

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня магістра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

**Використання неузгоджених сіток для вирішення задач метод
скінченних елементів**

студента 2 курсу
Ремньова Владислава Геннадійовича

Науковий керівник:
Максименко А.Л.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендована до захисту, протокол № 10 від 08 травня 2020 р.

Завідувач кафедри МСС
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2021

Зміст

Вступ	3
1 Основні поняття	4
1.1 Метод скінчених елементів	4
1.2 Постановка задач теорії пружності	5
1.3 Узгоджені та неузгоджені сітки та скінченні елементи . .	7
1.4 Використання неузгоджених сіток для розв'язку задач теорії пружності	9
2 Методи поєднання неузгоджених сіток	11
2.1 Метод вилучення термінальних вузлів	11
2.2 Метод цементного розчину (мортар-метод)	12
2.3 Метод Ніцше (Розривний метод Гальоркіна)	14
2.4 Метод надбудованого (розширеного) функціоналу	16
2.5 Методи узгодження що використовують перекриттям сіток	17
3 Метод штрафів для неузгоджених сіток	20
3.1 Метод Лагранжа та метод штрафів	20
3.2 Реалізація методу штрафів в вигляді додадкової матриці скінченного елемента	21
4 Результати роботи методу	23
4.1 Порівняння роботи методу у відношенні до звичайної три- ангуляції	23
4.2 Вибір коефіцієнта в методі штрафів	28
Висновки	33
Література	34

Вступ

В роботі розглядаються методи поєднання неузгоджених сіток для методу скінченних елементів, а також наводиться алгоритм об'єднання неузгоджених сіток який базується на методі штрафів. Цільовою задачею для якої буде використовуватися метод скінченних елементів буде задача теорії пружності. Такі задачі використовуються в багатьох областях обчислювальної математики та моделювання, а задача неузгоджених сіток виникає при багатьох сценаріях моделювання систем.

У першому розділі роботи розглядаються основні поняття пов'язані з теорією пружності, методом скінченних елементів та формулюється поняття неузгодженої сітки. Також демонструються деякі базові приклади неузгоджених сіток.

У другому розділі розглядаються деякі методи поєднання неузгоджених сіток, а також порівняння цих методів один з одним. Серед розглянутих методів є: метод видалення термінальних вузлів, мортар-метод, метод Ніцше, метод надбудованого функціоналу та методи узгодження, що використовують перекриття сіток.

У третьому розділі більш детально розглядається метод штрафів для неузгоджених сіток та наводиться алгоритм поєднання сітки за допомогою додаткової матриці, що сильно спрощує реалізацію цього алгоритму в порівнянні з іншими.

У четвертому розділі роботи демонструється результати роботи методу на різних задачах теорії пружності, проводиться порівняння із звичайним методом триангуляції сітки, а також порівнюється робота при різних значеннях коефіцієнта метода штрафів.

1 Основні поняття

1.1 Метод скінчених елементів

Основна ідея метода скінчених елементів полягає в побудові системи фінітних функцій для їх використання в методах Рітца мінімізації функціоналів чи в більш загальному методі Гальоркіна — розв'язання диференціальних рівнянь. Невідома функція в цих підходах відшукується методом невизначених коефіцієнтів і має представлення [1]

$$\psi = \sum_i^N C_i \psi_i(x, y, z)$$

де ψ_i - задана система базисних функцій, а C_i - невідомі константи, які необхідно знайти з розв'язку задачі. Метод скінчених елементів відрізняється тим, що невідомі константи є, як правило, значеннями шуканої функції в деяких наперед заданих точках, що мають назву вузлів. Для визначення базисних функцій ψ_i область визначення невідомих розбивається на скінчену кількість підобластей на кожній з яких і задається поліноміальна функція ψ_i . Як правило в методі скінчених елементів розглядається конформне розбиття областей в якому різні елементи не налягають один на одний і їх перетин або нульовий або спільна сторона чи вузол. При розв'язку задачі коефіцієнти C_i знаходяться з використанням варіаційних методів. Саме такою була ідея Р.Куранта який запропонував цей метод в 1943 році. З цієї точки зору використання методу скінчених елементів в задачах теорії пружності є доцільним і зручним, оскільки варіаційні трактування цієї теорії добре розвинені і можуть бути застосовані до широкого класу задач. Наприклад, задаючи різні за фізичними властивостями і розміром скінчені елементи ми можемо моделювати деформаційну поведінку композитів чи детально аналізувати за рахунок згущення сітки в потрібному місці

напруження в околі зосередженої сили чи тріщини. Важливою перевагою методу скінчених елементів в задачах теорії пружності є також те, що він дозволяє дослідити різноманітні контактні задачі з довільною наперед заданою точністю і з використанням широкого спектру ефективних чисельних методів.

1.2 Постановка задач теорії пружності

Пружне середовище характеризується лінійним зв'язком між напруженнями та деформаціями, який називається законом Гука і має вираз

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon, & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}$$

Де

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

тензор напружень, а G, λ пружні сталі матеріалу. Компоненти

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}$$

відображають деформаційний стан матеріалу і є компонентами відповідного тензора деформацій. u, v, w - компоненти поля переміщень в матеріалі.

Основними рівняннями які повинні задовольняти напруження є

рівняння рівноваги [2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0\end{aligned}$$

де X, Y, Z - проекції об'ємних сил на відповідній осі. Після підстановки співвідношень закону Гука одержуємо систему лінійних рівнянь другого порядку для компонентів переміщень в матеріалі які мають назву рівнянь Ламе

$$\begin{aligned}(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z &= 0\end{aligned}$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = 3\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Граничні умови для цих рівнянь можуть бути силовими

$$\sigma_{ji}(u)n_j|_{S_1} = g_i(x)$$

кінематичними

$$u(x)|_{S_2} = u_0(x)$$

або поєднанням цих двох умов, але таким чином, що S_1 та S_1 не перетинаються. В цих умовах $g_i(x)$ - компоненти вектора поверхневих сил, а $u_0(x)$ - задані поверхневі переміщення. На контактних поверхнях між двома пружними тілами повинні виконуватись, відповідно, кінематична

$$u_n^1(x) = u_n^2(x), \quad x \in S_k$$

та силова

$$\sigma_n^1(x) = \sigma_n^2(x), \quad x \in S_k$$

умови поєднання. Оскільки метод скінчених елементів базується саме на варіаційних постановках задач, важливу роль для застосування цього методу в задачах теорії пружності відіграють енергетичні варіаційні принципи теорії пружності. Відомо, що дійсне поле пружних переміщень мінімізує функціонал Лагранжа

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_G \sigma^T \varepsilon dG - \int_G u^T \rho dG - \int_{S^2} u^T g dS$$

де тензори напружень і деформацій σ, ε , виражаються як функції переміщень, u - вектор переміщень, ρ, g - питома густина об'ємних та поверхневих сил, відповідно. T означає транспонування. Всі наведені вище диференціальні рівняння пружного деформування можуть бути отримані як рівняння Ейлера для цього функціонала.

1.3 Узгоджені та неузгоджені сітки та скінченні елементи

При вирішенні задач іноді зручно використовувати скінченні елементи не тільки різного типу (прямокутники з трикутниками, тетраедри з призмами або з паралелепіпедами і т.п.), але навіть і з різнотипними локальними базисними функціями. У зв'язку з цим має сенс уточнити поняття «сітка» і «скінченний елемент». Надалі будемо вважати, що сітка - це об'єднання непересічних за своїми внутрішніми точкам осередків. При цьому під осередком сітки будемо розуміти деяку підобласть розрахункової області, у якій є кортур і вузли. Під вузлами розумітимемо безліч виділених точок осередку, використовуваних як для опису геометрії осередка, так і для визначення базисних функцій на ньому. Частина вузлів, що визначають геометрію осередку, будемо називати геометричними вершинами. І, нарешті, під скінченним елементом будемо розуміти осередок сітки із заданими на ній локальними

базисними функціями.

Тут, як і раніше, під розрахунковою областю ми розуміємо (в залежності від контексту використання цього терміна) або область Ω , в якій вирішується крайова задача, або її аппроксімацію Ω_h у вигляді об'єднання всіх осередків сітки. При цьому мається на увазі, що контури Ω_h апроксимують відповідні контури Ω (або повністю збігаються з ними), тобто в Ω_h немає додаткових контурів, що з'явилися через наявність «дірок» в сітці, а деяке неспівпадіння контурів в Ω_h і в Ω може вийти виключно через кривизну контурів в Ω .

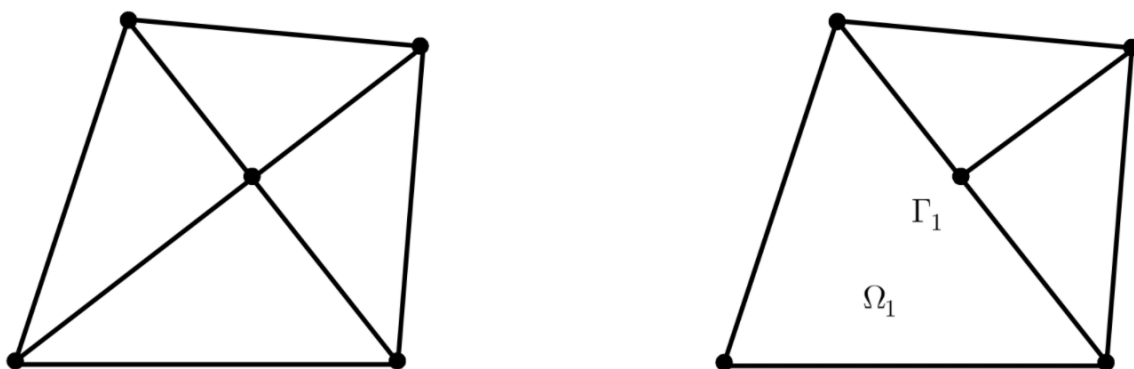


Рис. 1: Приклад узгодженої та неузгодженої сітки

Надалі під узгодженою сіткою будемо розуміти сітку, для осередків якої виконується умова: будь-який контур одного осередку або точно збігається з контуром тільки одного іншого осередку, або є фрагментом зовнішнього контура розрахункової області. При цьому під контуром осередків, наприклад, у трикутників, розуміються три його сторони, у прямокутника - чотири його сторони, у багатогранника - його межі і т.д.

1.4 Використання неузгоджених сіток для розв'язку задач теорії пружності

В деяких важливих практичних задачах виникає необхідність розв'язку задач теорії пружності для об'ємів, які є об'єднанням декількох частин. Досить типовою є ситуація коли побудова скінчено-елементної сітки для кожної з підобластей є значно простішою ніж побудова сітки для всього об'єму. Такі задачі виникають, наприклад, коли необхідно провести розрахунок деформаційної поведінки складних багатоконпонентних технічних чи будівельних конструкцій в умовах коли методики скінчено-елементного моделювання окремих складових добре відпрацьовані і, як правило, навіть здійснюються різними групами спеціалістів. Використання простої, досить часто регулярної сітки, в підобластях разом з спеціальною процедурою об'єднання сіток виявляється простішим ніж розв'язок задачі одночасно для всього тіла. Останнім часом процедура розбиття на підобласті в процесі моделювання широко використовується також з метою паралелізації обчислень, коли окремі частини з незалежними сітками розглядаються в якості так званих суперелементів, що спочатку моделюються на незалежних процесорах і тільки згодом об'єднуються для одержання результатів для конструкції в цілому. [3]

Іншим типовим прикладом застосування неузгоджених сіток є контактні задачі, в яких як правило відбувається взаємний рух окремих частин. Використання узгоджених сіток потребує в цьому випадку постійної перебудови сітки на кожному кроці взаємного зміщення. Неузгоджені сітки дозволяють розв'язувати ці проблеми з значною економією машинного часу та без втрати точності.

Окремою важливою сферою застосування неузгоджених сіток є багатосіточне чи багатомасштабне моделювання. Ідея використання

адаптивних сіток здається цілком природньою в будь-яких скінчено-елементних обчисленнях. Мається на увазі, що для досягнення задовільної точності обчислень сітка має бути дрібнішою там, де невідома функція змінюється швидше і більш грубою там де в детальній апроксимації немає потреби. Типовими прикладами такого роду при розв'язанні пружних задач є моделювання деформацій та напружень в околі прикладеної зосередженої сили чи в околі вершини тріщини. Найпростішим методом адаптації сіток в цьому випадку є використання дрібних регулярних сіток в цих областях з подальшим узгодженням сіток різного розміру.

2 Методи поєднання неузгоджених сіток

2.1 Метод вилучення термінальних вузлів

Загалом методи поєднання сіток поділяються на два види: поєднання з перекриття сіток і без нього-тільки за рахунок узгодження сіток на контактних поверхнях. Найпростіший метод контактного поєднання базується на аналізі та вилученні тих невідомих які відповідають так званим термінальним вузлам сітки. [4]

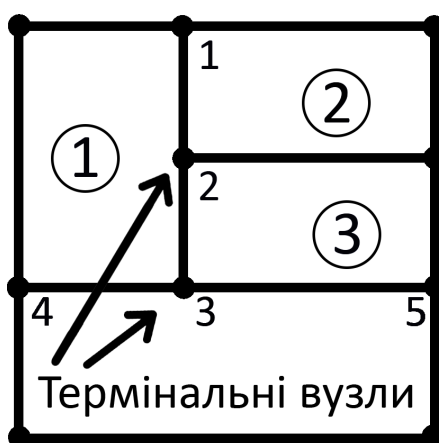


Рис. 2: Термінальні вузли

Термінальний вузол - це вузол, що лежить на межі елемента який не містить цей вузол. Термінальні вузли можна розглядати як друго-рядні і апроксимацію невідомої функції в них знаходити використовуючи апроксимацію в тих елементах сторонам якої цей вузол належить. Наприклад, якщо в елементі 1 використовується лінійна апроксимація невідомої функції, то у відповідності з нею значення функції у вузлі 2 дорівнює середньому арифметичному значень у вузлах 1 та 3 (рис. 2). Надалі це співвідношення може трактуватися як додаткова умова, яка дозволяє виключити невідомі пов'язані з другим вузлом. Зауважимо, що у нашому прикладі 3 вузол також є термінальним і має виражатися через значення функції у вузлах 4 та 5. Для коректного врахування

взаємозв'язків термінальних та звичайних вузлів зазвичай будується граф - так зване дерево зв'язків. Більш детально ця процедура буде проаналізована в наступних розділах. Зазначимо, що існують випадки (хоча і нечисленні), коли виключення термінальних вузлів призводить до зациклювання алгоритму. Приклад такої сітки наведений на рис. 3.

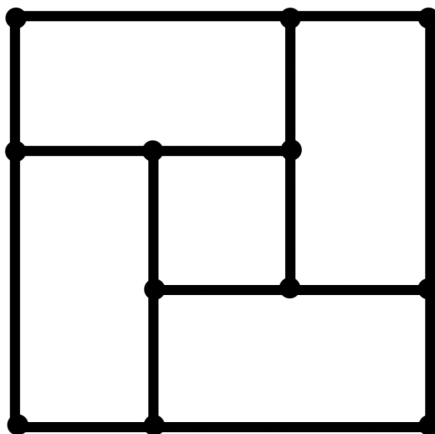


Рис. 3: Приклад сітки з зациклюванням алгоритму

Алгоритм виключення невідомих у термінальних вузлах значно спрощується, якщо співвідношення між вузловими значеннями додаються у варіаційний принцип за допомогою штрафних множників. Функціонал у цьому випадку набуває вигляду

$$L(u) = \Pi(u) + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma} (u_1 - u_2)^2 d\Gamma \quad (2.1)$$

де α -штрафний множник. Саме цьому варіанту алгоритму присвячене це дослідження.

2.2 Метод цементного розчину (мортар-метод)

Замість штрафних множників в процедурі узгодження сіток можуть використовуватись множники Лагранжа, які в цьому випадку розглядаються як додаткові невідомі. Якщо об'єм матеріалу складається з двох частин [5]

$$\Omega = \Omega^M \cup \Omega^m$$

які контактують вздовж поверхні

$$\Gamma = \Gamma^M \cap \Gamma^m$$

множники Лагранжа можуть розглядатися як невідомі зусилля в граничних вузлах

$$\lambda = -t^M = t^m$$

Загальна варіаційна постановка задачі має вигляд [6]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^M} \sigma_i^M \delta \varepsilon_i^M d\Omega^M + \int_{\Gamma^C} \lambda_i \delta u_i^M d\Gamma^C &= \int_{\Omega^M} \bar{b}_i \delta u_i^M d\Omega^M + \int_{\Gamma_t^M} \bar{t}_i \delta u_i^M d\Gamma_t^M \\ u_i^M &= \bar{u}_i^M \quad \delta u_i^M = 0 \quad \forall x \in \Gamma_u^M \\ \int_{\Omega^m} \sigma_i^m \delta \varepsilon_i^m d\Omega^m - \int_{\Gamma^C} \lambda_i \delta u_i^m d\Gamma^C &= \int_{\Omega^m} \bar{b}_i \delta u_i^m d\Omega^m + \int_{\Gamma_t^m} \bar{t}_i \delta u_i^m d\Gamma_t^m \\ u_i^m &= \bar{u}_i^m \quad \delta u_i^m = 0 \quad \forall x \in \Gamma_u^m \\ \int_{\Gamma^C} \delta \lambda_i (u_i^M - u_i^m) d\Gamma^C &= 0 \end{aligned}$$

Рівняння повинні задовольнятися для довільних $\delta u^M, \delta u^m, \delta \varepsilon^M, \delta \varepsilon^m, \delta \lambda$. Для знаходження інтегралів використовуються як значення вузлових переміщень d^M, d^m так і апроксимація множників Лагранжа вздовж контактних поверхонь $u^M = N^M d^M, u^m = N^m d^m, \lambda = N^\lambda \hat{\lambda}$.

Проблемою при використанні цього підходу є те, що матриця лінійних рівнянь відносно невідомих переміщень і множників Лагранжа до яких зводиться наведена вище система рівнянь не є додатно визначеною, оскільки додавання множників Лагранжа перетворює задачу пошуку мінімуму в задачу обчислення сідлових точок функціоналу. Це ускладнює застосування найбільш поширених ефективних методів розв'язання систем лінійних рівнянь.

Іншою проблемою характерною як для методу штрафів так і для мортар-методу є те, що додаткові умови на контактних границях накладаються лише на переміщення. Друга контактна умова – рівність напружень, повинна виконуватися як наслідок першої. Зрозуміло, що

точність виконання цієї умови залежить від того які саме сітки використовуються для окремих областей. Наприклад, якщо розміри сітки сильно відрізняються на контактній поверхні виникає стрибок напружень, незважаючи на дотримання контактних умов для переміщень. На рис. 4 наведено розподіл напружень в околі отвору в пластині.

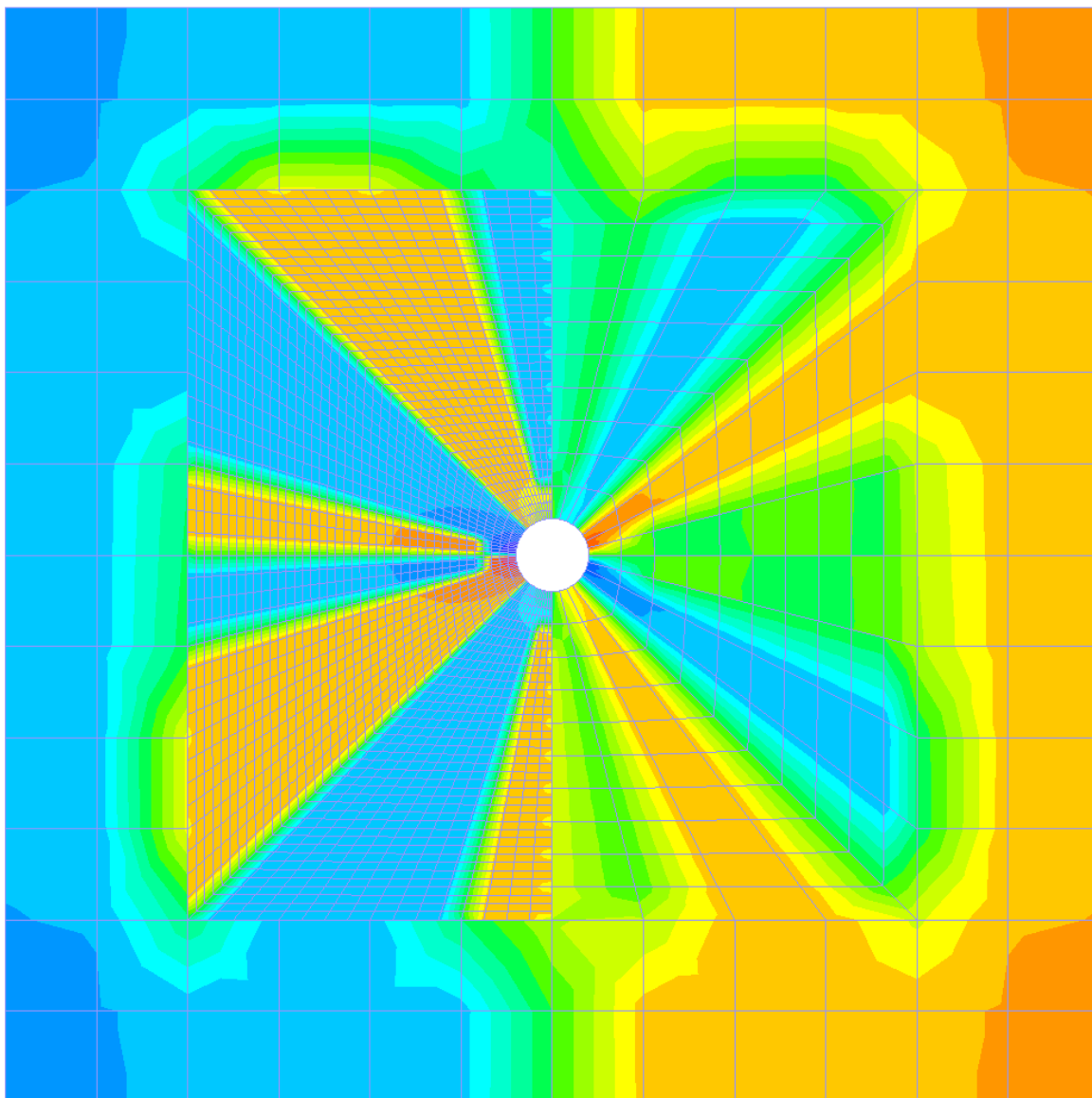


Рис. 4: Розподіл напружень в околі отвору в пластині

2.3 Метод Ніцше (Розривний метод Гальоркіна)

Для того, щоб збалансувати узгодження по переміщенням та зусиллям Ніцше (Nitsche) на початку 70-х років минулого сторіччя запропону-

вав варіаційне формулювання контактної умови, яке містило не тільки переміщення, але й напруження. В подальшому це формулювання частіше стало згадуватись як Розривний метод Гальоркіна. Шляхом нескладних перетворень принципу віртуальних переміщень для кожної з частин пружного тіла отримуємо [8]

$$\int_E \sigma(u) : \varepsilon(v) dV - \sum_{e \in \partial E} \int_e \sigma(un_e) \cdot v dS = \int_E f \cdot v dV$$

де f об'ємні сили, n_e - одиничний вектор нормалі. Підсумовуючі ці вирази для всіх елементів пружного тіла одержуємо

$$\begin{aligned} \sum \int_E \sigma(u) : \varepsilon(v) dV - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e \{\sigma(u)n_e\} \cdot [v] dS = \\ = \sum \int_E f \cdot v dV + \sum \int_e \bar{t} \cdot v dS \end{aligned}$$

де фігурними і квадратними дужками позначені відповідно середні значення і стрибок відповідної змінної на лінії контакту

$$\{w\} = \frac{1}{2}(w|_{E_1^e} + w|_{E_2^e}), \quad [w] = w|_{E_1^e} - w|_{E_2^e} \quad \forall e = \partial E_1^e \cap \partial E_2^e$$

На підставі цієї рівності маємо варіаційний принцип

$$a(u, v) - L(v) = 0 \quad \forall v \in V_1 \times V_2$$

де

$$\begin{aligned} a(u, v) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \sigma(u) : \varepsilon(v) dV - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e \{\sigma(u)n_e\} \cdot [v] dS + \\ + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\delta_e}{h} \int_e [u] \cdot [v] dS \\ L(v) = \sum \int_E f \cdot v dV + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \bar{t} \cdot v dS + \sum_{e \in \Gamma_D} \frac{\delta_e}{h} \int_e \bar{u} \cdot v dS \end{aligned}$$

Параметр δ_e є штрафним параметром. Таким чином варіаційний принцип містить як напруження на контактній поверхні так і штрафний множник. Метод узгодження сіток, що базується на цьому функціоналі є проміжним між методом штрафу і мортар-методом.

2.4 Метод надбудованого (розширеного) функціоналу

Найбільш ефективного поєднання мортар методу та методу штрафів вдається досягнути застосуванням ітераційної процедури до надбудованого функціоналу. Для цього функціонал мортар-методу [9], [10]

$$\tilde{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \lambda g(u_1 - u_2)$$

надбудовується ще й штрафним доданком

$$\tilde{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \lambda g(u_1 - u_2) + \frac{\varepsilon}{2} g(u_1 - u_2) \cdot g(u_1 - u_2)$$

Як і завжди множники Лагранжа є невідомими задачі, але одержаний функціонал мінімізується ітераційно.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(u, \lambda_k) &= \Pi(u) + \lambda_k g(u_1 - u_2) + \frac{\varepsilon}{2} g(u_1 - u_2) \cdot g(u_1 - u_2) \\ \lambda_{k+1} - \lambda_k &= \varepsilon g(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Тобто на кожному кроці ітерації множники Лагранжа-відомі функції і в задачі не виникають зайві змінні. Ще одна важлива особливість цього методу полягає в тому, що як тільки ε обрано таким чином, що матриця системи рівнянь відносно невідомих переміщень є додатно означеною, ми не потребуємо подальшого переходу $\varepsilon \rightarrow \infty$ який погіршує обумовленість матриці рівнянь. В цьому випадку ітераційний процес завжди збігається до множників Лагранжа, що є розв'язками задачі в мортар-методі. Зазначимо, що в процесі ітерування на кожному кроці розв'язок обчислюється швидкими методами розробленими для рівнянь з додатно означеними матрицями.

2.5 Методи узгодження що використовують перекриттям сіток

Для того, щоб забезпечити плавний перехід переміщень та напружень від одного контактуючого тіла до другого іноді сітка кожного з тіл продовжується узгодженим чином на сусіднє тіло для того щоб утворилась перехідна зона ненульового об'єму в якій обидві сітки перекриваються і використовуються одночасно (рис. 6)

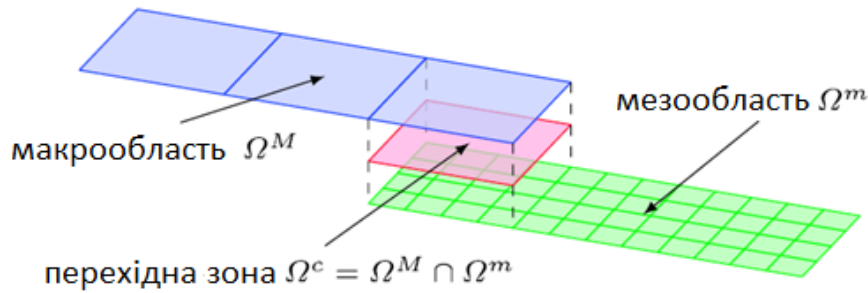


Рис. 5: Візуалізація перекриття сіток

Такий підхід називається методом Арлекіна [11], [12]. Варіаційна постановка задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^M} \alpha^M \sigma_i^M \delta \varepsilon_i^M d\Omega^M + \int_{\Omega^C} \lambda_i \delta u_i^M d\Omega^C \\ &= \int_{\Omega^M} \beta^M \bar{b}_i \delta u_i^M d\Omega^M + \int_{\Gamma_t^M} \beta^M \bar{t}_i \delta u_i^M d\Gamma_t^M \\ & u_i^M = \bar{u}_i^M \quad \delta u_i^M = 0, \quad \forall x \in \Gamma_u^M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^m} \alpha^m \sigma_i^m \delta \varepsilon_i^m d\Omega^m + \int_{\Omega^C} \lambda_i \delta u_i^m d\Omega^C \\ &= \int_{\Omega^m} \beta^m \bar{b}_i \delta u_i^m d\Omega^m + \int_{\Gamma_t^m} \beta^m \bar{t}_i \delta u_i^m d\Gamma_t^m \\ & u_i^m = \bar{u}_i^m \quad \delta u_i^m = 0, \quad \forall x \in \Gamma_u^m \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega^c} \delta \lambda_i (u_i^M - u_i^m) + l_{\varepsilon_{kl}}^2 (\delta \lambda)_{\varepsilon_{kl}} (u^M - u^m) d\Omega^c = 0 \quad (2.2)$$

Зазначимо дві головні особливості наведених вище рівнянь. По-перше в них з'явилися вагові множники $\alpha_M, \beta^M, \alpha_m, \beta^m$. Вони використовуються для того, щоб здійснити поступовий перехід від одного тіла до іншого. Тобто α^M, β^M дорівнюють одиниці для тіла M і поступово спадають до нуля коли ми виходимо за межі тіла M в перехідну зону. Те саме відбувається і з α^m, β^m .

$$\begin{aligned} \alpha^M(x) &= \beta^M(x) = 1 & \forall x \in \Omega^M \setminus \Omega^c \\ \alpha^m(x) &= \beta^m(x) = 0 \\ \alpha^M(x) &= \beta^M(x) = 0 & \forall x \in \Omega^m \setminus \Omega^c \\ \alpha^m(x) &= \beta^m(x) = 1 \\ \alpha^M(x) + \beta^M(x) &= 1 & \forall x \in \Omega^c = \Omega^M \cap \Omega^m \\ \alpha^m(x) + \beta^m(x) &= 1 \end{aligned}$$

Схематично це зображено на рис. 6. Оптимальний вибір вагових функцій в перехідній зоні загалом емпіричний і залежить від досвіду дослідника.

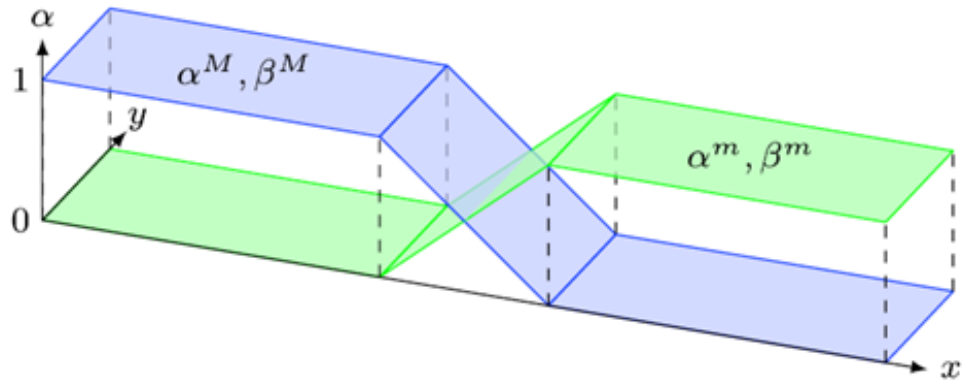


Рис. 6: Вагові функції в методі Арлекіна

Другою важливою особливістю цього підходу є поява множника та компонент тензора деформацій в рівнянні узгодження переміщень

(2.2). Тобто узгодження відбувається не тільки по переміщенням, але й по похідним від переміщень. Параметр l задає відносну точність цих двох узгоджень. Цей метод можна узагальнити і розглядати повне перекриття двох сіток. Такий підхід застосовується тоді, коли більш дрібна сітка накладається на якусь частину грубої сітки.

3 Метод штрафів для неузгоджених сіток

3.1 Метод Лагранжа та метод штрафів

Розглянемо наступну задачу, яка є типовим прикладом використання методу Лагранжа:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{2} a(u, u) + (f, u) \right\}, \text{ при } l(u) = 0 \\ l(u) \leq K \|u\| \\ a(u, u) \leq K \|u\|^2 \end{aligned}$$

Використовуючи множники Лагранжа запишемо наступну систему:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{2} a(u, u) + (f, u) + \lambda l(u) \right\} \\ \begin{cases} a(u, v) + (f, v) + \lambda l(v) = 0 \\ l(v) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тепер запишемо аналогічну задачу, але використовуючи метод штрафів:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{2} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + (f, u_\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon} l^2(u_\varepsilon) \right\} \\ a(u_\varepsilon, v) + (f, v) + \frac{1}{\varepsilon} l(u_\varepsilon) l(v) = 0 \end{aligned}$$

Використовуючи систему (3.1) перепишемо в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} a(u_\varepsilon, v) - a(u, v) - \lambda l(v) + \frac{1}{\varepsilon} l(u_\varepsilon) l(v) = 0 \\ a(u - u_\varepsilon, v) + \lambda l(v) - \frac{1}{\varepsilon} l(u_\varepsilon) l(v) = 0 \end{aligned}$$

Оберемо $v = u - u_\varepsilon$, тоді:

$$\begin{aligned} a(v, v) + \lambda l(u - u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} l(u_\varepsilon) l(u - u_\varepsilon) = 0 \\ a(v, v) - \lambda l(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} l^2(u_\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Перепишемо рівність (3.2) та оцінемо її зверху:

$$a(v, v) + \frac{1}{\varepsilon} l^2(u_\varepsilon) = \lambda l(u_\varepsilon) \leq |\lambda| \cdot |l(u_\varepsilon)|$$

Використаємо наступну нерівність:

$$\begin{aligned} |a| \cdot |b| &\leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ |a| \cdot |b| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2\right) \end{aligned}$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} a(v, v) + \frac{1}{\varepsilon} l^2(u_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2\varepsilon} l^2(u_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} |\lambda|^2 \\ a(v, v) + \frac{1}{2\varepsilon} l^2(u_\varepsilon) &\leq \frac{\varepsilon}{2} |\lambda|^2 \end{aligned}$$

3.2 Реалізація методу штрафів в вигляді додадкової матриці скінченного елемента

Нехай існує деяка задача оптимізації:

$$\min\left\{\frac{1}{2}a(u, u) + (f, u) + \frac{1}{\varepsilon}l^2(u)\right\}$$

Представимо лінійний функціонал $l(u)$ як:

$$l(u) = u^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

де $u = (u_1, \dots, u_n, u^*)$, $\alpha_i = \phi_i(u^*)$, ϕ - базисні функції скінченного елемента, n - кількість вузлів елемента, $*$ - термінальний вузол. Підставивши та диференціювавши по u маємо:

$$\begin{aligned} \min\left\{\frac{1}{2}a(u, u) + (f, u) + \frac{1}{\varepsilon}\left(u^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right)^2\right\} \\ \frac{1}{2}a(u, v) + (f, v) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(u^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right)\left(v^* - \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) \end{aligned}$$

Розглянемо праву частину рівності, так як ліва є звичайною задачею методу скінченних елементів.

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(u^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right)\left(v^* - \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right)$$

Розкривши дужки згрупуємо по індексам, та сформуємо додадкову матрицю для скінченного елемента використавши заміну $R = \frac{1}{\varepsilon}$:

$$B = \begin{pmatrix} R\alpha_1\alpha_1 & R\alpha_1\alpha_2 & \dots & -R\alpha_1 \\ R\alpha_2\alpha_1 & R\alpha_2\alpha_2 & \dots & -R\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R\alpha_1 & -R\alpha_2 & \dots & R \end{pmatrix}$$

В отриманій матриці останній рядок і стовбець відповідає термінальному вузлу елемента.

4 Результати роботи методу

4.1 Порівняння роботи методу у відношенні до звичайної триангуляції

Розглянемо результати в порівнянні з триангуляцією, зауважимо, що метод штрафів апроксимує термінальний вузол за допомогою лінійного функціоналу, тому його результати повинні мати деяку різницю в порівнянні із звичайною «узгодженою» сіткою.

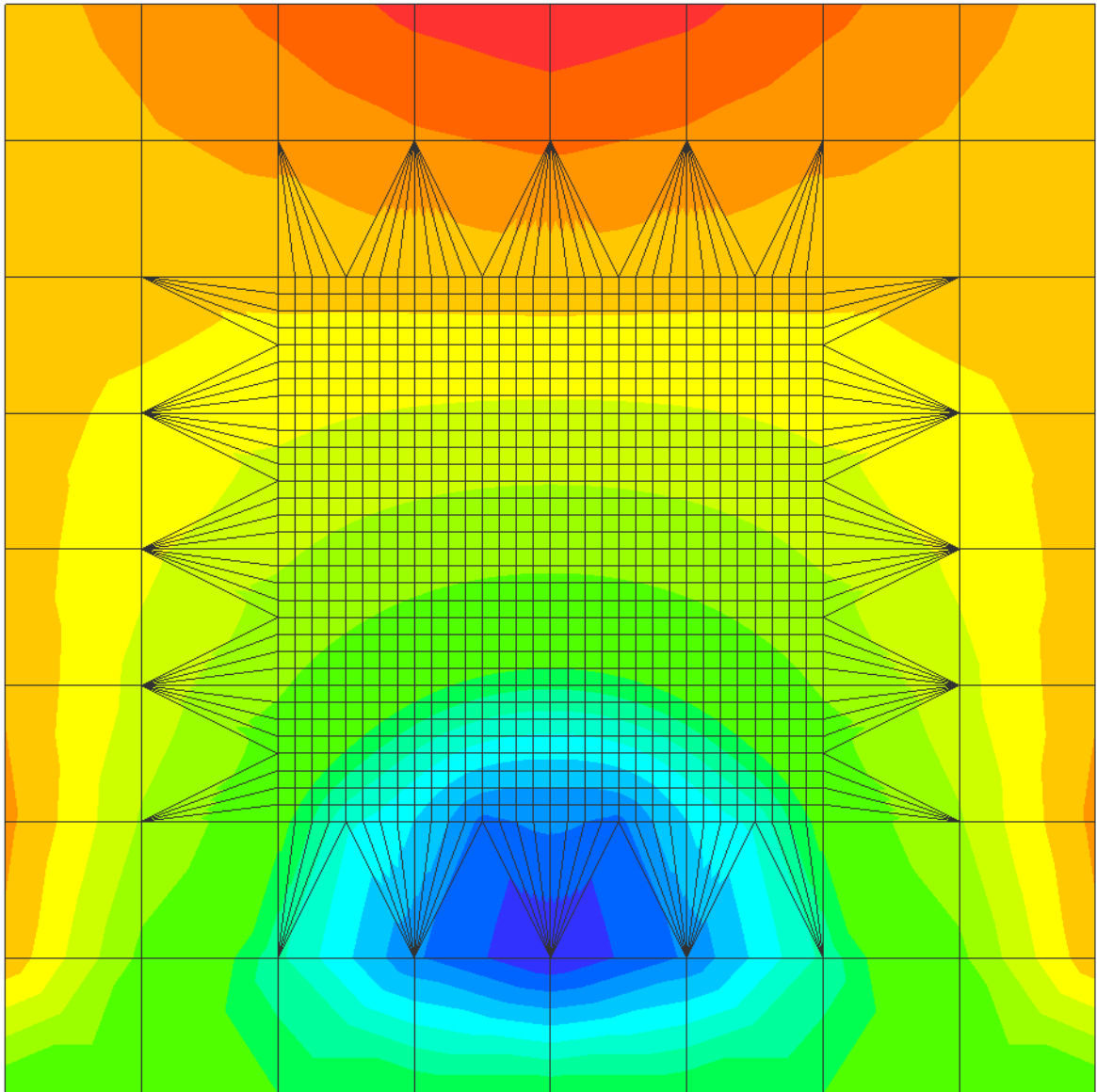


Рис. 7: Ізополе переміщення u координати при триангуляції сітки

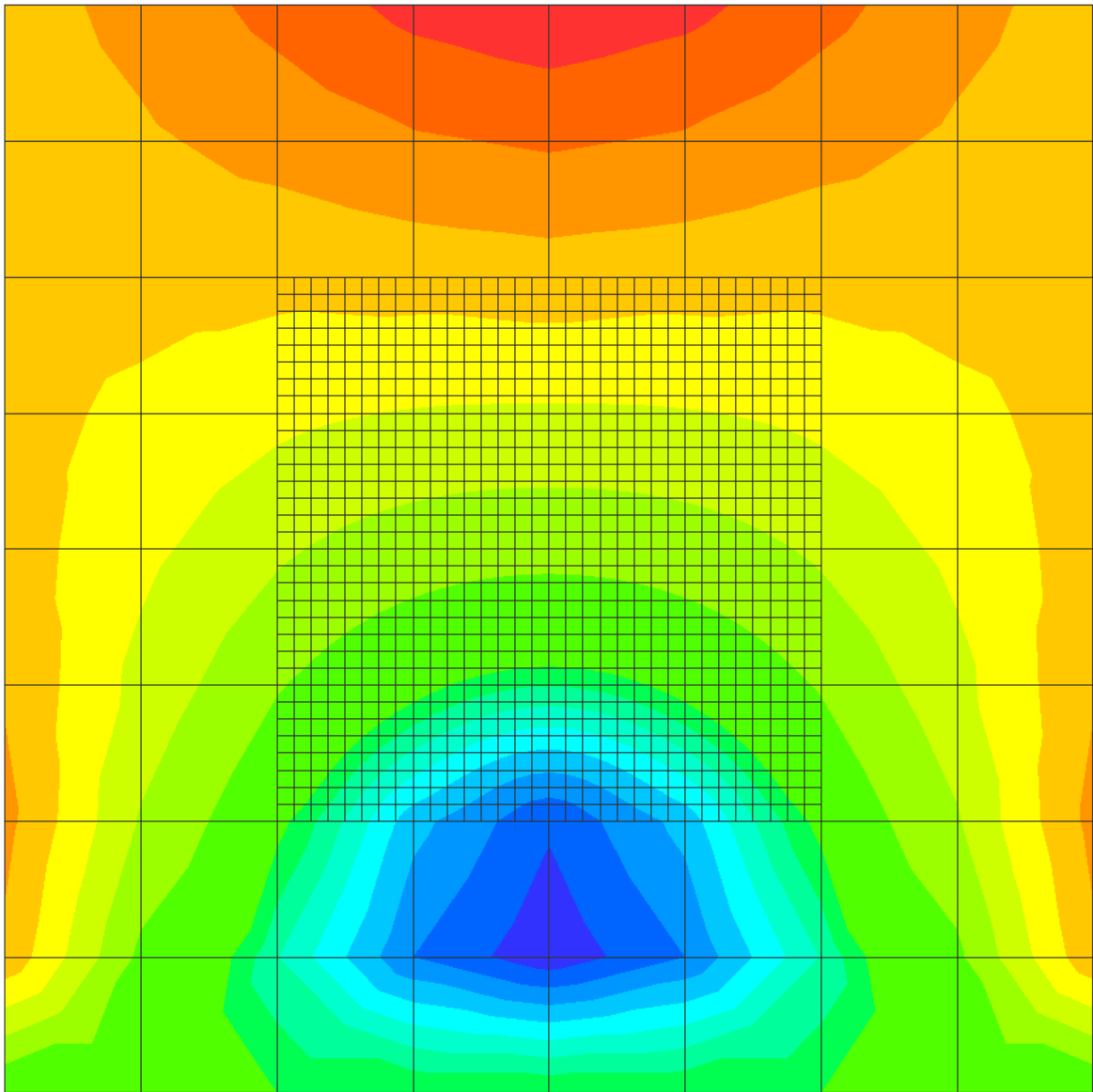


Рис. 8: Ізополе переміщення y координати при методі штрафів

Також порівняємо числові значення переміщень в деяких вузлах, в якості контрольних значень будемо використовувати сітку на рис. 9:

	рис. 7	рис. 8	рис. 9	рис. 7	рис. 8	рис. 9
y	-10.786	-10.433	-9.4569	8.6571	8.7697	9.7288
z	-716.58	-717.16	-713.71	-8685.1	-8705.5	-8690.3
u_x	-1368.2	-1369.1	-1362.8	-3557.3	-3557.2	-3557.4

Табл. 1: Порівняння переміщень пластини при різних варіантах розбиття

Було використано значення переміщення в двох вузлах: по центру пластини та в точці мінімуму в нижній частині пластини.

Як можна побачити, при застосуванні методу штрафів ми отримуємо досить близькі результати до звичайної триангуляції, але процес об'єднання набагато легше та не змінює сітку.

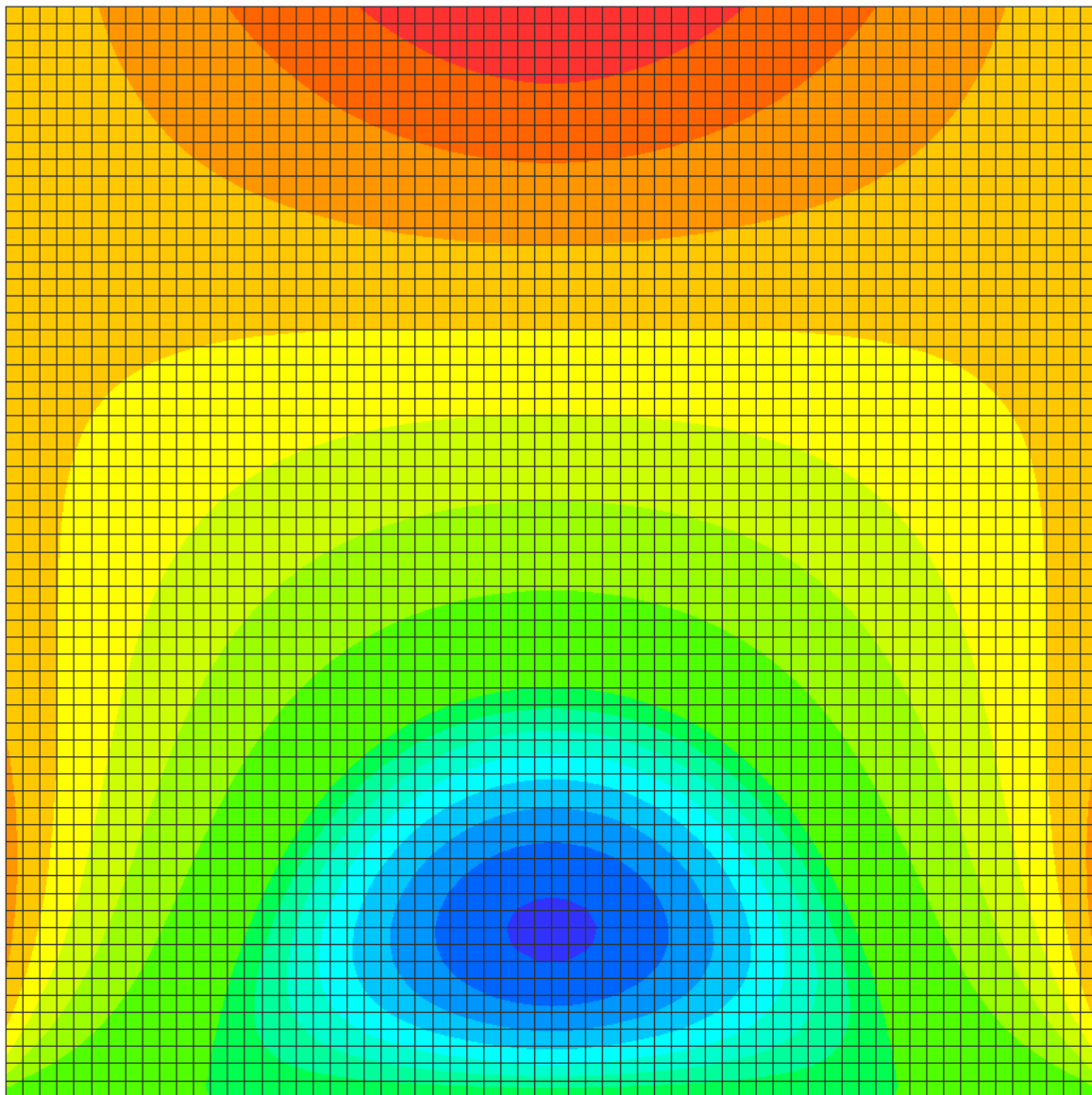


Рис. 9: Ізополе переміщення u при рівномірній сітці

Надалі будемо розглядати порівняння лише двох випадків, так як порівняння при різній щільності майже завжди матиме неправильний сенс. Тому що, при збільшенні щільності сітки результат буде збігатися до аналітичного.

Розглянемо інший приклад неузгодженої сітки, тепер в ситуації, коли елементи тривимірні.

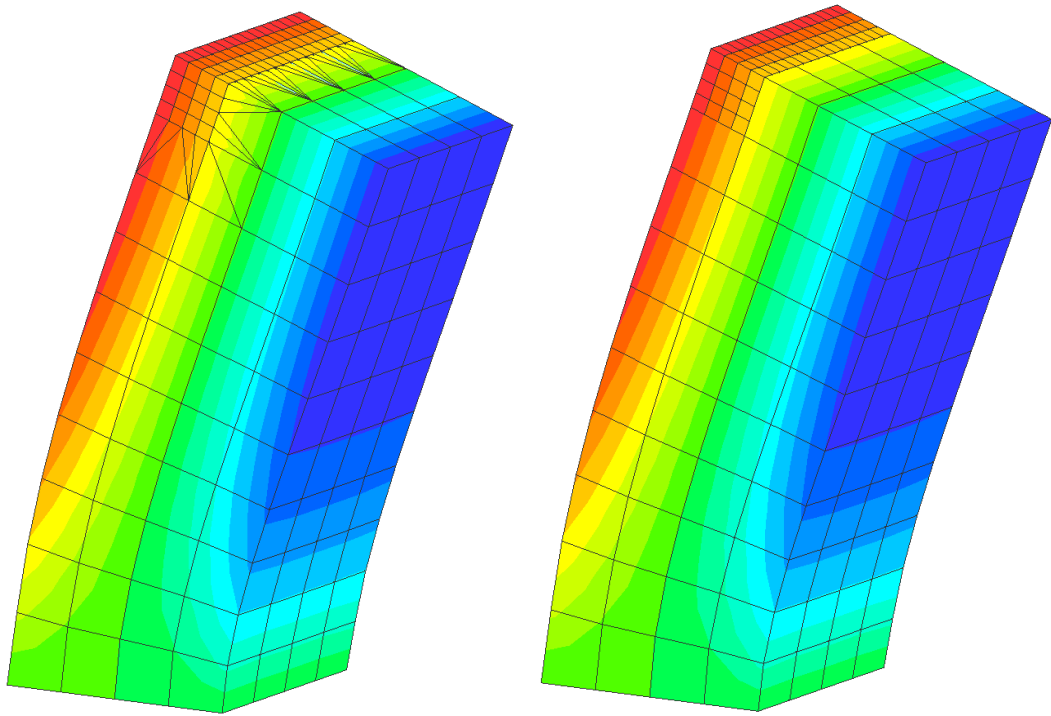


Рис. 10: Ізополе переміщення z для тривимірного випадку

Як і в попередньому прикладі порівнюємо деякі числові значення, щоб порівняти результати обох методів. Проте зауважимо, що при тривимірній триангуляції утворилася достатня кількість невеликих тетраїдрів і збільшилася кількість вузлів, що може позитивно вплинути на точність розрахунків. Але алгоритм тривимірної триангуляції значно складніший в реалізації ніж алгоритм узгодження сіток, та потребує значних перетворень в геометрії сітки.

x	85.088	85.022	84.39	84.373	84.481	84.476
y	-0.13211	-0.12259	-0.00322	-0.01032	0.00082	-0.00005
z	20.284.2	20.271	-19.671	-19.662	0.32265	0.30577

Табл. 2: Порівняння переміщень для тривимірної моделі

Наведені вище приклади мають досить невелику порівняльну здібність. Тому зробимо такий приклад, в якому буде очевидне порівня-

ння звичайної та узгодженої сітки. Спробуємо зробити такий приклад, на якому буде видно різницю між триангуляцією та узгодженням сіток.

Для цього спочатку побудуємо найпростішу модель, яка буде схожа на рис. 1, навантаження додамо так, щоб продемонструвати лінійне обмеження на термінальні вузли в функціоналі. Поки що будемо розглядати тільки задачі стиснення або розтягування, так як в такому випадку базисні функції будуть лінійними.

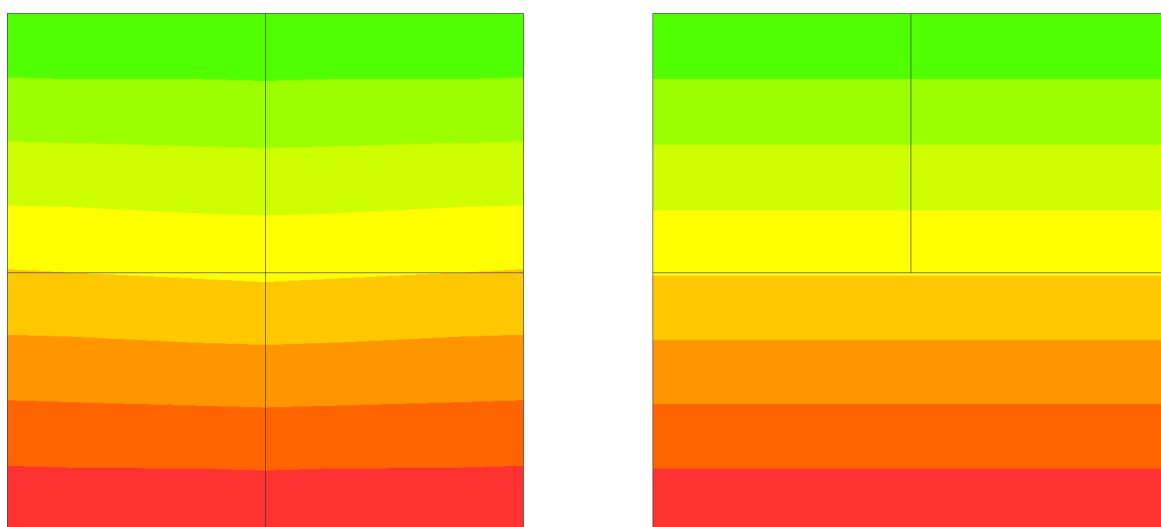


Рис. 11: Ізополе переміщення y

Як можна побачити на рис. 11 переміщення на правій моделі є однаковим в вузлах посередині пластини, а на лівій воно ламане, цей невеликий приклад демонструє різницю між двома методами. Для більшої впевненості наведемо таблицю з переміщенням трьох вузлів з кожної пластини.

	y_1	y_2	y_3
ліва	0.16422	0.15617	0.16422
права	0.16021	0.16021	0.16021

Табл. 3: Порівняння переміщень центральних вузлів пластини

Але така сітка рідко зустрічається в реальних задачах, тому збільшимо щільність сітки, та порівняємо вузли з тими самими координатами, що в попередньому випадку.

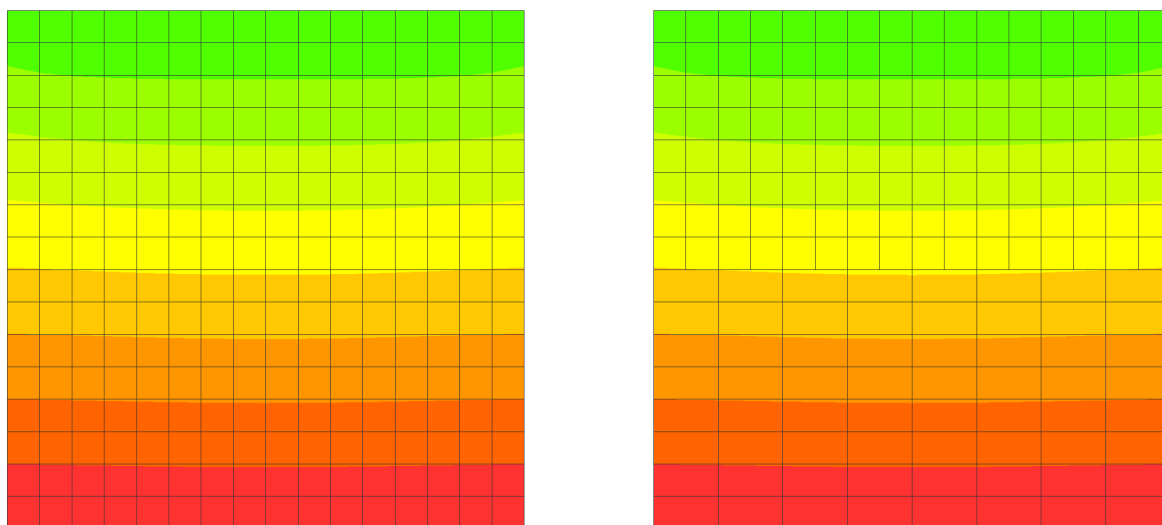


Рис. 12: Ізополе переміщення u при більш щільній сітці

	y_1	y_2	y_3
ліва	0.16437	0.15964	0.16437
права	0.16437	0.15961	0.16437

Табл. 4: Порівняння переміщень при збільшеній щільності сітки

Як можна побачити з таблиці вище, різниця між двома методами майже зникла, та утворився правильний малюнок на ізополях. Це є свідченням того, що при збільшенні щільності метод збігається до аналітичного вирішення, так само як і звичайний метод скінченних елементів.

4.2 Вибір коефіцієнта в методі штрафів

В попередніх розділах вже було розглянуто функціонал та підсумковий алгоритм роботи методу штрафів. В цьому розділі буде йти мова про

вибір коефіцієнта та порівняння результатів при різних значеннях цього коефіцієнта. Під коефіцієнтом будемо розуміти величину R матриці 4.1.

$$B = \begin{pmatrix} R\alpha_1\alpha_1 & R\alpha_1\alpha_2 & \dots & -R\alpha_1 \\ R\alpha_2\alpha_1 & R\alpha_2\alpha_2 & \dots & -R\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R\alpha_1 & -R\alpha_2 & \dots & R \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Для порівняння будемо використовувати задачу, яку вже використовували в попередньому розділі, переміщення якої можна побачити на рис. 12.

Побудуємо графік залежності переміщення в центрі пластини від коефіцієнта метода штрафів.

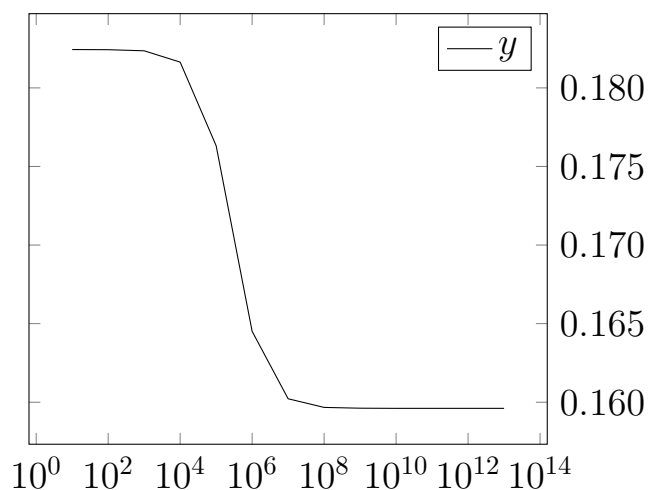


Рис. 13: Графік переміщення y в залежності від R

При побудові графіка було використано 14 результатів розрахунку задачі, для більш наочної картини покажемо як змінювалося ізополе при різних значеннях коефіцієнта.

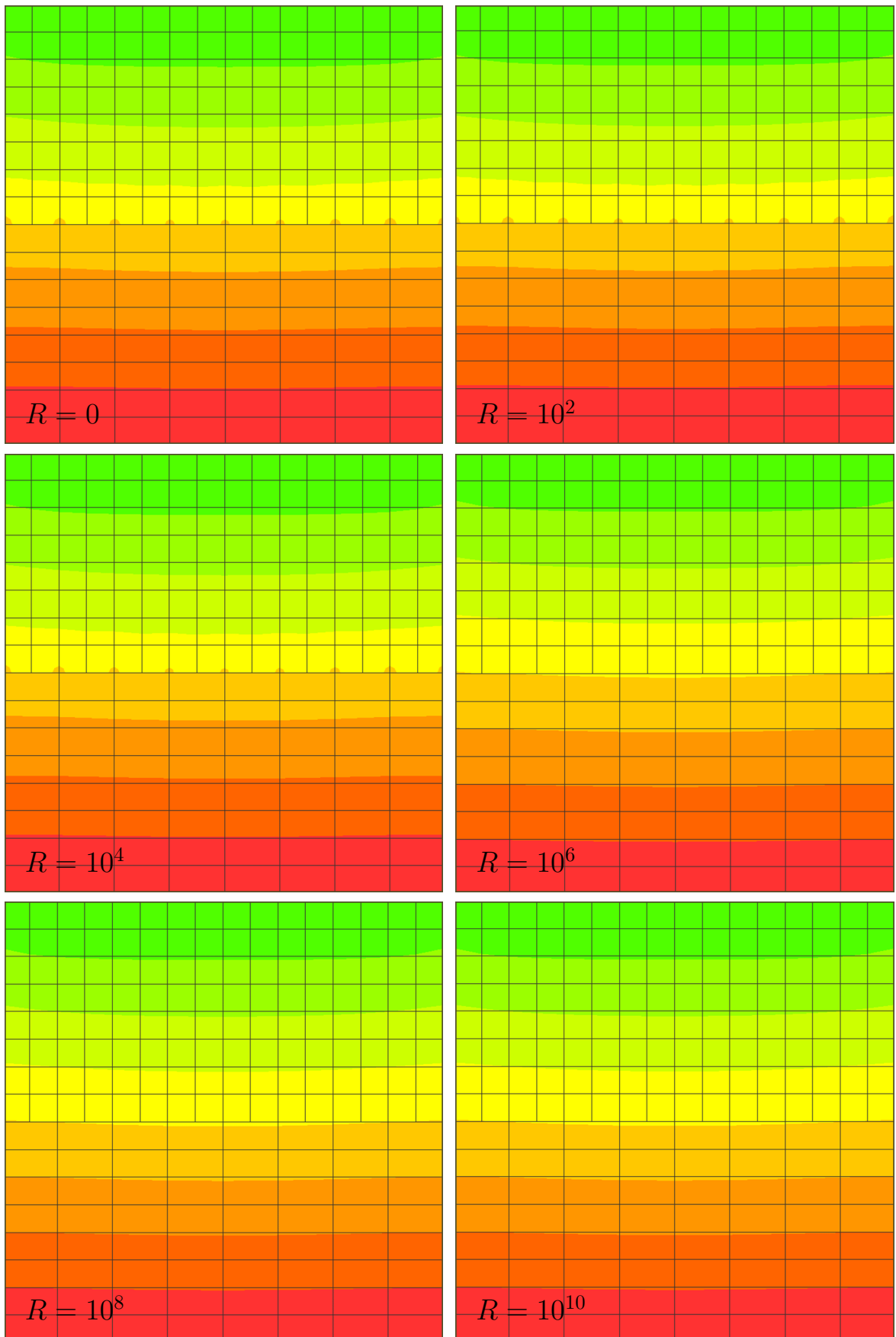


Рис. 14: Переміщення u при різному R

Як можна побачити з графіка на рис. 13 та на ізополях на рис. 14 достатня точність досягається при значенні $R = 10^8$, але це значення актуальне лише для цієї задачі так як сильно залежить від порядку чисел в матриці функціоналу.

Щоб перевірити це, розглянемо задачу з іншим функціоналом. Наприклад розглянемо задачу теплопровідності на сітці з попереднього приклада. Як і в попередньому прикладі будемо розглядати центральну точку пластини.

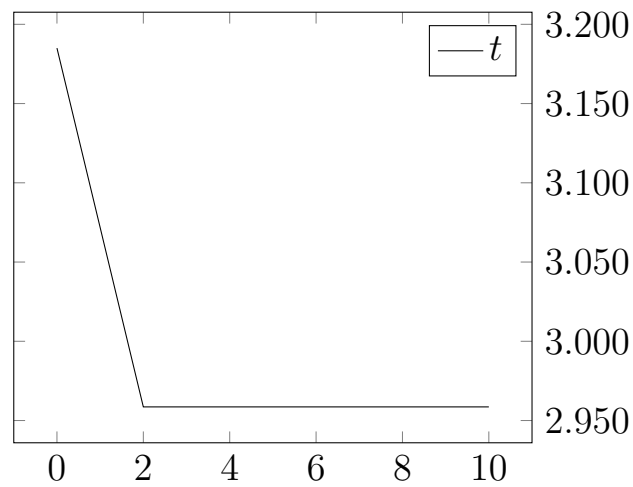


Рис. 15: Графік температури в залежності від R

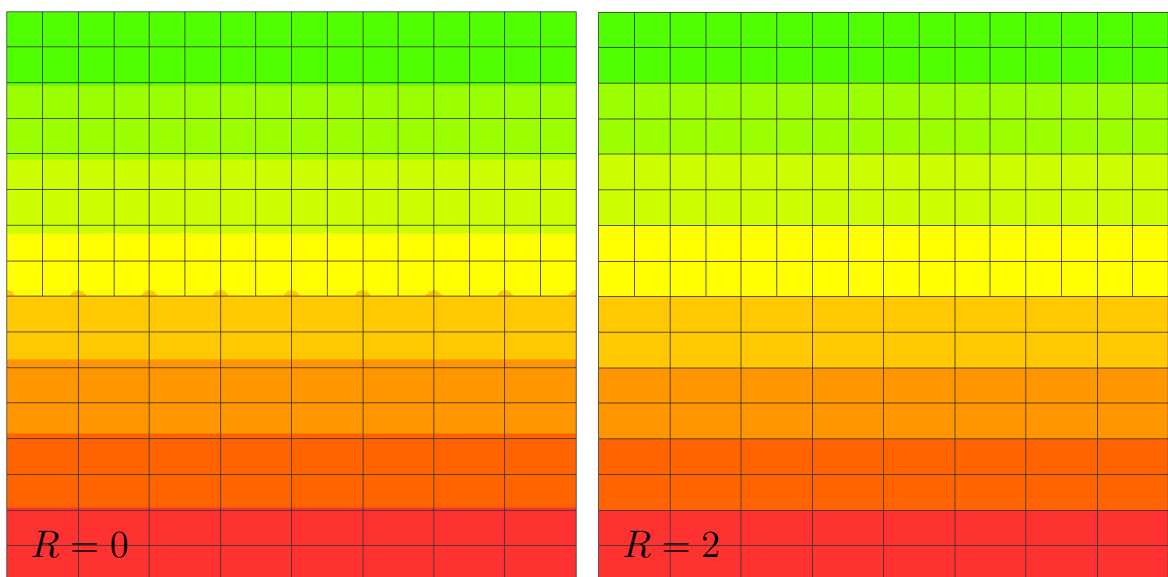


Рис. 16: Температура при різному R

Як можна побачити, з графіка на рис. 15 для задачі теплопровідності достатньо значення $R = 2$, що досить сильно відрізняється від попереднього приклада.

З цього можна зробити висновок, що величину коефіцієнта R треба обирати в залежності від конкретної задачі та оцінюючи загальний порядок системи. Наприклад, в задачах теорії пружності, де порядок системи сильно залежить від модуля пружності E можна обирати коефіцієнт R в залежності від E .

Висновки

Робота присвячена неузгоденим сіткам в методі скінченних елементів. Було розглянуто декілька методів об'єднання сіток, серед них були: метод вилучення термінальних вузлів, мортар-метод, метод Ніцше, метод надбудованого функціоналу та методи узгодження що використовують перекриттям сіток. Також детально було розглянуто використання методу штрафів для розв'язання задачі мінімізації з обмеженнями та застосування методу штрафів в методі скінченних елементів. Також був наведений алгоритм, який надає можливість легкого інтегрування у вже існуючу систему розрахунків.

Також наведено результати роботи методу, що показують різницю між роботою звичайної триангуляції. А також порівняння роботи методу при різних коефіцієнтах у методі штрафів.

Проблема неузгоджених мереж актуальна на сьогоднішній день і пропонує різноманітний набір рішень. Метод штрафів, який детально розглянуто в цій роботі пропонує легку інтеграцію і достатню точність рішення, і може застосовуватися в різних областях математичного моделювання.

Література

- [1] О.Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, Мир, Москва, 1975
- [2] Работнов Ю.Н., Механика деформируемого твердого тела, Наука. Москва. 1979
- [3] М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Конспект лекций по курсу "Методы конечноэлементного анализа Новосибирск 2014
- [4] J. Cervený, V. Dobrev, T. Kolev, Non-conforming mesh refinement for high-order finite elements, SIAM Journal on Scientific Computing 41 (4) (2019) C367–C392
- [5] L. Quiroz, P. Beckers , Non-conforming mesh gluing in the finite elements method, International journal for numerical methods in engineering, V.3. 8, 2165-2184 (19 95),
- [6] J.F. Unger, S. Eckardt, Multiscale Modeling of Concrete From Mesoscale to Macroscale, Arch Comput Methods Eng (2011) 18:341–393
- [7] C. R. Dohrmann, S. W. Key and M. W. Heinstein, Methods for connecting dissimilar three-dimensional finite element meshes
- [8] Peter Hansbo. Nitsche’s method for interface problems in computational mechanics. GAMMMitteilungen, WILEY-VCH Verlag GmbH, 2005, 28 (2), pp.183-206
- [9] S. Dana, M. F. Wheeler, Augmented lagrangian for treatment of hanging nodes in hexahedral meshes arXiv preprint
- [10] P. Le Tallec and T. Sassi, Domain Decomposition with Nonmatching

Grids: Augmented Lagrangian , Mathematics of Computation, Vol. 64,
No. 212 (Oct., 1995), pp. 1367-1396

[11] Y. Yusa , H. Okada and Y. Yumoto ,Three-Dimensional Elastic
Analysis of a Structure with Holes Using Accelerated Coupling-Matrix-
Free Iterative s-Version FEM,International Journal of Computational
Methods Vol. 15, No. 1 (2018) 1850036

[12] J. Fish and S. Markolefas, Adaptive s-method for linear elastostati-
cs,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 104 (1993)
363-396