

УДК 519.9

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.14>

Петрова Т.О.¹, к.ф.-м.н., доц.
Чулаков І.П.

Petrova T. O.¹, PhD, Associate Prof.
Chulakov I.P.

**Деякі негативні результати для
інтерполяційного монотонного
наближення функцій, що мають дробову
похідну**

**Some negative results for the interpolation
monotone approximation of functions having
a fractional derivative**

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ,
пр-т. Глушкова 4е,
email:tamarapetrova2703@gmail.com
email:igorczpua@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
email:tamarapetrova2703@gmail.com
email:igorczpua@gmail.com

Досліджується питання наближення функцій $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^1, r \in (3,4)$ алгебраїчними поліномами $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$. Побудовано контрприклад, який показує, що для $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^1, r \in (3,4)$ оцінка $|f(x) - p_n(x)| \leq c \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]$ є невірною.

Ключові слова: Наближення функції, простір Соболева, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.

We discuss whether or not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function $f \in W^r[0,1]$ by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function $f \in C^r[0,1] \cap \Delta^0$ where Δ^0 is the set of positive functions on $[0,1]$. Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1],[2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3],[4],[8]. In [3],[4] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. In [8] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for $r > 2, r \in \mathbb{N}$. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is consider in ([5],[6]). In [5] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. In [6] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for $r > 2, r \in \mathbb{N}$. In this paper the question of approximation of function $f \in W^r \cap \Delta^1, r \in (3,4)$ by algebraic polynomial $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$ is consider. The main result of the work generalize the result of work [8] for $r \in (3,4)$.

Key Words: Approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, convex function.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ.

Нехай $W^r, r \in \mathbb{R}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$.

Теляковський [1] для $r=1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{R}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського – Тіммана довівши, що кожен функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, n > r \quad (1)$$

де c - абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r=1,2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом.

А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n , такий, що має місце (1).

В роботі [4] доведено, що для натурального $r > 2, r \in \mathbb{R}$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна для монотонного наближення.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{R}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1}f$ - лівостороння дробова похідна [7]).

Будемо позначати через Π_n - множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^1 множину монотонних вниз на $[0,1]$ функцій.

Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат роботи [8] на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^1$ з $r \in (3,4), r \in \mathbb{R}$.

Основні означення та допоміжні твердження.

Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в роботі.

Означення 1. Нехай $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a \quad (2)$$

$$(I_{b-}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x < b \quad (3)$$

де $\alpha > 0$ називаються інтегралами дробового порядку α .

Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім. Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегруванню [7].

Означення 2. Для функції $f(x)$, що задана на відрізьку $[a,b]$ кожен із виразів

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (4)$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (5)$$

називається дробовою похідною порядку $\alpha, 0 < \alpha < 1$ відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \geq 1$ $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$,

де $[\alpha]$ -ціла частина числа α і $\{\alpha\}$ -дробова частина числа α .

Якщо α - ціле число, то під дробовою похідною порядку α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha, D_{b-}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \alpha = 1, 2, 3... \quad (6)$$

Якщо ж α - не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1 \quad (7)$$

$$D_{b-}^\alpha f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1 \quad (8)$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку $\alpha, \alpha > 0$ [7].

Теорема 1. Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку

$n, n = [\alpha] + 1$. Тоді $D_{a+}^{\alpha} f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \quad (9)$$

Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат роботи [8] на класи $W^r[0,1]$ при $r \in (3,4), r \in \mathbb{Q}$.

Основний результат.

Теорема 2. Нехай $r \in (3,4)$. Тоді для кожного n існує функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$ така, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$ і для будь-якої додатної на $(0,1)$ функції ψ , такої, що $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$ і $\lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = 0$ справедлива одна з таких властивостей:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\phi^r(x)\psi(x)} = +\infty \quad (11)$$

або

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\phi^r(x)\psi(x)} = +\infty \quad (12)$$

де $\phi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (3,4)$. Розглянемо функцію:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(b-x)^4}{4!} + b^4(x+7) - \frac{b^4}{2}(1+x)^{-\frac{1}{b}+4} + \\ + \frac{b^4}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}+4}, & x \in [0, b] \\ b^4(x+7) - \frac{b^4}{2}(1+x)^{-\frac{1}{b}+4} + \\ + \frac{b^4}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}+4}, & x \in (b, 1] \end{cases}$$

З явного вигляду функції $f(x)$ та її похідних, можна отримати нерівності:

$$\begin{aligned} f(1) &\leq \frac{45}{4}b^4, f(0) = \frac{163}{24}b^4 > 0, \\ f'(0) &\sim b^4 + \frac{1}{12}b^3 > 0, f'(b) \sim b^4 + \frac{1}{4}b^3e^{-1} > 0, \\ f'(1) &\sim b^4, f''(0) \sim \frac{b^2}{4} > 0, \\ f''(b) &\sim -\frac{b^2}{4}e^{-1} < 0, f''(1) \sim -\frac{b^2}{2}2^{-\frac{1}{b}} < 0, \\ f'''(0) &\sim -\frac{3}{4}b < 0, f'''(b) \sim \frac{b}{4}e^{-1} > 0, \\ f'''(1) &\sim \frac{b}{2}2^{-\frac{1}{b}} > 0. \end{aligned}$$

Помітимо також, що

$$\begin{aligned} f^{(4)}(b-) &> 0, f^{(4)}(b+) < 0 \text{ то} \\ \forall x \in [0, b): f^{(4)}(x) &> 0, \forall x \in (b, 1]: f^{(4)}(x) < 0. \end{aligned}$$

З останніх нерівностей зрозуміло, що $\forall x \in [0,1]: f'(x) > 0$ і функція f зростає на $[0,1]$ та $\forall x \in [0,1]: f(x) \geq 0$.

Далі, існує

$$\begin{aligned} x_1 \in (0, b): f''(x_1) &= 0, \forall x \in [0, x_1]: f''(x) \geq 0 \text{ та} \\ \forall x \in [x_1, 1]: f''(x) &< 0. \end{aligned}$$

Також існує $x_0 \in [x_1, b]: f''(x_0) = \min_{x \in [0,1]} f''(x)$.

З явного вигляду $f''(x)$ отримаємо оцінку $\forall x \in [0, b]:$

$$f''(x) \geq -\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{4}e^{-1} \geq -\frac{b^2}{2},$$

$$\text{а саме, } f''(x_0) \geq -\frac{b^2}{2}.$$

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^4 f(x)$.

Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$.

Розглянемо $F'(x) = 4x^3 f(x) + x^4 f'(x)$.

Так як $\forall x \in [0,1] f(x) \geq 0$ і $f'(x) \geq 0$, то $\forall x \in [0,1]: F'(x) \geq 0$. Таким чином $F \in \Delta^1$.

Тепер доведемо, що $F \in W^r[0,1]$.

За Теоремою 2.3 в роботі [7] маємо:

$$\begin{aligned} D_{0+}^r F(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \\ &= \sum_{k=0}^3 \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt, \end{aligned}$$

майже скрізь на $[0,1]$.

Так як $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, 1, 2, 3$, то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

майже скрізь на $[0,1]$.

Очевидно, що $\exists c > 0, c \in \mathbb{R}$ така, що

$$\forall x \in [0,1]: |F^{(4)}(x)| \leq c.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |D_{0+}^r F(x)| &= \frac{c}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-3}} = \\ &= \frac{c}{\Gamma(4-r)} \frac{x^{4-r}}{4-r} \leq \frac{c}{(4-r)\Gamma(4-r)}. \end{aligned}$$

Таким чином, $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$.

Очевидно, що

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

буде абсолютно непервною.

Таким чином, $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$.

Нехай існує многочлен q_n , який монотонно зростає на $[0,1]$ і для якого умова (11) не виконується.

Тоді, для деякої сталої B маємо:

$$|F(x) - q_n(x)| \leq B\phi^r(x)\psi(x) \leq Bx^{r/2}, 0 \leq x \leq b.$$

Звідси випливає, що

$$q_n(0) = F(0) = 0 \text{ і } q'_n(0) = F'(0) = 0.$$

Так як q_n зростає на $[0,1]$ і $q_n(0) = 0$, то $\forall x \in [0,1]: q_n(x) \geq 0$. Тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x) = x^2 \cdot h_{n_1}(x)$, де h_{n_1} многочлен степеня $\leq n_1, n_1 \leq n$.

Розглянемо многочлен

$$\tilde{q}_n(x) = q_n(x) + f'(0)x + f(0).$$

Доведемо, що умова

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - \tilde{q}_n(x)|}{\phi^r(x)} = +\infty \quad (13)$$

не виконується.

Розкладемо функцію $f(x)$ за формулою Тейлора:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \in [0;b]$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - \tilde{q}_n(x)|}{\phi^r(x)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) - \tilde{q}_n(x) \right|}{\frac{r}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) - q_n(x) \right|}{\frac{r}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \left(\frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{6}x + o(x) - h_{n_1}(x) \right) x^{2-r/2} \right| = 0 \end{aligned}$$

Так як умова (13) не виконується, то

$$\tilde{q}_n(0) = f(0), \tilde{q}'_n(0) = f'(0).$$

За нерівністю Маркова маємо:

$$\frac{b^3}{18} < \frac{b^3}{12} + b^4 = |f'(0)| = |\tilde{q}'_n(0)| \leq 2n^2 \|\tilde{q}_n\|.$$

За побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він зростає.

Тоді $\|\tilde{q}_n\| = \tilde{q}_n(1)$.

Так, як $\| \tilde{q}_n \| = \tilde{q}(1)$, то маємо

$$\frac{b^3}{18} \leq 2n^2 q_n(1) \Rightarrow q_n(1) > \frac{b^3}{36n^2} \quad (14)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} f(1) &\leq \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45bn^2 \cdot 36}{4} = \\ &= \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot \frac{1}{468n^2} \cdot n^2 \cdot 36}{4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 36}{4 \cdot 468} = \\ &= \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 9}{468} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} \leq \frac{b^3}{36n^2} \end{aligned} \quad (15)$$

З нерівностей (14) та (15) маємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$.

Далі розглянемо: $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$.

Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$.

Тоді $\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0)$.

З останнього маємо, що

$$f(1) = \tilde{q}_n - f'(0) - f(0)$$

Ми припускаємо, що $q_n(1) > 0$, бо в протилежному випадку твердження про те, що $f(1) \neq q_n(1)$ очевидно.

Маємо, що

$$\begin{aligned} 8b^4 - 4b^4 \cdot 2^{-\frac{1}{b}} &= \tilde{q}_n(1) - \frac{b^3}{12} - b^4 - \frac{163}{12}b^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8b^4 - 4b^4 \cdot 2^{-\frac{1}{b}} &= \tilde{q}_n(1) - \frac{b^3}{12} - \frac{175}{12}b^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{b^3}{12} &= \tilde{q}_n(1) - \frac{271}{12}b^4 + 4b^4 \cdot 2^{-\frac{1}{b}}. \end{aligned}$$

Тоді, очевидно, що $\tilde{q}_n(1) \sim c \cdot b^3$, де $c \geq \frac{1}{12}, c = \text{const}$.

З останніх міркувань випливає, що $q_n(1) = \tilde{q}_n(1) - f'(0) - f(0) \sim c \cdot b^3 - \frac{b^3}{12} = c_1 \cdot b^3$, де $c_1 > 0, c_1 = \text{const}$.

Але з іншого боку, $f(1) \sim 8b^4$.

Таким чином маємо суперечність з припущенням, $q_n(1) = f(1)$.

А отже $q_n(1) \neq f(1) = F(1)$.

Теорема доведена.

Висновки.

Доведено негативний результат для монотонного наближення функцій многочленами, який є узагальненням негативного результату доведеного в роботі [8].

Список використаних джерел

1. Теляковський С.А., Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами, Мат. сб. 79 (1966), 252–265.
2. Gopengauz A. I., Pointwise estimates of Hermitian interpolation, Vol. 77, 1994
3. DeVore R.A. and Yu X.M., Pointwise estimates for monotone polynomial approximation, Constr. Approx. 1 (1985), 323–331.
4. H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, and H. -J. Wenz, Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations, Constr. Approx. 16 (2000), 603–629.
5. Петрова Т.О., Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні, праці Інституту математики НАН України "Математика та її застосування. Теорія наближення функцій 35 (2005), 107–112.
6. Петрова Т.О., Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну, Вісник Київського університету. Фізико - математичні науки 4 (2006), 113–118.
7. Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O.I., Fractional integrals and derivatives: theory and applications (1987)
8. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну, Вісник Київського університету. Математика–Механіка 9-10 (2003), 125–127.
9. Петрова Т.О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну, Вісник Київського університету. Математика–Механіка 7-8 (2002), 118

References

1. Telyakovskij S.A., Dve teoremy o priblizhenii funkcij algebraicheskimi polinomami, Mat. sb. 79 (1966), p.252–265.
2. Gopengauz A. I., Pointwise estimates of Hermitian interpolation, Vol. 77, 1994.
3. DeVore R.A. and Yu X.M., Pointwise estimates for monotone polynomial approximation, Constr. Approx. 1 (1985), 323–331.
4. H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, and H. -J. Wenz, Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations, Constr. Approx. 16 (2000), 603–629.
5. Petrova T.O., Kontrprzyklad u interpolyatsiinomu opuklomu nablyzhenni, Pratsi Instytutu matematyky NAN Ukrainy "Matematyka ta zastosuvannia. Teoriya nablyzhennia functsii 35 (2005)", p.107–112.
6. Petrova T.O., Kontrprzyklad u interpolyacijnomu opuklomu nablizhenni, praci Institutu matematiki NAN Ukrayini "Matematika ta yiyi zastosuvannia. Teoriya nablizhennya funkcij 4 (2006), p.113–118.
7. Samko S.G., Kilbas A. A., and Marichev O.I., Fractional integrals and derivatives: theory and applications (1987)
8. Petrova T.O., Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonogo nablizhennya funkcij, sho mayut drobovu pohidnu, Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika 9-10 (2003), 125–127
9. Petrova T.O. Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonogo nablizhennya funkcij, sho mayut drobovu pohidnu, Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika 7-8 (2002), 118–122

Надійшла до редколегії 15.10.20