Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2025, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.614.2
MSC 65F15

CONVERGENCE OF THE POWER METHOD FOR MULTIPLE EIGENVALUE

V. V. Verbitskyi[1], M. S. Tairova[2], V. S. Muliarchuk[3]

[1]Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine, E-mail: v.verbitskyi@onu.edu.ua
[2]Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine, E-mail: mason@onu.edu.ua
[3]Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine, E-mail: vladislava.muliarchuk@stud.onu.edu.ua

ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ КРАТНИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

В. В. Вербіцький[1], М. С. Таірова[2], В. С. Мулярчук[3]

[1]Факультет математики, фізики та інформаційних технологій, Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна, E-mail: v.verbitskyi@onu.edu.ua
[2]Факультет математики, фізики та інформаційних технологій, Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна, E-mail: mason@onu.edu.ua
[3]Факультет математики, фізики та інформаційних технологій, Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
E-mail: vladislava.muliarchuk@stud.onu.edu.ua

Abstract. The convergence of the power method for calculating the multiple maximum modulo eigenvalue of a symmetric real matrix is investigated. It is proved that the power method converges if the matrix has only one maximum modulo simple or multiple eigenvalue.
Keywords: power method, symmetric matrix, multiple eigenvalue.

Анотація. Досліджено збіжність степеневого методу для обчислення кратного максимального за модулем власного значення симетричної дійсної матриці. Отримано елементарне доведення збіжності степеневого методу у випадках простоти та кратності єдиного максимального за модулем власного значення.
Ключові слова: степеневий метод, симетрична матриця, кратне власне значення.

1. Вступ

Степеневий метод [1–5] є класичним ітераційним методом для обчислення власних значень квадратної матриці A.

Алгоритмічно його можна описати так.

Corresponding author: В.В. Вербицький (v.verbitskyi@onu.edu.ua).

Алгоритм 1. ***Степеневий метод***

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. *For* $k = 0, 1, \ldots$ *Until Convergence Do*
3. $\quad y_{k+1} = Ax_k$
4. $\quad \mu_{k+1} = y_{k+1}^T x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. *End Do*

Цей метод є простим за структурою та зручним у реалізації, і вимагає лише обчислень добутків матриці на вектор. Отже, його можна використовувати також, коли матриця A є дуже великою та розрідженою.

Зазвичай, у науковій та навчальній літературі збіжність степеневого методу розглядають за умови, що найбільше за модулем власне значення матриці A є простим [1–3, 6, 7]. Тобто, розглядається задача на власні значення

$$Au = \lambda u,$$

щодо обчислення найбільшого за модулем власного значення та відповідного йому власного вектора симетричної матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, власні значення якої $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ записані в порядку спадання їх абсолютних значень так, що

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|, \tag{1}$$

причому максимальне за модулем власне значення λ_1 є простим.

У цьому випадку щодо збіжності степеневого методу відома така теорема [1–3].

Теорема 1. *Припустимо, що власні значення* $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ *симетричної матриці* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *зі спектральний розкладанням*

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)U^T,$$

де матриця власних векторів $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *є ортогональною, задовольняють умовам (2). Нехай* $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ *і* $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ *— послідовності, що створені за допомогою степеневого методу,* $\theta_k \in [0, \pi/2]$ *визначається так, що* $\cos(\theta_k) = |u_1^T x_k|$*. Якщо* $\cos(\theta_0) \neq 0$*, то для* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *виконуються оцінки:*

$$|\sin(\theta_k)| \leq \tan(\theta_0)\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k,$$

$$|\mu_k - \lambda_1| \leq \tan(\theta_0)\max_{2\leq i\leq n}|\lambda_1 - \lambda_i|\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}.$$

З теореми 1 ми бачимо, що збіжність степеневого методу є геометричною, із співвідношенням $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ для послідовності $\{\theta_k\}_{k=0}^\infty$ та $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2$ для послідовності $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$. Метод збігається повільно, якщо є власне значення, близьке до λ_1.

Тим не менш, степеневий метод залишається корисним для певних обчислювальних проблем. Степеневий метод може бути більш ефективним, ніж інші методи пошуку домінуючого власного вектора, коли матриця добре обумовлена або розріджена, як веб-матриця.

Так, наприклад, степеневий метод корпорація Google використовує для оцінки важливості веб-сторінок [8–10], а відома соцмережа X (колишній Twitter) — для обчислення рекомендацій користувачу щодо того, на ким слідувати [11], тощо.

Крім того, ідеї степеневого метода використовуються сучасними ефективними методами обчислення власних пар матриці, наприклад, методами підпростору Крилова [2, 4, 5, 12, 13].

Мета роботи полягає в дослідженні збіжності степеневого методу щодо обчислення найбільшого за модулем власного значення симетричної дійсної матриці та відповідного власного вектора у випадку коли найбільше за модулем власне значення є кратним.

2. Степеневий метод у випадку кратного власного значення

Нехай симетрична матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ має p різних власних значень

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_p|$$

кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_p$, відповідно, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.

Якщо

$$\left\{u_k^{(i)}\right\}_{k=1}^{n_i}$$

деякий ортонормований базис власного підпростору E_{λ_i}, що відповідає власному значенню λ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, то ортогональний проектор

$$H_{\lambda_i} = \sum_{k=1}^{n_i} u_k^{(i)} (u_k^{(i)})^T$$

на E_{λ_i} визначається однозначно незалежно від вибору ортонормованого базису та для матриці A можна записати таке спектральне розкладання [4],

$$A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i H_{\lambda_i}.$$

З теореми 4.1 [5, с. 86] випливає наступна

Теорема 2. *Нехай існує тільки одне максимальне за модулем кратне власне значення λ_1 симетричної дійсної матриці A. Якщо проекція y_0 на E_{λ_1} відмінна від нуля ($H_{\lambda_1} y_0 \neq 0$), степеневий метод утворює такі послідовності $\{\mu_k\}$ та $\{x_k\}$, що μ_k збігається до λ_1, а x_k збігається до власного вектора u_1, що відповідає власному значенню λ_1.*

Доведення. За умовою теореми маємо,

$$y_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i,$$

де $u_i = H_{\lambda_i} y_0 / ||H_{\lambda_i} y_0||_2$, $\alpha_i = ||H_{\lambda_i} y_0||_2$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_1 \neq 0$. Згідно алгоритму степеневого методу знаходимо,

$$x_0 = \frac{y_0}{||y_0||_2},$$

$$y_1 = Ax_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i u_i}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\|_2}.$$

$$x_1 = \frac{y_1}{||y_1||_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i u_i}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i u_i \right\|_2}.$$

Після k ітерацій отримуємо,

$$x_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i \right\|_2}, \tag{2}$$

$$y_{k+1} = Ax_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^{k+1} u_i}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i \right\|_2}. \tag{3}$$

З (2) та (3) маємо

$$\mu_{k+1} = y_{k+1}^T x_k = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^{k+1} u_i \right)^T \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i \right)}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^k u_i \right\|_2^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k}} =$$

$$= \frac{\lambda_1 + \frac{\alpha_2^2 \lambda_2}{\alpha_1^2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_p^2 \lambda_p}{\alpha_1^2} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1} \right)^{2k}}{1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_p^2}{\alpha_1^2} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1} \right)^{2k}} = \frac{\lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} \right)}{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} \right)}.$$

Очевидно, що x_k — це вектор $A^k y_0$, який нормалізовано деяким скаляром $\hat{\alpha}_k$. За умовою теореми y_0 можна подати так,

$$y_0 = \sum_{i=1}^{p} H_{\lambda_i} y_0, \text{ де } H_{\lambda_1} y_0 \neq 0.$$

Тоді,

$$x_k = \frac{1}{\hat{\alpha}_k} A^k y_0 = \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i H_{\lambda_i} \right)^k y_0 = \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k H_{\lambda_i} y_0 =$$

$$= \frac{\lambda_1^k}{\hat{\alpha}_k} \left(H_{\lambda_1} y_0 + \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k H_{\lambda_i} y_0 \right),$$

звідки випливає потрібне. □

Зауваження 1. Якщо враховувати помилки округлень машинної арифметики, малоймовірно, що проекція y_0 на E_{λ_1} буде дорівнювати нулю на першому кроці степеневого метода, або що рівність нулю проекції y_k на E_{λ_1} збережеться у подальших обчисленнях. Тому, умову теореми про те, що проекція початкового вектора y_0 на власний підпростір найбільшого за модулем власного значення не повинна бути нулем, можна вважати не суттєвою для практичних обчислень.

З іншого боку, оскільки всі власні значення симетричної дійсної матриці A дійсні, то матриця A може мати щонайбільше два найбільших за модулем власних значення.

У цьому випадку можна обчислити домінуючі за модулем власні значення матриці A застосувавши степеневий метод до матриці

$$A - \sigma I,$$

де $\sigma \in \mathbb{R}$ — деякий зсув, а I — одинична матриця.

Дійсно, якщо знайти такі дійсні числа σ_- та σ_+, що

$$\sigma_- < \min_i \lambda_i(A), \qquad \max_i \lambda_i(A) < \sigma_+$$

(наприклад, за лемою Гершгоріна), то у матриці

$$A - \sigma_- I$$

всі власні значення будуть додатні, таким чином її максимальне за модулем власне значення буде відповідати найбільшому власному значенню матриці A, а у матриці

$$A - \sigma_+ I$$

всі власні значення будуть від'ємні, таким чином її максимальне за модулем власне значення буде відповідати найменшому власному значенню матриці A.

Виходячи з вище сказаного, маємо таку теорему.

Теорема 3. *В машинній арифметиці степеневий метод для симетричної дійсної матриці*

$$A - \sigma I,$$

де $\sigma \in \{\sigma_-, \sigma_+\}$ *завжди збігається.*

Нагадаємо, що матриця A називається додатно (від'ємно) напіввизначеною, якщо

$$x^T A x \geq (\leq)\ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Має місце

Наслідок 1. *В машинній арифметиці степеневий метод для симетричної дійсної додатно (від'ємно) напіввизначеної матриці завжди збігається.*

Доведення. Дійсно, така матриця має лише одне максимальне за модулем власне значення. □

3. Обчислювальний експеримент

Власні значення матриці

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

розміру $(N-1)\times(N-1)$, де $h = 1/N$, визначаються так:

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi h i}{2}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Степеневий метод знаходить найбільше за модулем просте власне значення матриці A з відносною похибкою $\varepsilon = 10^{-6}$ за 8509 кроків:

$$\begin{aligned} \lambda_{N-1} &\approx 159990.1305985328 \\ \mu_{8509} &= 159989.9706198464 \end{aligned}$$

Найбільшим за модулем власним значенням матриці

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

є λ_{N-1} і його кратність 2. Степеневий метод обчислює його з тією ж точністю за таку саму кількість кроків.

Матриця

$$A_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix}$$

має два різні максимальні за модулем власні значення λ_{N-1} та $-\lambda_{N-1}$. В цьому випадку послідовність $\{\mu_k\}$ степеневого метода не збігається до максимального за модулем власного значення, так

$$\mu_{15609} = 6.676048602827223E - 13.$$

Однак, для матриці

$$A_2 - \sigma I,$$

де $\sigma = \sigma_- = -\frac{4}{h^2}$ степеневий метод збігається і дозволяє обчислити максимальне власне значення матриці A_2 з відносною похибкою $\varepsilon = 10^{-6}$ за 15609 ітерацій:

$$\mu_{15609} - \sigma = 159989.8106685975.$$

У всіх обчислювальних експериментах для обчислення початкового наближення до власного вектора використовувався одиничний вектор:

$$y_0 = [1, \ldots, 1]^T.$$

Обчислення виконано у пакеті GNU Octave 9.3.0 з використанням машинної арифметики подвійної точності.

4. Заключні зауваження

У статті досліджено збіжність степеневого методу для обчислення кратного максимального за модулем власного значення симетричної дійсної матриці. Степеневий метод є класичним ітераційним методом для обчислення власних значень квадратної матриці. Зазвичай, у науковій та навчальній літературі збіжність степеневого методу розглядають за умови, що найбільше за модулем власне значення матриці є простим.

У статті отримано елементарне доведення збіжності степеневого методу у випадках простоти та кратності єдиного максимального за модулем власного значення.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

Література

1. Bai Z.-Z., Wu W.-T., Muratova G.V. The power method and beyond. *Appl. Num. Math.*2021. Vol. 164. P. 29–42.
2. Golub G.H. , Van Loan C.F. Matrix Computations, third edition. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 674 p.
3. Van der Vorst H.A. Computational methods for large eigenvalue problems. *Handbook of Num. Anal.* 2002. Vol. 8. P. 3–179.
4. Parlett B.N. The Symmetric Eigenvalue Problem. Philadelphia, PA: SIAM, 1998. 426 p.
5. Saad Y. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, second edition. Philadelphia, PA: SIAM, 2011. 285 p.
6. Börm St., Mehl Ch. Numerical Methods for Eigenvalue Problems. Berlin/Boston:De Gruyter. 2010. 208 p.
7. Stewart D.E. Numerical Analysis: A Graduate Course. CMS/CAIMS Books in Mathematics, Springer, 2022. 632 p.
8. Berkhin P. A survey on PageRank computing. *Internet Math.* 2005. No. 2. P. 73–120.
9. Berkhin P. Bookmark-coloring algorithm for personalized PageRank computing. *Internet Math.* 2006. No. 3. P. 41–62.
10. Langville A.N., Meyer C.D. Google's PageRank and Beyond:The Science of Search Engine Rankings. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2006. 233 p.
11. Gupta P., Goel A., Lin J., Sharma A., Wang D., Zadeh R. WTF: The who to follow service at Twitter. in: WWW 2013, Rio de Janeiro, Brazil, 2013, pp.505–514.
12. Golub G.H., Ye Q. An inverse free preconditioned Krylov subspace method for symmetric generalized eigenvalue problems. *SIAM J. Sci. Comput.* 2002. Vol. 24. P. 312–334.
13. Bai Z.-Z., Miao C.-Q. On local quadratic convergence of inexact simplified Jacobi-Davidson method. *Linear Algebra Appl.* 2017. Vol. 520. P. 215–241.

Надійшла: 13.01.2025 / Прийнята: 28.02.2025