Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на тему:
Асимптотика згорток процесів відновлення

студентки 4 курсу
Фещенко Ірини Олексіївни

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов Олександр Маратович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО Іксанов О. М.

Київ-2023

Зміст

Перелік умовних позначень та термінів

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають той самий розподіл як випадкова величина ξ. Випадковим блуканням, що стартує в нулі, називається випадкова послідовність, що задається так

$$S_0 := 0, \quad S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Надалі будемо припускати, що $\xi \geq 0$ майже напевно (м.н.). Нехай $(M(t))_{t \geq 0}$ – процес відновлення, тобто $M(t) = \#\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$. Покладемо для $j \in \mathbb{N}$ $M_j(t) := M^{*(j)}(t)$, тобто M_j – j-кратна згортка в сенсі Лебега-Стілт'єса M з собою, що задається так $M_1(t) = M(t)$ та

$$M_j(t) = \int_{[0,\, t]} M_{j-1}(t-x) \mathrm{d}M(x), \quad j \geq 2,\ t \geq 0.$$

Вступ

Актуальність. Протягом останніх років вийшов ряд статей [4], [5], [6], у яких було розглянуто ітеровані збурені випадкові блукання на дереві загального гіллястого процесу для ранніх та середніх поколінь. Оскільки раніше не було досліджено згортки процесів відновлення, які моделюються схожим чином, як і процес, який рахує кількість індивідів j-ого покоління з часом народження $\leq t$, де j не залежить від t, то це зробимо ми у даній роботі. Результати, отримані у роботі для $M_j(t)$ та $\mathbb{E}M_j(t)$, є внеском до узагальненої теорії відновлення.

Мета та завдання дослідження. Знайти зображення для згорток процесів відновлення та їх математичного сподівання. Дослідити асимптотичні властивості згорток процесів відновлення.

Об'єкт дослідження: згортки процесів відновлення.

Предмет дослідження: граничні теореми для згорток процесів відновлення.

Методи дослідження. В роботі застосовуються методи дослідження

- математичного аналізу, зокрема, метод математичної індукції (розділи 4 та 5);
- теорії перетворень Лапласа-Стілт'єса (розділ 4);
- комбінаторного аналізу (розділ 4).

Наукова новизна результатів дослідження. Нами вперше розглянуто згортки процесів відновлення та доведено теореми, пов'язані з їх асимптотичною поведінкою. Поставлена задача є абсолютно новою, раніше не досліджувалася.

Практичне застосування результатів дослідження. Робота носить теоретичний характер.

Коротка характеристика розділів роботи. У першому розділі розглянуто деякі відомі результати для ітерованих збурених випадкових блукань на дереві загального гіллястого процесу. Як виявиться, для фіксованих j асимптотичні властивості $N_j(t)$ та $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$, де $N_j(t)$ - чисельність j-ого покоління індивідів з часом народження $\leq t$, мають спільний характер з відповідними властивостями розглянутих нами процесів. Зокрема, тут буде наведене порівняння асимптотичних властивостей процесів зі статті [4] та отриманих нами відповідних результатів.

У другому розділі сформульовані основні результати роботи згідно з поставленою метою дослідження. Тут наведені формули для знаходження $M_j(t)$ та $\mathbb{E}M_j(t)$. Крім того, у розділі сформульовано ряд тверджень та теорем, які характеризують асимптотичні властивості досліджуваних величин. Будуть наведені аналоги посиленого закону великих чисел та елементарної теореми відновлення. До того ж, буде сформульована теорема, яка визначає швидкість збіжності в аналозі елементарної теореми відновлення за припущення, що розподіл ξ є негратчастим та $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$.

У третьому розділі наведені допоміжні результати, які будуть використані для доведення основних результатів. Зокрема, твердження 3.1, яке було розглянуто у посібнику [2] лише для випадку 1-арифметичного випадкового блукання, потребує окремого доведення для розглянутого нами негратчастого випадкового блукання. З доведеннями результатів з розділів 2 та 3 можна ознайомитись у розділах 4 та 5 відповідно.

1 Сучасний стан тематики

Оскільки розглянута у роботі задача, наскільки нам відомо, є новою і раніше не досліджувалась, то у цьому розділі зробимо огляд статтей, у яких розглядається подібна модель. Можемо записати $M_j(t)$ у такому вигляді:

$$M_j(t) = \int_{[0,t]} M_{j-1}(t-y)\mathrm{d}M_1(y) = \int_{[0,\,t]} M_{j-1}(t-y)\mathrm{d}\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq y\}}$$
$$= \sum_{k\geq 1} \int_{[0,\,t]} M_{j-1}(t-y)\mathrm{d}\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq y\}} = \sum_{k\geq 1} M_{j-1}(t-S_k)\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq y\}}$$

З такого вигляду $M_j(t)$ можна переконатись у подібності нашої моделі та тієї, яка розглядається, зокрема, у статті [4]. У цій роботі досліджують процес $(N_j(t))_{t\geq 0}$ та $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$, де $N_j(t)$ - чисельність j-ого покоління індивідів з часом народження $\leq t$. Тут наведені аналоги елементарної теореми відновлення, посиленого закону великих чисел, уточнений аналог елементарної теореми відновлення для негратчастого розподілу ξ та за умов $\mathbb{E}\xi^2 < \infty, \mathbb{E}\eta < \infty$. Ці результати мають особливий інтерес для нашої роботи, оскільки перші два з них мають абсолютно такий самий вигляд, як і отримані нами відповідні результати для згорток процесів відновлення. Останній же результат відрізняється від отриманого нами для $\mathbb{E}M_j$, а саме, для $\mathbb{E}M_j$ границя матиме рекурсивну формулу для її знаходження. Крім того, у роботі [4] наведені асимптотика дисперсії $N_j(t)$, функціональна гранична теорема та аналоги ключової теореми відновлення і теореми Блекуелла.

Ми вважаємо j-те покоління раннім, середнім або пізнім в залежності від того, чи j фіксоване, $j = j(t) \to \infty$ та $j(t) = o(t)$ при $t \to \infty$ або $j = j(t)$ порядку t. Результати, отримані у статті [4], подібні з тими, що отримані в даній роботі, оскільки для ранніх поколінь j фіксоване. Усі відповідні аналоги теорем для середніх поколінь наведені у роботі [5]. Натомість, у праці [6], де середні покоління є також об'єктом дослідження, встановлені достатні умови, за яких скінченновимірні розподіли процесу $(N_{\lfloor j(t)u\rfloor}(t))_{u>0}$, належним чином нормалізованого та центрованого, слабко збігається до інтегрального функціоналу стійкого процесу Леві зі скінченним середнім. Розглянуті роботи цікаві тим, що досліджують, як змінюються властивості збурених випадкових блукань у різних поколіннях, та які властивості $(N(t))$ успадковує N_j.

2 Основні результати

Спершу варто навести формулу для згортки процесів відновлення $M_j(t)$, яка не міститиме інтегралів.

Твердження 2.1. *Для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$M_j(t) = \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_j} \leq t\}}\,. \tag{1}$$

Наступна теорема є посиленим законом великих чисел (ПЗВЧ) для $M_j(t)$. Зокрема, коли $j = 1$ отримаємо ПЗВЧ для процесів відновлення.

Теорема 2.2. *Нехай* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. *Для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$ *виконується рівність*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_j(t)}{t^j} = \frac{1}{\mu^j j!} \quad \text{м.н.} \tag{2}$$

Зауважимо, що з теореми 2.2 випливає, що при $j \geq 2$ процес $(M_j(t))_{t\geq 0}$ не є процесом відновлення. Згідно з ПЗВЧ для процесів відновлення, процес відновлення зростає не швидше, ніж лінійно, що очевидно не виконується при $j \geq 2$.

Наступна теорема є аналогом елементарної теореми відновлення для $\mathbb{E}M_j$.

Теорема 2.3. *Нехай* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. *Для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$ *виконується рівність*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_j(t)}{t^j} = \frac{1}{\mu^j j!}. \tag{3}$$

У наступному твердженні наведено формулу для знаходження $\mathbb{E}M_2$. Вона є окремим випадком загальної формули з твердження 2.5.

Твердження 2.4. *Виконується рівність*

$$\mathbb{E}M_2(t) = \mathbb{E}M_1(t/2) + 2\int_{[0,\,t]} \mathbb{E}M_1(t-y)\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(y/2), \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Для подальшого розгляду математичного сподівання згортки процесів відновлення зручно мати певну формулу цієї величини. Далі буде наведено дві еквівалентні формули для $\mathbb{E}M_j(t)$. Введемо таке позначення $V^{(j)}(t) := \mathbb{E}M_1(t/j)$ та визначимо такі множини:

$$B_k = \big\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} : i_1 + i_2 + \ldots + i_k = k,\ i_j = 0 \Rightarrow i_p = 0,\ p > j\big\}$$
$$A(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \{j \in \mathbb{N} : i_1 + i_2 + \ldots + i_j \leq k-1\}$$

Перша формула для $\mathbb{E}M_j(t)$ має такий вигляд.

Твердження 2.5. *Для кожного* $j \geq 2$ *виконується рівність*

$$\mathbb{E}M_j(t) = \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in B_j} \frac{j!}{i_1! i_2! \ldots i_j!} *_{m\in A(i_1,\ldots,i_j)} V^{(j-i_1-\ldots-i_m)} * V^{(j)}(t), \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Тут

$$*_{m\in A(i_1,\ldots,i_j)} V^{(j-i_1-\ldots-i_m)}(t) = V^{(j-i_1)} * V^{(j-i_1-i_2)} * \ldots * V^{(j-i_1-i_2-\ldots-i_{m_0})}(t),$$

де m_0 *- максимальний елемент множини* $A(i_1, i_2, \ldots, i_j)$, *та покладаємо* $*_{m\in\emptyset} \equiv 1$.

Друга формула є еквівалентною формулі (5), але має простіший вигляд та є зручнішою для використання.

Твердження 2.6. *Для кожного $j \ge 2$ виконується рівність*

$$\mathbb{E}M_j(t) = \sum_{m=1}^{j} C_j^m \mathbb{E}M_{j-m} * V^{(j)}(t), \quad t \ge 0. \tag{6}$$

Особливо корисною є формула (6) для отримання такого результату.

Теорема 2.7. *Нехай розподіл випадкової величини ξ є неґратчастим та $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тоді для фіксованого $j \ge 2$*

$$A_j := \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j}}{t^{j-1}} = \frac{2jb + j - 1}{2(j-2)!\mu^{j-1}} + \frac{1}{(j-1)\mu} A_{j-1}, \tag{7}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ та

$$b := A_1 = \lim_{t\to\infty} \left(\mathbb{E}M_1(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1.$$

Остання рівність наведена у розділі 3 в твердженні 3.1.

Доведення всіх результатів цього розділу наведені в розділі 4.

3 Допоміжні результати

Наведені нижче твердження будуть використані для доведення основних результатів. Доведення всіх результатів цього розділу наведені в розділі 5.

Твердження 3.1. *Нехай розподіл ξ є неґратчастим та $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \left(\mathbb{E}M(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1, \tag{8}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

Для формулювання ще одного результату покладемо для $u > 0$ $X(u) := \sum_{k\geq 1} e^{-uS_k}$ та $X^*(u) := \sum_{k\geq 2} e^{-u(S_k - S_1)}$. Зазначимо, що

$$X(u) = \sum_{k\geq 1} e^{-uS_k} = e^{-uS_1} + e^{-uS_1} X^*(u), \tag{9}$$

та що $X^*(u)$ має той самий розподіл що і $X(u)$ і не залежить від S_1.

Твердження 3.2. *Для кожного натурального j виконується асимптотичне співвідношення*

$$\mathbb{E}(X(u))^j \sim \frac{1}{(\mu u)^j}, \quad u \to 0+, \tag{10}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

4 Доведення основних результатів

Доведення твердження 2.1. Скористаємось методом математичної індукції.
БАЗА $j=1$. За означенням

$$M_1(t) = M(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}\,.$$

КРОК ІНДУКЦІЇ. Припустимо, що для $j=n$ справедлива формула (1). Покажемо, що тоді вона буде мати місце і для $j=n+1$.

$$\begin{aligned}
M_{n+1}(t) &= \int_{[0,t]} M_n(t-y)\mathrm{d}M(y) = \int_{[0,t]} M_n(t-y)\mathrm{d}\sum_{k_{n+1}\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{k_{n+1}}\leq y\}} \\
&= \int_{[0,t]} \sum_{k_1\geq 1}\cdots\sum_{k_n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_n}\leq t-y\}}\,\mathrm{d}\sum_{k_{n+1}\geq 1}\mathbb{1}_{\{S_{k_{n+1}}\leq y\}} \\
&= \sum_{k_1\geq 1}\cdots\sum_{k_n\geq 1}\sum_{k_{n+1}\geq 1}\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_n}\leq t-y\}}\,\mathrm{d}\,\mathbb{1}_{\{S_{k_{n+1}}\leq y\}} \\
&= \sum_{k_1\geq 1}\cdots\sum_{k_n\geq 1}\sum_{k_{n+1}\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_n}\leq t-S_{k_{n+1}}\}} \\
&= \sum_{k_1\geq 1}\cdots\sum_{k_{n+1}\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_{n+1}}\leq t\}}\,.
\end{aligned}$$

Крок індукції доведено. Отже, формула (1) справедлива для всіх $j \in \mathbb{N}$. □

Доведення теореми 2.2. Спосіб І. Скористаємось методом математичної індукції.
БАЗА $j=1$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{м. н.}$$

Ця рівність виконується за посиленим законом великих чисел (ПЗВЧ) для процесу відновлення. Детально з доведенням цього твердження можна ознайомитись у посібнику [2].
КРОК ІНДУКЦІЇ. Припустимо, що для $j=k$ виконується твердження (2). Покажемо, що тоді твердження (2) буде справджуватись для $j=k+1$.
З ПЗВЧ для процесів відновлення маємо, що для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться м.н. скінченна випадкова величина $t_0>0$ така, що

$$\left|\frac{M(t)}{t}-\frac{1}{\mu}\right| \leq \varepsilon$$

для всіх $t\geq t_0$. Запишемо зображення

$$M_{k+1}(t) = \int_{[0,t]} M(t-y)\mathrm{d}M_k(y) = \int_{[0,t-t_0]} M(t-y)\mathrm{d}M_k(y) + \int_{(t-t_0,t]} M(t-y)\mathrm{d}M_k(y).$$

Згідно з припущенням індукції для другого доданка виконується співвідношення

$$\int_{(t-t_0,t]} M(t-y)\mathrm{d}M_k(y) \leq M(t_0)(M_k(t)-M_k(t-t_0)) = o(t^k) \text{ м. н. при } t\to\infty.$$

Аналогічно

$$\int_{(t-t_0,t]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)\le t_0(M_k(t)-M_k(t-t_0))=o(t^k)\text{ м. н. при }t\to\infty.$$

Далі

$$\begin{aligned}\int_{[0,t-t_0]}M(t-y)\mathrm{d}M_k(y)&\ge\left(\mu^{-1}-\varepsilon\right)\int_{[0,t-t_0]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)\\&=\left(\mu^{-1}-\varepsilon\right)\left(\int_{[0,t]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)-\int_{(t-t_0,t]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)\right).\end{aligned}$$

Знайдемо $\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,t]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)}{t^{k+1}}$. За припущенням індукції для довільного $\varepsilon_k>0$ знайдеться м.н. скінченна випадкова величина $t_k>0$ така, що $\left|\frac{M_k(t)}{t^k}-\frac{1}{\mu^k k!}\right|\le\varepsilon_k$ для всіх $t\ge t_k$. Запишемо зображення для $t\ge t_k$

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)&=\int_0^t\frac{M_k(y)}{y^k}y^k\mathrm{d}y=\int_0^{t-t_k}\frac{M_k(y)}{y^k}y^k\mathrm{d}y+\int_{t-t_k}^t\frac{M_k(y)}{y^k}y^k\mathrm{d}y\\&=:I_1(t)+I_2(t).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\left(\frac{1}{\mu^k k!}-\varepsilon_k\right)\frac{(t-t_k)^{k+1}}{k+1}\le I_1(t)\le\left(\frac{1}{\mu^k k!}+\varepsilon_k\right)\frac{(t-t_k)^{k+1}}{k+1},$$

то

$$\left(\frac{1}{\mu^k k!}-\varepsilon_k\right)\frac{1}{k+1}\le\liminf_{t\to\infty}\frac{I_1(t)}{t^{k+1}}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{I_1(t)}{t^{k+1}}\le\left(\frac{1}{\mu^k k!}+\varepsilon_k\right)\frac{1}{k+1}.$$

Також

$$|I_2(t)|\le c_k\int_{t-t_k}^t y^k\mathrm{d}y=c_k\frac{t^{k+1}-(t-t_k)^{k+1}}{k+1},$$

де c_k - додатна константа. Тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I_2(t)}{t^{k+1}}=0.$$

Таким чином,

$$\left(\frac{1}{\mu^k k!}-\varepsilon_k\right)\frac{1}{k+1}\le\liminf_{t\to\infty}\frac{I_1(t)+I_2(t)}{t^{k+1}}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{I_1(t)+I_2(t)}{t^{k+1}}\le\left(\frac{1}{\mu^k k!}+\varepsilon_k\right)\frac{1}{k+1}.$$

Спрямовуючи $\varepsilon_k\to0+$, отримуємо $\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,t]}(t-y)\mathrm{d}M_k(y)}{t^{k+1}}=\frac{1}{\mu^k(k+1)!}$ м. н. Зібравши всі фрагменти разом і спрямувавши $\varepsilon\to0+$, будемо мати:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_{(t-t_0,t]}M(t-y)\mathrm{d}M_k(y)}{t^{k+1}}\ge\frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!}.$$

Нерівність для верхньої границі оцінюється аналогічно. В результаті отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{(t-t_0,t]} M(t-y)\mathrm{d}M_k(y)}{t^{k+1}} = \frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!} \quad \text{м. н.}$$

У підсумку маємо бажаний результат

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_{k+1}(t)}{t^{k+1}} = \frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!} \quad \text{м. н.}$$

Спосіб II. Для знаходження перетворення Лапласа-Стілт'єса $M_j(t)$ скористаємося твердженням про перетворення Лапласа-Стілт'єса згортки функцій

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}M_j(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}M^{*(j)}(t) = \left(\int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}M(t)\right)^j.$$

Запишемо

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}M(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = \sum_{k\geq 1}\int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}$$
$$= \sum_{k\geq 1} e^{-uS_k} \sim \frac{1}{u\mu}, \quad u\to 0+ \ \text{ м. н.}$$

Для доведення останньої еквівалентності скористаємось тим, що згідно з ПЗВЧ для випадкових блукань для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться м. н. скінченна випадкова величина $k_0 > 0$ така, що $|\frac{S_k}{k} - \mu| \leq \varepsilon$ для всіх $k \geq k_0 + 1$. Ми скористаємося таким зображенням

$$\sum_{k\geq 1} e^{-uS_k} = \sum_{k=1}^{k_0} e^{-uS_k} + \sum_{k\geq k_0+1} e^{-uS_k}. \tag{11}$$

Другий доданок аналізується так

$$\frac{e^{-u(\mu+\varepsilon)(k_0+1)}}{1-e^{-u(\mu+\varepsilon)}} = \sum_{k\geq k_0+1} e^{-u(\mu+\varepsilon)k} \leq \sum_{k\geq k_0+1} e^{-uS_k} \leq \sum_{k\geq k_0+1} e^{-u(\mu-\varepsilon)k} = \frac{e^{-u(\mu-\varepsilon)(k_0+1)}}{1-e^{-u(\mu-\varepsilon)}}.$$

Тоді маємо

$$\frac{e^{-u(\mu+\varepsilon)(k_0+1)}}{1-e^{-u(\mu+\varepsilon)}} \leq \sum_{k\geq k_0+1} e^{-uS_k} \leq \sum_{k\geq 1} e^{-uS_k} \leq \sum_{k=1}^{k_0} e^{-uS_k} + \frac{e^{-u(\mu-\varepsilon)(k_0+1)}}{1-e^{-u(\mu-\varepsilon)}}.$$

Спрямовуючи $u \to 0+$, а потім $\varepsilon \to 0+$ у правій і лівій частинах нерівності, отримаємо $\sum_{k\geq 1} e^{-uS_k} \sim \frac{1}{u\mu}$ при $u \to 0+$ м. н. Перший доданок в (11) є обмеженим, тому на асимптотику суми доданків не впливає. Таким чином,

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}M_j(t) = \left(\int_{[0,\infty)} e^{-ut}\mathrm{d}M(t)\right)^j \sim \frac{1}{(u\mu)^j}, \quad u\to 0+ \ \text{ м. н.}$$

За тауберовою теоремою Карамата (теорема 1.7.1 на ст. 37 в [1]), де згідно з позначеннями у формулюванні цитованої теореми $U(x) = M_j(x), \rho = j, c = \frac{1}{\mu^j}, l(x) \equiv 1$, маємо

$$M_j(t) \sim \frac{1}{\mu^j} t^j \frac{1}{\Gamma(1+j)} = \frac{t^j}{\mu^j j!} \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $j \in \mathbb{N}$, то $\Gamma(1+j) = j!$. □

Доведення теореми 2.3. Спершу доведемо рівність, що є окремим випадком теореми Кемпбелла

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}\mathbb{E}M_j(t) = \mathbb{E} \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}M_j(t).$$

Зробимо окремо перетворення правої та лівої частин рівності

$$\mathbb{E} \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}M_j(t) = \mathbb{E} \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}M^{*(j)}(t) = \mathbb{E} \left(\int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}M(t) \right)^j = \mathbb{E} \left(\sum_{k \geq 1} e^{-uS_k} \right)^j$$

та

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}\mathbb{E}M_j(t) &= \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}\mathbb{E} \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{k_1} + \dots + S_{k_j} \leq t\}} \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d} \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{S_{k_1} + \dots + S_{k_j} \leq t\}} \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d} \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} \mathbb{P}\{S_{k_1} + \dots + S_{k_j} \leq t\} \\
&= \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} \int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k_1} + \dots + S_{k_j} \leq t\} \\
&= \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} \mathbb{E} e^{-u\left(S_{k_1} + \dots + S_{k_j}\right)} = \mathbb{E} \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j \geq 1} e^{-uS_{k_1}} \cdot \ldots \cdot e^{-uS_{k_j}} \\
&= \mathbb{E} \sum_{k_1 \geq 1} e^{-uS_{k_1}} \sum_{k_2 \geq 1} e^{-uS_{k_2}} \cdot \ldots \cdot \sum_{k_j \geq 1} e^{-uS_{k_j}} = \mathbb{E} \left(\sum_{k \geq 1} e^{-uS_k} \right)^j.
\end{aligned}$$

Перша рівність вище забезпечується твердженням 2.1. Згідно з твердженням 3.2 $\mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} e^{-uS_k}\right)^j = \mathbb{E}(X(u))^j \sim \frac{1}{(\mu u)^j}$ при $u \to 0+$. Отже, маємо

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ut} \mathrm{d}\mathbb{E}M_j(t) = \mathbb{E} \left(\sum_{k \geq 1} e^{-uS_k} \right)^j \sim \frac{1}{(\mu u)^j}, \quad u \to 0+. \tag{12}$$

Застосовуючи тауберову теорему Карамата у той самий спосіб як наприкінці доведення теореми 2.2, отримуємо (3). □

Доведення твердження 2.4. Спосіб I. Застосуємо перетворення Лапласа-Стілт'єса до обох частин рівності (4).

$$\int_{[0,\infty)} e^{-us}\mathrm{d}\mathbb{E}M_2(u) = \int_{[0,\infty)} e^{-us}\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(u/2) + 2\int_{[0,\infty)} e^{-us}\mathrm{d}\int_{[0,u]} \mathbb{E}M_1(u-y)\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(y/2)$$

Для перетворення лівої частини рівності та першого доданка правої частини використаємо доведену вище рівність (12). Для перетворення другого доданка правої частини скористаємось теоремою про перетворення Лапласа-Стілт'єса згортки функцій та рівністю (12). Таким чином,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} e^{-sS_k}\right)^2 = \mathbb{E}\sum_{m\geq 1} e^{-2sS_m} + 2\int_{[0,\infty)} e^{-us}\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(u)\cdot\int_{[0,\infty)} e^{-us}\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(u/2);$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} e^{-sS_k}\right)^2 = \mathbb{E}\sum_{m\geq 1} e^{-2sS_m} + 2\mathbb{E}\sum_{r\geq 1} e^{-sS_r}\cdot\mathbb{E}\sum_{n\geq 1} e^{-2sS_n} \tag{13}$$

Отже, необхідно довести рівність (13). Для цього зробимо такі перетворення:

$$\left(\sum_{k\geq 1} e^{-sS_k}\right)^2 = \sum_{m\geq 1} e^{-2sS_m} + 2\sum_{1\leq i<j} e^{-sS_j}\cdot e^{-sS_i}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j} e^{-sS_j}\cdot e^{-sS_i} &= e^{-sS_1}\left(e^{-sS_2}+e^{-sS_3}+\ldots\right) + e^{-sS_2}\left(e^{-sS_3}+e^{-sS_4}+\ldots\right)+\ldots \\ &= e^{-2sS_1}\left(e^{-s\xi_2}+e^{-s(\xi_2+\xi_3)}+\ldots\right) + e^{-2sS_2}\left(e^{-s\xi_3}+e^{-s(\xi_3+\xi_4)}+\ldots\right)+\ldots\end{aligned}$$

Оскільки для $i\in\mathbb{N}$ $e^{-s\xi_i}+e^{-s(\xi_i+\xi_{i+1})}+e^{-s(\xi_i+\xi_{i+1}+\xi_{i+2})}+\ldots \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k\geq 1} e^{-sS_k}$, де $\overset{\mathrm{d}}{=}$ позначає рівність величин за розподілом, та множники кожного з доданків вигляду $e^{-2sS_{i-1}}\left(e^{-s\xi_i}+e^{-s(\xi_i+\xi_{i+1})}+\ldots\right), i\geq 2$ є незалежними, будемо мати:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{1\leq i<j} e^{-sS_j}\cdot e^{-sS_i} &= \mathbb{E}\left(e^{-2sS_1}\left(e^{-s\xi_2}+e^{-s(\xi_2+\xi_3)}+\ldots\right)\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(e^{-2sS_2}\left(e^{-s\xi_3}+e^{-s(\xi_3+\xi_4)}+\ldots\right)\right)+\ldots \\ &= \mathbb{E}e^{-2sS_1}\mathbb{E}\left(e^{-s\xi_2}+e^{-s(\xi_2+\xi_3)}+\ldots\right) \\ &+ \mathbb{E}e^{-2sS_2}\mathbb{E}\left(e^{-s\xi_3}+e^{-s(\xi_3+\xi_4)}+\ldots\right)+\ldots \\ &= \mathbb{E}\sum_{n\geq 1} e^{-2sS_n}\cdot\mathbb{E}\sum_{r\geq 1} e^{-sS_r}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} e^{-sS_k}\right)^2 &= \mathbb{E}\sum_{m\geq 1} e^{-2sS_m} + 2\mathbb{E}\sum_{1\leq i<j} e^{-sS_j}\cdot e^{-sS_i} \\ &= \mathbb{E}\sum_{m\geq 1} e^{-2sS_m} + 2\mathbb{E}\sum_{n\geq 1} e^{-2sS_n}\cdot\mathbb{E}\sum_{r\geq 1} e^{-sS_r}.\end{aligned}$$

Отримана рівність відповідних перетворень Лапласа-Стілт'єса доводить початкове твердження (4).
Спосіб II. Отримаємо необхідне твердження безпосередніми перетвореннями $M_2(t)$, скориставшись формулою з твердження 2.1:

$$M_2(t) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_i+S_j\leq t\}} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{2S_i\leq t\}} + 2\sum_{1\leq i<j} \mathbb{1}_{\{S_i+S_j\leq t\}}\,.$$

Зробимо окремо перетворення кожного з доданків

$$\sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{2S_i\leq t\}} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_i\leq t/2\}} = M_1(t/2)$$

та

$$\sum_{1\leq i<j} \mathbb{1}_{\{S_i+S_j\leq t\}} = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq i+1} \mathbb{1}_{\{S_i+(S_i+\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j)\leq t\}}\,.$$

Тому

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sum_{j\geq i+1} \mathbb{1}_{\{S_i+(S_i+\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j)\leq t\}} &= \mathbb{E}\sum_{j\geq i+1} \mathbb{1}_{\{\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j\leq t-2S_i, 2S_i\leq t\}} \\
&= \sum_{j\geq i+1} \mathbb{P}\{\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j \leq t-2S_i, 2S_i\leq t\} \\
&= \sum_{j\geq i+1} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j \leq t-2S_i, 2S_i\leq t | 2S_i = x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{2S_i\leq x\} \\
&= \sum_{j\geq i+1} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j \leq t-x | 2S_i = x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{2S_i\leq x\} \\
&= \sum_{j\geq i+1} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j \leq t-x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\leq x/2\} \\
&= \sum_{j\geq i+1} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{S_{j-i} \leq t-x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\leq x/2\} \\
&= \sum_{k\geq 1} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{S_k \leq t-x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\leq x/2\} = \int_{[0,t]} \mathbb{E}M_1(t-x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\leq x/2\}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sum_{i<j} \mathbb{1}_{\{S_i+S_j\leq t\}} &= \mathbb{E}\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq i+1} \mathbb{1}_{\{S_i+(S_i+\xi_{i+1}+\ldots+\xi_j)\leq t\}} = \sum_{i\geq 1}\int_{[0,t]} \mathbb{E}M_1(t-x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\leq x/2\} \\
&= \int_{[0,t]} \mathbb{E}M_1(t-x)\mathrm{d}\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\{S_i\leq x/2\} = \int_{[0,t]} \mathbb{E}M_1(t-x)\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(x/2).
\end{aligned}$$

У підсумку,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_2(t) &= \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{2S_i\leq t\}} + 2\mathbb{E}\sum_{1\leq i<j} \mathbb{1}_{\{S_i+S_j\leq t\}} \\
&= \mathbb{E}M_1(t/2) + 2\int_{[0,t]} \mathbb{E}M_1(t-x)\mathrm{d}\mathbb{E}M_1(x/2).
\end{aligned}$$

□

Доведення твердження 2.5. Скориставшися формулою (1) для зображення $M_j(t)$, маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M_j(t) &= \mathbb{E}\sum_{k_1\ge 1}\dots\sum_{k_j\ge 1}\mathbb{1}_{\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_j}\le t\}} = \sum_{k_1\ge 1}\dots\sum_{k_j\ge 1}\mathbb{P}\{S_{k_1}+S_{k_2}+\ldots+S_{k_j}\le t\}\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in B_j}\ \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_j}\frac{j!}{i_1!i_2!\ldots i_j!}\mathbb{P}\{i_1S_{k_1}+i_2S_{k_2}+\ldots+i_jS_{k_j}\le t\}\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in B_j}\frac{j!}{i_1!i_2!\ldots i_j!}\ast_{m\in A(i_1,\ldots,i_j)}V^{(j-i_1-\ldots-i_m)}\ast V^{(j)}(t).\end{aligned}$$

Третя рівність отримана в результаті нескладних комбінаторних міркувань. Для доведення останньої рівності треба показати, що для фіксованого кортежу $(i_1,\ldots,i_j)$ $\sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_j}\mathbb{P}\{i_1S_{k_1}+i_2S_{k_2}+\ldots+i_jS_{k_j}\le t\} = \ast_{m\in A(i_1,\ldots,i_j)}V^{(j-i_1-\ldots-i_m)}\ast V^{(j)}(t)$. Скористаємось методом математичної індукції.
База $j=1$. Очевидно, що $i_1=1$ та

$$\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{i_1S_{k_1}\le t\} = \sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le t\} = \mathbb{E}M_1(t) = V^{(1)}(t).$$

Крок індукції. Припустимо, що для $j=n$ виконується зазначена рівність. Покажемо, що тоді вона буде справджуватись для $j=n+1$. Нагадаємо, що $i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=n+1$. Тоді

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_{n+1}}\mathbb{P}\{i_1S_{k_1}+i_2S_{k_2}+\ldots+i_{n+1}S_{k_{n+1}}\le t\}\\ &=\sum_{k_1\ge 1}\sum_{k_2\ge k_1+1}\dots\sum_{k_{n+1}\ge k_n+1}\mathbb{P}\{(i_1+\ldots+i_{n+1})S_{k_1}+i_2(S_{k_2}-S_{k_1})+\ldots\\ &+i_{n+1}(S_{k_{n+1}}-S_{k_1})\le t\}\\ &=\sum_{k_1\ge 1}\dots\sum_{k_{n+1}\ge k_n+1}\int_{[0,\infty)}\mathbb{P}\{i_2(S_{k_2}-S_{k_1})+\ldots+i_{n+1}(S_{k_{n+1}}-S_{k_1})\le t-(n+1)S_{k_1},\\ &(n+1)S_{k_1}\le t|(n+1)S_{k_1}=x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{(n+1)S_{k_1}\le x\}\\ &=\sum_{k_1\ge 1}\dots\sum_{k_{n+1}\ge k_n+1}\int_{[0,t]}\mathbb{P}\{i_2(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_2})+\ldots+i_{n+1}(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_{n+1}})\\ &\le t-x|(n+1)S_{k_1}=x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le x/(n+1)\}\\ &=\sum_{k_1\ge 1}\dots\sum_{k_{n+1}\ge k_n+1}\int_{[0,t]}\mathbb{P}\{i_2(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_2})+\ldots+i_{n+1}(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_{n+1}})\\ &\le t-x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le x/(n+1)\}\\ &=\sum_{k_1\ge 1}\int_{[0,t]}\sum_{k_2\ge k_1+1}\dots\sum_{k_{n+1}\ge k_n+1}\mathbb{P}\{i_2(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_2})+\ldots+i_{n+1}(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_{n+1}})\\ &\le t-x\}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le x/(n+1)\}\\ &=\sum_{k_1\ge 1}\int_{[0,t]}\sum_{k'_2\ge 1}\dots\sum_{k'_{n+1}\ge k'_n+1}\mathbb{P}\{i_2S_{k'_2}+\ldots+i_{n+1}S_{k'_{n+1}}\le t-x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le x/(n+1)\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k_1\ge 1}\int_{[0,t]} *_{m\in A(i_2,\dots,i_{n+1})} V^{((n+1-i_1)-i_2-\dots-i_m)} * V^{(n+1-i_1)}(t-x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le x/(n+1)\}\\
&= \int_{[0,t]} *_{m\in A(i_2,\dots,i_{n+1})} V^{((n+1-i_1)-i_2-\dots-i_m)} * V^{(n+1-i_1)}(t-x)\mathrm{d}\sum_{k_1\ge 1}\mathbb{P}\{S_{k_1}\le x/(n+1)\}\\
&= \int_{[0,t]} *_{m\in A(i_2,\dots,i_{n+1})} V^{((n+1-i_1)-i_2-\dots-i_m)} * V^{(n+1-i_1)}(t-x)\mathrm{d}V^{(n+1)}(x)\\
&= *_{m\in A(i_2,\dots,i_{n+1})} V^{((n+1-i_1)-i_2-\dots-i_m)} * V^{(n+1-i_1)} * V^{(n+1)}(t)\\
&= *_{m\in A(i_1,\dots,i_{n+1})} V^{(n+1-i_1-i_2-\dots-i_m)} * V^{(n+1)}(t).
\end{aligned}
$$

Під час переходу були зроблені заміни $k'_n = k_n - k_1$. Тут

$$
A(i_2,\dots,i_{n+1}) = \{m\in\mathbb{N} : i_2+\dots+i_m \le (n+1)-i_1-1, m\ge 2\}.
$$

Отже, індукційний перехід доведено, тому формула (5) встановлена. $\square$

Доведення твердження 2.6. Будемо використовувати формулу (5) та розглянемо більш детально можливі значення i_1.

1) Якщо $i_1 = 1$, то $i_2 + i_3 + \dots + i_j = j-1$. При цьому

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(i_1,\dots,i_j)\in B_j} \frac{j!}{i_1!i_2!\dots i_j!} *_{m\in A(i_1,\dots,i_j)} V^{(j-i_1-i_2-\dots-i_m)} * V^{(j)}(t)|_{i_1=1}\\
&= \sum_{(i_2,\dots,i_j)\in B_{j-1}} \frac{j!}{1!i_2!\dots i_j!} *_{m\in A'(i_2,\dots,i_j)} V^{((j-1)-i_2-\dots-i_m)} * V^{(j-1)} * V^{(j)}(t)\\
&= j\left(\sum_{(i'_1,\dots,i'_{j-1})\in B_{j-1}} \frac{(j-1)!}{i'_1!\dots i'_{j-1}!} *_{m\in A(i'_1,\dots,i'_{j-1})} V^{((j-1)-i'_1-\dots-i'_m)} * V^{(j-1)}\right) * V^{(j)}(t)\\
&= j\mathbb{E}M_{j-1} * V^{(j)}(t).
\end{aligned}
$$

Тут і далі в доведенні вважаємо $A'(i_k,\dots i_m) = \{j\in\mathbb{N} : i_k+\dots+i_j \le m-k,\ j\ge k\}$. В третій рівності було зроблено перенумерацію $i'_k = i_{k+1}, k\ge 1$ для отримання формули (5) у явному вигляді.

2) Якщо $i_1 = 2$, то $i_j = 0$ та $i_2 + i_3 + \dots + i_{j-1} = j-2$. При цьому

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(i_1,\dots,i_j)\in B_j} \frac{j!}{i_1!i_2!\dots i_j!} *_{m\in A(i_1,\dots,i_j)} V^{(j-i_1-i_2-\dots-i_m)} * V^{(j)}(t)|_{i_1=2}\\
&= \sum_{(i_2,\dots,i_{j-1})\in B_{j-2}} \frac{j!}{2!i_2!\dots i_{j-1}!} *_{m\in A'(i_2,\dots,i_{j-1})} V^{((j-2)-i_2-\dots-i_m)} * V^{(j-2)} * V^{(j)}(t)\\
&= \frac{j(j-1)}{2}\left(\sum_{(i'_1,\dots,i'_{j-2})\in B_{j-2}} \frac{(j-2)!}{i'_1!\dots i'_{j-2}!} *_{m\in A(i'_1,\dots,i'_{j-2})} V^{((j-2)-i'_1-\dots-i'_m)} * V^{(j-2)}\right) * V^{(j)}(t)\\
&= \frac{j(j-1)}{2}\mathbb{E}M_{j-2} * V^{(j)}(t) = C_j^2\mathbb{E}M_{j-2} * V^{(j)}(t).
\end{aligned}
$$

3) Якщо $i_1 = n, n \leq j$, то $i_k = 0$ для $k = \overline{j-n+2, j}$. При цьому

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in B_j} \frac{j!}{i_1! i_2! \ldots i_j!} *_{m\in A(i_1,\ldots,i_j)} V^{(j-i_1-i_2-\ldots-i_m)} * V^{(j)}(t)|_{i_1=n}$$
$$= \sum_{(i_2,\ldots,i_{j-n+1})\in B_{j-n}} \frac{j!}{n! i_2! \ldots i_{j-n+1}!} *_{m\in A'(i_2,\ldots,i_{j-n+1})} V^{((j-n)-i_2-\ldots-i_m)} * V^{(j-n)} * V^{(j)}(t)$$
$$= \frac{j!}{n!(j-n)!} \left(\sum_{(i'_1,\ldots,i'_{j-n})\in B_{j-n}} \frac{(j-n)!}{i'_1! \ldots i'_{j-n}!} *_{m\in A(i'_1,\ldots,i'_{j-n})} V^{((j-n)-i'_1-\ldots-i'_m)} * V^{(j-n)} \right) * V^{(j)}(t)$$
$$= \frac{j!}{n!(j-n)!} \mathbb{E}M_{j-n} * V^{(j)}(t) = C_j^n \mathbb{E}M_{j-n} * V^{(j)}(t).$$

Отже, загальна формула для $\mathbb{E}M_j$ для $j \geq 2$ буде такою:

$$\mathbb{E}M_j(t) = \sum_{m=1}^{j} C_j^m \mathbb{E}M_{j-m} * V^{(j)}(t).$$

Тут покладаємо $\mathbb{E}M_0 \equiv 1$. □

Доведення теореми 2.7. Будемо використовувати формулу (6). Тоді

$$\mathbb{E}M_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j} = \sum_{m=1}^{j} C_j^m \mathbb{E}M_{j-m} * V^{(j)}(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j}. \tag{14}$$

1) Розглянемо усі доданки суми з (14), окрім перших двох. Для $m \geq 3$

$$\begin{aligned} C_j^m \mathbb{E}M_{j-m} * V^{(j)}(t) &= C_j^m \int_{[0,t]} V^{(j)}(t-x) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-m}(x) = C_j^m \int_{[0,t]} \mathbb{E}M_1\left(\frac{t-x}{j}\right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-m}(x) \\ &= C_j^m \int_{[0,t-t_0]} \left(\mathbb{E}M_1\left(\frac{t-x}{j}\right) - \frac{t-x}{j\mu} \right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-m}(x) \\ &+ C_j^m \int_{(t-t_0,t]} \left(\mathbb{E}M_1\left(\frac{t-x}{j}\right) - \frac{t-x}{j\mu} \right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-m}(x) \\ &+ C_j^m \int_{[0,t]} \frac{t-x}{j\mu} \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-m}(x) =: C_j^m \left(I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) \right). \end{aligned}$$

Тут і далі у доведенні, згідно з твердженням 3.1 для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $t_0 > 0$ таке, що $|\mathbb{E}M(t) - \frac{t}{\mu} - b| \leq \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$. Нагадаємо, що $b = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1$, див. (8). Знайдемо окремо границі для кожного доданку. Оскільки

$$(b-\varepsilon)\mathbb{E}M_{j-m}(t-t_0) \leq I_1(t) \leq (b+\varepsilon)\mathbb{E}M_{j-m}(t-t_0)$$

та для $m \geq 2$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_{j-m}(t)}{t^{j-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_{j-m}(t)}{t^{j-m}} \cdot \frac{t^{j-m}}{t^{j-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_{j-m}(t)}{t^{j-m}} \cdot \frac{1}{t^{m-1}} = 0,$$

то

$$0 \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^{j-1}} \le 0.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^{j-1}} = 0.$$

З нерівності Лордена випливає, що $|I_2(t)| \le c(\mathbb{E}M_{j-m}(t) - \mathbb{E}M_{j-m}(t-t_0))$ для всіх $t \ge t_0$, де $c = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2} + 1$. Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_2(t)}{t^{j-1}} = 0.$$

Для останнього доданку маємо

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \int_{[0,t]} \frac{t-x}{j\mu} \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-m}(x) = \frac{1}{j\mu}\int_0^t \mathbb{E}M_{j-m}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{j\mu}\int_0^{t-t_{j-m}} \frac{\mathbb{E}M_{j-m}(x)}{x^{j-m}} x^{j-m}\mathrm{d}x + \frac{1}{j\mu}\int_{t-t_{j-m}}^t \frac{\mathbb{E}M_{j-m}(x)}{x^{j-m}} x^{j-m}\mathrm{d}x =: I_3^1(t) + I_3^2(t) \end{aligned}$$

Тут і далі у доведенні для фіксованого $j \ge 2$ для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться скінченне $t_j > 0$ таке, що $\left|\frac{\mathbb{E}M_j(t)}{t^j} - \frac{1}{\mu^j j!}\right| \le \varepsilon$ для всіх $t \ge t_j$. Позначатимемо $b_j := \frac{1}{\mu^j j!}$ для $j \ge 2$.

Міркуючи аналогічно, як для знаходження границь $I_1(t)$ та $I_2(t)$, дійдемо висновку, що $\lim_{t\to\infty} \frac{I_3(t)}{t^{j-1}} = 0$.

Отже, границя суми без перших двох доданків рівна 0, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{m=3}^j C_j^m \mathbb{E}M_{j-m} * V^{(j)}(t)}{t^{j-1}} = 0.$$

2) Розглянемо другий доданок суми з (14). Для $m = 2$

$$\begin{aligned} C_j^{j-2}\mathbb{E}M_{j-2} * V^{(j)}(t) = C_j^{j-2} &\int_{[0,t-t_0]} \left(\mathbb{E}M_1\left(\frac{t-x}{j}\right) - \frac{t-x}{j\mu}\right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-2}(x) \\ + C_j^{j-2} &\int_{(t-t_0,t]} \left(\mathbb{E}M_1\left(\frac{t-x}{j}\right) - \frac{t-x}{j\mu}\right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-2}(x) \\ + C_j^{j-2} &\int_{[0,t]} \frac{t-x}{j\mu} \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-2}(x) =: C_j^{j-2}\left(I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)\right). \end{aligned}$$

Розглянемо відповідні границі для кожного з інтегралів окремо. Для $I_1(t)$ та $I_2(t)$ з аналогічних у вищерозглянутому випадку міркувань маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_1(t) + I_2(t)}{t^{j-1}} = 0.$$

Для останнього доданку

$$\begin{aligned}
C_j^{j-2} I_3(t) &= C_j^{j-2} \frac{1}{j\mu} \int_{[0,t]} (t-x) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-2}(x) = C_j^{j-2} \frac{1}{j\mu} \int_0^t \mathbb{E}M_{j-2}(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{j-1}{2\mu} \int_0^{t-t_{j-2}} \frac{\mathbb{E}M_{j-2}(x)}{x^{j-2}} x^{j-2} \mathrm{d}x + \frac{j-1}{2\mu} \int_{t-t_{j-2}}^t \frac{\mathbb{E}M_{j-2}(x)}{x^{j-2}} x^{j-2} \mathrm{d}x \\
&= I_3^1(t) + I_3^2(t).
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{j-1}{2\mu} \frac{(b_{j-2}-\varepsilon)(t-t_{j-2})^{j-1}}{j-1} \le I_3^1(t) \le \frac{j-1}{2\mu} \frac{(b_{j-2}+\varepsilon)(t-t_{j-2})^{j-1}}{j-1},$$

то

$$\frac{(b_{j-2}-\varepsilon)}{2\mu} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)}{t^{j-1}} \le \frac{(b_{j-2}+\varepsilon)}{2\mu}.$$

З міркувань, аналогічних у вже розглянутих випадках, отримуємо $\lim_{t\to\infty} \frac{I_3^2(t)}{t^{j-1}} = 0$. Таким чином,

$$\frac{(b_{j-2}-\varepsilon)}{2\mu} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)+I_3^2(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)+I_3^2(t)}{t^{j-1}} \le \frac{(b_{j-2}+\varepsilon)}{2\mu}.$$

Спрямовуючи $\varepsilon \to 0+$, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_j^{j-2} I_3(t)}{t^{j-1}} = \frac{b_{j-2}}{2\mu} = \frac{1}{2\mu^{j-1}(j-2)!}.$$

У підсумку,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_j^{j-2} \mathbb{E}M_{j-2} * V^{(j)}(t)}{t^{j-1}} = \frac{1}{2\mu^{j-1}(j-2)!}.$$

3) Розглянемо перший доданок суми з (14). Для $m=1$

$$\begin{aligned}
C_j^{j-1} \mathbb{E}M_{j-1} * V^{(j)}(t) = j &\int_{[0,t-t_0]} \left(\mathbb{E}M_1 \left(\frac{t-x}{j} \right) - \frac{t-x}{j\mu} \right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-1}(x) \\
&+ j \int_{(t-t_0,t]} \left(\mathbb{E}M_1 \left(\frac{t-x}{j} \right) - \frac{t-x}{j\mu} \right) \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-1}(x) \\
&+ j \int_{[0,t]} \frac{t-x}{j\mu} \mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-1}(x) =: I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).
\end{aligned}$$

Знайдемо відповідні границі для кожного з доданків окремо. Оскільки

$$j(b-\varepsilon)\mathbb{E}M_{j-1}(t-t_0) \le I_1(t) \le j(b+\varepsilon)\mathbb{E}M_{j-1}(t-t_0),$$

то з теореми 2.3 маємо

$$\frac{j(b-\varepsilon)}{\mu^{j-1}(j-1)!} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^{j-1}} \le \frac{j(b+\varepsilon)}{\mu^{j-1}(j-1)!}.$$

З нерівності Лордена випливає, що $|I_2(t)| \le c(\mathbb{E}M_{j-1}(t) - \mathbb{E}M_{j-1}(t-t_0))$ для всіх $t \ge t_0$, де $c = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2} + 1$. Тому $\lim_{t\to\infty} \frac{I_2(t)}{t^{j-1}} = 0$. Таким чином,

$$\frac{j(b-\varepsilon)}{\mu^{j-1}(j-1)!} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_1(t)+I_2(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_1(t)+I_2(t)}{t^{j-1}} \le \frac{j(b+\varepsilon)}{\mu^{j-1}(j-1)!}.$$

Спрямовуючи $\varepsilon \to 0+$, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_1(t)+I_2(t)}{t^{j-1}} = \frac{jb}{\mu^{j-1}(j-1)!}.$$

Зкомбінуємо $I_3(t)$ з від'ємником з (14).

$$\begin{aligned}
I_3(t) - \frac{t^j}{\mu^j j!} &= \frac{1}{\mu}\int_{[0,t]} (t-x)\mathrm{d}\mathbb{E}M_{j-1}(x) - \int_0^t \frac{x^{j-1}}{\mu^j (j-1)!}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^t \mathbb{E}M_{j-1}(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{\mu}\int_0^t \frac{x^{j-1}}{\mu^{j-1}(j-1)!}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^t \left(\mathbb{E}M_{j-1}(x) - \frac{x^{j-1}}{\mu^{j-1}(j-1)!}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^{t-t'_{j-1}} \left(\left(\mathbb{E}M_{j-1}(x) - \frac{x^{j-1}}{\mu^{j-1}(j-1)!}\right)/x^{j-2}\right)\cdot x^{j-2}\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{\mu}\int_{t-t'_{j-1}}^t \left(\left(\mathbb{E}M_{j-1}(x) - \frac{x^{j-1}}{\mu^{j-1}(j-1)!}\right)/x^{j-2}\right)\cdot x^{j-2}\mathrm{d}x \\
&=: I_3^1(t) + I_3^2(t)
\end{aligned}$$

Тут для довільного $\varepsilon' > 0$ знайдеться скінченне $t'_{j-1} > 0$ таке, що

$$\left|\frac{\mathbb{E}M_{j-1}(t) - t^{j-1}/(\mu^{j-1}(j-1)!)}{t^{j-2}} - A_{j-1}\right| \le \varepsilon'$$

для всіх $t \ge t'_{j-1}$, де з позначень теореми $A_{j-1} := \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_{j-1}(t) - t^{j-1}/(\mu^{j-1}(j-1)!)}{t^{j-2}}$. Розглянемо відповідні границі для кожного з доданків окремо. Оскільки

$$\frac{1}{\mu}\frac{(A_{j-1}-\varepsilon')(t-t'_{j-1})^{j-1}}{j-1} \le I_3^1(t) \le \frac{1}{\mu}\frac{(A_{j-1}+\varepsilon')(t-t'_{j-1})^{j-1}}{j-1},$$

то

$$\frac{(A_{j-1}-\varepsilon')}{\mu(j-1)} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)}{t^{j-1}} \le \frac{(A_{j-1}+\varepsilon')}{\mu(j-1)}.$$

З міркувань, аналогічних у вже розглянутих випадках, отримуємо $\lim_{t\to\infty} \frac{I_3^2(t)}{t^{j-1}} = 0$. Таким чином,

$$\frac{(A_{j-1}-\varepsilon')}{\mu(j-1)} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)+I_3^2(t)}{t^{j-1}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t)+I_3^2(t)}{t^{j-1}} \le \frac{(A_{j-1}+\varepsilon')}{\mu(j-1)}.$$

Спрямовуючи $\varepsilon' \to 0+$, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I_3^1(t) + I_3^2(t)}{t^{j-1}} = \frac{A_{j-1}}{\mu(j-1)}.$$

У підсумку,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_j^{j-1}\mathbb{E}M_{j-1} * V^{(j)}(t) - \frac{t^j}{\mu^j j!}}{t^{j-1}} = \frac{jb}{\mu^{j-1}(j-1)!} + \frac{A_{j-1}}{\mu(j-1)}.$$

Зібравши всі отримані результати, будемо мати:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}M_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j}}{t^{j-1}} = \frac{1}{2\mu^{j-1}(j-2)!} + \frac{jb}{\mu^{j-1}(j-1)!} + \frac{A_{j-1}}{\mu(j-1)} = \frac{2jb + j - 1}{2(j-2)!\mu^{j-1}} + \frac{A_{j-1}}{\mu(j-1)},$$

де

$$b := A_1 = \lim_{t\to\infty} \left(\mathbb{E}M_1(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1.$$

□

5 Доведення допоміжних результатів

Доведення твердження 3.1. Позначимо через $\hat{S}_0$ невід'ємну випадкову величину з функцією розподілу

$$\mathbb{P}\{\hat{S}_0 \le x\} = \frac{1}{\mu}\int_{[0,x]} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad x > 0.$$

З формули (2.10) на ст. 20 у [2] відомо, що $\mathbb{E}\Big(U(t) - U(t-\hat{S}_0)\Big) = U(t) - \frac{t}{\mu}$, де U – функція відновлення. За теоремою Блекуелла у негратчастому випадку

$$\lim_{t\to\infty}\Big(U(t) - U(t-\hat{S}_0)\Big) = \frac{\hat{S}_0}{\mu} \quad \text{м. н.}$$

Знайдемо середнє $\hat{S}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\hat{S}_0 &= \int_{[0,\infty)} x\mathrm{d}\mathbb{P}\{\hat{S}_0 \le x\} = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\infty)} x\mathrm{d}\int_{[0,x]} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\infty)} x\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mu}\int_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{\xi > x\}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2\mu}\lim_{x\to\infty} x^2\mathbb{P}\{\xi > x\} - \frac{1}{2\mu}\lim_{x\to 0} x^2\mathbb{P}\{\xi > x\} \\
&- \frac{1}{2\mu}\int_{[0,\infty)} x^2\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi > x\} = \frac{1}{2\mu}\int_{[0,\infty)} x^2\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi \le x\} = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu}
\end{aligned}$$

За властивістю субадитивності функції відновлення U маємо

$$U(t) - U(t-\hat{S}_0) \le U(\hat{S}_0) \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $\mathbb{E}\hat{S}_0 = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu} < \infty$, то з нерівності Лордена випливає $\mathbb{E}U(\hat{S}_0) < \infty$. Далі за теоремою Лебега про мажоровану збіжність будемо мати:

$$\lim_{t\to\infty}\left(U(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\Big(U(t) - U(t-\hat{S}_0)\Big) = \mathbb{E}\lim_{t\to\infty}\Big(U(t) - U(t-\hat{S}_0)\Big) = \frac{\mathbb{E}\hat{S}_0}{\mu} = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}.$$

Оскільки $M(t) = \#\{k \in \mathbb{N} : S_k \le t\}$, $t \ge 0$, то, перейшовши до звичних у теорії відновлення позначень, отримаємо $\mathbb{E}M(t) = U(t) - 1$. Звідси

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbb{E}M(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(U(t) - 1 - \frac{t}{\mu}\right) = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1.$$

□

Доведення твердження 3.2. Згідно з (9) для натурального j

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(u))^j &= \mathbb{E}\left(e^{-uS_1} + e^{-uS_1}X^*(u)\right)^j = \mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^j(1 + X^*(u))^j = \mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^j\mathbb{E}\left(1 + X(u)\right)^j \\
&= \mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^j\mathbb{E}\sum_{n=0}^{j} C_j^n(X(u))^n = \mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^j\left(\mathbb{E}(X(u))^j + \sum_{n=0}^{j-1} C_j^n\mathbb{E}(X(u))^n\right).
\end{aligned}$$

Тому
$$\mathbb{E}(X(u))^j = \frac{\mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^j \left(\sum_{n=0}^{j-1} C_j^n \mathbb{E}(X(u))^n\right)}{1-\mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^j} \tag{15}$$
Зауважимо, що за теоремою 2.1.5 з [3] на ст. 57 $\mathbb{E}(X(u))^j < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}e^{-uj\xi} < 1$, тобто завжди, якщо тільки $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. У теоремі ми покладаємо $(M_k, Q_k) = (e^{-u\xi_k}, e^{-u\xi_k})$ згідно з позначеннями розділу 2 книги [3]. Далі для доведення еквівалентності (10) застосуємо метод математичної індукції.
База $j = 1$:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}X(u) &= \mathbb{E}\sum_{k\geq 1} e^{-uS_k} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}e^{-uS_k} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}e^{-u\xi_1}\cdot e^{-u\xi_2}\cdot\ldots\cdot e^{-u\xi_k}\\ &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}e^{-u\xi_1}\cdot\mathbb{E}e^{-u\xi_2}\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}e^{-u\xi_k} = \sum_{k\geq 1}\left(\mathbb{E}e^{-u\xi}\right)^k = \frac{\mathbb{E}e^{-u\xi}}{1-\mathbb{E}e^{-u\xi}} \sim \frac{1}{u\mathbb{E}\xi} = \frac{1}{u\mu}\end{aligned}$$
при $u \to 0+$. Асимптотична еквівалентність випливає з того, що
$$\lim_{u\to 0+}\frac{1-\mathbb{E}e^{-u\xi}}{u} = \lim_{u\to 0+}\mathbb{E}\frac{1-e^{-u\xi}}{u} = \mathbb{E}\lim_{u\to 0+}\frac{1-e^{-u\xi}}{u} = \mathbb{E}\xi\mu.$$
Тут друга рівність забезпечується нерівністю $|(1-e^{-u\xi})/u| \leq \xi$ м.н. та теоремою Лебега про мажоровану збіжність.
Крок індукції. Припустимо, що для $j \leq k$ виконується асимптотична еквівалентність $\mathbb{E}(X(u))^j \sim \frac{1}{(\mu u)^j}$ при $u \to 0+$. Покажемо, що це твердження буде справджуватись і для $j = k+1$. Скористаємось формулою (15) та припущенням індукції.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(u))^{k+1} &= \frac{\mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^{k+1}}{1-\mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^{k+1}}\left(\sum_{n=0}^{k} C_{k+1}^n \mathbb{E}(X(u))^n\right)\\ &= \frac{\mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^{k+1}}{1-\mathbb{E}\left(e^{-uS_1}\right)^{k+1}}\left(1 + C_{k+1}^1\mathbb{E}X(u) + C_{k+1}^2\mathbb{E}(X(u))^2 + \ldots + C_{k+1}^k\mathbb{E}(X(u))^k\right)\\ &\sim \frac{1}{\mathbb{E}u\xi(k+1)}\cdot\frac{C_{k+1}^k}{(u\mu)^k} = \frac{1}{(k+1)u\mathbb{E}\xi}\cdot\frac{k+1}{(u\mu)^k} = \frac{1}{(u\mu)^{k+1}}, \quad u \to 0+.\end{aligned}$$
Індукційний перехід доведено, отже, маємо бажаний результат $\mathbb{E}(X(u))^j \sim \frac{1}{(\mu u)^j}, u \to 0+$ для натуральних j. $\square$

Висновки

Основними результатами роботи є

- отримані нами формули для обчислення $M_j(t)$ та $\mathbb{E}M_j(t)$, зокрема, дві еквівалентні формули для середнього;
- дослідження асимптотичних властивостей $M_j(t)$ та $\mathbb{E}M_j(t)$, зокрема, встановлення аналогів посиленого закону великих чисел та елементарної теореми відновлення для досліджуваних процесів;
- отримано теорему, яка за припущення негратчастості випадкового блукання та умови $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, визначає швидкість збіжності у аналозі елементарної теореми відновлення.

Для подальшого дослідження асимптотики згорток процесів відновлення варто встановити аналог теореми Блекуелла та ключової теореми відновлення, дослідити асимптотику дисперсії цього процесу та довести функціональну граничну теорему.

Література

[1] Bingham N. H. Regular variation [Text]/ N. H. Bingham , C. M. Goldie, J. L. Teugels// Cambridge University Press, 1989.

[2] Іксанов, О. М. Елементи теорії відновлення та її застосування [Електронний ресурс]: ел. навч. посібник/Київ. нац. ун-тет ім. Т. Шевченка, ел. б-ка фак. кібернетики. –Київ. –2012-2023. –Режим доступу: `https://do.csc.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/LN_renewal.pdf`

[3] Iksanov A. Renewal theory for perturbed random walks and similar processes [Text]/ A. Iksanov// Birkhäuser Cham. -2016.

[4] Iksanov A. Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: early generations [Text]/ A. Iksanov, B. Rashytov, I. Samoilenko// J. Appl. Probab. -2023.-Vol. 60. -P. 45–67.

[5] Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations [Text]/ V. Bohun, A. Iksanov, A. Marynych, B. Rashytov// J. Appl. Probab. -2022.-Vol. 59. -P. 421–446.

[6] Iksanov A. Stable fluctuations of iterated perturbed random walks in intermediate generations of a general branching process tree [Text]/ A. Iksanov, A. Marynych, B. Rashytov// Lithuanian Math. J. -2022.-Vol. 62. -P. 447—466.