Про математику і математиків

УДК 510/511+519.1+004.8"652/654" **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.4**

Тарас ЮСИПІВ
ORCID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЦЕГЛИНИ МАТЕМАТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ: ВІД АНТИЧНОСТІ ДО ЕПОХИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Анотація. *Математичні дослідження беруть початок ще з античних часів, коли людство стикнулося з необхідністю точних вимірювань та обчислень для розв’язування практичних завдань, що призвело до зародження таких наук як арифметика та геометрія. Важливою віхою в побудові математики як логічно строгої та послідовної теорії стала робота Евкліда «Начала», де ним було впроваджено принцип аксіоматичної системи: він обґрунтував істинність відомих на той час геометричних тверджень, виводячи їх з аксіом – базових тверджень, які приймаються істинними (з інтуїтивних міркувань). Разом з тим, як пізніше з’ясувалося, існують такі математичні твердження, доведення чи спростування яких може займати цілі століття. Яскравим прикладом цього є Велика теорема Ферма, істинність якої була підтверджена лише через понад 350 років після того, як автор записав її у своїх примітках. З появою новітніх технологій, таких як нейронні мережі, процес математичних відкриттів почав прискорюватися. «Нейронки» здатні моделювати складні логічні зв'язки та швидко перебирати можливі варіанти. Це відкриває нові горизонти для наукових досліджень, дозволяючи поєднувати класичні математичні методи з інноваційними підходами, що можуть значно змінити методи розв’язання математичних задач.*

Ключові слова: *аксіоматика; алгебра; арифметика; Велика теорема Ферма; геометрія; логічний вивід; машинне навчання; мовні моделі; теорія графів; теорія чисел.*

1. Арифметика і геометрія

Арифметика і геометрія виникли з природніх практичних потреб і стали першими систематичними спробами людства зрозуміти та описати структуру і порядок світу: перша досліджувала властивості чисел і операції з ними, задовольняючи потребу в обчисленнях і вимірюваннях, друга – вивчала просторові форми і зв'язки, розв’язуючи практичні завдання, наприклад, розподіл земель.

Перші систематичні математичні дослідження виникли в стародавніх цивілізаціях Вавилону, Греції та Єгипту, де розвивалися методи обчислень для землевимірювання, бухгалтерії та астрономії. Вже з тих часів люди розуміли, що математика оточує нас скрізь: від побутових справ до складних наукових досліджень. Видатними представниками пізнішого розвитку цих ідей стали давньогрецькі математики Евклід і Діофант з Александрії, яких розділяють 5 століть, але чиї праці значною мірою визначили подальший розвиток математики як науки (Bell, 1937).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. Евклід

У своїх книгах «*Начала»* Евклід сформулював аксіоматичний підхід, побудувавши геометрію на базі п'яти основних постулатів.

1) **Про прямі лінії**: через будь-які дві точки можна провести пряму лінію.
2) **Про відрізки**: відрізок між точками можна продовжити в обидва боки до нескінченності.
3) **Про кола**: можна побудувати коло з будь-яким центром і будь-яким радіусом.
4) **Про прямі кути**: усі прямі кути рівні між собою.
5) **Про паралельні прямі**: якщо пряма перетинає дві інші прямі таким чином, що сума внутрішніх односторонніх кутів менша за два прямі кути, то ці дві прямі, якщо їх продовжити, обов'язково перетнуться з того боку де кути менші, ніж два прямі.

Рис. 1. Евклід (близько 325 – близько 270 до н. е.)

П'ятий постулат відрізняється від інших своєю складністю та «неінтуїтивністю». Він викликав численні спроби довести його як теорему, використовуючи інші постулати, але всі ці спроби зазнали невдачі, а через 21 століття зміна цього постулату призвела до виникнення неевклідових геометрій (гіперболічної, пов'язаної з М. І. Лобачевським, та еліптичної – з Г. Ріманом), що відкрило нові горизонти в розумінні простору не лише з математичної, але й з фізичної точки зору. Здається дещо дивним, але, як з'ясувалося пізніше, у просторі, визначеному постулатами геометрії, можливі лише ці три типи геометрії (Pogorelov, 1979).

3. Діофант Александрійський

Діофант Александрійський, відомий як «батько алгебри», заклав фундамент для теорії чисел (і, зрештою, – *алгебри*), що спиралася не на геометричні принципи, як це було у Платона, Евкліда, Архімеда та Аполлонія, а на арифметичні властивості чисел. Його праця **«***Арифметика***»** стала добрим початком для подальших теоретикочислових досліджень таких видатних математиків, як от П’єр Ферма, Марен Мерсенн та Леонард Ойлер.

Рис. 2. Діофант Александрійський (між 200 та 214 – між 284 та 298)

4. Ферма

Відомо, що П’єр Ферма любив залишати в книгах власні коментарі стосовно того, що там було написано. Одна з таких поміток на полях латинського перекладу «Арифметики» Діофанта, датована 1637 роком, стосувалася формулювання його знаменитої *Великої теореми* (*Fermat’s Last Theorem*), де Ферма стверджував, що знайшов «прекрасне доведення» того факту, що
рівняння

$$a^n + b^n = c^n$$

не має розв’язків у цілих числах a, b, c, відмінних від нуля, при $n > 2, n \in \mathbb{N}$.

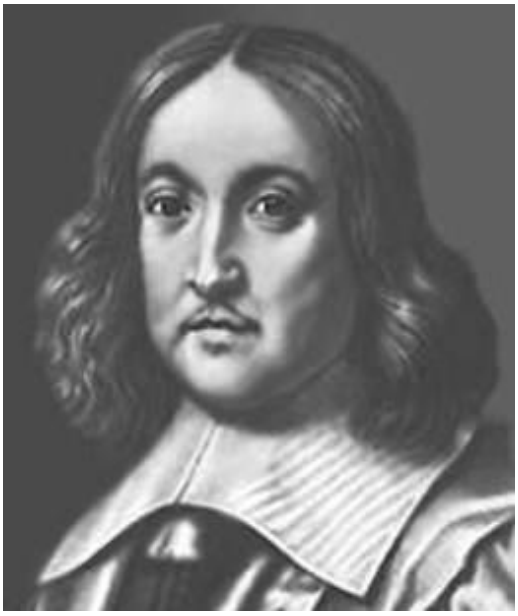

Рис. 3. П’єр Ферма (17 серпня 1601 – 12 січня 1665)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Коментар не містив доведення вказаного твердження і був виявлений лише через 30 років. Протягом 358 років після її формулювання достовірність теореми залишалася невстановленою, поки Ендрю Вайлз у співавторстві з Річардом Тейлором не зробили фінальний крок у доведенні (*теорема модулярності для напівстабільних еліптичних кривих*) (Boston, 2003). Цікаво, що хоча *Велика теорема Ферма* не мала практичної значущості, простота її математичного формулювання та неймовірна складність доведення призвели до того, що за весь час над її доведенням працювала велика кількість математиків, а також чимала кількість дилетантів, що призвело до того, що цей математичний факт посідає перше місце за кількістю «некоректних» доведень. Проте ці зусилля надали потужний імпульс розвитку сучасної теорії чисел, сприяючи важливим досягненням у цій галузі.

5. Марен Мерсенн

Марен Мерсенн вів жваве наукове листування з 78 кореспондентами, серед яких, крім Ферма, були такі відомі постаті, як Р. Декарт, Г. Галілей, Б. Паскаль, Е. Торічеллі та Х. Гюйгенс. Про відкриття Ферма відомо практично лише з цих листувань. У наші дні Мерсенн знаний як дослідник чисел вигляду

$$M_n = 2^n - 1.$$

Рис. 4. Марен Мерсенн (8 вересня 1588 – 1 вересня 1648)

Вони відіграють неабияку роль у пошуку великих простих чисел, що має важливе значення в криптографії, математиці та обчислювальних методах, оскільки для чисел Мерсенна існує ефективний *тест простоти Люка-Лемера*. Саме завдяки цьому тесту найбільшими відомими простими числами завжди були прості числа Мерсенна. Досягнення в пошуку великих простих чисел Мерсенна стали можливими завдяки *розподіленим обчисленням*: програми, такі як GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), використовують комп’ютерні ресурси волонтерів по всьому світу для перевірки таких чисел на простоту. Найбільше відоме просте число Мерсенна на сьогодні – $M_{136279841}$, яке містить понад 41 мільйон цифр і було знайдено в жовтні 2024 року (the Great Internet Mersenne Prime Search, 2024).

6. Леонард Ойлер

Леонард Ойлер, якого вважають одним з найвидатніших та найрезультативніших у науковому сенсі математиків 18 століття, а можливо й усіх часів, крім своєї роботи в теорії чисел (зокрема, доведення *Великої теореми Ферма* для $n = 3$, виявлення зв'язку між простими числами та Дзета-функцією Рімана, доведення *теореми про розподіл простих чисел*, а також знаходження найбільшого відомого на той час простого числа 2 147 483 647, яке є числом Мерсенна M_{31}) також зробив вагомий внесок у багато інших галузей математики, зокрема в математичний аналіз, механіку, диференціальні рівняння тощо.

У 1736 році Л. Ойлер в одному зі своїх листів описує розв'язання задачі про Кеніґсбергські мости, чим започатковує теорію графів, яку можна застосовувати для розв'язування багатьох задач з різноманітних областей математики, зокрема комбінаторики.

Рис. 5. Леонард Ойлер (15 квітня 1707 – 18 вересня 1783)

Цікавим прикладом застосування теорії графів є доведення *Гіпотези чотирьох фарб*, яку було сформульовано в 1852 році. Вона стверджує, що

> *будь-яку карту, розташовану на сфері, можна розфарбувати лише чотирма фарбами так, щоб жодні дві сусідні області не мали однаковий колір.*

Гіпотезу було доведено за допомогою комп'ютерних методів у 1996 році, тоді як лише в 2005 році вдалося формалізувати доведення з допомогою помічника *Coq*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

(Gonthier, 2008). Цей приклад, разом із прикладом розподілених обчислень, яскраво демонструє перспективність використання комп'ютерів у математичних дослідженнях.

6. Сучасність

Як зазначив видатний математик сучасності Теренс Тао (17 липня 1975, Аделаїда, Австралія): «Існує три способи, як можна використати штучний інтелект для розв'язування математичних задач: *машинне навчання* встановлює зв'язки між математичними розділами, які для людей є неочевидними; *мовні моделі* перекладають з людської мови на машинну і навпаки; *програми-помічники* допомагають зменшити час на формальне доведення певних математичних фактів» (Terence Tao & IMO, 2024).

Рис. 6. Теренс Тао (17 липня 1975)

У контексті можливих напрямків розвитку взаємодії між дослідниками та штучним інтелектом Велика теорема Ферма, яка надихала математиків протягом століть, може знову стати новим поштовхом до розвитку науки: у 2024 році Кевін Марк Базарт (21 вересня 1968, Об'єднане Королівство) отримав грант для виконання проєкту пошуку інших формальних доведень цієї теореми, що демонструє як сучасні методи можуть призвести до подальших проривів у математичних дослідженнях, сприяючи новим відкриттям і революційним досягненням у різних наукових галузях (Buzzard, 2024).

Список використаних джерел

Bell E.T. (1937). *Men of Mathematics*. Simon & Schuster, Ink., New York. 608 p.

Gonthier, Georges (2008). Formal Proof – The Four-Color Theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55 (11): pp. 1382 – 1393: https://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf

Pogorelov A.V. (1979). Hilbert's fourth problem. Washington: Scripta. 97 p.

Boston Nigel, (2003). The Proof of Fermat's Last Theorem. Springer. 140 p. https://people.math.wisc.edu/~nboston/869.pdf the Great Internet Mersenne Prime Search (2024). https://www.mersenne.org

Terence Tao at IMO 2024: AI and Mathematics. (2024) https://www.youtube.com/watch?v=e049IoFBnLA

Lean community blog The Fermat's Last Theorem Project / Kevin Buzzard 2024-04-30 Source https://leanprover-community.github.io/blog/posts/FLT-announcement

Отримано редакцією журналу: 28.11.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Taras YUSYPIV
ORCID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE BRICKS OF MATHEMATICAL RESEARCH: FROM ANTYQUITY TO THE ERA OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Abstract. *Mathematical research began in ancient times when humanity faced the need for precise measurements and calculations to solve practical problems, leading to the emergence of disciplines such as arithmetic and geometry. A significant milestone in building mathematics as a logically rigorous and consistent theory was Euclid's work Elements, in which he introduced the axiomatics system: he substantiated the truth of the known geometric statements of the time by deriving them from axioms – basic statements accepted as true (based on intuitive reasoning). However, as was later revealed, there are mathematical propositions whose proofs or disproving may take centuries, and a vivid example of this is Fermat's Last Theorem, the truth of which was confirmed only over 350 years after the author wrote it in his notes. With the advent of new technologies such as neural networks, the process of mathematical discovery began to accelerate. Neural networks can model complex logical relationships and quickly explore possible solution variants. This opens new horizons for scientific research, allowing the combination of classical mathematical methods with innovative approaches that may significantly change the way mathematical problems are solved.*

Keywords: *axiomatics; algebra; arithmetic; Fermat's Last Theorem; geometry; graph theory; language models; logical inference; machine learning; number theory.*