mathbf{1}_{\{t>s\}}\Psi(t,x;s,y),$$

причому будемо припускати, що $M > 2\gamma$, $N > 1 + 2\gamma$. Чимало властивостей функції $\hat{p}$ повторюють властивості функції $\tilde{p}$, тому наведемо їх без доведення. По-перше, $\hat{p}(t,x;s,y,h) = p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s)$ при $(t,x) \in \Omega_{MN}$. Крім того, $\hat{p}$ обмежена на $([0,T] \times \mathbb{R})$ при довільному $T > 0$ і дорівнює нулю при $(t,x) \in ([0,+\infty) \times \mathbb{R}) \setminus \Omega_{MN}^{2\gamma} \cup \{s \geqslant t\}$. Для оцінки $\mathcal{L}\hat{p}$ зауважимо, що $\mathcal{L}\tilde{p} = 0$ при $(t,x) \notin \Theta_{MN}^{\gamma}$, в той час як при $(t,x) \in \Theta_{MN}^{\gamma}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{p}(t,x;s,y,h) &= \mathcal{L}((p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s))\Psi(t,x;s,y)) \\ &= \Psi(t,x;s,y)\mathcal{L}(p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s)) \qquad (5.17) \\ &\quad +\mathcal{L}\Psi(t,x;s,y)(p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s)) \\ &\quad +2a(t)\frac{\partial\Psi(t,x;s,y)}{\partial x}\frac{\partial(p(t,x-y-h;s) - p(t,x-y;s))}{\partial x}, \end{aligned}$$

де доданок (5.17) тотожно рівний нулю. Скориставшись (5.5) та (5.6), отримуємо, що

$$\left|\frac{\partial p(t,x-y-h;s)}{\partial x}-\frac{\partial p(t,x-y;s)}{\partial x}\right|$$
$$\leqslant Ch^{\phi}(t-s)^{-3/2}\sup_{y\in[j,j+1]}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t-s}}e^{\eta(t-s)}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda});$$
$$|p(t,x-y-h;s)-p(t,x-y;s)|=\left|\int_{x-y-h}^{x-y}\frac{\partial p(t,v;s)}{\partial v}\,dv\right|$$
$$\leqslant\int_{x-y-h}^{x-y}\frac{1}{t-s}e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}}e^{\eta(t-s)}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})\,dv$$
$$\leqslant\frac{h}{t-s}\sup_{y\in[j,j+1]}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t-s}}e^{\eta(t-s)}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}).$$

Звідси $\mathcal{L}\hat{p}$ при $(t,x)\in\Theta^{\gamma}_{MN}$ оцінюється таким чином:

$$|\mathcal{L}\hat{p}|\leqslant Ch^{\phi}\sup_{y\in[j,j+1]}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t-s}}e^{\eta(t-s)}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})\left(\frac{1}{\gamma^2(t-s)}+\frac{1}{\gamma(t-s)^{3/2}}\right). \quad (5.18)$$

Тепер розіб'ємо інтеграл I_1 на два таким чином:

$$I_1=\int_0^{t-3\gamma}|p(t,x-y-h;s)-p(t,x-y;s)|\,|\sigma(s,y)|\,ds$$
$$+\int_{t-3\gamma}^{t}|p(t,x-y-h;s)-p(t,x-y;s)|\,|\sigma(s,y)|\,ds=I_{11}+I_{12}.$$

Інтеграл I_{11} оцінюється аналогічно до I_{21}. Замість функції $\tilde{p}(t,x;s,y)$ беремо функцію $\hat{p}(t,x;s,y,h)$ при $M=3\gamma$ і $N=3\gamma+1$, а замість (5.14) посилаємося на (5.18). В результаті отримуємо оцінку

$$|\hat{p}(t,x;s,y,h)|\leqslant C(\gamma)h^{\phi}e^{-c_0t}t\ \forall(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R},$$

а врахувавши те, що $\hat{p}(t,x;s,y,h)=p(t,x;s,y+h)-p(t,x;s,y)$ при $t-s>3\gamma$, приходимо до нерівності

$$I_{11}\leqslant C(\gamma)h^{\phi}e^{-c_0t}t^2\to 0,\ t\to\infty. \quad (5.19)$$

Для оцінки I_{12} використовуємо умову 5.1.3 та (5.5):

$$\begin{aligned} I_{12} &\leqslant \int_{t-3\gamma}^{t} ds \int_{x-y-h}^{x-y} \left| \frac{\partial p(t,v;s)}{\partial v} \right| |\sigma(s,y)| dv \\ &\leqslant C \int_{t-3\gamma}^{t} ds \int_{x-y-h}^{x-y} \frac{C_\sigma(s)}{t-s} e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda)\, dv \\ &\leqslant C e^{3\eta\gamma} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(3\gamma)^\lambda) \sup_{s\in[t-3\gamma,t]} |C_\sigma(s)| \int_0^{h/2} v^{-2l}\, dv \int_{t-3\gamma}^{t} (t-s)^{1-l}\, ds \\ &= C e^{3\eta\gamma} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(3\gamma)^\lambda) \sup_{s\in[t-3\gamma,t]} |C_\sigma(s)| \gamma^{1-l} h^{1-2l} \to 0,\ t\to\infty, \end{aligned} \tag{5.20}$$

де константа C в останній нерівності залежить від l та ϕ, причому перша з вказаних сталих може набувати довільного значення з інтервалу $(0, 1/2)$, а друга — з інтервалу $(0, 1)$. Можемо обрати l, ϕ таким чином, що $1 - 2l = \beta(\sigma)$, $\phi = \beta(\sigma)$.

Тепер припустимо, що для деякого $j \in \mathbb{Z}$ і для всіх $y \in [j, j+1]$ виконується нерівність

$$|x - y| \geqslant m + 1. \tag{5.21}$$

Тоді будемо розглядати функції $\tilde{p}(t, x; s, y)$ and $\hat{p}(t, x; s, y, h)$ при $M = 3\gamma$ та $N = 3\gamma + m$. Бачимо, що при такому виборі M та N $(t, x) \in \Omega_{MN}$; отже, $\hat{p}(t, x; s, y, h) = p(t, x - y - h; s) - p(t, x - y; s)$ і $\tilde{p}(t, x; s, y) = p(t, x - y; s)$. Також відмітимо, що для кожного $\varkappa_1 \in (0, \varkappa)$

$$\sup_{y\in[j,j+1]} e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t-s}} \leqslant e^{-\frac{\varkappa_1 m^2}{3\gamma}} \sup_{y\in[j,j+1]} e^{-\frac{(1-\varkappa_1)(x-y)^2}{t-s}} \quad \forall (t,x) \in \Theta^{\gamma}_{MN}.$$

Можемо скористатися (5.14) та (5.18) і отримати, що

$$|\mathcal{L}\tilde{p}(t, x; s, y)| \leqslant C(\gamma) e^{-\frac{\varkappa_1 m^2}{3\gamma}},$$
$$|\mathcal{L}\hat{p}(t, x; s, y, h)| \leqslant C(\gamma) h^{\beta(\sigma)} e^{-\frac{\varkappa_1 m^2}{3\gamma}}.$$

Тепер згідно леми 2.3.2

$$|p(t, x; s, y)| \leqslant C(\gamma) e^{-c_0 t} t e^{-\frac{\varkappa m^2}{3\gamma}},$$
$$|p(t, x; s, y + h) - p(t, x; s, y)| \leqslant C(\gamma) h^{\beta(\sigma)} e^{-c_0 t} t e^{-\frac{\varkappa_1 m^2}{3\gamma}}.$$

Приходимо до висновку, що за умови (5.21)

$$I_1 \leqslant C(\gamma)h^{\beta(\sigma)}e^{-c_0t}t^2e^{-\frac{\varkappa_1 m^2}{3\gamma}} \leqslant C(\gamma)h^{\beta(\sigma)}e^{-c_0t}t^2m^{-1} \to 0,\ t\to\infty, \tag{5.22}$$

$$I_2 \leqslant C(\gamma)h^{\beta(\sigma)}e^{-c_0t}t^2e^{-\frac{\varkappa_1 m^2}{3\gamma}} \leqslant C(\gamma)h^{\beta(\sigma)}e^{-c_0t}t^2m^{-1} \to 0, t\to\infty. \tag{5.23}$$

Тепер зауважимо, що $|q(z,y)|$ оцінюється аналогічно до I_2; в нерівності типу (5.16) ми використовуємо функцію C_σ замість L_σ. З (5.15), (5.16), (5.19), (5.20), (5.22) та (5.23) одержуємо, що існує обмежена функція $G_\gamma(t) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ така, що $G_\gamma(t) \to 0$, $t\to\infty$ і

$$\begin{aligned}
&\omega_{2,[j,j+1]}(q,r) \leqslant G_\gamma(t)r^{\beta(\sigma)}\ \forall t,\ r\geqslant 0, j\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R};\\
&\qquad |q(z,j)| \leqslant G_\gamma(t)\ \forall t\geqslant 0, j\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R};\\
&\omega_{2,[j,j+1]}(q,r) \leqslant G_\gamma(t)r^{\beta(\sigma)}m^{-1}\ \forall t,\ r\geqslant 0, j\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R} : \max_{y\in[j,j+1]}|x-y|\geqslant m+1;\\
&\qquad |q(z,j)| \leqslant G_\gamma(t)m^{-1}\ \forall t\geqslant 0, j\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R} : \max_{y\in[j,j+1]}|x-y|\geqslant m+1.
\end{aligned}$$

А для кожного $\alpha\in(1/2,\beta(\sigma))$ мають місце нерівності:

$$\|q(t,x,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([j,j+1])} \leqslant CG_\gamma(t)\ \forall t\geqslant 0,\ j\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R};$$

$$\|q(t,x,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([j,j+1])} \leqslant CG_\gamma(t)m^{-1}\ \forall t\geqslant 0,\ j\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R}\colon \max_{y\in[j,j+1]}|x-y|\geqslant m+1.$$

Тепер повернемося до нерівності (5.7). З отриманих вище оцінок випливає, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q(t,x,j)|^2 \leqslant CG^2_\gamma(t) + CG^2_\gamma(t)\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m^2} = CG^2_\gamma(t),$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|q(t,x,\cdot)\|^2_{B^\alpha_{22}([j,j+1])} \leqslant CG^2_\gamma(t) + CG^2_\gamma(t)\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m^2} = CG^2_\gamma(t).$$

З іншого боку, з леми 2.2.2 випливає, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu((j,j+1])|^2 < \infty \text{ м. н.},$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}2^{-n(2\alpha-1)}|\mu(\Delta^{(j)}_{kn})|^2 < \infty \text{ м. н.}$$

Приходимо до висновку, що

$$|\nu_1(t,x)| \leqslant C(\omega)G_\gamma(t).$$

Взявши в даній нерівності супремум по x і спрямувавши t до нескінченності, отримаємо твердження леми. □

Користуючись лемою 5.1.2, нескладно довести таку теорему.

Теорема 5.1.1. *Нехай виконуються умови 3.1.2, 4.1.1, 5.1.1–5.1.3. Тоді знайдеться модифікація розв'язку* (3.3), *для якої має місце збіжність*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| \to 0, \quad t\to\infty,$$

при всіх $\omega \in \Omega$.

Доведення. Введемо допоміжну функцію

$$\nu^{(n)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) f(s,y,u^{(n-1)}(s,y))\,dy,$$

де функція $u^{(n)}$ задана співвідношенням (5.3). З [23, Theorem 2 §4] випливає, що при довільних фіксованих $T>0$, $\omega\in\Omega$ функція $\nu^{(n)}(t,x)$ є обмеженим розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} \mathcal{L}v(t,x) = -f(t,x,u^{(n-1)}(t,x)), & (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R},\\ v(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Значить, можемо скористатися лемою 2.3.2 і одержати, що

$$|\nu^{(n)}(t,x)| \leqslant Ce^{-c_0 t}(1+t). \tag{5.24}$$

Тепер згадаємо, що

$$u^{(n)}(t,x) = \nu^{(n)}(t,x) + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x-y;s)\sigma(s,y)\,ds.$$

Скориставшись оцінкою (5.24), спрямувавши n до нескінченності і взявши модифікацію стохастичного інтеграла, визначену лемою 5.1.2, отримаємо, що

$$|u(t,x)| \leqslant Ce^{-c_0 t}(1+t) + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\nu_1(t,x)|.$$

Якщо взяти супремум від лівої частини по x та спрямувати t до нескінченності, то твердження теореми напрями отримується з леми 5.1.2. □

5.2. Доведення леми 5.1.1

Тепер доведемо допоміжну лему.

Доведення. Розглянемо функції

$$W(t,x;s,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)a(s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)a(s)}},$$
$$\Phi(t,x;s,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t,x;s,y),$$

де

$$\Phi_1(t,x;s,y) = \mathcal{L}W(t,x;s,y),$$
$$\Phi_{k+1}(t,x;s,y) = \int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}W(t,x;\theta,\zeta)\Phi_k(\theta,\zeta;s,y)\,d\zeta,\ \ k \geqslant 1.$$

(див. [23, (4.4)] та [23, (4.55)–(4.56)]). Зауважимо, що

$$\begin{aligned} W(t,x;s,y) &= W(t,x-y;s,0) =: W(t,x-y;s),\\ \Phi_k(t,x;s,y) &= \Phi_k(t,x-y;s,0) =: \Phi_k(t,x-y;s),\ \ k \geqslant 1,\\ \Phi(t,x;s,y) &= \Phi(t,x-y;s,0) =: \Phi(t,x-y;s). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Дійсно, перша нерівність випливає з означення функції W. Тепер скористаємося методом математичної індукції для доведення (5.25). Нескладно пересвідчитися безпосередньо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t,x;s,y)}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)a(s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)a(s)}} \frac{y-x}{2(t-s)a(s)},\\ \frac{\partial^2 W(t,x;s,y)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)a(s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)a(s)}} \left(\frac{(x-y)^2}{4(t-s)^2a^2(s)} - \frac{1}{2(t-s)a(s)}\right),\\ \frac{\partial W(t,x;s,y)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)a(s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)a(s)}} \left(\frac{(x-y)^2}{4(t-s)^2a(s)} - \frac{1}{2(t-s)}\right), \end{aligned} \tag{5.26}$$

звідки $\Phi_1(t,x;s,y) = \Phi_1(t,x-y;s,0)$. Припустимо, що тотожність (5.25) виконується для деякого натурального k; доведемо її для $k+1$. Дійсно,

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(t,x;s,y) &= \int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}W(t,x;\theta,\zeta)\Phi_k(\theta,\zeta;s,y)\,d\zeta \\ &\overset{\zeta=\zeta_1+y}{=} \int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}W(t,x;\theta,\zeta_1+y)\Phi_k(\theta,\zeta_1+y;s,y)\,d\zeta_1 \\ &= \int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}W(t,x-y;\theta,\zeta_1)\Phi_k(\theta,\zeta_1;s,0)\,d\zeta_1 = \Phi_{k+1}(t,x-y;s,0),\end{aligned}$$

і нескладно бачити, що

$$\Phi(t,x;s,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t,x;s,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t,x-y;s,0) = \Phi(t,x-y;s,0).$$

З іншого боку, згідно [23, (4.18)] має місце представлення

$$p(t,x;s) = W(t,x;s) + \int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} W(t,x-\zeta;\theta)\Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta.$$

З (5.26) випливають такі властивості функції W:

$$a(s)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

$$|W(t,x;s)| \leqslant Ce^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}(t-s)^{-1/2}, \tag{5.27}$$

$$\left|\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x}\right| \leqslant Ce^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}(t-s)^{-1}, \tag{5.28}$$

$$\left|\frac{\partial^2 W(t,x;s)}{\partial x^2}\right| \leqslant Ce^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}(t-s)^{-3/2}, \tag{5.29}$$

де $0 < \varkappa < (4\sup_{t\in\mathbb{R}} a(t))^{-1}$. Скористаємося ними для оцінки Φ. По-перше,

$$\begin{aligned}|\Phi_1(t,x;s)| &\leqslant |a(t)-a(s)|\left|\frac{\partial^2 W(t,x;s)}{\partial x^2}\right| + |b(t)|\left|\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x}\right| + |c(t)||W(t,x;s)| \\ &\leqslant Ce^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}\left((t-s)^{-3/2+\lambda} + (t-s)^{-1} + (t-s)^{-1/2}\right) \\ &\leqslant \hat{C}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}(t-s)^{-3/2+\lambda}e^{\eta_1(t-s)},\end{aligned}$$

де ми використали (3.10). Тепер доведемо за методом математичної індукції, що

$$|\Phi_k(t,x;s)| \leqslant \frac{C}{\Gamma((k-1)\lambda+\lambda)}\left(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}e^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-3/2+\lambda}, \tag{5.30}$$

де $\tilde{C} = \hat{C}\Gamma(\lambda)\pi^{1/2}\varkappa^{-1/2}$, стала C в (5.30) не залежить від k. Для цього скористаємося тотожністю

$$\int_{\mathbb{R}}(t-\theta)^{-1/2}(\theta-s)^{-1/2}e^{-\varkappa\left(\frac{\zeta^2}{\theta-s}+\frac{(x-\zeta)^2}{t-\theta}\right)}\,d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{\varkappa}}(t-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}. \tag{5.31}$$

Якщо припустити, що (5.30) виконується для деякого натурального k, то

$$\begin{aligned}
&|\Phi_{k+1}(t,x;s)| \leqslant C\hat{C}\int_s^t d\theta\int_{\mathbb{R}}\Big(e^{-\frac{\varkappa(x-\zeta)^2}{t-\theta}}(t-\theta)^{\lambda-3/2}e^{\eta_1(t-\theta)} \\
&\quad\times\frac{1}{\Gamma((k-1)\lambda+\lambda)}\left(\tilde{C}(\theta-s)^{\lambda}\right)^{k-1}e^{\eta_1(\theta-s)}e^{-\frac{\varkappa\zeta^2}{\theta-s}}(\theta-s)^{\lambda-3/2}d\zeta\Big) \\
&\overset{(5.31)}{=} C\hat{C}\tilde{C}^{k-1}e^{\eta_1(t-s)}\Gamma(k\lambda)^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa}}(t-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}\int_s^t(t-\theta)^{\lambda-1}(\theta-s)^{k\lambda-1}d\theta \\
&= \left|\begin{matrix}\theta_1=\frac{\theta-s}{t-s} \\ d\theta_1(t-s)=d\theta\end{matrix}\right| = \frac{C\tilde{C}^k e^{\eta_1(t-s)}}{\Gamma(k\lambda)\Gamma(\lambda)}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}(t-s)^{\lambda k-3/2}\int_0^1\theta_1^{\lambda k-1}(1-\theta_1)^{\lambda-1}d\theta_1 \\
&= \frac{C\tilde{C}^k e^{\eta_1(t-s)}}{\Gamma((k+1)\lambda)}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}(t-s)^{\lambda k-3/2},
\end{aligned}$$

що і треба було довести. Підсумувавши нерівності (5.30) для всіх натуральних k, одержимо, що

$$|\Phi(t,x;s)| \leqslant Ce^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}e^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-3/2+\lambda}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}).$$

Скористаємося отриманою нерівністю для доведення оцінки (5.4). Маємо такий ланцюг оцінок:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t d\theta\int_{\mathbb{R}}W(t,x-\zeta;\theta)\Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta\right| \\
&\quad\leqslant C\int_s^t d\theta\int_{\mathbb{R}}(t-\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varkappa(x-\zeta)^2}{t-\theta}}\frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(\theta-s)^{\lambda})}{(\theta-s)^{3/2-\lambda}}e^{\eta_1(\theta-s)}e^{-\frac{\varkappa\zeta^2}{\theta-s}}d\zeta \\
&\quad\leqslant Ce^{\eta_1(t-s)}\int_s^t\frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(\theta-s)^{\lambda})}{(\theta-s)^{1-\lambda}}d\theta\int_{\mathbb{R}}(t-\theta)^{-\frac{1}{2}}(\theta-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\varkappa\left(\frac{\zeta^2}{\theta-s}+\frac{(x-\zeta)^2}{t-\theta}\right)}d\zeta \\
&\quad\overset{(5.31)}{=} Ce^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}\int_s^t(\theta-s)^{-1+\lambda}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(\theta-s)^{\lambda})d\theta \\
&\quad\leqslant Ce^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-1/2}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})\int_s^t(\theta-s)^{-1+\lambda}d\theta \\
&\quad= C(t-s)^{-1/2+\lambda}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}e^{\eta_1(t-s)}E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}).
\end{aligned}$$

Скориставшись (5.27), а також тим, що при $t > s$ $e^{\eta(t-s)} \geqslant 1$, $E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}) \geqslant \frac{1}{\Gamma(\lambda)}$, одержимо, що

$$\begin{aligned}|p(t,x;s)| &\leqslant |W(t,x;s)| + \left| \int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} W(t, x-\zeta;\theta)\Phi(\theta,\zeta;s)\, d\zeta \right| \\ &\leqslant C(t-s)^{-1/2} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}).\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться (5.5), лише замість (5.27) використовуємо (5.28). Для доведення (5.6) розпишемо

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'}\right| &= \left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'}\right| \mathbf{1}_{(x'-x)^2 < A(t-s)} \\ &+ \left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'}\right| \mathbf{1}_{(x'-x)^2 \geqslant A(t-s)},\end{aligned} \tag{5.32}$$

де $A > 0$. Нехай

$$(x'-x)^2 < A(t-s), \tag{5.33}$$

покажемо, що за вказаного припущення

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'}\right| &\leqslant C(\phi, A)|x-x'|^{\phi}(t-s)^{-3/2} \\ &\times e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} e^{\eta(t-s)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}).\end{aligned} \tag{5.34}$$

Спочатку зауважимо, що

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x';s)}{\partial x'}\right| &\leqslant C \left| \int_x^{x'} \left| \frac{\partial^2 W(t,v;s)}{\partial v^2} \right| dv \right| \\ &\overset{(5.29)}{\leqslant} C \left| \int_x^{x'} \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{\varkappa v^2}{t-s}}\, dv \right| \leqslant C \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{\varkappa (x^*)^2}{t-s}} \int_0^{\frac{|x-x'|}{2}} e^{-\frac{(\varkappa-\varkappa_1)w^2}{t-s}}\, dw \\ &\leqslant C \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{\varkappa_1 (x^*)^2}{t-s}} \int_0^{\frac{|x-x'|}{2}} \left(\frac{t-s}{w^2}\right)^{l} dw \leqslant C \frac{1}{(t-s)^{3/2-l}} e^{-\frac{\varkappa_1 (x^*)^2}{t-s}} |x-x'|^{1-2l},\end{aligned} \tag{5.35}$$

де $0 \leqslant l < 1/2$, $x^* = \epsilon x + (1-\epsilon)x'$, $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$, $0 < \varkappa_1 < \varkappa$. Тепер покажемо, що за умови (5.33) для деякого $\varkappa_2 \in (0, \varkappa_1)$ виконується нерівність

$$e^{-\frac{\varkappa_1 (x^*)^2}{t-s}} \leqslant C e^{-\frac{\varkappa_2 x^2}{t-s}}. \tag{5.36}$$

Стала C в даній нерівності не залежить від x^*, проте залежить від A. Розіб'ємо її доведення на дві частини:

1. Нехай $|x| > 3|x-x'|$. Тоді має місце такий ланцюг нерівностей:
$$e^{-\frac{\varkappa_1 (x^*)^2}{t-s}} = e^{-\frac{\varkappa_1 x^2}{t-s}} e^{\frac{\varkappa_1 (x-x^*)(x+x^*)}{t-s}} \leqslant e^{-\frac{\varkappa_1 x^2}{t-s}} e^{\frac{\varkappa_1 |x-x'|(2|x|+|x-x^*|)}{t-s}}$$
$$< e^{-\frac{\varkappa_1 x^2}{t-s}} e^{\frac{7\varkappa_1 x^2}{9(t-s)}} = e^{-\frac{2\varkappa_1 x^2}{9(t-s)}}.$$

2. Тепер припустимо, що $|x| \leqslant 3|x-x'|$. Маємо, що
$$e^{-\frac{\varkappa_1 (x^*)^2}{t-s}} \leqslant 1 \leqslant e^A e^{-\frac{(x'-x)^2}{t-s}} \leqslant e^A e^{-\frac{x^2}{9(t-s)}}.$$

Отже, можемо покласти в (5.36) $C = \max\{e^A, 1\}$, $\varkappa_2 = \min\{2\varkappa_1/9, 1/9\}$. З урахуванням (5.36) нерівність (5.35) перепишеться таким чином:
$$\left| \frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x';s)}{\partial x'} \right| \leqslant C \frac{1}{(t-s)^{3/2-l}} e^{-\frac{\varkappa_2 x^2}{t-s}} |x-x'|^{1-2l}. \tag{5.37}$$

Тепер розпишемо різницю похідних функції p у вигляді
$$\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'} = \left(\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x';s)}{\partial x'} \right)$$
$$+ \int_{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t,x-\zeta;\theta)}{\partial x} \Phi(\theta,\zeta;s)\, d\zeta$$
$$- \int_{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t,x'-\zeta;\theta)}{\partial x'} \Phi(\theta,\zeta;s)\, d\zeta$$
$$+ \int_{s}^{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}} d\theta \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial W(t,x-\zeta;\theta)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x'-\zeta;\theta)}{\partial x'} \right) \Phi(\theta,\zeta;s)\, d\zeta$$
$$= J_0 + J_1 + J_2 + J_3.$$

Оцінимо інтеграл J_1:
$$|J_1| = \left| \int_{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t,x-\zeta;\theta)}{\partial x} \Phi(\theta,\zeta;s)\, d\zeta \right|$$
$$\leqslant C \int_{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}} e^{-\varkappa\left(\frac{\zeta^2}{\theta-s} + \frac{(x-\zeta)^2}{t-\theta}\right)} \frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(\theta-s)^\lambda)}{(t-\theta)(\theta-s)^{3/2-\lambda}} e^{\eta_1(\theta-s)} d\zeta$$
$$\leqslant C e^{\eta_1(t-s)} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} \frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda)}{(t-s)^{1/2}} \int_{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}}^{t} (t-\theta)^{-1/2} (\theta-s)^{\lambda-1}\, d\theta$$
$$\leqslant C e^{\eta_1(t-s)} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} \frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda)}{(t-s)^{1/2}} \left(t-s-\frac{|x'-x|^2}{2A} \right)^{\lambda-1} \left(\frac{|x'-x|^2}{2A} \right)^{1/2}$$
$$\leqslant C e^{\eta_1(t-s)} e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} (t-s)^{-3/2+\lambda} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^\lambda) |x-x'|, \tag{5.38}$$

де для того, щоб отримати оцінку, скористалися (5.31) та тим, що нерівність (5.33) можна переписати у вигляді $t-s-\frac{|x'-x|^2}{2A} > \frac{t-s}{2}$. Міркуючи аналогічно до доведення (5.38) та використавши (5.36), одержимо, що

$$\begin{aligned}|J_2| &= \left|\int_{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t,x'-\zeta;\theta)}{\partial x'} \Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta\right| \\ &\leqslant Ce^{\eta_1(t-s)} e^{-\frac{\varkappa_2 x^2}{t-s}} (t-s)^{-3/2+\lambda} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})|x-x'|. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Для того, щоб оцінити J_3, скористаємося (5.31) та нерівністю (5.37) при $\tilde{A} = 2A$.

$$\begin{aligned}|J_3| &\leqslant \int_s^{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}} d\theta \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial W(t,x-\zeta;\theta)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x'-\zeta;\theta)}{\partial x'}\right| |\Phi(\theta,\zeta;s)|\,d\zeta \\ &\leqslant C|x-x'|^{1-2l} \int_s^{t-\frac{|x'-x|^2}{2A}} d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\varkappa_2\left(\frac{\zeta^2}{\theta-s}+\frac{(x-\zeta)^2}{t-\theta}\right)} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(\theta-s)^{\lambda})}{(t-\theta)^{3/2-l}(\theta-s)^{3/2-\lambda}} e^{\eta_1(\theta-s)} d\zeta \\ &\leqslant C|x-x'|^{1-2l} e^{\eta_1(t-s)} e^{-\frac{\varkappa_2 x^2}{t-s}} \frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})}{(t-s)^{1/2}} \int_s^t (t-\theta)^{l-1}(\theta-s)^{\lambda-1}\,d\theta \\ &\leqslant C|x-x'|^{1-2l} e^{\eta_1(t-s)} e^{-\frac{\varkappa_2 x^2}{t-s}} (t-s)^{-3/2+l+\lambda} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}), \end{aligned} \tag{5.40}$$

де в якості l можемо взяти довільне число з інтервала $(0, 1/2)$. Бачимо, що нерівність (5.34) випливає з (5.37), (5.38), (5.39) and (5.40).

Тепер припустимо, що $(x'-x)^2 \geqslant A(t-s)$. Тоді різницю похідних функції W можна оцінити таким чином:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x';s)}{\partial x'}\right| &\leqslant \left|\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial W(t,x';s)}{\partial x'}\right| \\ &\leqslant C(t-s)^{-1} \max\left\{e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}, e^{-\frac{\varkappa (x')^2}{t-s}}\right\} \\ &\leqslant C(t-s)^{-3/2+l} \left(\frac{|x'-x|}{\sqrt{A}}\right)^{1-2l} \max\left\{e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}, e^{-\frac{\varkappa (x')^2}{t-s}}\right\}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

де $l \in (0, 1/2)$. Крім того,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t, x-\zeta;\theta)}{\partial x}\Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta\right| \\
&\leqslant C\int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} e^{-\varkappa\left(\frac{\zeta^2}{\theta-s}+\frac{(x-\zeta)^2}{t-\theta}\right)} \frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(\theta-s)^{\lambda})}{(t-\theta)(\theta-s)^{3/2-\lambda}} e^{\eta_1(\theta-s)} d\zeta \\
&\leqslant Ce^{\eta_1(t-s)}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} \frac{E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda})}{(t-s)^{1/2}} \left(\frac{|x'-x|}{\sqrt{A}}\right)^{1-2l} \int_s^t (\theta-s)^{-1+\lambda}(t-\theta)^{-1+l} d\theta \\
&= Ce^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-3/2+l+\lambda}e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}} \left(\frac{|x'-x|}{\sqrt{A}}\right)^{1-2l} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

і аналогічно доводимо, що

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t, x'-\zeta;\theta)}{\partial x'}\Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta\right| \\
&\qquad \leqslant Ce^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-3/2+l+\lambda}e^{-\frac{\varkappa (x')^2}{t-s}} \left(\frac{|x'-x|}{\sqrt{A}}\right)^{1-2l} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

З (5.41), (5.42) та (5.43) випливає, що при $(x'-x)^2 \geqslant A(t-s)$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial p(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial p(t,x';s)}{\partial x'}\right| \leqslant \left|\frac{\partial W(t,x;s)}{\partial x} - \frac{\partial W(t,x';s)}{\partial x'}\right| \\
&\qquad + \left|\int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t, x-\zeta;\theta)}{\partial x}\Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta\right| \\
&\qquad + \left|\int_s^t d\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial W(t, x'-\zeta;\theta)}{\partial x'}\Phi(\theta,\zeta;s)\,d\zeta\right| \\
&\quad \leqslant Ce^{\eta_1(t-s)}(t-s)^{-3/2} \max\left\{e^{-\frac{\varkappa x^2}{t-s}}, e^{-\frac{\varkappa (x')^2}{t-s}}\right\} |x'-x|^{\phi} E_{\lambda,\lambda}(\tilde{C}(t-s)^{\lambda}),
\end{aligned} \tag{5.44}$$

де $\phi \in (0,1)$. Скориставшись (5.32), (5.34) та (5.44) при $A = 1$, одержимо (5.6). $\square$

5.3. Висновки

В розділі 5 також було розглянуто розв'язок параболічного рівняння, керованого загальною стохастичною мірою. Була проаналізована його поведінка при нескінченному зростанні часової змінної. За допомогою оцінок фундаментального розв'язку параболічного рівняння доведена лема про прямування до нуля стохастичного інтеграла при прямуванні до нескінченності часової змінної. Показано, що розв'язок рівняння також прямує до нуля.

Розділ 6

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ БАГАТОВИМІРНОГО ІНТЕГРАЛУ ЗА СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ, ЗАЛЕЖНОГО ВІД ПАРАМЕТРА

В даному розділі розглядаються інтеграли за стохастичними мірами, визначеними на борелевих підмножинах $[0,1]^d$. Для дослідження їх властивостей використовуються функції Хаара та ряди Фур'є-Хаара (підрозділ 2.4). Отримані результати були опубліковані у [44].

6.1. Інтеграл по d-вимірному брусу

Спочатку розглянемо інтеграл вигляду

$$\eta(z)=\int_{[0,1]^d} q(z,x)\,d\mu(x),\ \ z\in Z, \tag{6.1}$$

де Z — деякий метричний простір, $q(z,\cdot)$ неперервна для довільного фіксованого $z\in Z$. За вказаної умови $\lim_{k\to\infty} S_{2^k}^{(d)}(q,x)=q(x)$ для довільного фіксованого $x\in[0,1]^d$ (див. лему 2.4.1). Тепер можемо скористатися пунктом 4 твердження 2.1.1 і одержати, що

$$\int_{[0,1]^d} q(z,x)\,d\mu(x)=\operatorname{p}\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]^d} S_{2^k}^{(d)}(q,x)\,d\mu(x)\quad \forall z\in Z.$$

Іншими словами, випадкова функція

$$\tilde\eta(z)=\int_{[0,1]^d} S_1^{(d)}(q,x)\,d\mu(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{[0,1]^d}(S_{2^k}^{(d)}(q,x)-S_{2^{k-1}}^{(d)}(q,x))\,d\mu(x). \tag{6.2}$$

є модифікацією функції η, визначеної рівністю (6.1). Зауважимо, що всі інтеграли у (6.2) є інтегралами від простих функцій. Тепер доведемо лему про рівномірну обмеженість функції $\tilde\eta$.

Лема 6.1.1. Нехай функція $q(z,x)\colon Z\times[0,1]^d\to\mathbb{R}$ неперервно диференційовна l разів на $[0,1]^d$ для кожного $z\in Z$, причому

$$\left|\frac{\partial^r q(z,x)}{\partial x_{s_1}\ldots\partial x_{s_r}}\right|\leqslant C_q,\ \ x\in[0,1]^d, \tag{6.3}$$

для довільних $0 \leqslant r \leqslant l$, $s_1, \dots, s_r \subset \{1, \dots, d\}$; через C_q будемо позначати довільну додатну сталу, яка залежить від q, але не залежить від z. Більш того, похідні l-го порядку неперервні за Гельдером з показником $\alpha > 0$:

$$\left| \frac{\partial^l q(z, x^{(1)})}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_l}} - \frac{\partial^l q(z, x^{(2)})}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_l}} \right| \leqslant C_q |x^{(1)} - x^{(2)}|^\alpha. \tag{6.4}$$

Якщо $l + \alpha > d/2$, то модифікація (6.2) задовольняє нерівність

$$|\tilde{\eta}(z)| \leqslant C_q C_\mu^{(d)}(\omega),$$

де через $C_\mu^{(d)}(\omega)$ позначаємо випадкову сталу, яка залежить лише від d та μ, $C_\mu^{(d)}(\omega) < \infty$ м.н. Крім того, ряд (6.2) збігається абсолютно та рівномірно, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z \in Z} \left| \int_{[0,1]^d} (S_{2^k}^{(d)}(q, x) - S_{2^{k-1}}^{(d)}(q, x)) \, d\mu(x) \right| \leqslant C_q C_\mu^{(d)}(\omega). \tag{6.5}$$

Доведення. З означення часткової суми ряду Хаара (див. (2.19)) випливає, що

$$\int_{[0,1]^d} S_{2^k}^{(d)}(q, x) \, d\mu(x) = \sum_{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_k^{(d)}} c_{n_1, \dots, n_d}^{(d)}(q) \int_{[0,1]^d} \chi_{n_1, \dots, n_d}^{(d)}(x) \, d\mu(x). \tag{6.6}$$

Тепер оцінимо $c_{n_1, \dots, n_d}^{(d)}(q)$. Для цього ми для кожного $n_s \geqslant 2$ виберемо j_s таким чином, що $2^{j_s} + 1 \leqslant n_s \leqslant 2^{j_s + 1}$; при цьому $j_s \geqslant 0$. Позначимо через $\{j^{(k)}, 1 \leqslant k \leqslant d\}$ перестановку $\{j_k, 1 \leqslant k \leqslant d\}$, для якої

$$j^{(1)} \leqslant j^{(2)} \leqslant \dots \leqslant j^{(d)}.$$

Якщо $n_{s_1} = \dots = n_{s_i} = 1$, то будемо вважати, що $j^{(1)} = \dots = j^{(i)} = 0$. Також будемо позначати через e_i вектор $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$. Виявляється, що в позначеннях розділу 2.4

$$\begin{aligned}
c^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(q) &= \int_{[0,1]^d} q(z,t)\chi^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(t)\,dt = \int_{[0,1]^d} q(z,t)\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\chi_{n_s}(t_s)\,dt \\
&= 2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s/2}\int_{[0,1]^d} q(z,t)\prod_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2}\Big(\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s)-\mathbf{1}_{\Delta^-_{n_s}}(t_s)\Big)\,dt \\
&= 2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s/2}\int_{[0,1]^d} q(z,t)\times\prod_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2}\Big(\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s)-\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s-2^{-j_s-1})\Big)\,dt \\
&\overset{(*)}{=} 2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s/2}\int_{[0,1]^d}\sum_{\varepsilon_s\in\{0,1\}, n_s\geqslant 2}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d} \\
&\quad\times q(z,t_1+\varepsilon_1 2^{-j_1-1},\ldots,t_d+\varepsilon_d 2^{-j_d-1})\prod_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2}\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s)\,dt \\
&= 2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s/2}\int_{\prod_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2}\Delta^+_{n_s}}\sum_{\varepsilon_s\in\{0,1\}, n_s\geqslant 2}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d} \\
&\quad\times q(z,t_1+\varepsilon_1 2^{-j_1-1},\ldots,t_d+\varepsilon_d 2^{-j_d-1})\,dt, \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

де рівність $(*)$ було отримано шляхом розкриття дужок у добутку

$$\prod_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2}\Big(\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s)-\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s-2^{-j_s-1})\Big)$$

та заміни змінних $t_s-2^{-j_s-1}\to t_s$ у доданках, що містять $\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(t_s-2^{-j_s-1})$. Вираз

$$\sum_{\varepsilon_s\in\{0,1\}, n_s\geqslant 2}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d}q(z,t_1+\varepsilon_1 2^{-j_1-1},\ldots,t_d+\varepsilon_d 2^{-j_d-1}) \qquad (6.8)$$

можна представити як суму щонайбільше 2^{d-1} доданків вигляду

$$q(z,t^*)-q(z,t^*+2^{-j^{(d)}-1}e_{s_d}) = \int_0^{2^{-j^{(d)}-1}}\frac{\partial q(z,t^*+h_{s_d})}{\partial t_{s_d}}dh_{s_d}, \qquad j^{(d)}=j_{s_d}.$$

При цьому (6.8) перепишеться як

$$\int_0^{2^{-j^{(d)}-1}}\sum_{\varepsilon_s\in\{0,1\}, n_s\geqslant 2, s\neq s_d}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d}\frac{\partial q(z,t_1+\varepsilon_1 2^{-j_1-1},\ldots,t_d+\varepsilon_d 2^{-j_d-1})}{\partial t_{s_d}}.$$

Отже, можемо повторити дані міркування ще $l-1$ разів. Скориставшись, крім того, нерівностями (6.3) та (6.4), можемо отримати такий наслідок (6.7):

$$|c^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(q)| \leqslant C_q 2^{d-l-1} 2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} -j_s/2} 2^{-(j^{(d)}+\cdots+j^{(d-l+1)}+\alpha j^{(d-l)})}. \qquad (6.9)$$

Тепер перейдемо до оцінки лівої частини у (6.5).

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z\in Z}\Big|\int_{[0,1]^d} (S^{(d)}_{2^k}(q,x) - S^{(d)}_{2^{k-1}}(q,x))\, d\mu(x)\Big| \\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z\in Z}\Big| \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}} c^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(q) \int_{[0,1]^d} \chi^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(x)\, d\mu(x)\Big| \\
&\quad\overset{(6.9)}{\leqslant} 2^d C_q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}} 2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} -j_s/2} 2^{-(j^{(d)}+\cdots+j^{(d-l+1)}+\alpha j^{(d-l)})} \\
&\qquad\times \Big|\int_{[0,1]^d} \chi^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(x)\, d\mu(x)\Big| \\
&\quad\leqslant 2^d C_q \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}} 2^{\beta\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s} 2^{-2(j^{(d)}+\cdots+j^{(d-l+1)}+\alpha j^{(d-l)})}\Big)^{1/2} \\
&\qquad\times \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}} 2^{(-\beta-1)\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s} \Big(\int_{[0,1]^d} \chi^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(x)\, d\mu(x)\Big)^2\Big)^{1/2} \\
&\quad:= 2^d C_q P_1^{1/2} P_2^{1/2}.
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що за припущенням леми $l+\alpha > d/2$. Отже, можемо обрати $\beta \in (0, 2(l+\alpha)/d - 1)$ і одержати, що

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sup_{k\geqslant 1} \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k} 2^{\beta\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s} 2^{-2(j^{(d)}+\cdots+j^{(d-l+1)}+\alpha j^{(d-l)})} \\
&= \sup_{k\geqslant 1} \sum_{A\subset\{1,\ldots,d\}} \sum_{\substack{0\leqslant j_i\leqslant k,\\ i\in A}} 2^{(\beta+1)\sum_{i\in A} j_i - 2(j^{(d)}+\cdots+j^{(d-l+1)}+\alpha j^{(d-l)})} \\
&\leqslant 2^d \sup_{k\geqslant 1} \sum_{0\leqslant j_i\leqslant k} 2^{(\beta+1-2(l+\alpha)/d)\sum_{i=1}^d j_i} = 2^d C,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

де через A у другому рядку позначили множину тих індексів i, для яких $n_i = 1$. Тепер введемо позначення

$$\tilde{P}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}} 2^{(-\beta/2-1/2)\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s} |\chi^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(x)|.$$

Можемо оцінити $\tilde{P}_2$ таким чином:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_2 &= \sup_{k\geqslant 1} \sum_{(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}_k^{(d)}} 2^{(-\beta/2-1/2)\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s} |\chi_{n_1}(x_1)\dots\chi_{n_d}(x_d)| \\ &\leqslant \sup_{k\geqslant 1} \sum_{(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}_k^{(d)}} 2^{(-\beta/2)\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s} \\ &\quad \times \prod_{s=1}^{d}\Big(\mathbf{1}_{\Delta_{n_s}}(x_s) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{(i-1)2^{-j_s}\}}(x_s) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i2^{-j_s}\}}(x_s)\Big) \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \sup_{k\geqslant 1} \sum_{A\subset\{1,\dots,d\}} \sum_{\substack{0\leqslant j_s\leqslant k,\\ s\in A}} 2^{(-\beta/2)\sum_{s\in A} j_s} \leqslant 2^d \sup_{k\geqslant 1} \sum_{0\leqslant j_s\leqslant k} 2^{(-\beta/2)\sum_{s=1}^{d} j_s} = C^{(d)}.\end{aligned}$$

Нерівність $(*)$ випливає з того, що для довільного набору $(j_1,\dots,j_d)$ та фіксованого $x \neq i2^{-j_s}$ знайдеться рівно один набір $(n_1,\dots,n_d)$, для якого $\chi^{(d)}_{n_1,\dots,n^d}(x) \neq 0$ та $2^{j_s}+1 \leqslant n_s \leqslant 2^{j_s+1}$. Якщо ж $x = i2^{-j_s}$, матимемо два можливих значення n_s, узяті з коефіцієнтом $1/2$. Оскільки ряд $\tilde{P}_2$ збігається, то за лемою 2.2.2 ряд P_2 також збігається:

$$P_2 \leqslant C^{(d)}_{\mu}(\omega). \tag{6.11}$$

З (6.10) та (6.11) випливає твердження леми. □

Зауваження 6.1.1. Для того, щоб ряд (6.1) збігався м. н. при кожному $z \in Z$, достатньо, щоб у нерівностях (6.3) та (6.4) стала C_q залежала не тільки від q, а і від z. При цьому справедливий такий аналог (6.5):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_{[0,1]^d}(S^{(d)}_{2^k}(q,x) - S^{(d)}_{2^{k-1}}(q,x))\,d\mu(x)\Big| \leqslant C_{q,z}C^{(d)}_{\mu}(\omega).$$

Дане твердження доводиться таким самим чином, як і лема, лише замість C_q всюди пишемо $C_{q,z}$.

Тепер скористаємося наведеними результатами для доведення властивостей $\tilde{\eta}(z)$ як функції від z. Спочатку покажемо її неперервність.

Теорема 6.1.1. *Нехай Z — метричний простір, функція $q(z,x) : Z\times[0,1]^d \to \mathbb{R}$ неперервно диференційовна l разів на $[0,1]^d$, де $l \geqslant 0$, при всіх $z \in Z$, причому*

$$\left|\frac{\partial^r q(z,x)}{\partial x_{s_1}\dots\partial x_{s_r}}\right| \leqslant C_q,\ x \in [0,1]^d$$

для деякої незалежної від z *додатної сталої* C_q *і довільних цілих* $0 \leqslant r \leqslant l$, $s_1, \dots, s_r \subset \{1, \dots, d\}$. *Нехай також похідні* l*-го порядку неперервні за Гельдером з показником* $\alpha > 0$, *причому*

$$\left|\frac{\partial^l q(z, x^{(1)})}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_l}} - \frac{\partial^l q(z, x^{(2)})}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_l}}\right| \leqslant C_q |x^{(1)} - x^{(2)}|^{\alpha},$$

де $l + \alpha > d/2$. *Крім того, всі траекторії* $q(\cdot, x)$ *неперервні на* Z *при довільному фіксованому* x. *Тоді випадкова функція* $\tilde{\eta}(z)$, *визначена співвідношенням* (6.1), *є неперервною за змінною* z.

Доведення. З представлення (6.7) випливає, що коефіцієнти

$$c^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(q) = 2^{\sum_{1 \leqslant s \leqslant d, n_s \geqslant 2} j_s/2} \int_{\prod_{1 \leqslant s \leqslant d, n_s \geqslant 2} \Delta^+_{n_s}} \sum_{\varepsilon_s \in \{0,1\}, n_s \geqslant 2} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d}$$
$$\times\, q(z, t_1 + \varepsilon_1 2^{-j_1 - 1}, \dots, t_d + \varepsilon_d 2^{-j_d - 1})\, dt,$$

є неперервними функціями від z, а з рівності (6.6) — те, що неперервною по z при фіксованих k і ω є і сума $\int_{[0,1]^d} S^{(d)}_{2^k}(q, x)\, d\mu(x)$. Оскільки ряд (6.2) збігається рівномірно при $k \to \infty$, його сума також неперервна по z, що і треба було довести.

□

Тепер доведемо теорему про існування похідної функції $\tilde{\eta}$.

Теорема 6.1.2. *Нехай функція* $q(z, x)\colon Z \times [0,1]^d \to \mathbb{R}$, $Z = [a, b]$, *неперервно диференційовна* $l + 1$ *разів на* $Z \times [0,1]^d$, *причому*

$$\left|\frac{\partial^{r+1} q(z, x)}{\partial z \partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_r}}\right| \leqslant C_q, \ \ x \in [0,1]^d,$$

для довільних $0 \leqslant r \leqslant l$, $s_1, \dots, s_r \subset \{1, \dots, d\}$. *Більш того, похідні* $l + 1$*-го порядку неперервні за Гельдером з показником* $\alpha > 0$*:*

$$\left|\frac{\partial^{l+1} q(z, x^{(1)})}{\partial z \partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_l}} - \frac{\partial^{l+1} q(z, x^{(2)})}{\partial z \partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_l}}\right| \leqslant C_q |x^{(1)} - x^{(2)}|^{\alpha}.$$

Якщо $l + \alpha > d/2$, *то траекторії випадкової функції* $\tilde{\eta}$, *визначеної співвідношенням* (6.1), *мають обмежені на* Z *похідні, які обчислюються зі співвідношення*

$$\frac{d\tilde{\eta}(z)}{dz} = \int_{[0,1]^d} \frac{\partial q(z, x)}{\partial z}\, d\mu(x).$$

Доведення. За лемою 6.1.1

$$\int_{[0,1]^d} \frac{\partial q(z,x)}{\partial z}\, d\mu(x)$$
$$= \int_{[0,1]^d} S_1^{(d)}\Big(\frac{\partial q}{\partial z}, x\Big)\, d\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[0,1]^d} \Big(S_{2^k}^{(d)}\Big(\frac{\partial q}{\partial z}, x\Big) - S_{2^{k-1}}^{(d)}\Big(\frac{\partial q}{\partial z}, x\Big)\Big)\, d\mu(x),$$

де ряд у правій частині збігається рівномірно. Також врахувавши, що

$$\int_{[0,1]^d} S_{2^k}^{(d)}\Big(\frac{\partial q}{\partial z}, x\Big)\, d\mu(x) = \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}_k} c_{n_1,\ldots,n_d}^{(d)}\Big(\frac{\partial q}{\partial z}\Big) \int_{[0,1]^d} \chi_{n_1,\ldots,n_d}^{(d)}(x)\, d\mu(x)$$
$$\overset{(6.7)}{=} \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}_k} \frac{\partial c_{n_1,\ldots,n_d}^{(d)}(q)}{\partial z} \int_{[0,1]^d} \chi_{n_1,\ldots,n_d}^{(d)}(x)\, d\mu(x) = \frac{d}{dz} \int_{[0,1]^d} S_{2^k}^{(d)}(q,x)\, d\mu(x)$$

і зауваження 6.1.1, можемо скористатися теоремою про диференціювання функціонального ряду і одержати, що

$$\frac{d\tilde{\eta}(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \int_{[0,1]^d} S_1^{(d)}(q,x)\, d\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \int_{[0,1]^d} (S_{2^k}^{(d)}(q,x) - S_{2^{k-1}}^{(d)}(q,x))\, d\mu(x)$$
$$= \int_{[0,1]^d} \frac{\partial q(z,x)}{\partial z}\, d\mu(x),$$

що і треба було довести. □

6.2. Інтеграл як функція від верхньої межі

У цій частині роботи будемо розглядати властивості інтеграла вигляду

$$\xi(y) = \int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]} q(x)\, d\mu(x), \tag{6.12}$$

де $q(x)\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in [0,1]^d$. За лемою 2.4.1 випадкова функція

$$\tilde{\xi}(y) = \int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]} S_1^{(d)}(q,x)\, d\mu(x)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]} (S_{2^k}^{(d)}(q,x) - S_{2^{k-1}}^{(d)}(q,x))\, d\mu(x). \tag{6.13}$$

є модифікацією $\xi(y)$. Доведемо неперервність траекторій $\tilde{\xi}$ за виконання наступних умов.

Умова 6.2.1. Випадкова функція

$$\mu(x) = \mu(\prod_{i=1}^{d}[0, x_i]),\ x \in [0,1]^d, \tag{6.14}$$

має неперервні траєкторії.

Умова 6.2.2. Якщо $d \geqslant 2$, то для функції $\mu(x)$, заданої співвідношенням (6.14), має місце збіжність $\sum_{k=1}^{\infty} k^{d-2}\omega_{[0,1]^d}(\mu, 2^{-k}) < \infty$ м.н.

Зауваження 6.2.1. Нескладно бачити, що умова 6.2.2 виконується, якщо функція $\mu(x)$ має неперервні за Гельдером траєкторії. Тепер наведемо інший приклад випадкової функції, що задовольняє умову. Покладемо

$$q(\tau) = |\ln\tau|^{-\gamma},\ \gamma > d - 1/2, \qquad \mathcal{K}(z) = \sqrt{\frac{dq^2(z)}{dz}}.$$

Тепер введемо випадковий процес

$$B^q(x) = \int_{\prod_{s=1}^{d}[0,x_s]} \prod_{s=1}^{d} \mathcal{K}(x_s - y_s)dW(y),\ x = (x_1, \ldots, x_d),$$

де через W позначаємо d-вимірний вінерівський процес. [22, Theorem 3.1] стверджує, що для деякого d-вимірного брусу вигляду $[t, T] = \prod_{i=1}^{d}[t_i, T_i] \subset [0,1]^d$ виконується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{\substack{x,\bar{x}\in[t,T]\\ \delta_{x,\bar{x}}\leqslant\varepsilon}} \frac{|B^q(x) - B^q(\bar{x})|}{\delta_{x,\bar{x}}\sqrt{\ln\left(\frac{D}{q^{-1}(\delta_{x,\bar{x}})}\right)}} = C \text{ м.н.}, \tag{6.15}$$

де $\delta_{x,\bar{x}} = \|B^q(x) - B^q(\bar{x})\|_{L^2(\Omega)} \leqslant Cq(|x - \bar{x}|)$, а через D позначаємо діаметр множини $[t, T]$. Тепер, скориставшись нерівністю (6.15), одержуємо, що для довільних $x, \bar{x} \in [t, T]$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} |B^q(x) - B^q(\bar{x})| &\leqslant C\delta_{x,\bar{x}}\sqrt{\ln D + \delta_{x,\bar{x}}^{-1/\gamma}} \\ &\overset{\gamma>1/2}{\leqslant} C|\ln|x - \bar{x}||^{-\gamma}\sqrt{\ln D + |\ln|x - \bar{x}||} \leqslant C|\ln|x - \bar{x}||^{1/2-\gamma}. \end{aligned}$$

Звідси, якщо покласти $\tilde{B}^q(x) = \tilde{B}^q(x_1, \ldots, x_d) = B^q(t_1 + x_1(T_1 - t_1), \ldots, t_d + x_d(T_d - t_d))$, одержимо, що

$$|\tilde{B}^q(x) - \tilde{B}^q(\bar{x})| \leqslant C|\ln|x - \bar{x}||^{-\gamma}\sqrt{\ln D + |\ln|x - \bar{x}||}.$$

Отже, $\omega_{[0,1]^d}(\tilde{B}^q,\tau)\leqslant C|\ln\tau|^{1/2-\gamma}$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{d-2}\omega_{[0,1]^d}(\tilde{B}^q,2^{-k})=\sum_{k=1}^{\infty}k^{d-3/2-\gamma}<\infty.$$

Тепер сформулюємо теорему.

Теорема 6.2.1. *Нехай стохастична міра μ задовольняє умови 6.2.1 та 6.2.2, в той час як функція $q(x)\colon[0,1]^d\to\mathbb{R}$ неперервно диференційовна d разів на $[0,1]^d$. Тоді траєкторії випадкової функції $\tilde{\xi}$, визначеної співвідношенням* (6.13), *є неперервними на* $[0,1]^d$.

Доведення. Спочатку доведемо, що для деякої додатної випадкової сталої $\tilde{C}^{(d)}_{q,\mu}(\omega)$, яка є скінченною м. н., має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{y\in[0,1]^d}\left|\int_{\prod_{s=1}^d[0,y_s]}(S^{(d)}_{2^k}(q,x)-S^{(d)}_{2^{k-1}}(q,x))\,d\mu(x)\right|\leqslant\tilde{C}^{(d)}_{q,\mu}(\omega).\tag{6.16}$$

За умовою 6.2.1,

$$\mu\left(\prod_{s=1}^{d}[y_{s1},y_{s2}]\cap\{x_s=a\}\right)=0.\tag{6.17}$$

Скориставшись даним твердженням, а також означенням інтегралу від простої функції оцінимо різницю $S^{(d)}_{2^k}(q,x)-S^{(d)}_{2^{k-1}}(q,x)$:

$$\begin{aligned}&\int_{\prod_{s=1}^d[0,y_s]}(S^{(d)}_{2^k}(q,x)-S^{(d)}_{2^{k-1}}(q,x))\,d\mu(x)\\&\quad=\sum_{(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}}c^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(q)\int_{\prod_{s=1}^d[0,y_s]}\chi^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(x)\,d\mu(x)\\&\quad\overset{(6.17)}{=}\sum_{(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}}c^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(q)2^{(j_1+\dots+j_d)/2}\\&\qquad\times\int_{\prod_{s=1}^d[0,y_s]}\prod_{1\leqslant s\leqslant d,n_s\geqslant2}\Big(\mathbf{1}_{\Delta^+_{n_s}}(x_s)-\mathbf{1}_{\Delta^-_{n_s}}(x_s)\Big)\,d\mu(x)\\&\quad=\sum_{(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^{(d)}_{k-1}}c^{(d)}_{n_1,\dots,n_d}(q)2^{(j_1+\dots+j_d)/2}\\&\qquad\times\sum_{\varepsilon_s\in\{+,-\}}\mu\left(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\Delta^{\varepsilon_s}_{n_s}\cap\prod_{1\leqslant s\leqslant d}[0,y_s]\right):=A_{k1}(y)+A_{k2}(y),\end{aligned}\tag{6.18}$$

де в якості $A_{k1}(y)$ беремо суму по всім $(n_1,\ldots,n_d)$ з $\mathbb{N}_k^{(d)}\setminus\mathbb{N}_{k-1}^{(d)}$ та ε_s з множини $\{+,-\}$, для яких

$$\prod_{s=1}^{d}\Delta_{n_s}^{\varepsilon_s}\subset\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]; \tag{6.19}$$

при цьому вважаємо, що при $n_s=1$ $\varepsilon_s=+$ та $\Delta_{n_s}^{+}=(0,1)$. Відповідно, до $A_{k2}(y)$ входять доданки, для яких включення (6.19) не має місця. Для доданків з $A_{k1}(y)$ маємо, що

$$\prod_{s=1}^{d}\Delta_{n_s}^{\varepsilon_s}\cap\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]=\prod_{s=1}^{d}\Delta_{n_s}^{\varepsilon_s}=\prod_{s=1}^{d}\Delta_{m_s}$$

де через $(m_1,\ldots,m_d)$ будемо позначати деякий вектор з $\mathbb{N}_{k+1}^{(d)}\setminus\mathbb{N}_k^{(d)}$, для якого $\Delta_{n_s}^{\varepsilon_s}=\Delta_{m_s}$. Скориставшись (6.18), можемо оцінити суму ряду у (6.16) як

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{y\in[0,1]^d}\left|\int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]}(S_{2^k}^{(d)}(q,x)-S_{2^{k-1}}^{(d)}(q,x))\,d\mu(x)\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{y\in[0,1]^d}|A_{k1}(y)|+\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{y\in[0,1]^d}|A_{k2}(y)|.$$

Тепер оцінимо суму супремумів $|A_{k1}(y)|$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{y\in[0,1]^d}|A_{k1}(y)|\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}_k^{(d)}\setminus\mathbb{N}_{k-1}^{(d)}}|c_{n_1,\ldots,n_d}^{(d)}(q)|2^{(j_1+\cdots+j_d)/2}\sum_{\varepsilon_s\in\{+,-\}}\Big|\mu\Big(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\Delta_{n_s}^{\varepsilon_s}\Big)\Big|\\
&\overset{(6.7)}{\leqslant}C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}_k^{(d)}\setminus\mathbb{N}_{k-1}^{(d)}}2^{-(j_1+\cdots+j_d)}\sum_{\varepsilon_s\in\{+,-\}}\Big|\mu\Big(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\Delta_{n_s}^{\varepsilon_s}\Big)\Big|\\
&\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{N}_{k+1}^{(d)}\setminus\mathbb{N}_k^{(d)}}2^d2^{-(j_1'+\cdots+j_d')}\Big|\mu\Big(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\Delta_{m_s}\Big)\Big| \qquad (6.20)\\
&\leqslant C2^d\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{N}_{k+1}^{(d)}\setminus\mathbb{N}_k^{(d)}}2^{-(1-\beta)(j_1'+\cdots+j_d')}\right)^{1/2}\\
&\quad\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{N}_{k+1}^{(d)}\setminus\mathbb{N}_k^{(d)}}2^{-(1+\beta)(j_1'+\cdots+j_d')}\Big(\mu\Big(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\Delta_{m_s}\Big)\Big)^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

де j'_s вибирається зі співвідношення $2^{j'_s}+1 \leqslant m_s \leqslant 2^{j'_s+1}$. При цьому $j'_s = 0$ при $n_s = 1$ і $j'_s = j_s + 1$ в іншому випадку. Перший множник у (6.20) оцінюється так же, як і P_1, а другий — аналогічно до P_2 у доведенні леми 6.1.1, де ми замінюємо $\chi^{(d)}_{n_1,\ldots,n_d}(x)$ на $2^{(j'_1+\cdots+j'_d)/2}\prod_{1\leqslant s\leqslant d}\mathbf{1}_{\Delta_{m_s}}(x_s)$. При цьому одержуємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{y\in[0,1]^d}|A_{k1}(y)| \leqslant \tilde{C}^{(d)}_{q,\mu}(\omega).$$

Тепер оцінимо A_{k2}.

$$\begin{aligned}
|A_{k2}(y)| &\leqslant \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_k\setminus\mathbb{N}^d_{k-1},\\ \exists y_s\in\Delta^{\varepsilon_s}_{n_s}}} 2^{-\sum_{1\leqslant s\leqslant d, n_s\geqslant 2} j_s}\Big|\mu\Big(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}((\Delta_{n_s})^{\varepsilon_s}\cap[0,y_s])\Big)\Big| \\
&= 2^d \sum_{\substack{(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_{k+1}\setminus\mathbb{N}^{(d)}_k,\\ \exists y_s\in\Delta_{m_s}}} 2^{-\sum_{1\leqslant s\leqslant d, m_s\geqslant 3} j'_s}\Big|\mu\Big(\prod_{1\leqslant s\leqslant d}(\Delta_{m_s}\cap[0,y_s])\Big)\Big| \\
&\leqslant 2^d\omega_{[0,1]^d}(\mu, 2^{-k-1}) \sum_{\substack{(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{N}^{(d)}_{k+1}\setminus\mathbb{N}^{(d)}_k,\\ \exists y_s\in\Delta_{m_s}}} 2^{-\sum_{1\leqslant s\leqslant d, m_s\geqslant 3} j'_s} =: D_{k+1}.
\end{aligned}$$

Доведемо збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_y D_k$. Спочатку зауважимо, що для довільного фіксованого набору $(j'_1,\ldots,j'_d)$ знайдеться щонайбільше

$$2^{\sum_{1\leqslant s\leqslant d, m_s\geqslant 3} j'_s} - \prod_{1\leqslant s\leqslant d, m_s\geqslant 3}\big(2^{j'_s}-1\big)$$

векторів $(m_1\ldots,m_d)$, для яких $\exists y_s\in\Delta_{m_s}$. Позначивши через A множину індексів s, для яких $n_s = 1$, отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\sup_y D_k \leqslant 2^d\omega_{[0,1]^d}(\mu, 2^{-k}) \sum_{A\subset\{1,\ldots,d\}} \sum_{\substack{1\leqslant j'_i\leqslant k,\\ i\in A, \exists i^*:\, j'_{i^*}=k}} \Big(1-\prod_{i\in A}\big(1-2^{-j'_i}\big)\Big) \\
= 2^d\omega_{[0,1]^d}(\mu, 2^{-k})(T_k - T_{k-1}),
\end{aligned}$$

де

$$T_k = \sum_{A\subset\{1,\ldots,d\}} \sum_{\substack{1\leqslant j'_i\leqslant k,\\ i\in A}} \Big(1-\prod_{i\in A}\big(1-2^{-j'_i}\big)\Big).$$

Перетворимо T_k таким чином:

$$\begin{aligned}
T_k &= \sum_{A\subset\{1,\dots,d\}} \sum_{\substack{1\leqslant j_i'\leqslant k,\\ i\in A}} \sum_{\substack{B\subset A,\\ B\neq\varnothing}} (-1)^{|B|+1} 2^{-\sum_{i\in B} j_i'} \\
&= \sum_{A\subset\{1,\dots,d\}} \sum_{\substack{B\subset A,\\ B\neq\varnothing}} (-1)^{|B|+1} \sum_{\substack{1\leqslant j_i'\leqslant k,\\ i\in A}} 2^{-\sum_{i\in B} j_i'} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{u=1}^{d}\sum_{v=1}^{u} (-1)^{v+1} C_d^u C_u^v \sum_{\substack{1\leqslant j_i'\leqslant k,\\ 1\leqslant i\leqslant u}} 2^{-\sum_{1\leqslant i\leqslant v} j_i'} = \sum_{u=1}^{d}\sum_{v=1}^{u} (-1)^{v+1} C_d^u C_u^v (1-2^{-k})^v k^{u-v} \\
&= \sum_{u=1}^{d} C_d^u (k^u - (k-1+2^{-k})^u) = (k+1)^d - (k+2^{-k})^d,
\end{aligned}$$

де при переході $(*)$ ми скористалися тим, що значення суми $(-1)^{|B|+1} \sum_{\substack{1\leqslant j_i'\leqslant k,\\ i\in A}} 2^{-\sum_{i\in B} j_i'}$ залежить лише від $|A|$ та $|B|$. Тепер можемо повернутися до оцінки D_k і одержати, що

$$\begin{aligned}
\sup_y D_k &\leqslant 2^d \omega(\mu, 2^{-k}) \big((k+1)^d - (k+2^{-k})^d - k^d + (k-1+2^{-k+1}) \big) \\
&= 2^d \omega(\mu, 2^{-k}) \big((k+1)^d - 2k^d + (k-1)^d + O(2^{-\beta k}) \big),
\end{aligned}$$

де $0 < \beta < 1$. Скориставшись умовою 6.2.2, приходимо до співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{y\in[0,1]^d} |A_{k2}(y)| \leqslant \tilde{C}_{q,\mu}^{(d)}(\omega),$$

яке разом із аналогічною оцінкою для $A_{k1}(y)$ дає (6.16). Іншими словами, для кожного $\omega \in \Omega$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]} (S_{2^k}^{(d)}(q,x) - S_{2^{k-1}}^{(d)}(q,x))\, d\mu(x)$$

збігається рівномірно. З іншого боку, з представлення (6.18) та умови 6.2.1 видно, що кожен доданок вигляду

$$\int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]} (S_{2^k}^{(d)}(q,x) - S_{2^{k-1}}^{(d)}(q,x))\, d\mu(x)$$

є неперервною функцією від y, як і доданок

$$\int_{\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]} S_1^{(d)}(q,x)\, d\mu(x) = \mu\left(\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]\right) c_{1,\cdots,1}^{(d)}(q).$$

Звідси і випливає твердження теореми. □

6.3. Висновки

В розділі 6 досліджено стохастичні інтеграли по підмножинам $\mathbb{R}^d$, залежні від параметра. Передусім розглянуто інтеграл по $[0,1]^d$ від невипадкової функції, залежної від параметра, визначено достатні умови неперервності та диференційовності його траєкторій за параметром. Для отримання вказаного результату сформульовано та доведено лему про представлення інтеграла як суми рівномірно збіжного ряду. Також розглянуто інтеграл по $\prod_{s=1}^{d}[0,y_s]$, доведено неперервність інтеграла за параметром y при виконанні додаткових умов на підінтегральну функцію та стохастичну міру.

Розділ 7

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

У даному розділі викладено результати статті [30].

7.1. Постановка задачі

Розглядаємо формальне стохастичне рівняння вигляду

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2\Delta_x u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))dx + \sigma(t,x)d\mu(t)\,, & (t,x)\in D_T,\\ u(t,x)=0, & (t,x)\in S_T,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in B\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

де B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$. Нагадаємо також, що $D_T=(0,T]\times B$, $S_T=(0,T]\times\partial B$. Через Δ_x будемо позначати оператор Лапласа:

$$\Delta_x g(x)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2}.$$

У даному розділі будемо вважати, що $\mathcal{L}u=a^2\Delta_x u-\frac{\partial u}{\partial t}$. При цьому рівняння (7.1) буде частковим випадком (2.14) із вказаним $\mathcal{L}$.

Сформулюємо умови, які будемо накладати на функції u_0, f, σ, а також додаткові умови на область B та стохастичну міру μ.

Умова 7.1.1. Функція $u_0\colon \bar{B}\times\Omega\to\mathbb{R}$ є обмеженою і неперервною при довільному фіксованому $\omega\in\Omega$.

Умова 7.1.2. Функція f неперервна на $[0,T]\times\bar{B}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівностям

$$|f(s,y,z)|\leqslant C_f,$$
$$|f(s,y_1,z_1)-f(s,y_2,z_2)|\leqslant L_f\big(|y_1-y_2|^{\beta(f)}+|z_1-z_2|\big)$$

для деяких сталих L_f, $C_f > 0$, $\beta(f) > 0$ і довільних $s \in [0,T]$, y, y_1, $y_2 \in \bar{B}$, z, z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$.

Умова 7.1.3. Функція $\sigma(s,y)$ неперервна на $[0,T] \times \bar{B} \to \mathbb{R}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$|\sigma(s_1,y_1) - \sigma(s_2,y_2)| \leqslant L_\sigma(|y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)} + |s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)})$$

для деяких сталих $L_\sigma > 0$, $1 > \beta(\sigma) > 1/2$ і довільних $s_1, s_2 \in [0,T]$, $y_1\,, y_2 \in \bar{B}$.

Умова 7.1.4. Область $\bar{S}_T$ належить класу $A^{2+\lambda}$ в сенсі означення 2.3.1, $\lambda > 0$.

Умова 7.1.5. Стохастична міра μ має обмежені траекторії, тобто виконується нерівність

$$|\mu((0,t])| \leqslant C_\mu(\omega),$$

для деякої випадкової сталої $C_\mu(\omega)$ та всіх $t \in [0,T]$.

Умова 7.1.6. Стохастична міра μ має неперервні за Гельдером траекторії, тобто

$$|\mu((s_1,s_2])| \leqslant C(\omega)|s_1 - s_2|^{\beta(\mu)},$$

для деяких додатних сталих $C(\omega)$, $\beta(\mu) \leqslant 1$ та довільних s_1, $s_2 \in [0,T]$.

Зауважимо, що умова 7.1.5 випливає з 7.1.6. Розв'язком (7.1) будемо вважати вимірну функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega)\colon [0,T] \times B \times \Omega \to \mathbb{R}$, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy \\ + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy, \quad (7.2) \end{aligned}$$

де через $G(t,x;s,y)$ позначаємо функцію Гріна крайової задачі (2.14), де $f = 0$. При цьому для функції G та її похідних виконуються оцінки (2.15)–(2.17). Сформулюємо допоміжні леми, які будуть використані в подальших міркуваннях.

Лема 7.1.1. Нехай виконуються умови 7.1.1, 7.1.3–7.1.5. Тоді випадковий процес

$$\zeta(x) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy \quad (7.3)$$

має таку модифікацію вигляду (2.4), що для фіксованого $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ та довільної фіксованої множини $B' \subset B$, $d(\partial B, \bar{B}') > 0$, є неперервною за Гельдером на B' з показником γ_1 при довільних $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$.

Лема 7.1.2. Нехай виконуються умови 7.1.1, 7.1.3, 7.1.4, 7.1.6. Тоді при довільних фіксованому $\delta \in (0,T)$ випадковий процес

$$\hat{\zeta}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy \tag{7.4}$$

має модифікацію вигляду (2.4), яка є неперервною за Гельдером на $[\delta, T]$ з показником γ_2, де $\gamma_2 < \beta(\mu)$ та $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$. Якщо до того ж $x \in B'$, де $B' \subset B$, $d(\partial B, \bar{B}') > 0$, то можемо обрати сталу Гельдера, яка залежить лише від σ, μ, γ_2, δ та B'.

Вказані леми буде доведено згодом. Тепер сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 7.1.1. *Справедливі такі твердження:*

1. *Нехай виконуються умови 7.1.1–7.1.4. Тоді рівняння* (7.2) *має розв'язок, який є единим в такому сенсі: якщо* $u_1(t,x)$ *та* $u_2(t,x)$ *— два розв'язки* (7.2), *то для довільної пари* $(t,x) \in [0,T] \times \bar{B}$ $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ *м. н.*
2. *Нехай виконуються умови 7.1.1–7.1.5. Тоді для довільних фіксованих сталих* $\delta > 0$, $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ *та множини* $B' \subset B$, $d(\partial B, \bar{B}') > 0$ *випадкова функція* $u(t,x)$, *яка є розв'язком рівняння* (7.2), *має модифікацію* $\tilde{u}^{(x)}(t,x)$, *яка для деякої випадкової сталої* $L_{\tilde{u}^{(x)}} = L_{\tilde{u}^{(x)}}(\omega) > 0$ *задовольняє нерівності*

$$|\tilde{u}^{(x)}(t,x_1) - \tilde{u}^{(x)}(t,x_2)| \leqslant L_{\tilde{u}^{(x)}}|x_1 - x_2|^{\gamma_1}, \quad \forall t \in [\delta, T],\ x_1,\ x_2 \in \bar{B}'.$$

3. *Нехай виконуються умови 7.1.1–7.1.4, 7.1.6. Тоді для довільних фіксованих сталих* $\delta > 0$, $\gamma_1 < \beta(\sigma)$, $\gamma_2 < \min\{\beta(\mu), (\beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma)))\}$ *та множини* $B' \subset B$, $d(\partial B, \bar{B}') > 0$ *випадкова функція* $u(t,x)$, *яка є розв'язком рівняння* (7.2), *має модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$, *яка для деякої випадкової сталої*

$L_{\tilde{u}} = L_{\tilde{u}}(\omega) > 0$ *задовольняє нерівності*

$$|\tilde{u}(t_1, x_1) - \tilde{u}(t_2, x_2)| \leqslant L_{\tilde{u}}\big(|x_1 - x_2|^{\gamma_1} + |t_1 - t_2|^{\gamma_2}\big),$$
$$\forall t_1,\, t_2 \in [0, T],\, x_1,\, x_2 \in \bar{B}'.$$

7.2. Доведення теореми 7.1.1

Тепер доведемо дану теорему, скориставшись лемами.

Доведення. Пункт 1 теореми доводиться аналогічно до [39, Theorem, (i)]. Покладемо $u^{(0)}(t,x) = 0$,

$$u^{(n)}(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y)f(s,y,u^{(n-1)}(s,y))dy$$
$$+ \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy. \quad (7.5)$$

Тепер доведемо, що

$$\exists \lim_{n\to\infty} u^{(n)}(t,x) =: u(t,x)\ \forall\omega \in \Omega. \quad (7.6)$$

Дійсно, позначимо

$$g_n(t) = \sup_{x\in\bar{B}} |u^{(n+1)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)|, \quad n \geqslant 1.$$

Тоді для кожного $\omega \in \Omega$

$$\big|u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\big| \leqslant C\int_0^t ds \int_B |G(t,x;s,y)|dy \overset{(2.15)}{\leqslant} C_1 t \Rightarrow g_1(t) \leqslant C_1 t, \quad (7.7)$$

$$\big|u^{(n+1)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\big| \leqslant L_f \int_0^t ds \int_B |G(t,x;s,y)|\big|u^{(n)}(s,y) - u^{(n-1)}(s,y)\big|dy$$
$$\leqslant C_2 \int_0^t g_{n-1}(s)ds \Rightarrow g_n(t) \leqslant C_2 \int_0^t g_{n-1}(s)ds,\ n \geqslant 2., \quad (7.8)$$

Тепер нескладно довести за індукцією, що

$$g_n(t) \leqslant C_1 C_2^{n-1}\frac{t^n}{n!}. \quad (7.9)$$

Дійсно, база індукції при $n = 1$ випливає з (7.7), а з (7.8) видно, що

$$g_n(t) \leqslant C_2 \int_0^t g_{n-1}(s)ds \leqslant C_2 \int_0^t C_1 C_2^{n-2}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}ds = C_1 C_2^{n-1}\frac{t^n}{n!},$$

що і треба було довести. Отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ збігається рівномірно на $[0,T]$ і (7.6) виконується. Тепер припустимо, що функція $w(t,x) = w(t,x,\omega)$ також є розв'язком (7.2). Позначимо $g(t) = \sup_{x\in\bar{B}} |u(t,x) - w(t,x)|$; як і при доведенні співвідношень (7.7), (7.8) та (7.9) показується, що

$$g(t) \leqslant C_1 t, \quad g(t) \leqslant C_2 \int_0^t g(s)ds,$$
$$g(t) \leqslant C_1 C_2^{n-1} \frac{t^n}{n!}, \quad n \geqslant 1.$$

Спрямувавши n до нескінченності, одержимо, що $u = w$.

Тепер доведемо пункт 2. З пункту 1 випливає, що розв'язок рівняння (7.2) можна представити як границю ітераційного процесу (7.5). Перепишемо його у вигляді

$$u^{(n)}(t,x) = u_1(t,x) + u_2^{(n)}(t,x) + \zeta(x),$$

де

$$u_1(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy,$$
$$u_2^{(n)}(t,x) = \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y) f(s,y,u^{(n-1)}(s,y))dy,$$

$\zeta(x)$ — модифікація стохастичного інтеграла При $n = 0$ функція $u^{(n)}$ є неперервною за Гельдером по x на $[\delta^*,T] \times \bar{B}^*$ при довільних $\delta^* \in (0,T)$, $B^* \subset B$, $d(\bar{B}^*, \partial B) > 0$. Для ζ неперервність за Гельдером випливає з леми 7.1.1, а для функції u_1 — з того, що існує $\partial u_1(t,x)/\partial x$ при $(t,x) \in (0,T] \times B$. Тепер доведемо за індукцією, що при довільних фіксованих сталих $\delta^* > 0$, $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ та множині $B^* \subset B$, $d(\partial B, \bar{B}^*) > 0$ функція $u^{(n)}(t,x)$ є неперервною за Гельдером на $[\delta^*,T] \times \bar{B}^*$ з деякою сталою $L_{\delta^*,B^*,\gamma_1} > 0$, що не залежить від n. Розглянемо таку послідовність множин $\{B_m \colon m \geqslant 1\}$, що $B_1 = B^*$, $B_{m-1} \subset B_m$, $d(\bar{B}_{m-1}, \partial B_m) > 0$, $d(\bar{B}_m, \partial B) > 0$, $\cup_{m=1}^{\infty} B_m = B$.

Зауваження 7.2.1. (про побудову послідовності множин). Можемо побудувати $\{B_m \colon m \geqslant 1\}$ навіть за додаткової умови $\partial B_m \in A^{\infty}$, $m \geqslant 2$. Дійсно, введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
\eta_1(x) &= Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}; \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \int_{\mathbb{R}^d} \eta_1(x)\,dx = 1,\\
\eta_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-d}\eta_1(x\varepsilon^{-1}),\\
B^*_\varepsilon &= B^* \cup \{x \in \mathbb{R}^d \colon d(x, \partial B^*) < \varepsilon\},\\
B_\varepsilon &= (\mathbb{R}^d \setminus B) \cup \{x \in \mathbb{R}^d \colon d(x, \partial B) < \varepsilon\},\\
\kappa_\varepsilon(x) &= \int_{B^*_\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y)dy - \int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y)dy.
\end{aligned}$$

При достатньо малому $\varepsilon > 0$ $\kappa_\varepsilon(x) = 1$, $x \in B^*$, $\kappa_\varepsilon(x) = -1$, $x \notin B$, $|\kappa_\varepsilon| < 1$ при $x \in B \setminus \bar{B}^*$. Отже, можемо покласти $B_m = \kappa_\varepsilon^{-1}((1/m - 1, 1])$, $m \geqslant 2$. Розглянемо довільне $x^* \in \partial B_m$; нескладно переконатися, що знайдеться індекс j такий, що $\frac{\partial \kappa_\varepsilon(x^*)}{\partial x_j} \neq 0$. Отже, для деякої функції $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ ∂B_m в околі точки x^* допускає представлення $x_j = h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)$

Тепер помітимо, що функція $f^{(n)}(s, y) = f(s, y, u^{(n-1)}(s, y))$ буде неперервною за Гельдером по y на $[\delta^*/m, T] \times \bar{B}_m$ при довільному натуральному m. Дійсно,

$$\begin{aligned}
&|f(s, y_1, u^{(n-1)}(s, y_1)) - f(s, y_2, u^{(n-1)}(s, y_2))|\\
&\quad\leqslant L_f(|y_1 - y_2|^{\beta(f)} + |u^{(n-1)}(s, y_1) - u^{(n-1)}(s, y_2)|)\\
&\quad\leqslant L_f|y_1 - y_2|^{\beta(f)} + L_f L_{\delta^*/m, B_m, \gamma_1}|y_1 - y_2|^{\gamma_1} \leqslant L_2|y_1 - y_2|^{\beta_1},
\end{aligned}$$

де $\beta_1 = \min\{\beta(f), \gamma_1\}$. Отже, згідно з [20, Chapter 3, Theorem 2, p.60] можемо побудувати функції $f^{(n)}_m(s, y)$, які будуть продовженнями $f^{(n)}(s, y)$ з $[\delta^*/m, T] \times \bar{B}_m$ на $[0, T] \times \bar{B}$, причому $|f^{(n)}_m(s, y)| \leqslant C_f$, $f^{(n)}_m(s, y)$ неперервна за Гельдером по y. Також розглянемо функції

$$u^{(n)}_{2,m}(t, x) = \int_0^t ds \int_B G(t, x; s, y) f^{(n)}_m(s, y) dy.$$

За [23, Section 4, Theorem 3] функції $u^{(n)}_{2,m}$ є розв'язками крайових задач

$$\begin{cases}
\mathcal{L}u^{(n)}_{2,m}(t, x) = -f^{(n)}_m(t, x)\,, & (t, x) \in D_T,\\
u^{(n)}_{2,m}(t, x) = 0, & (t, x) \in S_T,\\
u^{(n)}_{2,m}(0, x) = 0 & x \in B.
\end{cases}$$

Отже, можемо скористатися лемою 2.3.1 і одержати, що

$$|u_{2,m}^{(n)}(t,x_1) - u_{2,m}^{(n)}(t,x_2)| \leqslant KC_f|x_1 - x_2|^{\gamma_1}. \tag{7.10}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}|u_{2,m}^{(n)}(t,x) - u_2^{(n)}(t,x)| \leqslant \int_0^t ds \int_B |G(t,x;s,y)||f^{(n)}(s,y) - f_m^{(n)}(s,y)|dy \\ \leqslant 2C_f \int_0^t ds \int_{B\setminus B_m} |G(t,x;s,y)|dy + 2C_f \int_0^{\delta^*/m} ds \int_B |G(t,x;s,y)|dy \\ \leqslant C \int_0^t ds \int_{B\setminus B_m} \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-\frac{(x-y)^2}{t-s}} dy + \leqslant C \int_0^{\delta^*/m} ds \int_B \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-\frac{(x-y)^2}{t-s}} dy \\ \leqslant C\lambda_d(B \setminus B_m) + C\lambda_d(B) * \delta^*/m \to 0, m \to \infty,\end{aligned}$$

де λ_d — міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Отже, можемо перейти до границі в (7.10) при $m \to \infty$ і одержати, що

$$|u_2^{(n)}(t,x_1) - u_2^{(n)}(t,x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|^{\gamma_1},$$

причому стала C не залежить від n. Отже, індуктивний перехід справедливий, зокрема, при $(t,x) \in [\delta, T] \times \bar{B}'$

$$|u^{(n)}(t,x_1) - u^{(n)}(t,x_2)| \leqslant L_{\delta,B',\gamma_1}|x_1 - x_2|^{\gamma_1}.$$

Можемо покласти $L_{\tilde{u}^{(x)}} = L_{\delta,B',\gamma_1}$, $\tilde{u}^{(x)} = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} u^{(n)}$.

Використавши лему 7.1.2 замість леми 7.1.1, аналогічно до п.2 показуємо, що для деякої модифікації $\tilde{u}^{(t)}$

$$|\tilde{u}^{(t)}(t_1,x) - \tilde{u}^{(t)}(t_2,x)| \leqslant L_{\tilde{u}^{(t)}}|t_1 - t_2|^{\gamma_2}, \quad \forall t \in [\delta, T],\ x_1,\ x_2 \in \bar{B}'.$$

Виключимо всі $\omega \in \Omega$ такі, що $\tilde{u}^{(x)}(t,x) \neq \tilde{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї раціональної пари $(t,x) \in [\delta, T] \times \bar{B}'$. Для інших $\omega \in \Omega$ покладемо $\tilde{u} = \tilde{u}^{(t)} = \tilde{u}^{(x)}$ при раціональних (t,x) і довизначимо $\tilde{u}$ за неперервністю при довільній $(t,x) \in [\delta, T] \times \bar{B}'$. Отримана фунція $\tilde{u}$ задовольняє умову пункту 3. □

7.3. Доведення лем 7.1.1 та 7.1.2

Тепер доведемо допоміжні леми, сформульовані в попередньому розділі, почавши з леми 7.1.1.

Доведення. Покладемо

$$q(z,s) = \begin{cases} \int_B (G(t,x_1;s,y) - G(t,x_2;s,y))\sigma(s,y)dy & \text{при } 0 \leqslant s < t, \\ \sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2) & \text{при } t \leqslant s \leqslant T, \end{cases} \tag{7.11}$$

де $z = (t, x_1, x_2)$. Зауважимо, що функція q, визначена співвідношенням (7.11), буде неперервною на $[0,T]$. Для доведення цього досить показати, що

$$\int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy \to \sigma(t,x), \quad s \to t- .$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді для всіх $0 \leqslant r < t$

$$\begin{aligned} \left| \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy - \sigma(t,x) \right| &\leqslant \left| \int_B G(t,x;s,y)(\sigma(s,y) - \sigma(r,y))dy \right| \\ &+ \left| \int_B G(t,x;s,y)\sigma(r,y)dy - \sigma(r,x) \right| + |\sigma(r,x) - \sigma(t,x)| \\ &\leqslant C|s-r|^{\beta(\sigma)} + C|t-r|^{\beta(\sigma)} + \left| \int_B G(t,x;s,y)\sigma(r,y)dy - \sigma(r,x) \right| \\ &\leqslant C_1|s-t|^{\beta(\sigma)} + C_2|t-r|^{\beta(\sigma)} + \left| \int_B G(t,x;s,y)\sigma(r,y)dy - \sigma(r,x) \right|, \end{aligned}$$

де при останньому переході скористалися тим, що

$$|s-r|^{\beta(\sigma)} \leqslant (|s-t| + |t-r|)^{\beta(\sigma)} \leqslant |s-t|^{\beta(\sigma)} + |t-r|^{\beta(\sigma)}.$$

Нагадаємо, що за властивостями функції Гріна (див., зокрема, [20, Chapter 3, Sec. 7, Definition]), при довільному фіксованому r

$$\int_B G(t,x;s,y)\sigma(r,y)dy \to \sigma(r,x), \quad s \to t- .$$

Виберемо r таке, що $C_2|t-r|^{\beta(\sigma)} \leqslant \varepsilon/3$; тоді знайдеться таке достатньо мале $\delta > 0$, що при $s > t - \delta$

$$\left| \int_B G(t,x;s,y)\sigma(r,y)dy - \sigma(r,x) \right| < \varepsilon/3,$$

$$C_1|s-t|^{\beta(\sigma)} < \varepsilon/3,$$

що завершує доведення неперервності q. Отже, можемо скористатися лемою 2.2.2 і отримати, що функція $\zeta(x)$, визначена співвідношенням (7.3), має модифікацію

$\zeta_1(x)$, яка задовольняє нерівності (2.6) при $[a,b]=[0,T]$ та $A=(0,t]$:

$$\begin{aligned}|\zeta_1(z)| &\leqslant |q(z,0)\mu((0,t])| \\ &\quad + C\|q(z,\cdot)\|_{B^{\varepsilon}_{22}([0,T])}\Big\{\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n(2\varepsilon-1)} \sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)}\cap(0,t])|^2\Big\}^{1/2}; \quad (7.12)\end{aligned}$$

нагадаємо, що ε — довільне число з інтервалу $(1/2,1)$. Для того, щоб оцінити $\|q(z,\cdot)\|_{B^{\varepsilon}_{22}([0,T])}$, розглянемо $\omega_{2,[0,t]}(q,r)$, почавши з різниці $q(z,s+h)-q(z,s)$, $0\leqslant s\leqslant t-h$:

$$\begin{aligned}q(z,s+h)-q(z,s) &= \int_B \big(G(t,x_1;s,y)-G(t,x_2;s,y)\big)\big(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\big)dy \\ &\quad + \int_B \big(G(t,x_1;s+h,y)-G(t,x_2;s+h,y) \\ &\quad - G(t,x_1;s,y)+G(t,x_2;s,y)\big)\sigma(s+h,y)dy = I_1+I_2.\end{aligned}$$

I_1 оцінюється аналогічно до $A_2(s,h)$ у [17], причому для оцінки похідних функції Гріна використовуємо оцінку (2.16). Розпишемо відповідні оцінки детальніше.

$$\begin{aligned}|I_1| &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_B |G(t,x_1;s,y)-G(t,x_2;s,y)|dy \\ &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}|x_1-x_2|\int_B dy\int_0^1 \big|\mathrm{grad}_x G(t,\theta x_1+(1-\theta)x_2,s,y)\big|d\theta \\ &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}|x_1-x_2|\int_{\mathbb{R}^d} dy\int_0^1 (t-s)^{-\frac{d+1}{2}}e^{-\frac{\varkappa(\theta x_1+(1-\theta)x_2-y)}{t-s}}d\theta \\ &\leqslant C\frac{h^{\beta(\sigma)}|x_1-x_2|}{(t-s)^{1/2}}\int_0^1 d\theta\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\varkappa(\theta x_1+(1-\theta)x_2-y)}{t-s}}\frac{dy}{(t-s)^{d/2}} = C\frac{h^{\beta(\sigma)}|x_1-x_2|}{(t-s)^{1/2}}.\end{aligned}$$

При цьому одержуємо, що

$$\int_0^{t-h} I_1^2 ds \leqslant Ch^{2\beta(\sigma)}|x_1-x_2|^2(C+|\ln h|) \leqslant Ch^{2\gamma}|x_1-x_2|^2,\ \beta(\sigma)>\gamma>1/2. \quad (7.13)$$

Тепер введемо позначення

$$v(t,x,s)=\int_B G(t+\tau,x;\tau,y)\sigma(s,y)dy.$$

Скористаємося властивостями функції Гріна, наведеними, зокрема, у [20, Chapter

3, Sec. 7], для дослідження функції v:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}v &= \int_B \mathcal{L}G(t+\tau,x;\tau,y)\sigma(s,y)dy = 0,\\
v(t,x,s)|_{(t,x)\in S_T} &= \Big(\int_B G(t+\tau,x;\tau,y)\sigma(s,y)dy\Big)\Big|_{(t,x)\in S_{T-\tau}}\\
&= \Big(\int_B G(t+\tau,x;\tau,y)\sigma(s,y)dy\Big)|_{(t+\tau,x)\in S_{T-\tau}} \overset{[20],(7.4)}{=} 0,\\
v(0,x,s) &= \lim_{t\to 0}\int_B G(t+\tau,x;\tau,y)\sigma(s,y)dy \overset{[20],(7.3)}{=} \sigma(s,x). \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

Візьмемо функцію v при $\tau = 0$ і $\tau = \tau^*$ та розглянемо співвідношення (7.14) як крайову задачу на $D_{T-\tau^*}$ при довільному фіксованому s. [23, Sec. 1, Theorem 11] стверджує, що вказана задача має єдиний розв'язок, звідки $v|_{\tau=0} = v|_{\tau=\tau^*}$. Таким чином, функція v не залежить від τ, і надалі будемо вважати, що $\tau = 0$. Перепишемо I_2 у вигляді

$$I_2 = v(t-s-h,x_1,s+h) - v(t-s-h,x_2,s+h) - v(t-s,x_1,s+h) + v(t-s,x_2,s+h).$$

Можемо продовжити функцію $\sigma(s,y)$ з $[0,T]\times\bar{B}$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, причому отримане продовження буде неперервним за Гельдером з тим самим показником $\beta(\sigma)$ та обмеженим. Це випливає, скажімо, з [20, Chapter 3, Theorem 2, p.60]. Тепер представимо $v(t,x,s)$ як різницю $v^{(1)}(t,x,s) - v^{(2)}(t,x,s)$, де функція $v^{(1)}$ є обмеженим розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases}
\mathcal{L}v^{(1)}(t,x,s) = 0, & (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}^d,\\
v^{(1)}(0,x,s) = \sigma(s,x), & x\in\mathbb{R}^d,
\end{cases}$$

а функція $v^{(2)}$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases}
\mathcal{L}v^{(2)}(t,x,s) = 0, & (t,x)\in(0,T]\times B,\\
v^{(2)}(0,x,s) = 0, & x\in B,\\
v^{(2)}(t,x,s) = v^{(1)}(t,x,s), & (t,x)\in S_T.
\end{cases}$$

Можемо представити інтеграл I_2 як $I_{21} - I_{22}$, де

$$\begin{aligned}
I_{2i} = v^{(i)}(t-s-h,x_1,s+h) &- v^{(i)}(t-s-h,x_2,s+h)\\
&- v^{(i)}(t-s,x_1,s+h) + v^{(i)}(t-s,x_2,s+h), \quad i=1,2.
\end{aligned}$$

Згідно з [23, Sec. 4, Theorem 2] функція $v^{(1)}$ допускає представлення у вигляді

$$v^{(1)}(t,x,s)=\int_{\mathbb{R}^d}p(t,x-y)\sigma(s,y)dy,$$

де $p(t,x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u=0$:

$$p(t,x)=\frac{1}{(4a^2\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

Звідси отримаємо, що

$$I_{21}=\int_{\mathbb{R}^d}(p(t-s-h,x_1-y)-p(t-s-h,x_2-y)-p(t-s,x_1-y)+p(t-s,x_2-y))$$
$$\times\,\sigma(s+h,y)dy=A_1(s,h)$$

в позначеннях [17]. Наведемо оцінки для даного виразу.

$$\begin{aligned}|I_{21}|&\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|p(t-s,x_1-y)-p(t-s,x_2-y)||\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)|dy\\&\leqslant C|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}\int_{\mathbb{R}^d}dy\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-\frac{d}{2}-1}e^{-\frac{C|y|^2}{\tau}}d\tau\\&=C|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-1}d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{C|y|^2}{\tau}}dy\\&=C|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}\ln\frac{t-s}{t-s-h}.\end{aligned}$$

Як наслідок,

$$\begin{aligned}\int_0^{t-h}I_{21}^2ds&\leqslant C|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{t-h}\ln^2\frac{t-s}{t-s-h}ds\\&\leqslant Ch|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{+\infty}\ln^2(1+1/u)du=Ch|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}.\end{aligned}\tag{7.15}$$

Можемо оцінити I_{21} і іншим способом. Розпишемо I_{21} як дві різниці інтегралів, причому у i-й різниці робимо заміни

$$v=\frac{y-x_i}{2a\sqrt{t-s-h}},\quad v=\frac{y-x_i}{2a\sqrt{t-s}}.$$

Далі використовуємо гельдеровість функції σ і одержуємо, що

$$\begin{aligned}|I_{21}| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h, x_1-y)\sigma(s+h,y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, x_1-y)\sigma(s+h,y)dy\right| \\ &\quad + \left|\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h, x_2-y)\sigma(s+h,y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, x_2-y)\sigma(s+h,y)dy\right| \\ &= C\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\big(\sigma(s+h, x_1+2av\sqrt{t-s-h}) - \sigma(s+h, x_1+2av\sqrt{t-s})\big)dv\right| \\ &\quad + C\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\big(\sigma(s+h, x_2+2av\sqrt{t-s-h}) - \sigma(s+h, x_2+2av\sqrt{t-s})\big)dv\right| \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}|v\left(\sqrt{t-s-h}-\sqrt{t-s}\right)|^{\beta(\sigma)}dv \leqslant Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)^{-\beta(\sigma)/2},\end{aligned}$$

Зауважимо, що аналогічні міркування були використані при отриманні оцінки [3.54] у [43]. Отримуємо таку оцінку для $\int_0^{t-h} I_{21}^2 ds$:

$$\int_0^{t-h} I_{21}^2 ds \leqslant Ch^{2\beta(\sigma)}\int_0^{t-h}(t-s)^{-\beta(\sigma)}ds = Ch^{2\beta(\sigma)}. \tag{7.16}$$

Нехай $\rho \in (0,1)$; домножимо нерівність (7.15), піднесену до степеня ρ, на нерівність (7.16), піднесену до степеня $1-\rho$, і одержимо, що

$$\int_0^{t-h} I_{21}^2 ds \leqslant Ch^{2\beta(\sigma)+\rho(1-2\beta(\sigma))}|x_1-x_2|^{2\rho\beta(\sigma)}. \tag{7.17}$$

Тепер оцінимо I_{22}. Передусім зауважимо, що, оскільки функції $v(t,x,s)$ та $v^{(1)}(t,x,s)$ обмежені на $\bar{D}\times[0,T]$, то обмеженою є і функція $v^{(2)}(t,x,s)$. Дійсно,

$$\begin{aligned}|v(t,x,s)| &\leqslant \int_B |G(t,x;0,y)||\sigma(s,y)|dy \overset{(2.15)}{\leqslant} C\int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t}}dy \leqslant C, \\ |v^{(1)}(t,x,s)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x-y)|\sigma(s,y)|dy \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{t}}dy \leqslant C.\end{aligned}$$

Зафіксуємо $s \in [0,T]$ і розглянемо множини B'' та B''', для яких $\bar{B}'' \subset B$, $\bar{B}''' \subset B''$, $\bar{B}' \subset B'''$ і $\partial B'', \partial B''' \in A^3$ (див. означення 2.3.1). За зауваженням 7.2.1 такі множини дійсно існують. Також покладемо $S'' = [0,T]\times\partial B''$, $B_0'' = \{0\}\times B''$, $D'' = (0,T)\times B''$. Нескладно бачити, що $v^{(2)} \in C([0,T]\times\bar{B}'')$. Отже, знайдеться така послідовність многочленів $\Psi_{m,s}$, що $\Psi_{m,s} \to v^{(2)}$, $m\to\infty$ в $C([0,T]\times\bar{B}'')$. Якщо покласти $\psi_{m,s}(t,x) = \Psi_{m,s}(t,x) - \Psi_{m,s}(0,x)$, то одержимо, що $\psi_{m,s} \in C^3(S''\cup B_0'')$,

$\psi_{m,s} = 0$ на множині $\bar{B}_0''$ і $\psi_{m,s} \to v^{(2)}$, $m \to \infty$ в просторі $C(S'' \cup B_0'')$. Позначимо через $v_m^{(2)}$ розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} \mathcal{L}v_m^{(2)}(t,x,s) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times B'', \\ v_m^{(2)}(t,x,s) = \psi_{m,s}(t,x), & (t,x) \in S'' \cup B_0''. \end{cases}$$

Згідно з [20, Chap. III, Sec. 3, Theorem 7], $v_m^{(2)} \in C^{2+\alpha}([0,T] \times \bar{B}'')$. Отже, можемо скористатися [20, Chap. IV, Sec. 7, Theorem 4] для функцій $v_m^{(2)} - v_n^{(2)}$ і довільного $\alpha \in (0,1)$, де множини B'', B''' та D'' є множинами R, R_0 та D з умови теореми відповідно. Отримуємо, що

$$\|v_m^{(2)} - v_n^{(2)}\|_{0,2+\alpha}^{B''',D''} \leqslant K\|v_m^{(2)} - v_n^{(2)}\|_0 \leqslant K\|\psi_{m,s} - \psi_{n,s}\|_0^{S''\cup B_0''} \to 0, m,n \to \infty,$$

де також скористалися принципом максимума. Отже, послідовність $\{v_m^{(2)} : m \geqslant 1\}$ є фундаментальною в $\|\cdot\|_{0,2+\alpha}^{B''',D''}$ і, відповідно, збігається до деякої граничної функції $\tilde{v}^{(2)}$ в тій самій нормі. Зокрема, $M_{0,0}^{B''',D''}[v_m^{(2)} - \tilde{v}^{(2)}] \to 0$, $m \to 0$. Але згідно з [20, Chap. III, Sec. 6, Corollary of the Theorem 15] послідовність $\{v_m^{(2)} : m \geqslant 1\}$ збігається рівномірно до $v^{(2)}$ на $[0,T] \times \bar{B}''$. Отже, $\tilde{v}^{(2)} = v^{(2)}$ і

$$\|v^{(2)}\|_{0,2+\alpha}^{B''',D''} \leqslant K\|v^{(2)}\|_0 =: K_1,$$

де сталі K та K_1 залежать лише від a, α, B''' та B''. Тепер скористаємося отриманими результатами для оцінки I_{22}.

$$\begin{aligned} |I_{22}| &= \int_{t-s-h}^{t-s} \left| \frac{\partial v^{(2)}(w,x_1,s+h)}{\partial w} - \frac{\partial v^{(2)}(w,x_2,s+h)}{\partial w} \right| dw \\ &\leqslant \int_{t-s-h}^{t-s} K_1 \frac{|x_1-x_2|^\alpha}{\bar{d}_{x_1x_2}^{2+\alpha}} dw \leqslant C \int_{t-s-h}^{t-s} \frac{|x_1-x_2|^\alpha}{d(\bar{B}', \partial B''')^{2+\alpha}} dw = Ch|x_1-x_2|^\alpha. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Якщо покласти $\gamma = \theta_1$ в (7.13), $\rho = \gamma_1/\beta(\sigma)$ в (7.17), $\alpha = \gamma_1$ в (7.18) та додати вказані нерівності, одержимо, що

$$\omega_{2,[0,t]}(q,r) \leqslant Cr^{\theta_1}|x_1-x_2|^{\gamma_1}, \quad \theta_1 = \beta(\sigma) - \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{2\beta(\sigma)} > 1/2.$$

Функцію $q(z,s)$ можна оцінювати як I_2 при $s<t$, а при $t\leqslant s\leqslant T$ скористатися неперервністю за Гельдером функції σ. Таким чином отримуємо, що для довільного $\tilde{\gamma}_1<\beta(\sigma)$

$$|q(z,s)|\leqslant C|x_1-x_2|^{\tilde{\gamma}_1}. \tag{7.19}$$

З іншого боку, модуль неперервності $\omega_{2,[0,T]}(q,r)$ допускає представлення у вигляді

$$\begin{aligned}\omega_{2,[0,T]}(q,r)&=\sup_{0\leqslant h\leqslant r}\|q(\cdot+h)-q(\cdot)\|_{L_2([0,T-h])}\\&\leqslant\sup_{0\leqslant h\leqslant r}\big(\|q(\cdot+h)-q(\cdot)\|_{L_2([0,t-h])}+\|q(\cdot+h)-q(\cdot)\|_{L_2([t-h,t])}\\&\quad+\|q(\cdot+h)-q(\cdot)\|_{L_2([t,T-h])}\big)\leqslant\omega_{2,[0,t]}(q,r)+\tilde{I}(r),\end{aligned}$$

де

$$\tilde{I}(r)=\Big(\int_{t-r}^{t}|q(z,t)-q(z,s)|^2\,ds\Big)^{1/2}.$$

Скориставшись нерівністю трикутника для норми $\|\cdot\|_{L_2}$ та оцінкою (7.19), отримаємо, що

$$\tilde{I}(r)\leqslant\left(\int_{t-r}^{t}|q(z,t)|^2\,ds\right)^{1/2}+\left(\int_{t-r}^{t}|q(z,s)|^2\,ds\right)^{1/2}\leqslant Cr^{1/2}|x_1-x_2|^{\tilde{\gamma}_1}, \tag{7.20}$$

де $\tilde{\gamma}_1\in(\gamma_1,\beta(\sigma))$. З іншого боку, можемо переписати різницю $q(z,t)-q(z,s)$ таким чином:

$$\begin{aligned}q(z,t)-q(z,s)&=\sigma(t,x_1)-\sigma(t,x_2)-\int_B G(t,x_1;s,y)\sigma(s,y)dy\\&\quad+\int_B G(t,x_2;s,y)\sigma(s,y)dy\\&=v(0,x_1,t)-v(0,x_2,t)-v(t-s,x_1,s)+v(t-s,x_2,s)\\&=\sum_{i=1}^{2}v^{(i)}(0,x_1,t)-v^{(i)}(0,x_2,t)-v^{(i)}(t-s,x_1,s)+v^{(i)}(t-s,x_2,s),\end{aligned} \tag{7.21}$$

де позначення v, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ використовуються в тому самому сенсі, що і при оцінюванні I_2. Тепер зауважимо, що

$$\begin{aligned}|v^{(1)}(0,x_1,t)-v^{(1)}(t-s,x_1,s)| &= \Big|\sigma(t,x_1)-\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,x_1-y)\sigma(s,y)dy\Big| \\ &= \Big|\sigma(t,x_1)-\frac{1}{\big(4a^2\pi(t-s)\big)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{(x_1-y)^2}{4a^2(t-s)}}\sigma(s,y)dy\Big| \\ &= \frac{1}{\pi^{d/2}}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\sigma(t,x_1)dv-\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\sigma(s,2av\sqrt{t-s}+x_1)dv\Big| \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\big((t-s)^{\beta(\sigma)}+|v|(t-s)^{\beta(\sigma)/2}\big)dv \leqslant C(t-s)^{\beta(\sigma)/2},\end{aligned}$$

і аналогічним чином можемо оцінити $|v^{(1)}(0,x_2,t)-v^{(1)}(t-s,x_2,s)|$. Таким чином, справедлива така оцінка:

$$|v^{(1)}(0,x_1,t)-v^{(1)}(0,x_2,t)-v^{(1)}(t-s,x_1,s)+v^{(1)}(t-s,x_2,s)| \leqslant C(t-s)^{\beta(\sigma)/2}. \quad (7.22)$$

При оцінюванні другого доданку у (7.21) можемо міркувати так же, як і при отриманні (7.18) і одержати, що

$$\begin{aligned}&|v^{(2)}(0,x_1,t)-v^{(2)}(0,x_2,t)-v^{(2)}(t-s,x_1,s)+v^{(2)}(t-s,x_2,s)| \\ &\quad = |v^{(2)}(0,x_1,s)-v^{(2)}(0,x_2,s)-v^{(2)}(t-s,x_1,s)+v^{(2)}(t-s,x_2,s)| \leqslant C(t-s).\end{aligned} \quad (7.23)$$

При цьому також скористалися тим, що $v^{(2)}(0,x_i,t)=v^{(2)}(0,x_i,s)=0$. Підставивши оцінки (7.22) та (7.23) в (7.21), одержимо, що

$$\tilde{I}^2(r) \leqslant C\int_{t-r}^{t}(t-s)^{\beta(\sigma)}ds = Cr^{\beta(\sigma)+1}.$$

Піднісши вказану нерівність до степеня $1-\varkappa$, а нерівність (7.20) — до степеня $\varkappa=\gamma_1/\tilde{\gamma}_1$, отримаємо, що

$$\tilde{I}(r) \leqslant Cr^{\theta_2}|x_1-x_2|^{\gamma_1}, \quad \theta_2>1/2.$$

Як наслідок,

$$\omega_{2,[0,T]}(q,r) \leqslant Cr^{\theta}|x_1-x_2|^{\gamma_1}, \quad \theta=\min\{\theta_1,\theta_2\}>1/2.$$

Врахувавши також оцінку (7.19), одержимо, що

$$\|q(z,\cdot)\|_{B^{\varepsilon}_{22}([0,T])} \leqslant C|x_1-x_2|^{\gamma_1}+C|x_1-x_2|^{\gamma_1}\Big(\int_0^t r^{-2\varepsilon-1+2\theta}\,dr\Big)^{1/2} \leqslant C|x_1-x_2|^{\gamma_1},$$

де $\varepsilon \in (0, \theta)$. Для того, щоб довести, що ζ_1, введена у (7.12), задовольняє твердження леми, залишилося показати, що

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)} \cap (0,t])|^2 < C(\omega) \quad \text{м. н.},$$

де стала $C(\omega)$ не залежить від t. Для кожного натурального n оберемо такий індекс k_n, що $t \in \Delta_{k_n n}^{(0,T)}$; тоді за умовою 7.1.5

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)} \cap (0,t])|^2 \\ \leqslant \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n\beta} \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)})|^2 + \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n\beta} |\mu(\Delta_{k_n n}^{(0,T)} \cap (0,t])|^2 \leqslant C(\omega),$$

що завершує доведення. ☐

Також наведемо доведення леми 7.1.2. Хід її доведення є аналогічним до доведення леми 3.5 у [43], проте проводиться з використанням оцінок, сформульованих під час доведення попередньої леми.

Доведення. Будемо вважати, що $t_1 \leqslant t_2$. Розпишемо різницю інтегралів

$$\int_{(0,t_2]} d\mu(s) \int_B G(t_2, x; s, y)\sigma(s, y)dy - \int_{(0,t_1]} d\mu(s) \int_B G(t_1, x; s, y)\sigma(s, y)dy =: J$$

у вигляді

$$J = \int_{(t_1,t_2]} \bar{q}(z, s)d\mu(s) + \int_{(0,t_1]} \bar{Q}(z, s)d\mu(s) = J_1 + J_2,$$

де

$$\bar{q}(z, s) = \int_B G(t_2, x; s, y)\sigma(s, y)dy, \quad z = (t_2, x), \; s \in [t_1, t_2],$$
$$\bar{Q}(z, s) = \int_B (G(t_2, x; s, y) - G(t_1, x; s, y))\sigma(s, y)dy, \quad z = (t_1, t_2, x), \; s \in [0, t_1].$$

Тепер зафіксуємо область B', котра задовольняє наступним умовам: $x \in B'$, $\bar{B}' \subset$

B. Отримаємо такі оцінки функції q:

$$\begin{aligned}|\bar{q}(z,s)| &\leqslant C,\\ |\bar{q}(z,s+h)-\bar{q}(z,s)| &\leqslant \int_B |G(t_2,x;s+h,y)||\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)|dy\\ &\quad+\left|\int_B (G(t_2,x;s+h,y)-G(t_2,x;s,y))\sigma(s+h,y)dy\right|\\ &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}+|v^{(1)}(t_2-s-h,x,s+h)-v^{(1)}(t_2-s,x,s+h)|\\ &\quad+|v^{(2)}(t_2-s-h,x,s+h)-v^{(2)}(t_2-s,x,s+h)|\\ &\leqslant C(h^{\beta(\sigma)}+h^{\beta(\sigma)}(t_2-s)^{-\beta(\sigma)/2}+h)\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-s)^{-\beta(\sigma)/2},\end{aligned}$$

де функції v, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ були визначені при доведенні леми 7.1.1, а стала C в останній нерівності залежить від B'. Для кожного цілого невід'ємного n виберемо такі індекси k_{n1} та k_{n2}, що $t_1 \in \Delta_{k_{n1}n}^{(0,T)}$ та $t_2 \in \Delta_{k_{n2}n}^{(0,T)}$. Також виберемо натуральне n_0, яке задовольняє співвідношення

$$2^{-n_0}T < t_2-t_1 \leqslant 2^{-n_0+1}T.$$

Відмітимо, що при вибраному таким чином n_0 виконується одна з двох умов: $k_{n_0 1}+1=k_{n_0 2}$ або $k_{n_0 1}+2=k_{n_0 2}$, в той час як при $n<n_0$ $k_{n1}+1=k_{n2}$ або $k_{n1}=k_{n2}$. Нескладно показати за індукцією, що при $n \geqslant n_0$

$$k_{n2}-k_{n1} \leqslant 2^{n-n_0+1}-1+T^{-1}(t_2-t_1)2^n \leqslant T^{-1}(t_2-t_1)2^{n+1}.$$

Нагадаємо, що функція $\bar{q}(z,s)$ вже була визначена на $[t_1,t_2]$. Тепер довизначимо її за неперервністю, поклавши $\bar{q}(z,s)=\bar{q}(z,t_1)$ при $s<t_1$ та $\bar{q}(z,s)=\bar{q}(z,t_2)$ при $s>t_2$. За лемою 2.2.1 знайдеться така модифікація $\hat{J}_1$ інтеграла J_1, що

$$\begin{aligned}|\hat{J}_1| &\leqslant |\bar{q}(z,0)\mu((t_1,t_2])|\\ &\quad+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\bar{q}(z,d_{(k-1)n}^{(0,T)})-\bar{q}(z,d_{(k-2)n}^{(0,T)})||\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)}\cap(t_1,t_2])|.\end{aligned}$$

При всіх n можемо опустити доданки, яким відповідає $k \leqslant k_{n1}$, оскільки при вказаних k $\bar{q}(z,d_{(k-1)n}^{(0,T)})=\bar{q}(z,t_1)=\bar{q}(z,d_{(k-2)n}^{(0,T)})$, та доданки, для яких $k>k_{n2}$, оскільки при вказаних k $\Delta_{kn}^{(0,T)} \cap (t_1, t_2] = \varnothing$:

$$\begin{aligned}|\hat{J}_1| &\leqslant C(t_2 - t_1)^{\gamma_2} \\ &\quad + \sum_{n\geqslant 1} \sum_{k=k_{n1+1}}^{k_{n2}} |\bar{q}(z, d_{(k-1)n}^{(0,T)}) - \bar{q}(z, d_{(k-2)n}^{(0,T)})||\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)} \cap (t_1, t_2])| \\ &\leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{\gamma_2} + \sum_{n\geqslant 1} |\bar{q}(z, d_{(k_{n2}-1)n}^{(0,T)}) - \bar{q}(z, d_{(k_{n2}-2)n}^{(0,T)})||\mu(d_{(k_{n2}-1)n}^{(0,T)}, t_2]) \\ &\quad + \sum_{n\geqslant n_0} \sum_{k=k_{n1+1}}^{k_{n2}-1} |\bar{q}(z, d_{(k-1)n}^{(0,T)}) - \bar{q}(z, d_{(k-2)n}^{(0,T)})||\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)})| \\ &= C(\omega)(t_2 - t_1)^{\gamma_2} + S_1 + S_2.\end{aligned}$$

Тепер оцінимо S_1 і S_2, скориставшись співвідношеннями (7.24).

$$\begin{aligned}S_1 &\leqslant C(\omega) \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n\beta(\sigma)} (t_2 - d_{(k_{n2}-2)n}^{(0,T)})^{-\beta(\sigma)/2} (t_2 - d_{(k_{n2}-1)n}^{(0,T)})^{\beta(\mu)} \\ &\leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{\gamma_2} \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n(\beta(\mu)-\gamma_2)} = C(t_2 - t_1)^{\gamma_2}, \\ S_2 &\leqslant C\Big(\sum_{n\geqslant n_0} 2^{-n\beta} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)})|^2\Big)^{1/2} \\ &\qquad \times \Big(\sum_{n\geqslant n_0} 2^{n\beta} 2^{-2n\beta(\sigma)} \sum_{k=k_{n1+1}}^{k_{n2}-1} (t_2 - (k-2)2^{-n}T)^{-\beta(\sigma)}\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C(\omega)\Big(\sum_{n\geqslant n_0} 2^{-n(2\beta(\sigma)-\beta)} \sum_{i=1}^{k_{n2}-k_{n1}} (i2^{-n}T)^{-\beta(\sigma)}\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C(\omega)\Big(\sum_{n\geqslant n_0} 2^{-n(\beta(\sigma)-\beta)} (k_{n2} - k_{n1})^{1-\beta(\sigma)}\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{(1-\beta(\sigma))/2} 2^{-n_0(2\beta(\sigma)-\beta-1)/2} \\ &\leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{(\beta(\sigma)-\beta)/2} \leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{\gamma_2}.\end{aligned}$$

При цьому $\beta > 0$ обираємо зі співвідношення

$$(\beta(\sigma) - \beta)/2 > \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma)) > \gamma_2;$$

таке β існує, оскільки $1 > \beta(\sigma)$. Звідси

$$\hat{J}_1 \leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{\gamma_2}. \tag{7.24}$$

Тепер перейдемо до оцінювання J_2, для чого розглянемо функцію $\bar{Q}$ і дослідимо її властивості. По-перше, відмітимо, що в позначеннях леми 7.1.1 має місце представлення $\bar{Q}(z,s) = v(t_2 - s, x, s) - v(t_1 - s, x, s)$, причому

$$\begin{aligned}|\bar{Q}(z,s)| &\leqslant |v^{(1)}(t_2 - s, x, s) - v^{(1)}(t_1 - s, x, s)| \\ &\qquad + |v^{(2)}(t_2 - s, x, s) - v^{(2)}(t_1 - s, x, s)| \\ &\leqslant |v^{(1)}(t_2 - s, x, s) - v^{(1)}(t_1 - s, x, s)| + C(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Для різниці $|v^{(1)}(t_2 - s, x, s) - v^{(1)}(t_1 - s, x, s)|$ можемо скористатися оцінками (13)-(15) з роботи [17]:

$$\begin{aligned}&|v^{(1)}(t_2 - s, x, s) - v^{(1)}(t_1 - s, x, s)| \leqslant C(t_2 - t_1)(t_1 - s)^{-1}, \\ &|v^{(1)}(t_2 - s, x, s) - v^{(1)}(t_1 - s, x, s)| \leqslant C(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1 - s)^{-\beta(\sigma)/2}, \\ &|v^{(1)}(t_2 - s, x, s) - v^{(1)}(t_1 - s, x, s)| \leqslant C(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)/2}.\end{aligned}$$

Звідси одержуємо оцінки для $|\bar{Q}|$.

$$|\bar{Q}(z,s)| \leqslant C(t_2 - t_1)(t_1 - s)^{-1}, \tag{7.25}$$

$$|\bar{Q}(z,s)| \leqslant C(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1 - s)^{-\beta(\sigma)/2}, \tag{7.26}$$

$$|\bar{Q}(z,s)| \leqslant C(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)/2}. \tag{7.27}$$

Більше того, з (7.25) та (7.26) безпосередньо отримуємо такі оцінки для $|\bar{Q}(z, s + h) - \bar{Q}(z,s)|$:

$$|\bar{Q}(z, s+h) - \bar{Q}(z,s)| \leqslant C(t_2 - t_1)(t_1 - s - h)^{-1}, \tag{7.28}$$

$$|\bar{Q}(z, s+h) - \bar{Q}(z,s)| \leqslant C(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1 - s - h)^{-\beta(\sigma)/2}. \tag{7.29}$$

Тепер перепишемо різницю $\bar{Q}(z, s+h) - \bar{Q}(z,s)$ у вигляді

$$\begin{aligned}&\bar{Q}(z, s+h) - \bar{Q}(z,s) \\ &\quad = \int_B \big(G(t_2, x; s, y) - G(t_1, x; s, y)\big)\big(\sigma(s+h, y) - \sigma(s, y)\big)dy \\ &\qquad + \int_B \big(G(t_2, x; s+h, y) - G(t_2, x; s, y)\big)\sigma(s+h, y)dy \\ &\qquad - \int_B \big(G(t_1, x; s+h, y) - G(t_1, x; s, y)\big)\sigma(s+h, y)dy = F_1 + F_2 - F_3.\end{aligned}$$

Можемо скористатися оцінкою (2.17) і отримати, що

$$\begin{aligned}
|F_1| &\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_B dy\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{(\tau-s)^{d/2+1}}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{\tau-s}}d\tau\\
&\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{ds}{(\tau-s)^{d/2+1}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{\varkappa(x-y)^2}{\tau-s}}dy\\
&\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{ds}{(\tau-s)^{d/2+1}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\varkappa v^2}{\tau-s}}v^{d-1}dv\\
&= Ch^{\beta(\sigma)}\int_{t_1}^{t_2}(\tau-s)^{-1}d\tau\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)(t_1-s-h)^{-1}.
\end{aligned}$$

При оцінюванні F_2 можемо скористатися тими самими міркуваннями, що і при оцінюванні $|\bar{q}(z,s+h)-\bar{q}(z,s)|$.

$$\begin{aligned}
|F_2| &= |v(t_2-s-h,x,s+h)-v(t_2-s,x,s+h)|\\
&\leqslant |v^{(1)}(t_2-s-h,x,s+h)-v^{(1)}(t_2-s,x,s+h)|\\
&\quad+|v^{(2)}(t_2-s-h,x,s+h)-v^{(2)}(t_2-s,x,s+h)|\\
&\leqslant C(h(t_1-s-h)^{-1}+h)\leqslant Ch(t_1-s-h)^{-1},
\end{aligned}$$

і так же можемо оцінити F_3. Додавши останні оцінки, приходимо до такого аналогу співвідношення (19) з [17]:

$$|\bar{Q}(z,s+h)-\bar{Q}(z,s)|\leqslant C\big(h^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)+h\big)(t_1-s-h)^{-1}. \tag{7.30}$$

Для того, щоб отримати наступну оцінку, безпосередньо скористаємося (7.24).

$$\begin{aligned}
&|\bar{Q}(z,s+h)-\bar{Q}(z,s)|\\
&\quad\leqslant\left|\int_B\big(G(t_2,x;s+h,y)\sigma(s+h,y)-G(t_2,s;s,y)\sigma(s,y)\big)dy\right|\\
&\qquad+\left|\int_B\big(G(t_1,x;s+h,y)\sigma(s+h,y)-G(t_1,s;s,y)\sigma(s,y)\big)dy\right|\\
&\quad\leqslant Ch^{\beta(\sigma)}(t_1-s)^{-\beta(\sigma)/2}.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Піднісши нерівність (7.29) до степеня λ, а нерівність (7.28) — до степеня $1-\lambda$, де $\lambda\in(1/(2-\beta(\sigma)),1)$, одержимо співввідошення

$$|\bar{Q}(z,s+h)-\bar{Q}(z,s)|\leqslant C(t_2-t_1)^{\rho_1}(t_1-s-h)^{\rho_2}, \tag{7.32}$$

де

$$\rho_1 = 1 - \lambda + \lambda\beta(\sigma) > \beta(\sigma), \quad \rho_2 = -1 + \lambda - \lambda\beta(\sigma)/2 > -1/2.$$

З іншого боку, піднісши (7.31) до степеня λ, а (7.30) — до степеня $1-\lambda$, одержимо співвідношення

$$|\bar{Q}(z, s+h) - \bar{Q}(z, s)| \leqslant C(h^{\beta(\sigma)}(t_2 - t_1)^{1-\lambda} + h^{\rho_1})(t_1 - s - h)^{\rho_2}. \tag{7.33}$$

Виберемо в якості m_0 таке число, що

$$2^{-m_0}T < t_1 \leqslant 2^{-m_0+1}T.$$

Функція $\bar{Q}(z,s)$ вже була визначена на $[0, t_1]$, довизначимо її за неперервністю при $s > t_1$ як $\bar{Q}(z,s) = \bar{Q}(z, t_1)$. Тепер функція $\bar{Q}$ є неперервною на $[0, t_2]$, отже, можемо скористатися лемою 2.2.1 і одержати, що для деякої модифікації $\hat{J}_2$ інтегралу J_2 справедливі такі оцінки:

$$\begin{aligned}
|\hat{J}_2| &\leqslant |\bar{Q}(z,0)\mu((0,t_1])| \\
&\quad + \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{2^n} |\bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-1)n}) - \bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-2)n})||\mu(\Delta^{(0,T)}_{kn} \cap (0,t_1])| \\
&\leqslant |\bar{Q}(z,0)\mu((0,t_1])| + \sum_{n\geqslant m_0}\sum_{k=2}^{k_{n1}} |\bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-1)n}) - \bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-2)n})||\mu(\Delta^{(0,T)}_{kn} \cap (0,t_1])| \\
&\leqslant |\bar{Q}(z,0)\mu((0,t_1])| + \sum_{n\geqslant m_0} |\bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k_{n1}-1)n}) - \bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k_{n2}-2)n})||\mu(d^{(0,T)}_{(k_{n1}-1)n}, t_1])| \\
&\quad + \sum_{n=m_0}^{n_0-1}\sum_{k=2}^{k_{n1}-1} |\bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-1)n}) - \bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-2)n})||\mu(\Delta^{(0,T)}_{kn})| \\
&\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=2}^{k_{n1}-1} |\bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-1)n}) - \bar{Q}(z, d^{(0,T)}_{(k-2)n})||\mu(\Delta^{(0,T)}_{kn})| = U_1 + U_2 + U_3 + U_4.
\end{aligned}$$

Скориставшись (7.27), можемо оцінити U_1 та U_2 таким чином:

$$U_1 \leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)/2}, \tag{7.34}$$

$$U_2 \leqslant C(\omega)(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)/2} \sum_{n\geqslant m_0} 2^{-n\beta(\mu)} = C(\omega)(t_2 - t_1)^{\beta(\sigma)/2}. \tag{7.35}$$

Тепер оцінимо U_3, скориставшись (7.32).

$$\begin{aligned}
U_3 &\leqslant C\Big(\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n\beta}\sum_{k=1}^{2^n}|\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)})|^2\Big)^{1/2} \\
&\qquad \times\Big(\sum_{n=m_0}^{n_0-1} 2^{n\beta}\sum_{k=2}^{k_{n1}-1}|\bar{Q}(z,d_{(k-1)n}^{(0,T)})-\bar{Q}(z,d_{(k-2)n}^{(0,T)})|^2\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\rho_1}\Big(\sum_{n=m_0}^{n_0-1} 2^{n\beta}\sum_{k=2}^{k_{n1}-1}(t_1-d_{(k-1)n}^{(0,T)})^{2\rho_2}\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\rho_1}\Big(\sum_{n=m_0}^{n_0-1} 2^{n\beta}\sum_{i=1}^{k_{n1}-1}(i2^{-n}T)^{2\rho_2}\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\rho_1}\Big(\sum_{n=m_0}^{n_0-1} 2^{n(\beta-2\rho_2)}(k_{n1}-1)^{2\rho_2+1}\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\rho_1}\Big(\sum_{n=m_0}^{n_0-1} 2^{n(\beta-2\rho_2)}2^{n(2\rho_2+1)}\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\rho_1}2^{n_0(\beta+1)/2}\leqslant C(t_2-t_1)^{\rho_1-(1+\beta)/2}. \qquad (7.36)
\end{aligned}$$

А при побудові оцінки для U_4 використаємо (7.33):

$$\begin{aligned}
U_4 &\leqslant C\Big(\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n\beta}\sum_{k=1}^{2^n}|\mu(\Delta_{kn}^{(0,T)})|^2\Big)^{1/2}\\
&\quad\times\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n\beta}\sum_{k=2}^{k_{n1}-1}|\bar{Q}(z,d_{(k-1)n}^{(0,T)})-\bar{Q}(z,d_{(k-2)n}^{(0,T)})|^2\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(\omega)\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n\beta}\sum_{k=2}^{k_{n1}-1}((t_2-t_1)^{2-2\lambda}(2^{-n}T)^{2\beta(\sigma)}+(2^{-n}T)^{2\rho_1})(t_1-d_{(k-1)n}^{(0,T)})^{2\rho_2}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(\omega)\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n\beta}((t_2-t_1)^{2-2\lambda}2^{-2n\beta(\sigma)}+2^{-2n\rho_1})\sum_{j=1}^{k_{n1}-1}|j2^{-n}T|^{2\rho_2}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(\omega)\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n(\beta-2\rho_2)}((t_2-t_1)^{2-2\lambda}2^{-2n\beta(\sigma)}+2^{-2n\rho_1})(k_{n1}-1)^{2\rho_2+1}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(\omega)\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n(\beta-2\rho_2)}((t_2-t_1)^{2-2\lambda}2^{-2n\beta(\sigma)}+2^{-2n\rho_1})2^{n(2\rho_2+1)}\Big)^{1/2}\\
&= C(\omega)\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n(\beta-2\beta(\sigma)+1)}(t_2-t_1)^{2-2\lambda}+\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n(\beta-2\rho_1+1)}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(\omega)\Big(2^{n_0(\beta-2\beta(\sigma)+1)}(t_2-t_1)^{2-2\lambda}+2^{n_0(\beta-2\rho_1+1)}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(\omega)\Big((t_2-t_1)^{-\beta+2\beta(\sigma)-1}(t_2-t_1)^{2-2\lambda}+(t_2-t_1)^{-\beta+2\rho_1-1}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant C(t_2-t_1)^{\rho_1-(1+\beta)/2}. \qquad (7.37)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що оцінки (7.36) та (7.37) виконуються при всіх $\beta > 0$. Тепер для довільного фіксованого $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(2(2-\beta(\sigma)))$ покладемо

$$\lambda = \frac{1-\beta-2\gamma_2}{2(1-\beta(\sigma))} \Rightarrow \rho_1-(1+\beta)/2=\gamma_2.$$

Візьмемо β, для якого $\beta+2\gamma_2 < \beta(\sigma)/(2-\beta(\sigma))$; тоді $\lambda > 1/(2-\beta(\sigma))$. Врахувавши, що $\beta(\sigma)/2 > \beta(\sigma)/(2(2-\beta(\sigma))) > \gamma_2$ і оцінки (7.34), (7.35), одержимо, що

$$|\hat{J}_2| \leqslant C(\omega)(t_2-t_1)^{\gamma_2}. \qquad (7.38)$$

З (7.24) та (7.38) випливає твердження леми. □

7.4. Висновки

У розділі 7 розглянута крайова задача для стохастичного рівняння, у якому випадковий вплив задано з використанням інтеграла за стохастичною мірою. Наведено означення розв'язку. Доведено його існування та єдиність. Сформульовано та доведено леми про неперервність стохастичного інтегралу за Гельдером по часовій та просторовій змінній. Використано наведені результати для доведення неперервності розв'язку за Гельдером.

Розділ 8

ВИСНОВКИ

Нагадаємо твердження, які були сформульовані та доведені в дисертаційному дослідженні.

1. Для розв'язків параболічних рівнянь, введених у [11, (3)], доведено їх збіжність при збіжності стохастичних мір.
2. Для розв'язків вказаних рівнянь доведено принцип усереднення.
3. Розглянуто параболічне рівняння за умови, що часова змінна належить півосі $[0, +\infty)$. Доведено збіжність стохастичного доданку до нуля при прямуванні часової змінної до нескінченності. Вказане твердження використано для доведення збіжності розв'язку.
4. Розглянуто стохастичний інтеграл вигляду (6.1). Наведено його представлення через суму абсолютно та рівномірно збіжного ряду Хаара. З його допомогою сформульовано достатні умови неперервності та диференційовності траєкторій інтеграла за параметром.
5. Розглянуто стохастичний інтеграл вигляду (6.12). Наведено достатні умови неперервності його траєкторій за параметром.
6. Поставлена крайова задача (7.1). Наведено означення її розв'язку. Доведено існування та єдиність розв'язку. Доведено неперервність стохастичного доданку за Гельдером за змінними t та x. Сформульовано умови неперервності за Гельдером розв'язку задачі за обома змінними, доведено відповідну теорему.

Також наведемо можливі напрями продовження досліджень. Результати розділу 6 можна використати для доведення неперервності розв'язків стохастичних рівнянь, керованих стохастичною мірою, визначеною на підмножинах $[0, 1]^d$. Для крайової задачі (7.1) можна спробувати довести принцип усереднення, збіжність розв'язків рівнянь при збіжності стохастичних мір, дослідити поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до нескінченності.

Список використаних джерел

1. Манікін Б. І. Асимптотична поведінка розв'язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою при $t \to \infty$. *Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2022»* м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2022. С. 17–18.
2. Манікін Б. І. Крайова задача для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою. *Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2023»* м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 42–43.
3. Манікін Б. І. Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною стохастичною мірою. *International Conference of Young Mathematicians.* Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023.
   www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Manikin.pdf
4. Манікін Б. І. Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною випадковою мірою. *XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука.* м. Київ, Україна: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 11–12 жовтня 2023. С. 170–171.
5. Манікін Б. І. Крайова задача для параболічного рівняння із загальною випадковою мірою. *Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2024»* м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 11 квітня 2024. С. 35–36.
6. Манікін Б. І. Крайова задача для параболічного рівняння зі загальною стохастичною мірою. *XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків.* м. Київ, Україна. 9–11 травня 2024. С. 31–32.
7. S. Bochner. Stochastic processes. *Ann. Math.*, 48(4):1014–1061, 1947.
8. I. Bodnarchuk. Averaging principle for a stochastic cable equation. *Mod. Stoch.*

Theory Appl., 7(4):449–467, 2020.

9. I. M. Bodnarchuk. Mild solution of the wave equation with a general random measure. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics*, 24:28–33, 2010.
10. I. M. Bodnarchuk. Asymptotic behavior of a mild solution of the stochastic heat equation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics*, (2):40–42, 2016.
11. I. M. Bodnarchuk. Regularity of the mild solution of a parabolic equation with stochastic measure. *Ukr. Math. J.*, 69:1–18, 2017.
12. I. M. Bodnarchuk. Wave equation with a stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 94:1–17, 2017.
13. I. M. Bodnarchuk. Asymptotics of the mild solution of a parabolic equation with a general stochastic measure. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv* Series: Physics & Mathematics, (2):75–81, 2023.
14. I. M. Bodnarchuk, V. M. Radchenko. Asymptotic behavior of solutions of the heat equation with stochastic measure. *Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*, 2(1):7–11, 2012.
15. I. M. Bodnarchuk, V. M. Radchenko. Wave equation in the plane driven by a general stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 98:73–90, 2019.
16. I. M. Bodnarchuk, V. M. Radchenko. The wave equation in the three-dimensional space driven by a general stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 100:43–60, 2020.
17. I. M. Bodnarchuk, G. M. Shevchenko. Heat equation in a multidimensional domain with a general stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 93:1–17, 2016.
18. J. Clarke De la Cerda, C. A. Tudor. Wiener integrals with respect to the Hermite random field and applications to the wave equation. *Collect. math.*, 65(3):341–356, 2014.
19. A. Friedman. On quasi-linear parabolic equations of the second order II. *Journ. Math. and Mech.*, 9:539–556, 1960.

20. A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1964.
21. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod. *Introduction to the theory of random processes.* Dover Publications Inc, New York, 1996.
22. A. Hinojosa-Calleja. Exact uniform modulus of continuity for q-isotropic Gaussian random fields. *Statist. Probab. Lett.*, 197:109813, 2023.
23. A. M. Ilyin, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleynik. Linear second-order partial differential equations of the parabolic type. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 108:435–542, 2002.
24. A. Kamont. A discrete characterization of Besov spaces. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, 13:63–77, 1997.
25. N. V. Krylov. *Introduction to the theory of random processes.* American Mathematical Soc., Providence, 2002.
26. H.-H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration.* Springer, 2006.
27. S. Kwapień and W. A. Woyczyński. *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple.* Birkhäuser, Boston, 1992.
28. O. A. Ladyzhenskaia, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* American Mathematical Soc., 1968.
29. Talagrand M. Les measures vectorielles á valeurs dans L_0 sont bornées. *Ann. sci. Ecole norm. super.* 14(4):445–452, 1981.
30. B. Manikin. Heat equation with a general stochastic measure in a bounded domain. *Modern Stoch. Theory Appl.* https://doi.org/10.15559/24-VMSTA262
31. B. I. Manikin. Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure. *Mod. Stoch. Theory Appl.*, 9:483–498, 2022.
32. B. I. Manikin. Averaging principle for the one-dimensional parabolic equation driven by stochastic measure. *Mod. Stoch. Theory Appl.*, 9(2):123–137, 2022.
33. B. Manikin. Properties of the solutions of stochastic equations driven by general stochastic measure. *Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024. Book of Abstracts.* Kyiv, Ukraine: Taras Shevchenko National University of Kyiv. December 16–18, 2024. p.75.

34. Yu. Mishura. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes.* Springer, Berlin, 2008.
35. S. Peszat, J. Zabczyk. *Stochastic partial differential equations with Lévy noise: an evolution equation approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
36. A. Prekopa. On stochastic set functions. i. *Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, 7(2):215–263, 1956.
37. A. Prekopa. On stochastic set functions. ii. *Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, 8(3-4):337–374, 1957.
38. A. Prekopa. On stochastic set functions. iii. *Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, 8(3-4):375–400, 1957.
39. V. Radchenko. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. *Studia Math.*, 194:231–251, 2009.
40. V. Radchenko. Sample functions of stochastic measures and Besov spaces. *Theory Probab. Appl.*, 54:160–168, 2010.
41. V. Radchenko. Heat equation with general stochastic measure colored in time. *Mod. Stoch. Theory Appl.*, 1(2):129–138, 2014.
42. V. Radchenko. Evolution equations driven by general stochastic measures in Hilbert space. *Theory Probab. Appl.*, 59:328–339, 2015.
43. V. Radchenko. *General Stochastic Measures: Integration, Path Properties, and Equations.* Wiley — ISTE, London, 2022.
44. V. Radchenko, B. Manikin. Sample path properties of multidimensional integral with respect to stochastic measure. *Modern Stoch. Theory Appl.*, 11(4):421–437, 2024.
45. V. M. Radchenko. Asymptotic behavior of the solution of heat equation with a stochastic measure as $t \to \infty$. *Nauk. Visnyk Uzhgorod. Un-tu*, 23(1):113–118, 2012.
46. V. M. Radchenko. Cable equation with a general stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 84:131–138, 2012.
47. V. M. Radchenko. Fourier series expansion of stochastic measures. *Theory Probab. Appl.*, 99(2):318–326, 2018.

48. V. M. Radchenko. Averaging principle for equation driven by a stochastic measure. *Stochastics*, 91(6):905–915, 2019.
49. V. M. Radchenko. Averaging principle for the heat equation driven by a general stochastic measure. *Statist. Probab. Lett.*, 146:224–230, 2019.
50. V. M. Radchenko. Strong convergence rate in averaging principle for the heat equation driven by a general stochastic measure. *Communications on stochastic analysis*, 13, 2019.
51. V. M. Radchenko. The Burgers-type equation driven by a stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 110:185–199, 2024.
52. V. M. Radchenko and B. I. Manikin. Approximation of the solution to the parabolic equation driven by stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 102:145–156, 2020.
53. V. M. Radchenko and N. O. Stefans'ka. Fourier series and Fourier-Haar series for stochastic measures. Theory Probab. Math. Statist., 99(2):203–211, 2018.
54. V. S. Romanyuk. Multiple Haar basis and its properties. *Ukr. Math. J.*, 67(9):1411–1425, 2016.
55. G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes.* Chapman and Hall, London, 1994.
56. G. Shen, J.-L. Wu, and X. Yin. Averaging principle for fractional heat equations driven by stochastic measures. *Appl. Math. Lett.*, 106, August 2020. 106404.
57. C. Tudor. *Non-Gaussian selfsimilar stochastic processes.* Springer, 2023.
58. N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, and S. A. Chobanian. *Probability distributions on Banach spaces.* D. Reidel Publishing Co., 1987.
59. O. O. Vertsimakha and V. M. Radchenko. Mild solution of the parabolic equation driven by a σ-finite stochastic measure. *Theory Probab. Math. Statist.*, 97:17–32, 2018.
60. V. S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
61. Walsh J. B. An introduction to stochastic partial differential equations. Lecture Notes in Math. 1986. Vol. 1180. 265–439.

Додаток

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Manikin, B., Radchenko, V. Approximation of the solution to the parabolic equation driven by stochastic measure // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2021. Vol. 102. P. 145-156. https://doi.org/10.1090/tpms/1131
2. Manikin, B. Averaging principle for the one-dimensional parabolic equation driven by stochastic measure // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2022. Vol. 9 no. 2 P. 123–137 https://doi.org/10.15559/21-vmsta195
3. Manikin, B. Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2022. Vol. 9 no. 4 P. 483–498 https://doi.org/10.15559/22-vmsta213
4. Manikin, B., Radchenko, V. Sample path properties of multidimensional integral with respect to stochastic measure // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2024. Vol. 11 no. 4 P. 421–437 https://doi.org/10.15559/24-vmsta256
5. Manikin B. Heat equation with a general stochastic measure in a bounded domain // Modern Stochastics: Theory and Applications.
https://doi.org/10.15559/24-VMSTA262

Публікації, які засвідчують апробацію результатів дисертації

1. Манікін Б. І. Асимптотична поведінка розв'язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою при $t \to \infty$// Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2022» м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2022. С. 17–18.
2. Манікін Б. І. Крайова задача для рівняння теплопровідності із загальною

стохастичною мірою // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2023» м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 42–43.

3. Манікін Б. І. Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною стохастичною мірою // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023.
   www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Manikin.pdf
4. Манікін Б. І. Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною випадковою мірою // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м. Київ, Україна: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 11–12 жовтня 2023. С. 170–171.
5. Манікін Б. І. Крайова задача для параболічного рівняння із загальною випадковою мірою // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2024» м. Київ, Україна: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 11 квітня 2024. С. 35–36.
6. Манікін Б. І. Крайова задача для параболічного рівняння зі загальною стохастичною мірою // XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. м. Київ, Україна 9–11 травня 2024. С. 31–32.
7. Manikin B. Properties of the solutions of stochastic equations driven by general stochastic measure // Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024. Book of Abstracts. Kyiv, Ukraine. December 16–18, 2024. p.75.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. XX Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2022", 14 квітня, 2022, Київ, Україна.
2. XXI Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2023", 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
3. International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv,

Ukraine.

4. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня, 2023, Київ, Україна.
5. XXII Міжнародна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2024“, 11 квітня, 2024, Київ, Україна.
6. XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9–11 травня, 2024, Київ, Україна.
7. Ukraine Mathematics Conference “At the End of the Year 2024”, December 16–18, 2024, Kyiv, Ukraine.