

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

**Нечіткі оптимізаційні задачі
на основі моделі Леонтьєва–Форда**

Студентки 4 курсу
Коробенко Дар'ї Олексіївни

Науковий керівник:
доцент, кандидат фіз.-мат. наук
Коробова Марина Віталіївна

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендована до захисту, протокол № 10 від 08 травня 2020 р.

Завідувач кафедри МСС _____ канд. фіз.-мат. наук, доц. Черній Д.І.

Київ – 2020

Зміст

Вступ.....	3
Розділ 1. Основні поняття теорії нечітких множин	6
1.1 Основні характеристики теорії нечітких множин.....	6
1.2 Основні типи функцій належності	13
Розділ 2. Нечіткі оптимізаційні задачі	24
2.1 Задача досягнення нечітко поставленої цілі	25
2.2 Задача максимізації нечіткої цільової функції на заданій нечіткій множині допустимих альтернатив	27
2.3 Задача математичного програмування, в якій параметри цільової функції задані нечітко.....	29
Розділ 3. Нечіткі постановки задач на основі моделі Леонтьєва-Форда	31
3.1 Статична модель Леонтьєва-Форда.....	31
3.2 Оптимізаційна нечітка задача на основі статичної моделі Леонтьєва- Форда, в якій параметри цільової функції задані нечітко	33
3.2.1 Нечіткі параметри цільової функції з трикутними функціями належності.....	36
3.2.2 Нечіткі параметри цільової функції з трапецієподібними функціями належності	40
3.2.3 Нечіткі параметри цільової функції з дзвоноподібними функціями належності	45
Висновки	49
Список використаних джерел	50

Вступ

Перспективний аналіз розвитку сучасної як теоретичної, так і практичної економіки засвідчує посилення тенденції врахування соціального фактору і забезпечення життєдіяльності на Землі в глобальних масштабах. Можна очікувати, що вже в найближчому майбутньому ця тенденція посіде головну позицію у світовій економіці і буде суттєво визначати міжнародні економічні відносини. На перший план в умовах глобалізації світової економіки і світових економічних зв'язків виступає пріоритет забезпечення повноцінного майбутнього світового суспільства. В контексті цього значно зростає врахування екологічного фактору в макроекономіці, і особливим чином постає специфічна проблема ролі, місця та організації екологічної складової [1].

Уперше ідеї спільної еволюції людини та біосфери, їх гармонійного поєднання бели офіційно проголошені на Міжнародній конференції з навколишнього середовища та розвитку у Ріо-де-Жанейро («Саміт Землі») у 1992 році [2]. Об'єктом дискусії конференції стали природне середовище та соціально-економічний розвиток як взаємопов'язані області дослідження. «Порядок денний на XXI століття» як резолюція конференції пов'язує подальший розвиток економічних відносин з необхідністю досягнення високої якості довкілля і «здорової» економіки для всіх народів світу, задоволення потреб людей і збереження економічного зростання протягом тривалого періоду.

Незважаючи на численні дискусії та суперечності низки наукових досліджень, Рамковою конвенцією з питань зміни клімату ООН основною причиною глобальної зміни клімату було визнано надмірну концентрацію парникових газів в атмосфері Землі. Це стало підґрунтям для прийняття Кіотського протоколу до Рамкової конвенції ООН про зміну клімату, підписаного 1997 року 84 державами.

Останнім кроком еволюції Рамкової конвенції ООН про зміну клімату є Паризька угода, прийнята в Парижі 12 грудня 2015 року [3]. Основною метою Паризької угоди є «підсилення впровадження» Рамкової конвенції про зміну клімату шляхом утримання зростання середньої світової температури, збільшення здатності країн адаптуватися до негативних впливів зміни клімату, підтримка протидії змінам клімату та ін.

Кінцева мета зазначених угод полягає в тому, щоб досягти стабілізації концентрації парникових газів в атмосфері на такому рівні, який би не допускав загрозливого антропогенного впливу на кліматичну систему. Такий рівень повинен бути досягнутий у строки, достатні для природної адаптації екосистем до зміни клімату, які дозволяють не ставити від загрози виробництво продовольства та забезпечити подальший економічний розвиток на стійкій основі.

Реальна загроза глобального потепління клімату і різна ціна протидії йому в різних країнах стимулюють світове співтовариство до узгоджених дій. Складність та багатофакторність задач скорочення викидів парникових газів, різні умови для їх реалізації та неоднакові наслідки зміни клімату для різних країн ускладнюють прийняття спільних рішень.

Реалізація положень Паризької угоди вимагає співпраці широкого кола наук як у міждисциплінарному, так і в ізольованому варіанті. Особливої уваги серед них заслуговує економічна складова, як основний принцип розв'язання екологічних проблем – економічне заохочення [1]. Особливу роль в розв'язанні принципових проблем з врахуванням природокористування відіграють еколого-економічні моделі типу Леонтьєва-Форда. На їх основі може бути реалізована задача обґрунтування величини затрат на охорону навколишнього середовища з врахуванням соціально-економічного ефекту та розподілу їх у територіально-галузевому розрізі.

Минулорічний досвід написання курсової роботи показує, що при розв'язанні еколого-економічних задач постає одна нагальна проблема –

неточність або навіть відсутність статистичних даних, пов'язаних з екологічним станом України. Тож у цій роботі ми спробуємо врахувати даний фактор, розглянувши нечіткі оптимізаційні задачі на основі еколого-економічної моделі Леонтьєва-Форда та проаналізувавши розв'язки задач при різних варіантах функцій належності нечітких параметрів цільової функції.

1 Основні поняття теорії нечітких множин

1.1 Основні характеристики теорії нечітких множин

Теорія нечітких множин представляє собою узагальнення та, у певній мірі, переосмислення основних понять та формалізмів звичайної теорії множин. У її витоків лежать ідеї багатозначної логіки, яка визначила можливість переходу від двох до довільного числа значень істинності; теорії ймовірності, що породила можливість коректного опису невизначеності експериментальних даних та відкрила шляхи визначення й інтерпретації не обов'язково булевої функції належності; дискретної математики, що запропонувала інструмент побудови моделей багаторівневих систем і, нарешті, власне теорії множин, формальний апарат якої став основою для появи та розвитку нечіткої теорії множин [4].

Нечітка множина представляє собою сукупність елементів довільної природи, відносно кожного з яких не можна з повною визначеністю стверджувати, чи належить цей елемент даній множині. Іншими словами, нечітка множина відрізняється від звичайної множини тим, що для всіх або частини її елементів не існує однозначної відповіді на запитання: «Чи належить той чи інший елемент нечіткій множині?»

Підхід до формалізації поняття нечіткої множини складається в узагальненні поняття характеристичної функції. При цьому нечіткі множини є природним узагальненням звичайних множин на випадок, коли характеристичні функції можуть приймати не тільки значення 0 або 1, але й будь-яке значення в інтервалі $[0, 1]$. У теорії нечітких множин характеристична функція називається функцією належності, а її значення $\mu_A(x)$ – ступенем належності елементу x до нечіткої множини A .

Нехай X – деяка множина, A – підмножина X . Цей факт формально відображається наступним чином: $A \subset X$.

Якщо елемент x множини X є елементом підмножини $A \subset X$, то цей факт відображається формулою $x \in A$.

Множина X – множина (універсум), якщо з її елементів формуються усі підмножини, що розглядаються в обраному класі задач.

Для виразу належності елементу x підмножині A використовують поняття характеристичної функції $\mu_A(x)$, значення якої показує, чи є x елементом A :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Формально нечітка множина A визначається як множина впорядкованих пар або кортежів виду: $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, де x є елементом деякої універсальної множини або універсуму X , а $\mu_A(x)$ – функція належності, що ставить у відповідність кожному з елементів $x \in X$ деяке дійсне число з інтервалу $[0, 1]$, тобто ця функція визначається формі відображення:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1] \quad (1.1)$$

При цьому значення $\mu_A(x) = 1$ для деякого $x \in X$ означає, що елемент x належить нечіткій множині A , а значення $\mu_A(x) = 0$ означає, що елемент x не належить нечіткій множині A .

Формально нечітку множину, що містить скінченну кількість елементів, прийнято записувати наступним чином:

$$A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \},$$

а в загальному випадку – у вигляді: $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$.

З усіх нечітких множин виділимо два випадки, що мають свої класичні аналоги [5]. Таким є пуста нечітка множина, що не містить ні одного елементу. Вона позначається символом $\emptyset$ і формально визначається як така нечітка множина, функція належності елементів якої тотожно дорівнює нулю для всіх без винятку елементів: $\mu(x) = 0, x \in X$.

Іншу спеціальну множину – універсум уже було введено вище в якості звичайної множини, що містить в обраному класі задач всі можливі елементи. Формально варто вважати, що функція належності елементів універсуму як нечіткої множини тотожно дорівнює одиниці для всіх без виключень її елементів: $\mu(x) = 1, x \in X$.

Відносно підмножин універсальної множини A введені наступні операції [6].

Для двох будь-яких підмножин $A \subset X$ і $B \subset X$ перетином $A \cap B$ називається підмножина C така, що $x \in C$, якщо $x \in A$ та $x \in B$ одночасно, тобто

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x), \quad (1.2)$$

$$\text{або } \mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (1.3)$$

Для будь-яких підмножин $A \subset X$ і $B \subset X$ об'єднанням $A \cup B$ називається підмножина D така, що $x \in D$, якщо $x \in A$, але $x \notin B$, або $x \in B$, але $x \notin A$, або $x \in A$ та $x \in B$, тобто

$$\mu_D(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \quad (1.4)$$

$$\text{або } \mu_D(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (1.5)$$

Доповненням A відносно X називається така підмножина $\bar{A}$, для якої

$$A \cup \bar{A} = X, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset. \quad (1.6)$$

При цьому якщо $x \in A$, то $x \notin \bar{A}$, тобто, якщо $\mu_A(x) = 1$, то $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$.

Введемо тепер поняття носія нечіткої множини [6]. Носієм нечіткої множини A називається звичайна множина A_S , яка містить ті й лише ті елементи універсуму, для яких значення функції належності відповідної нечіткої множини відмінні від нуля. Математично носій нечіткої множини визначається наступним чином:

$$A_S = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}. \quad (1.7)$$

Зауважимо, що в багатьох роботах для опису носія використовується позначення *supp A* (від англ. support).

Зрозуміло, що пуста нечітка множина має пустий носій, а носій універсуму, що розглядається як нечітка множина, збігається із самим універсумом. Зауважимо, що для запису довільної нечіткої множини зазвичай вказують значення її функції належності для елементів носія, оскільки значення функції належності для всіх інших елементів дорівнюють нулю.

Аналогічним чином можна визначити нескінченні нечіткі множини як такі нечіткі множини, носій яких не є скінченною множиною [4]. При цьому зліченною нечіткою множиною будемо називати нечітку множину із зліченим носієм, тобто носії якої має зліченну потужність $\aleph_0$. Незліченною нечіткою множиною будемо називати нечітку множину з незліченим носієм, тобто носій якої має незліченну потужність або потужність континууму $\aleph$.

Нехай $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$ – довільна нечітка множина (скінченна або нескінченна) з елементами з універсуму X та функцією належності $\mu_A(x)$.

Множиною рівня α (α -перерізом) нечіткої множини A називається нечітка підмножина універсальної множини X , яка визначається за формулою

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{ де } \alpha \in [0, 1].$$

Множина строгого рівня α визначається у вигляді $A_\alpha = \{x | \mu_A(x) > \alpha\}$. Носієм нечіткої множини A є множина строгого рівня $\alpha = 0$ множини A , тобто множина елементів A , для яких $\mu_A(x) > 0$.

У випадку нескінченних множин для побудови множин α -рівня необхідно на графіку відповідної функції належності провести пряму лінію $y = \alpha$. Після цього потрібно на осі X виокремити ті точки або інтервали, для яких відповідні частини графіку розташовані не нижче цієї лінії.

Помітимо, що для всіх множин α -рівня довільної нечіткої множини A справджується наступне твердження: якщо $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$.

Величина $h_A = \sup\{\mu_A(x)\}$, де супремум береться по всім значенням $x \in A_S$, називається висотою нечіткої множини A .

Нечітка множина A називається нормальною, якщо $\max \mu_A(x) = 1$.

$$\max \mu_A(x) = 1. \quad (1.8)$$

Нечітка множина A називається субнормальною, якщо її висота дорівнює 1, але умова (1.8) не виконується.

Довільну непусту нечітку множину можна звести до нормальної (тобто нормалізувати) за формулою

$$\hat{\mu}_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup \mu_A(x)} = \frac{\mu_A(x)}{h_A}.$$

Нечітка множина A називається унімодальною, якщо її функція належності $\mu_A(x)$ є унімодальною на носії множини A .

При цьому точка $x_m \in A_S$ є точкою максимуму функції належності, якщо

$$x_m = \arg \max_{x \in A_{x_m}^\varepsilon} \{\mu(x)\}, \quad (1.9)$$

де $A_{x_m}^\varepsilon$ – ε -окіл точки x_m .

Будь яка точка $x_m \in A$ нечіткої множини A , що задовольняє умову (1.9), називається модальним значенням або модою нечіткої множини A .

Якщо точка x_m , яка задовольняє умову (1.9), є єдиною, то відповідна функція належності називається строго унімодальною.

Ядром нечіткої множини A називається чітка множина A_1 , елементи якої задовольняють умову:

$$A_1 = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}. \quad (1.10)$$

Зрозуміло, що якщо довільна нечітка множина є субнормальною, то ядро такої нечіткої множини буде пустим.

Границями нечітких множин є такі елементи універсуму, для яких значення функції належності відмінні від 0 та 1. Іншими словами, границі нечіткої множини $A = \{x, \mu_A(x)\}$ включають ті й лише ті елементи універсуму $x \in X$, для яких виконується умова: $0 < \mu_{A(x)} < 1$.

Елементи нечіткої множини $x \in A$, для яких виконується умова $\mu_{A(x)} = 0.5$, називаються точками переходу цієї нечіткої множини A .

Чітка множина A^* , найближча до нечіткої множини A , визначається наступною формулою:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq 0.5, \\ 1, & \text{якщо } \mu_A(x) > 0.5. \end{cases} \quad (1.11)$$

Нечітку множину $A = \{x, \mu_{A(x)}\}$ з універсумом X називають опуклою, якщо для кожної пари точок $x_1 \in X, x_2 \in X$, її функція належності задовольняє нерівність

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Розглянемо два основних способи, якими формально можуть бути задані довільні нечіткі множини [4].

1. Список з перерахуванням усіх елементів та відповідних їм значень функції належності, що утворюють нечітку множину, яку ми розглядаємо. При цьому елементи з нульовими значеннями функції належності в цьому списку просто не вказуються. Цей спосіб використовується для задання нечітких множин зі скінченним дискретним носієм та невеликим числом елементів. Як уже зазначалося, таку нечітку множину записують у вигляді:

$$A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \},$$

де n – число елементів нечіткої множини A .

2. Аналітичний вираз для опису відповідної функції належності. Цей спосіб може використовуватися для задання довільних нечітких множин як із скінченним, так і з нескінченим носієм. У цьому випадку нечітку множину зручно записувати у вигляді $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$, де $\mu_A(x)$ – деяка функція, що задана аналітично у формі математичного виразу $f(x)$, або графічно у вигляді деякої кривої. При цьому вигляд функції $f(x)$ цілком визначається тим, яку саме нечітку множину ця функція повинна описати.

1.2 Основні типи функцій належності

Наведене вище формальне визначення нечіткої множини не накладає ніяких обмежень на вибір вигляду функції для опису її функції належності. Проте, практична робота з нечіткими множинами робить доцільним виокремити деякі конкретні види функцій, аналітичне представлення яких забезпечує простоту та зручність виконання операцій над нечіткими множинами.

Кусково-лінійні функції належності. Одним з найпростіших типів функцій належності є функції, які, як випливає з їх назви, складаються з відрізків прямих ліній. Типовими прикладами таких функцій є «трикутна» і «трапецієподібна» функції належності.

Трикутна функція належності у загальному випадку може бути аналітично задана наступним виразом [4]:

$$f_{\Delta}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x < b, \\ \frac{c - x}{c - b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & x > c, \end{cases} \quad (1.12)$$

де a, b, c – деякі числові параметри, що приймають довільні значення та упорядковані відношенням: $a \leq b \leq c$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.1, де значення параметрів дорівнюють: $a = 3, b = 5, c = 8$.

Трикутна функція належності (1.12) породжує нормальну випуклу унімодальну нечітку множину з носієм – інтервалом $[a, c]$, границями $[a, c] \setminus \{b\}$, ядром $\{b\}$ та модою b .

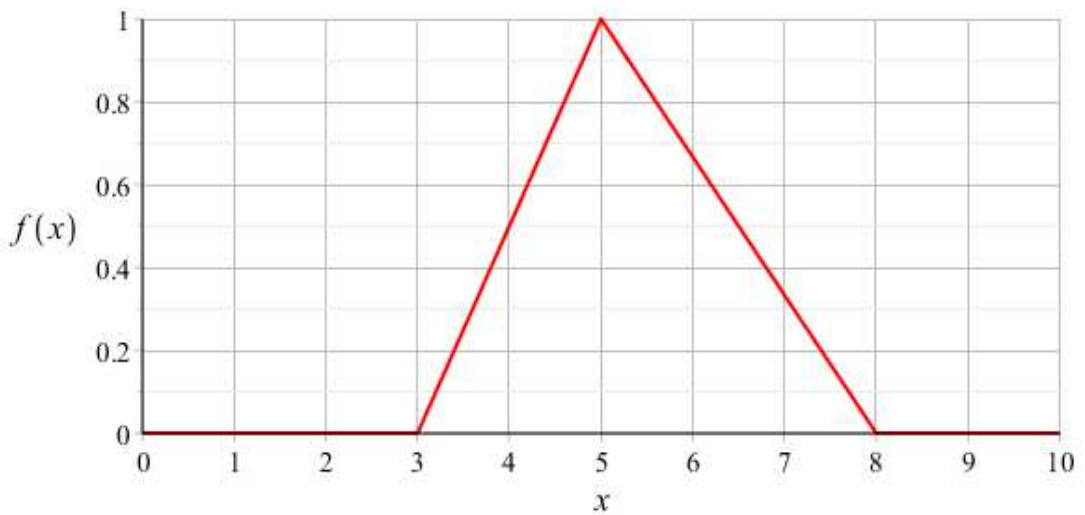


Рис. 1.1. Графік функції належності трикутної

Трапецієподібна функція належності у загальному випадку може бути аналітично задана наступним виразом [4]:

$$f_{\Delta}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & b \leq x < c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & x > d, \end{cases} \quad (1.13)$$

де a, b, c, d – деякі числові параметри, що приймають довільні значення та упорядковані відношенням: $a \leq b \leq c \leq d$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.2, де значення параметрів дорівнюють: $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 9$.

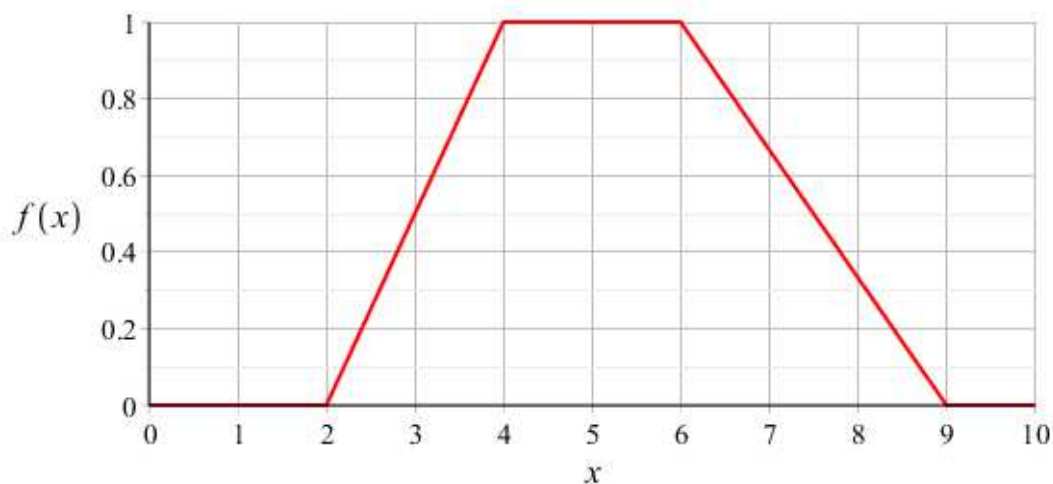


Рис. 1.2. Графік функції належності трапецієподібної

Трапецієподібна функція належності (1.13) породжує нормальну випуклу нечітку множину з носієм – інтервалом $[a, d]$, границями $[a, b) \cup (c, d]$ та ядром $[b, c]$.

Z-подібні та S-подібні функції належності. Ці функції належності також отримали свою назву за виглядом кривих, що представляють їх графіки.

Z-подібна функція належності може бути задана аналітично, наприклад, наступним виразом [4]:

$$f_{Z_1}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right), & a < x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (1.14)$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні значення та упорядковані відношенням: $a < b$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.3, де значення параметрів дорівнюють: $a = 2, b = 4$.

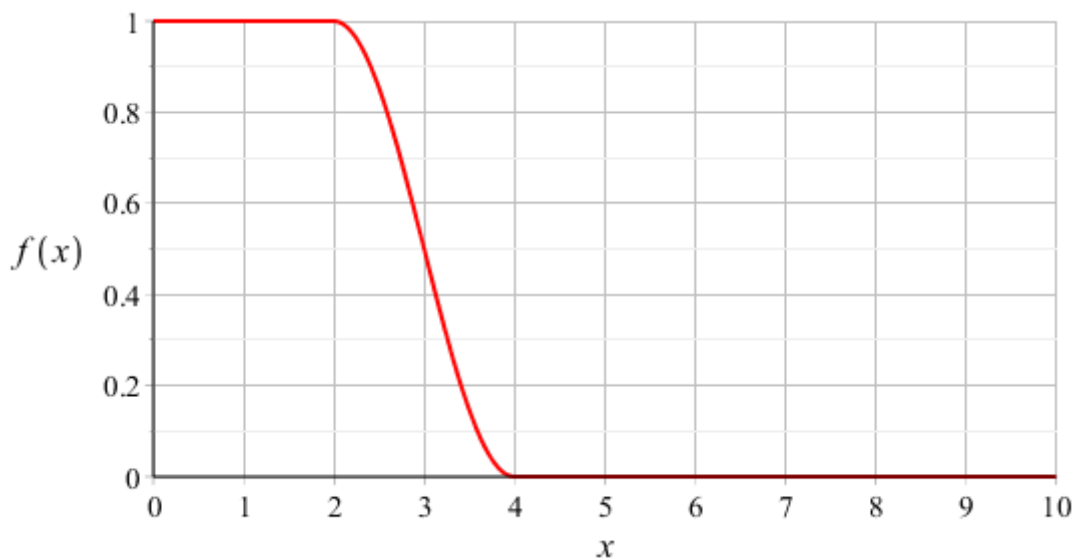


Рис. 1.3. Графік Z-подібної функції належності f_{Z_1}

Z-подібна функція може бути також задана іншим виразом:

$$f_{Z_2}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ 1 - 2^{p-1} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^p, & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 2^{p-1} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^p, & \frac{a+b}{2} < x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (1.15)$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні значення та упорядковані відношенням: $a < b$, а p – ціле додатне число. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.4, де значення параметрів дорівнюють: $a = 2, b = 4, p = 3$.

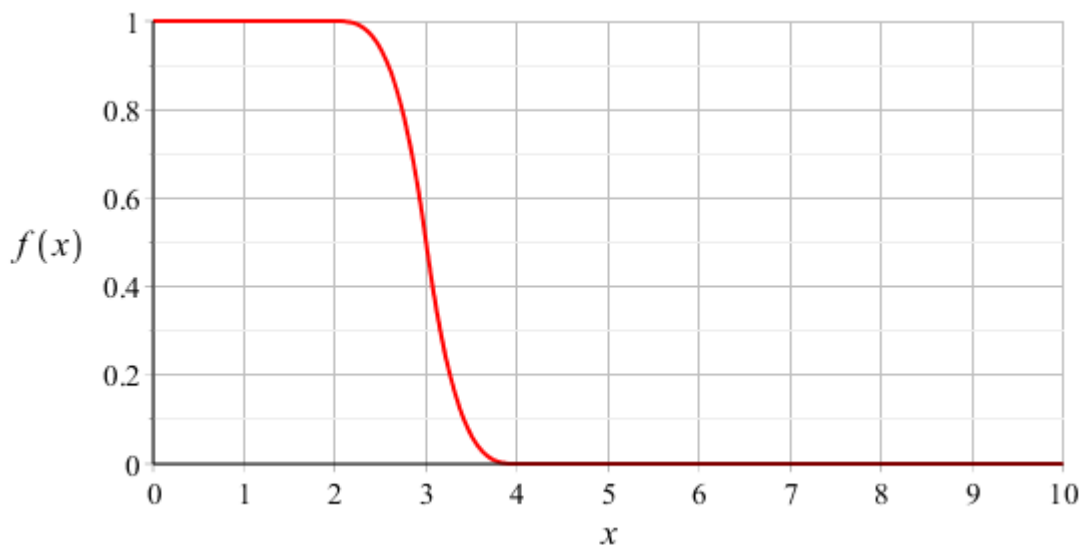


Рис. 1.4. Графік Z-подібної функції належності f_{Z_2}

Z-подібні функції належності (1.14), (1.15) породжують нормальні випуклі нечіткі множини з ядром $(-\infty, a]$ і носієм $(-\infty, b)$.

S-подібна функція належності може бути задана аналітично наступним виразом [4]:

$$f_{S_1}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{x-b}{b-a}\pi\right), & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (1.16)$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні значення та упорядковані відношенням: $a < b$. Графік цієї функції для деякої нечіткої

множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.5, де значення параметрів дорівнюють: $a = 2$, $b = 4$.

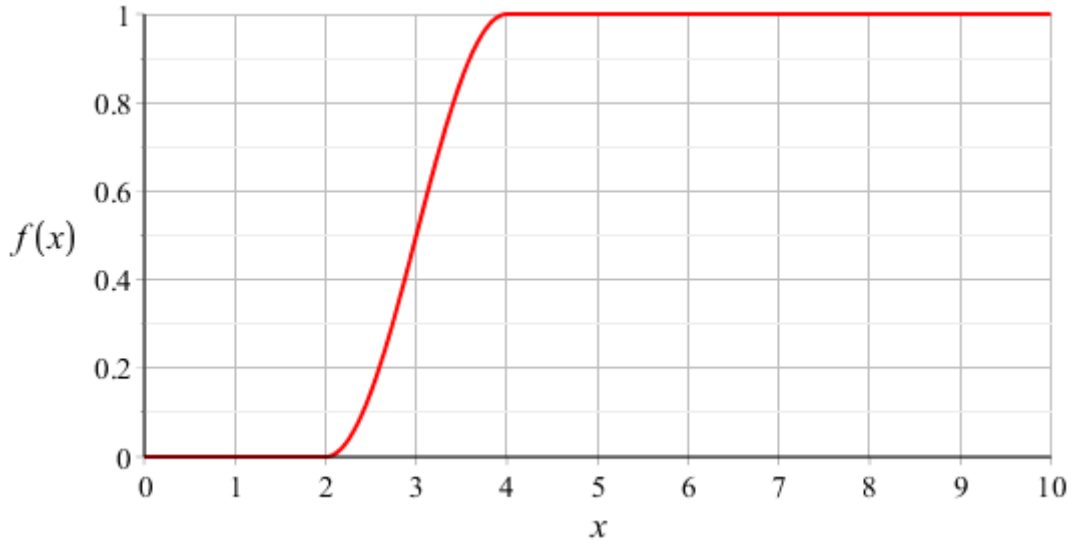


Рис. 1.5. Графік S -подібної функції належності f_{S_1}

S -подібна функція може бути також задана іншим виразом [4]:

$$f_{S_2}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 2^{p-1} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^p, & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1 - 2^{p-1} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^p, & \frac{a+b}{2} < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (1.17)$$

де a , b – деякі числові параметри, що приймають довільні значення та упорядковані відношенням: $a < b$, а p – ціле додатне число. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.6, де значення параметрів дорівнюють: $a = 2$, $b = 4$, $p = 3$.

S -подібні функції належності (1.16), (1.17) породжують нормальні випуклі нечіткі множини з ядром $[b, \infty)$ і носієм (a, ∞) . Помітимо, що якщо у відношеннях (1.15) та (1.17) параметр $p = 1$, то функції, що описуються цими відношеннями, стають кусково-лінійними.

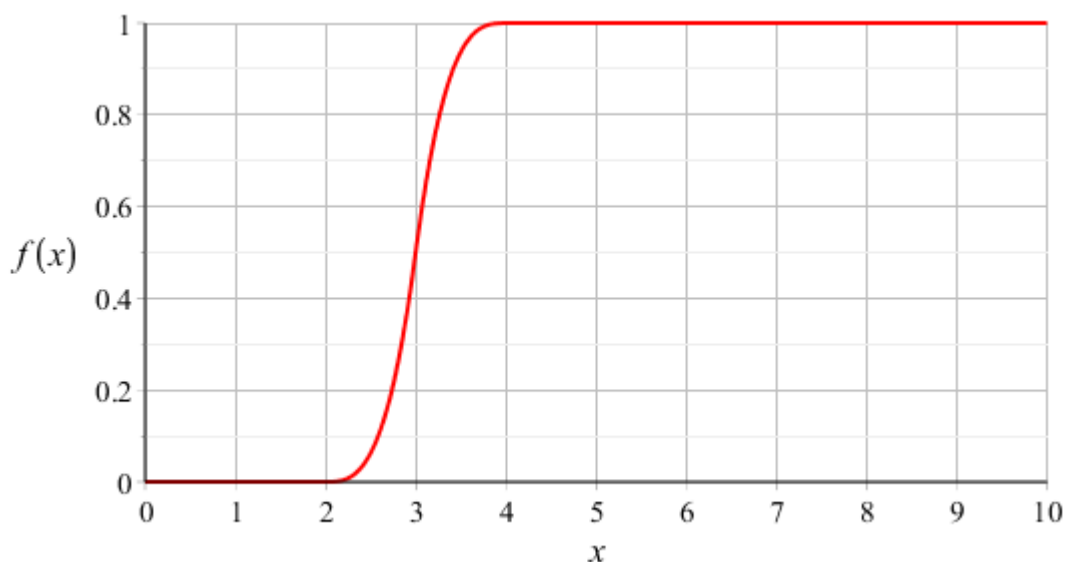


Рис. 1.6. Графік S -подібної функції належності f_{S_2}

Більш гнучке задання S -подібних та Z -подібних функцій належності може бути отримано з використанням функцій вигляду

$$f_{S-Z}(x; b, c) = 0.5 + 0.5th(bx + c), \quad (1.18)$$

де b , c – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення. Ця функція при деяких конкретних значеннях b , c описує так звану сигмоїдальну функцію. Графіки цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображені на рис. 1.7, 1.8. При цьому S -подібній функції належності відповідають значення параметрів $b = 2$, $c = -8$ (рис. 1.7), а Z -подібній функції належності відповідають значення параметрів $b = -2$, $c = 8$ (рис. 1.8).

Функції належності (1.18) породжують нормальні випуклі нечіткі множини з носієм і границею R та точкою переходу $x = -\frac{c}{b}$.

Частинними випадками S - та Z -подібних кривих є лінійна S -подібна функція та лінійна Z -подібна функція.

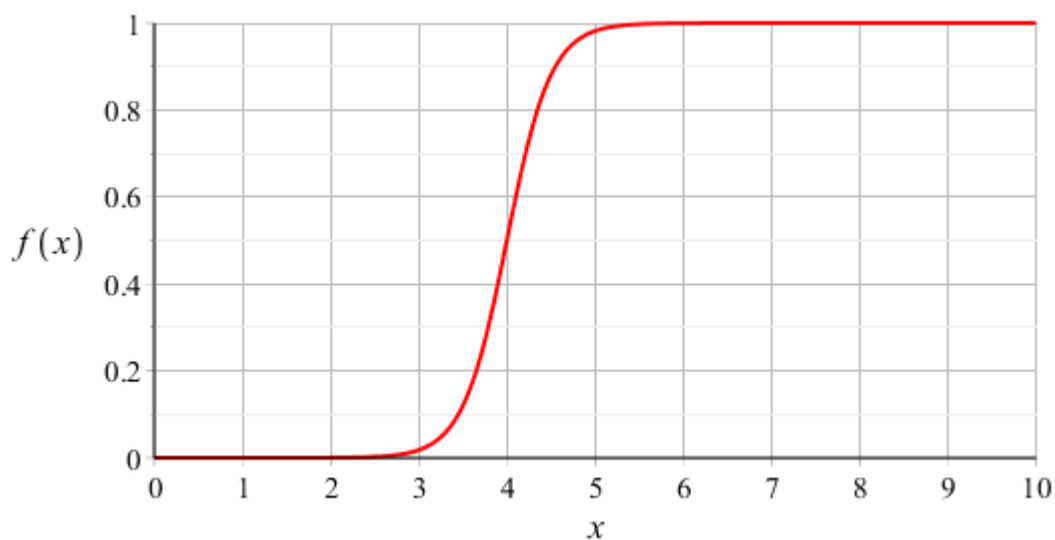


Рис. 1.7. Графік S-подібної функції належності f_{S-Z}

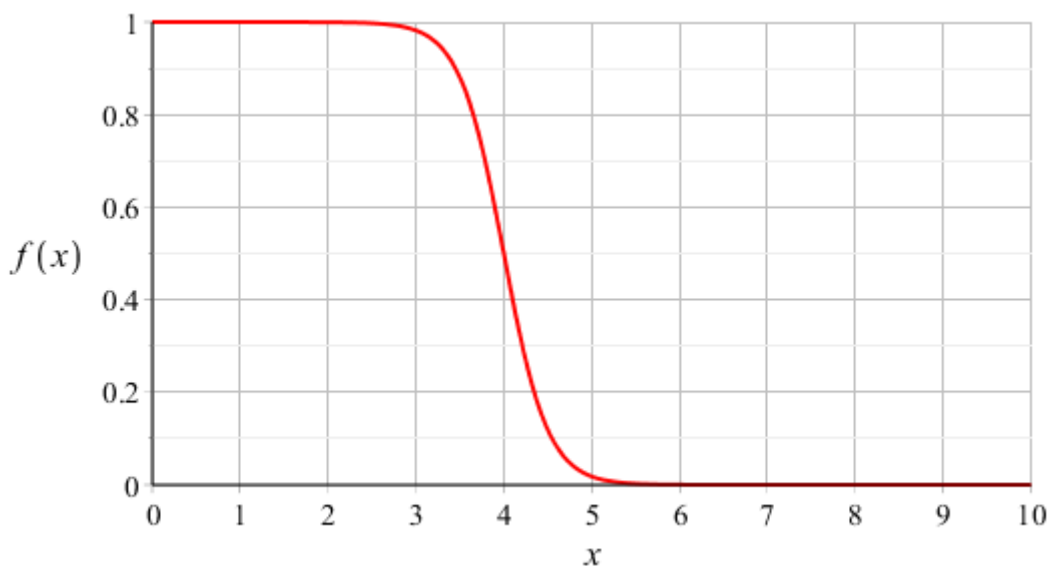


Рис. 1.8. Графік Z-подібної функції належності f_{S-Z}

Π -подібні функції належності. До такого типу функцій належності можна віднести цілий клас так званих дзвоноподібних кривих.

Один із можливих способів задання Π -подібної функції належності полягає у використанні композиції S-подібної та Z-подібної функцій відповідно до співвідношення [4]:

$$f_{\Pi_1}(x; a, b, c, d) = f_S(x; a, b) \cdot f_Z(x; c, d), \quad (1.19)$$

де a, b, c, d – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення та упорядковані відношенням: $a \leq b < c \leq d$. Графік цієї функції для деякої

нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.9, де значення параметрів дорівнюють: $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 8$.

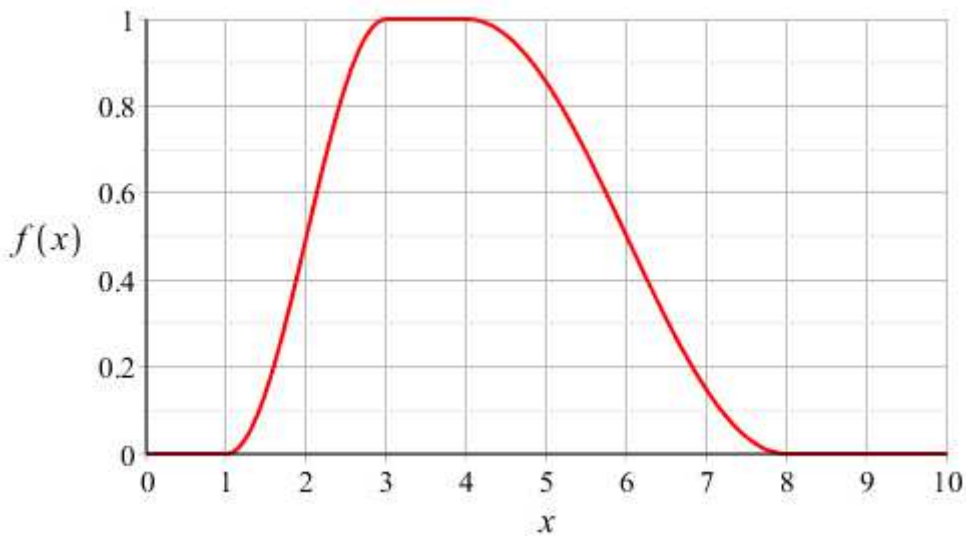


Рис. 1.9. Графік Π -подібної функції належності f_{Π_1}

Цей тип функцій належності породжує нормальні випуклі нечіткі множини з носієм (a, d) та ядром $[b, c]$.

Інший приклад композиційного формування Π -подібних функцій – добуток двох сигмоїдальних функцій. Така функція у загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом [4]:

$$f_{\Pi_2}(x; b_1, c_1, b_2, c_2) = f_{S-Z}(x; b_1, c_1) \cdot f_{S-Z}(x; b_2, c_2), \quad (1.20)$$

де b_1, c_1, b_2, c_2 – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, причому $b_1 > 0$, $c_1 < 0$, $b_2 < 0$, $c_2 > 0$, та впорядковані відношенням: $b_1 c_2 > b_2 c_1$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 15]$ зображений на рис. 1.10, де значення параметрів дорівнюють: $b_1 = 0.5$, $c_1 = -3$, $b_2 = -2$, $c_2 = 25$.

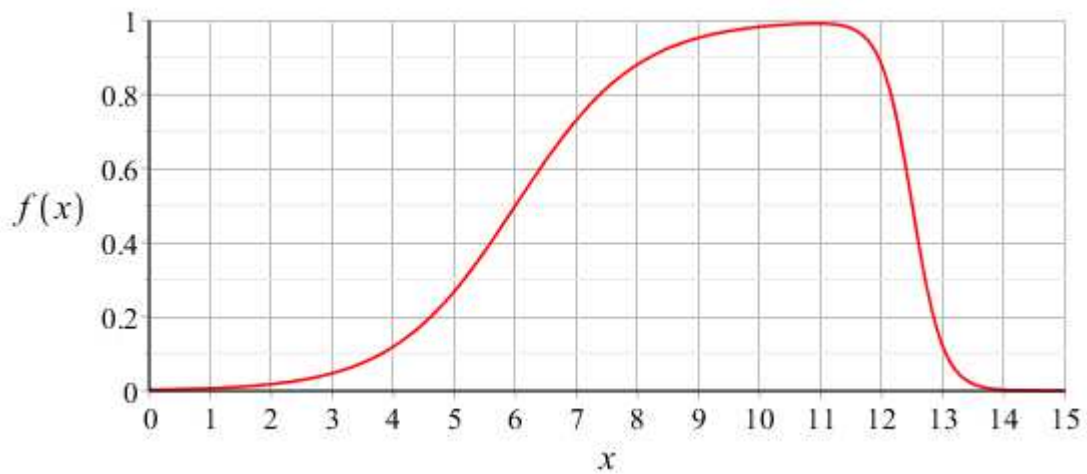


Рис. 1.10. Графік Π -подібної функції належності f_{Π_2}

Типова некомпозиційна дзвоноподібна функція задається аналітично наступним виразом:

$$f_{\Pi_3}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}, \quad (1.21)$$

де a, b, c – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, причому $b > 0$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.11, де значення параметрів дорівнюють: $a = 1, b = 3, c = 5$.

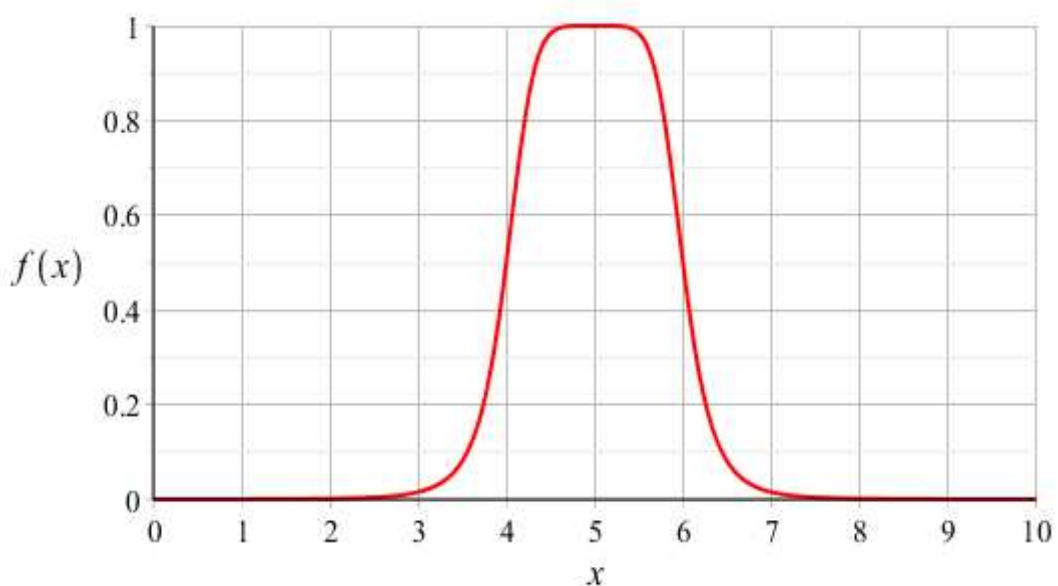


Рис. 1.11. Графік Π -подібної функції належності f_{Π_3}

Наведемо ще один, найбільш простий та зручний, спосіб формування дзвоноподібної функції належності з використанням гауссівської кривої [4]:

$$f_{\Pi_4}(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.22)$$

де σ і c – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, причому $\sigma > 0$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.12, де значення параметрів дорівнюють: $\sigma = 1, c = 5$.

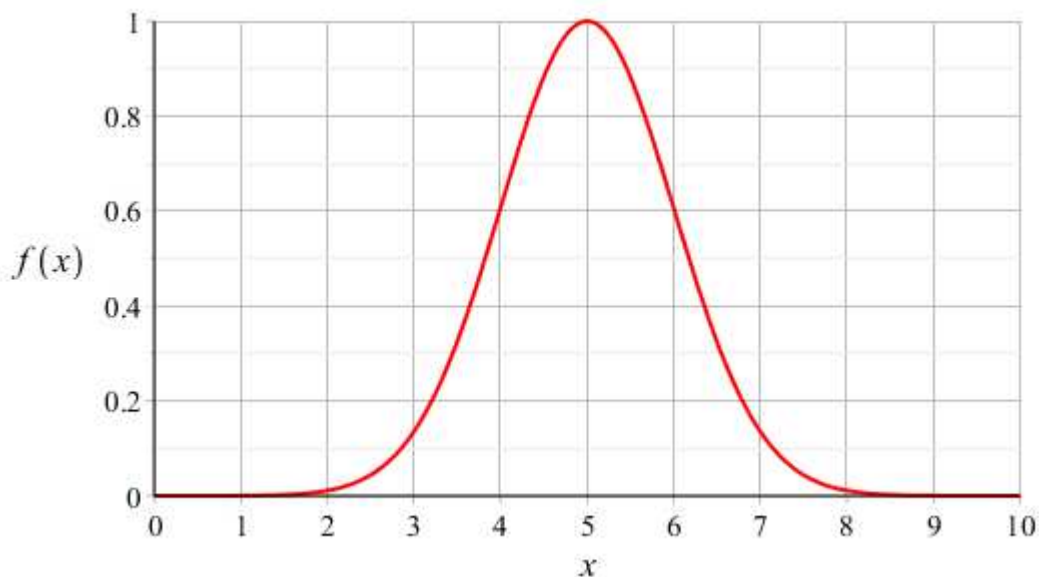


Рис. 1.12. Графік Π -подібної функції належності f_{Π_4}

Функції належності (1.21), (1.22) породжують нормальні випуклі нечіткі множини.

Нарешті, асиметрична дзвоноподібна функція належності може бути отримана згідно з виразом

$$f_{\Pi_5}(x) = \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} (1 + \theta_3 \text{sign}(x - \theta_1)) \right\}, \quad (1.23)$$

$$\text{де } \text{sign}(u) = f(x) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0, \end{cases}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – дійсні числа, причому $\theta_2 > 0, \theta_3 \leq 1$. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A та універсуму $X = [0, 10]$ зображений на рис. 1.13, де значення параметрів дорівнюють: $\theta_1 = 5, \theta_2 = 1, \theta_3 = -0.4$.

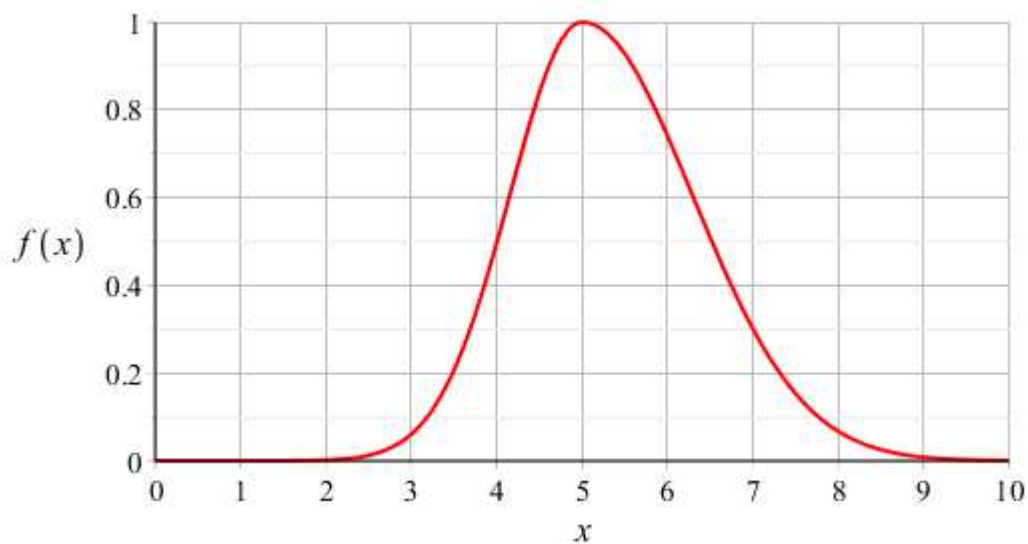


Рис. 1.13. Графік Π -подібної функції належності f_{Π_5}

2 Нечіткі оптимізаційні задачі

Невід’ємним атрибутом будь-якої практичної діяльності є необхідність прийняття рішень, пов’язаних з найкращим вибором. Ситуацію, в якій потрібно прийняти рішення, називають проблемною, якщо число можливих альтернатив перевищує одиницю. При цьому задача вибору найкращого розв’язку із багатьох допустимих може бути описана у термінах відносин переваг одних розв’язків над іншими. Найпростіший спосіб задання відносин переваг – бінарні відношення, в яких порівнюються один з одним пари альтернатив. Тоді задача прийняття рішення зводиться до вибору такої допустимої альтернативи, яка у парі з будь-якою іншою буде краща (або, принаймні, не гірша).

Бінарне відношення переваги на множині альтернатив може бути задано двома способами: у вигляді підмножини декартового добутку множини альтернатив на себе; у формі функції корисності (або цільової функції).

Ця функція корисності зазвичай задається відображенням множини альтернатив на числову вісь, тобто кожній альтернативі ставиться у відповідність деяке число тим більше, чим кращою є альтернатива. Задачі прийняття рішень, в яких відношення переваги описано у формі функції корисності, називають задачами математичного програмування.

Задача, що у своїй постановці містить неточні, невизначені елементи, опис яких використовує теорію нечітких множин, є задачею нечіткого математичного програмування. Нечіткість у постановці таких задач може бути як в описі множини альтернатив, так і в заданні функції корисності. Згідно з цим можна виокремити різні формулювання задач нечіткого математичного програмування. Розглянемо деякі з них.

2.1 Задача досягнення нечітко поставленої цілі

Однією з перших та найпростіших задач нечіткого математичного програмування є задача досягнення нечітко поставленої цілі, розв'язок якої запропоновано Р. Беллманом та Л. Заде. Цей розв'язок базується на припущенні, що ціль прийняття розв'язку та множина альтернатив розглядаються як рівноправні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив. Технологія отримання деякого розв'язку полягає у наступному [6].

Нехай X – універсальна множина альтернатив, що містить всі можливі вибори особи, яка приймає рішення (ОПР). Нехай визначені нечітка ціль X та нечітке обмеження, яке виокремлює із всієї множини X підмножину допустимих альтернатив. Нечітка ціль та нечітке обмеження описуються функціями належності $\mu_G(x)$ і $\mu_C(x)$.

Нехай деяка альтернатива x забезпечує досягнення цілі зі степенем $\mu_G(x)$ та задовольняє обмеженню зі степенем $\mu_C(x)$. Тоді степінь належності цієї альтернативи шуканому розв'язку задачі дорівнює мінімальній з цих величин. Таким чином, нечіткий розв'язок задачі досягнення нечіткої цілі визначається перетином нечітких множин цілі та обмеження, тобто функція належності розв'язку $\mu_D(x)$ має вигляд

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}. \quad (2.1)$$

Якщо в задачі сформульовані декілька цілей і обмежень, то нечіткий розв'язок описується функцією належності

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_n}(x); \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_m}(x)\}. \quad (2.2)$$

При цьому, якщо цілі та обмеження відрізняються за важливістю та задані відповідні вагові коефіцієнти відносної важливості цілей $\lambda_j, j = \overline{1, n}$, та обмежень $v_i, i = \overline{1, m}$, то функція належності розв'язку визначається виразом

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1\mu_{G_1}(x), \dots, \lambda_n\mu_{G_n}(x); v_1\mu_{C_1}(x), \dots, v_m\mu_{C_m}(x)\}. \quad (2.3)$$

Нечіткість розв'язку даної задачі є наслідком нечіткості цілі та обмеження. При такому представленні розв'язку залишається невизначеність щодо ставлення до вибору найкращої альтернативи. Найбільш природний спосіб розв'язку цієї невизначеності полягає у виборі альтернативи x^* , що має максимальний степінь належності нечіткому розв'язку, тобто

$$x^* = \arg \max \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}. \quad (2.4)$$

Такий підхід до розв'язку задачі досягнення визначеної цілі базується на можливості симетричного описання цілі та обмежень у вигляді нечітких підмножин однієї універсальної множини альтернатив. Проте цей метод може використовуватися далеко не для всіх задач нечіткого математичного програмування.

2.2 Задача максимізації нечіткої цільової функції на заданій нечіткій множині допустимих альтернатив

Нехай X – універсальна множина альтернатив і задані функція $r = \varphi(x)$, $x \in X$, а також відповідне цій функції нечітке відображення $\varphi_\varphi: X \times R^1 \rightarrow [0, 1]$, де R^1 – числова вісь. При цьому функція $\varphi_\varphi(x_0, r)$ грає роль цільової та для кожного фіксованого $x_0 \in X$ задає підмножину, яка представляє нечіткий опис результату вибору альтернативи x_0 , тобто $\varphi_\varphi(x_0, r)$ – функція належності нечіткої множини можливих значень $r = \varphi(x)$ для $x = x_0$. Нехай, крім того, задана нечітка множина C допустимих альтернатив з функцією належності $\varphi_C(x)$.

Таким чином, оскільки різним альтернативам відповідають різні значення функції належності, то в цій задачі максимізації нечітко заданої цільової функції обрані альтернативи необхідно порівнювати між собою по відповідним їм нечітким значенням функції цілі. У зв'язку з цим виникає нетривіальна проблема побудови відношення переваги одних нечітких множин над іншими. Ця проблема розв'язується наступним чином [4].

Нехай на декартовому добутку універсальних множин X та Y задано нечітке відношення переваги R з функцією належності $\varphi_R(x, y)$. Ця функція задає ступінь впевненості в тому, що елемент $x \in X$ кращий за елемент $y \in Y$. З іншої сторони, це нечітке відношення переваги можна розглядати як нечітке відображення елементів $x \in X$ в елементи $y \in Y$, які пов'язані з x відношенням R , тобто $(x, y) \in R$.

Нехай тепер $A(x)$ – нечітка підмножина X . Тоді нечіткий образ $B \in Y$ нечіткої підмножини $A(x)$ при відношенні R описується функцією належності

$$\eta(A(x), y) = \eta_B(A(x), y) = \sup_{x \in A} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}, \quad (2.5)$$

тобто функція $\eta(A(x), y) = \eta_B(A(x), y)$ визначає ступінь переваги нечіткої підмножини $A(x)$ перед y .

Причому відповідно до (2.5) для фіксованої підмножини $A^0(x)$ функція $\eta_B(A^0(x), y)$ описує нечітку множину B^0 елементів Y , пов'язаних з $A^0(x)$ відношенням R , тобто таких, що для $x \in A^0(x)$, $y \in B^0$ має місце $(x, y) \in R$. Таким чином, функція $\eta_B(A^0(x), y)$ встановлює степінь, з якою нечітка множина $A^0(x)$ краща за елемент y .

Також нескладно отримати формулу для оцінки степеню переваги конкретного елементу перед нечіткою множиною. Нехай $A(x)$ – нечітка підмножина множини X , y – елемент множини Y , R – нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R(x, y)$. Причому, оскільки $\mu_R(x, y)$ можна розглядати як відображення елементів $x \in X$ в елементи $y \in Y$, то $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ – є обернене відображення елементів $y \in Y$ в елементи $x \in X$. Тоді для фіксованого y функція належності

$$\eta(y, A(x)) = \sup_{x \in A} \min\{\mu_A(x), \mu_R(y, x)\} \quad (2.6)$$

визначає степінь переваги y перед $A(x)$.

2.3 Задача математичного програмування, в якій параметри цільової функції задані нечітко

Розглянемо більш складну задачу математичного програмування, в якій параметри цільової функції задані нечітко [4].

Нехай задана універсальна множина альтернатив X і підмножина допустимих альтернатив, яка описується обмеженнями – нерівностями вигляду

$$g_j(x, b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{pj}) \leq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

Ефективність кожної з можливих альтернатив оцінюється значенням функції цілі

$$f(x, a_1, a_2, \dots, a_q), \quad (2.8)$$

у якій $a_i, i = \overline{1, q}$ – числові параметри, значення яких також описані нечітко своїми функціями належності $k_i(a_i), i = \overline{1, m}$. Оскільки значення цільової функції задані на числовій вісі, степінь переваги одних альтернатив над іншими оцінюється перевагою великих чисел над меншими.

Нехай $a_1^{(0)}, i = \overline{1, q}$ – конкретні числові значення нечітких параметрів функції, степені належності яких відповідним нечітким множинам визначаються набором $k_i(a_i^{(0)}), i = \overline{1, q}$. Визначимо тепер $\mu^{(0)}$ – мінімальне з цих чисел, тобто

$$\mu^{(0)} = \min_{i=\overline{1, q}} k_i(a_i^{(0)}). \quad (2.9)$$

Нехай $\hat{x} \in X$ – деяка конкретна альтернатива, і при цьому число $r^{(0)} = f(\hat{x}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_q^{(0)})$ відповідає обраній альтернативі $\hat{x}$ та значенням параметрів $a_1^{(0)}, i = \overline{1, q}$, значення функції цілі (2.8). Значення $r^{(0)}$ належить нечіткій оцінці альтернативи $\hat{x}$ зі степенем, не меншим $\mu^{(0)}$. Зрозуміло, що степінь належності $\mu^{(0)}$ значення $r^{(0)}$ функції нечіткій множині значень

функції (2.8), що відповідають альтернативі $\hat{x}$ та дорівнюють $r^{(0)}$, може бути підвищений, якщо знайдеться інший набір $\{a_1^{(1)}\}$, для якого

$$f(\hat{x}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_q^{(1)}) = r^{(0)} \quad (2.10)$$

та одночасно

$$\mu^{(1)} = \min_{i=1,q} k_i(a_i^{(1)}) > \mu^{(0)}. \quad (2.11)$$

Такі міркування можна потворити для пошуку степені належності нечіткого значення $r = f(x, a_1, a_2, \dots, a_q)$ функції цілі, що є нечіткою оцінкою довільної допустимої альтернативи x . Для обраної пари (x, r) , $r = f(x, a_1, a_2, \dots, a_q)$, введемо множину $Q(a; x, r)$ всіх наборів $a = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ таких, що $f(x, a) = r$. Тоді степінь належності нечіткого значення r , що є нечіткою оцінкою альтернативи x , має вигляд

$$\varphi(x, r) = \sup_{a \in Q(a; x, r)} k(a), \quad (2.12)$$

де

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_q), \quad k(a) = \min_{i=1,q} k_i(a_i), \quad (2.13)$$

$$Q(a; x, r) = \{a: f(x, a_1, a_2, \dots, a_q) = r\}. \quad (2.14)$$

Описана технологія розв'язку нечіткої задачі математичного програмування може бути використана у тих випадках, коли множина альтернатив скінченна.

3. Нечіткі постановки задач на основі моделі Леонтьєва-Форда

3.1 Статична модель Леонтьєва-Форда

Перша модель, що охоплює взаємозв'язки економіки та навколишнього середовища, була запропонована В. Леонтьєвим та Д. Фордом. Вона узагальнює схему класичного міжгалузевого балансу та містить дві групи галузей: основне виробництво (галузі матеріального виробництва) та допоміжне виробництво (галузі зі знищення забруднень). Основні умови моделі виражаються системою рівнянь [8]:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

У системі (3.1) $x_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів виробництва продукції;

$x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів знищених забруднюючих речовин;

$y_1 = (y_1^1, y_2^1, \dots, y_m^1)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів кінцевої продукції (невиробниче споживання);

$y_2 = (y_1^2, y_2^2, \dots, y_m^2)^T$ – вектор-стовпчик об'ємів незнищених забруднень;

$A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції i на виробництво одиниці продукції j ;

$A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на знищення одиниці забруднювачів g ;

$A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця випуску забруднювачів k на одиницю виготовленої продукції j ;

$A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m$ – квадратна матриця випуску забруднювачів k на одиницю знищення забруднювачів g .

У системі (3.1) неявно припускається, що коефіцієнти $a_{ij}^{11} \geq 0$, $a_{ig}^{12} \geq 0$, $a_{kj}^{21} \geq 0$, $a_{kg}^{22} \geq 0$, тобто розповсюджуються на всі види виробничої діяльності (матеріальне виробництво та знищення забруднювачів) гіпотези основної моделі міжгалузевого балансу: кількість технологічних способів дорівнює кількості видів продукції та в кожному технологічному способі виробляється лише один вид продукції. Надалі будемо вважати матриці A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} невід'ємними: $A_{11} \geq 0$, $A_{12} \geq 0$, $A_{21} \geq 0$, $A_{22} \geq 0$.

Економічний зміст моделі Леонтьєва-Форда вимагає, щоб всі її змінні були невід'ємними, тобто, $x_i^1 \geq 0$, $x_k^2 \geq 0$, $y_i^1 \geq 0$, $y_k^2 \geq 0$. Це тісно пов'язано з питанням продуктивності балансових моделей, що дозволяє вести мову про реальне функціонування виробничої системи, здатної забезпечити проміжне споживання та додатні обсяги кінцевого продукту [9].

3.2 Оптимізаційна нечітка задача на основі статичної моделі Леонтьєва-Форда, в якій параметри цільової функції задані нечітко

Сформулюємо нечітку задачу лінійного програмування: знайти набір (x_1, x_2) , що максимізує лінійну цільову функцію

$$c_1 y_1 - c_2 y_2 \rightarrow \max \quad (3.2)$$

та задовольняє обмеження

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + b_2 x_2 &\leq b, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де c_1 – економічна оцінка кінцевого продукту, c_2 – економічна оцінка збитків від викидів забруднювачів у довкілля;

b_1, b_2 – технологічні коефіцієнти витрат наявного ресурсу, b – величина наявного загального ресурсу.

Запишемо систему (3.1) у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - y_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Виразимо y_1, y_2 із системи обмежень (3.4) через x_1, x_2 :

$$\begin{cases} y_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (1 - a_{22})x_2. \end{cases}$$

Підставимо ці вирази у цільову функцію (3.2) та обмеження (3.3):

$$c_1((1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2) + c_2(-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2) \rightarrow \max, \quad (3.5)$$

$$(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 \geq 0, \quad (3.6)$$

$$a_{21}x_1 - (1 - a_{22})x_2 \geq 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 \leq b,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Нехай блочна матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2, b_2 = 1, b = 8$.

Перевіримо виконання умови продуктивності для еколого-економічної системи у випадку обраних числових даних.

Блочна матриця $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ є продуктивною за достатньою умовою продуктивності технологічних матриць балансових моделей леонт'євського типу [9], тобто

$$(E - A)^{-1} \geq 0,$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.31 & 0.77 \\ 0.51 & 1.28 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Підставимо значення A, b_1, b_2, b у цільову функцію (3.5) та обмеження (3.6):

$$c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) \rightarrow \max, \quad (3.7)$$

$$0.5x_1 - 0.3x_2 \geq 0,$$

$$0.2x_1 - 0.9x_2 \geq 0,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8, \quad (3.8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

На рис. 3.1 зображено допустиму область задачі (3.7), (3.8). Тут позначені крайні точки трикутника обмежень (O, A, B) , що визначають розв'язки – опорні плани задачі. Нехай точці A відповідає перша допустима альтернатива розв'язку $X^{(1)} = (x_{11}, x_{12})$, а точці B – друга альтернатива $X^{(2)} = (x_{21}, x_{22})$.

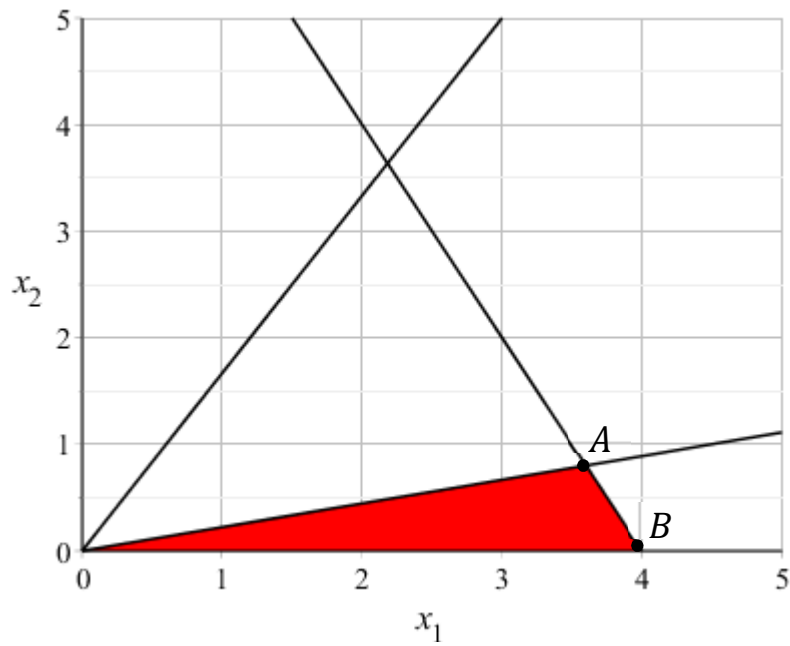


Рис. 3.1. Область допустимих розв'язків

З рис. 3.1 випливає, що $X^{(2)} = (x_{21}, x_{22}) = (4, 0)$. Координати точки $X^{(1)}$ знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 0.2x_{11} - 0.9x_{12} = 0, \\ 2x_{11} + x_{12} = 8. \end{cases}$$

Звідси $x_{11} = 3.6$, $x_{12} = 0.8$.

Отже, маємо дві альтернативи розв'язку: $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$, $X^{(2)} = (4, 0)$.

3.2.1 Нечіткі параметри цільової функції з трикутними функціями належності

Розглянемо задачу (3.7), (3.8), для якої параметри c_1, c_2 – нечіткі числа з функціями належності трикутної форми, відповідно рівними

$$k_1(c_1) = \begin{cases} 0, & c_1 < 3, \\ \frac{c_1 - 3}{5}, & 3 \leq c_1 \leq 8, \\ \frac{13 - c_1}{5}, & 8 < c_1 \leq 13, \\ 0, & c_1 > 13, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$k_2(c_2) = \begin{cases} 0, & c_2 < 0, \\ \frac{c_2}{3}, & 0 \leq c_2 \leq 3, \\ \frac{6 - c_2}{3}, & 3 < c_2 \leq 6, \\ 0, & c_2 > 6. \end{cases} \quad (3.10)$$

Задаємо деякий конкретний допустимий набір значень параметрів цільової функції $c_1^{(1)} = 7$, $c_2^{(1)} = 5$. Степені належності обраних значень параметрів відповідним нечітким множинам дорівнюють $k_1(c_1^{(1)}) = k_1(7) = 0.8$, $k_2(c_2^{(1)}) = k_2(5) \approx 0.33$.

Виберемо альтернативу $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ та обчислимо:

$$r^{(1)} = f(x_{11}, x_{12}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}) = c_1^{(1)}(0.5x_{11} - 0.3x_{12}) + c_2^{(1)}(-0.2x_{11} + 0.9x_{12}),$$

$$r^{(1)} = 7(0.5 \cdot 3.6 - 0.3 \cdot 0.8) + 5(-0.2 \cdot 3.6 + 0.9 \cdot 0.8) = 10.92.$$

Пряма $2.5x_1 + 2.4x_2 = 10.92$ доторкається до трикутника обмежень в його крайній точці $A = (3.6, 0.8)$. Тому альтернатива $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ може розглядатися як розв'язок задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(X) = 2.5x_1 + 2.4x_2$ та обмеженнями (3.8).

При цьому значення $r^{(1)} = 10.92$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ зі степенем, що дорівнює

$$\varphi^{(1)} = \min\{k_1(7), k_2(5)\} = \min\{0.8, 0.33\} = 0.33.$$

З метою пошуку іншого можливого набору $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)})$, для якого

$$f(X^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 10.92 \quad (3.11)$$

та

$$\varphi^{(2)} = \min\{k_1(c_1^{(2)}), k_2(c_2^{(2)})\} > \varphi^{(1)} = 0.33,$$

розв'яжемо наступну чітку задачу математичного програмування:

знайти набір (c_1, c_2) , що максимізує

$$\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} \quad (3.12)$$

та задовольняє обмеження $c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) = 10.92$.

У цьому випадку параметр c_1 зафіксований, тому значення критерію (3.12) не може бути покращено.

Ці ж міркування повторимо для альтернативи $X^{(2)} = (x_{21}, x_{22}) = (4, 0)$. Знову виберемо $c_1^{(2)} = 7, c_2^{(2)} = 5$ та обчислимо

$$r^{(2)} = f(x_{21}, x_{22}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 7(0.5 \cdot 4 - 0.3 \cdot 0) + 5(-0.2 \cdot 4 + 0.9 \cdot 0) = 10.$$

Пряма $2.5x_1 + 2.4x_2 = 10$, яка проходить через крайню точку $B = (4, 0)$ трикутника обмежень, пересікає його. Тому альтернатива $X^{(2)}$ не є розв'язком задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(X) = 2.5x_1 + 2.4x_2$ та обмеженнями (3.8).

У зв'язку з цим оберемо іншу пару параметрів цільової функції, наприклад, $c_1^{(2)} = 3, c_2^{(2)} = 1.5$. Степені належності цих параметрів задачі

відповідним нечітким множинам дорівнюють $k_1(3) = 0.2$, $k_2(1.5) = 0.5$.

Причому для альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ маємо:

$$r^{(2)} = f(x_{21}, x_{22}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 4.8.$$

Пряма $1.2x_1 + 0.45x_2 = 4.8$ доторкається до трикутника обмежень у крайній точці $B = (4, 0)$. Тому альтернатива $X^{(2)} = (4, 0)$ може розглядатися як розв'язок задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(x) = 1.2x_1 + 0.45x_2$ та обмеженнями (3.8).

Значення $r^{(2)} = 4.8$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ зі степенем, що дорівнює $\varphi^{(2)} = \min\{k_1(3), k_2(1.5)\} = \min\{0.2, 0.5\} = 0.2$.

Для пошуку іншого набору (c_1, c_2) , для якого $f(X^{(2)}, c_1, c_2) = 4.8$ та одночасно $\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} > \varphi^{(2)} = 0.2$, розв'яжемо наступну чітку задачу математичного програмування:

знайти набір (c_1, c_2) , що максимізує

$$\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} \quad (3.13)$$

та задовольняє обмеження $c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) = 4.8$.

З останнього співвідношення маємо $c_1 = 2.4 + 0.4c_2$. Підставимо отриманий вираз для c_1 у (3.9):

$$k_1(c_2) = \begin{cases} 0, & 2.4 + 0.4c_2 < 3, \\ \frac{2.4 + 0.4c_2 - 3}{5}, & 3 \leq 2.4 + 0.4c_2 \leq 8, \\ \frac{13 - 2.4 - 0.4c_2}{5}, & 8 < 2.4 + 0.4c_2 \leq 13, \\ 0, & 2.4 + 0.4c_2 > 13. \end{cases}$$

Звідси маємо:

$$k_1(c_2) = \begin{cases} 0, & c_2 < 1.5, \\ \frac{0.4c_2 - 0.6}{5}, & 1.5 \leq c_2 \leq 14, \\ \frac{10.6 - 0.4c_2}{5}, & 14 < c_2 \leq 26.5, \\ 0, & c_2 > 26.5. \end{cases} \quad (3.14)$$

Тепер для пошуку набору (c_1, c_2) , який максимізує (3.13), відобразимо функції належності (3.14) та (3.10) (рис. 3.2).

Із рис. 3.2 очевидно, що максимальне значення функції (3.13) досягається у точці F , координати якої знайдемо з рівняння

$$\frac{6 - c_2}{3} = \frac{0.4c_2 - 0.6}{5}.$$

Звідси $c_2 \approx 5.13$, $c_1 = 2.4 + 0.4c_2 \approx 4.45$. При цьому значення $r^{(2)} = 4.8$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ зі ступенем

$$\varphi = \min\{k_1(4.45), k_2(5.13)\} = \min\{0.29, 0.29\} = 0.29 > \varphi^{(2)} = 0.2.$$

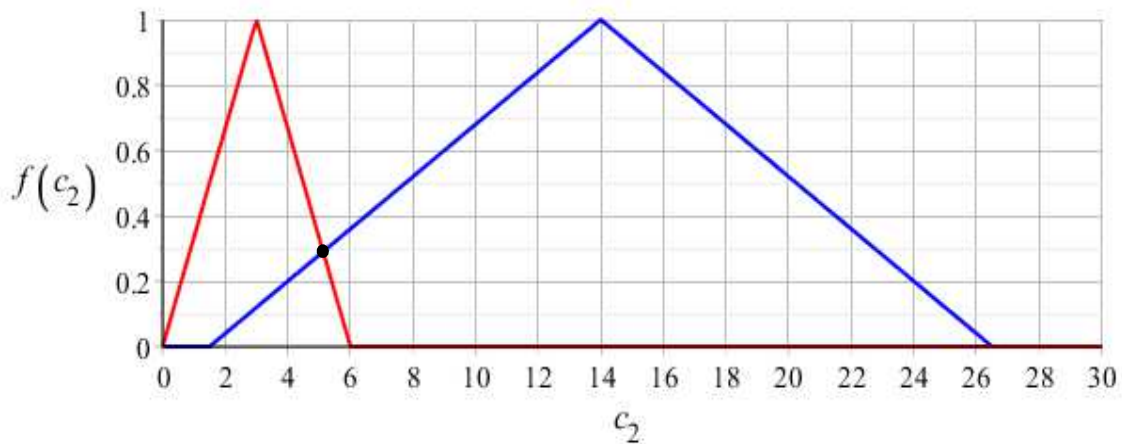


Рис. 3.2. Функції належності $k_1(c_2), k_2(c_2)$

Таким чином, у результаті розв'язку задачі для допустимих альтернатив $X^{(2)} = (3.6, 0.8)$, $X^{(2)} = (4, 0)$ отримані відповідні значення цільової функції $f(X^{(1)}) = f(3.6, 0.8) = 10.92$, $f(X^{(2)}) = (4, 0) = 4.8$, що належать нечітким оцінкам перерахованих вище альтернатив зі ступенями, які дорівнюють 0.33 та 0.29, відповідно.

3.2.2 Нечіткі параметри цільової функції з трапецієподібними функціями належності

Розглянемо задачу (3.7), (3.8), для якої параметри c_1, c_2 – нечіткі числа з трапецієподібними функціями належності, відповідно рівними

$$k_1(c_1) = \begin{cases} 0, & c_1 < 3, \\ \frac{c_1 - 3}{4}, & 3 \leq c_1 < 7, \\ 1, & 7 \leq c_1 < 9, \\ \frac{13 - c_1}{4}, & 9 \leq c_1 \leq 13, \\ 0, & c_1 > 13, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$k_2(c_2) = \begin{cases} 0, & c_2 < 0, \\ \frac{c_2}{3}, & 0 \leq c_2 < 3, \\ 1, & 3 \leq c_2 < 4, \\ \frac{6 - c_2}{2}, & 4 \leq c_2 \leq 6, \\ 0, & c_2 > 6. \end{cases} \quad (3.16)$$

Допустима область даної задачі не відрізняється від попередньої. Перша допустима альтернатива розв'язку – $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$, а друга альтернатива – $X^{(2)} = (4, 0)$.

Задаємо деякий конкретний допустимий набір значень параметрів цільової функції $c_1^{(1)} = 6$, $c_2^{(1)} = 4$. Степені належності обраних значень параметрів відповідним нечітким множинам дорівнюють $k_1(c_1^{(1)}) = k_1(6) = 0.75$, $k_2(c_2^{(1)}) = k_2(4) = 1$.

Виберемо альтернативу $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ та обчислимо:

$$r^{(1)} = f(x_{11}, x_{12}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}) = c_1^{(1)}(0.5x_{11} - 0.3x_{12}) + c_2^{(1)}(-0.2x_{11} + 0.9x_{12}),$$

$$r^{(1)} = 6(0.5 \cdot 3.6 - 0.3 \cdot 0.8) + 4(-0.2 \cdot 3.6 + 0.9 \cdot 0.8) = 9.36.$$

Пряма $2.2x_1 + 1.8x_2 = 9.36$ доторкається до трикутника обмежень у крайній точці $A = (3.6, 0.8)$. Тому альтернатива $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ може розглядатися як розв'язок задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(x) = 2.2x_1 + 1.8x_2$ та обмеженнями (3.8).

При цьому значення $r^{(1)} = 9.36$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ зі степенем, що дорівнює

$$\varphi^{(1)} = \min\{k_1(7), k_2(5)\} = \min\{0.75, 1\} = 0.75.$$

З метою пошуку іншого можливого набору $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)})$, для якого

$$f(X^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 9.36 \quad (3.17)$$

та

$$\varphi^{(2)} = \min\{k_1(c_1^{(2)}), k_2(c_2^{(2)})\} > \varphi^{(1)} = 0.75,$$

розв'яжемо наступну чітку задачу математичного програмування:

знайти набір (c_1, c_2) , що максимізує

$$\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} \quad (3.18)$$

та задовольняє обмеження $c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) = 9.36$.

У цьому випадку параметр c_1 зафіксований, тому значення критерію (3.18) не може бути покращено.

Ці ж міркування повторимо для альтернативи $X^{(2)} = (x_{21}, x_{22}) = (4, 0)$. Знову виберемо $c_1^{(2)} = 6$, $c_2^{(2)} = 4$ та обчислимо

$$r^{(2)} = f(x_{21}, x_{22}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 6(0.5 \cdot 4 - 0.3 \cdot 0) + 4(-0.2 \cdot 4 + 0.9 \cdot 0) = 8.8.$$

Пряма $2.2x_1 + 1.8x_2 = 8.8$, яка проходить через крайню точку $B = (4, 0)$ трикутника обмежень, пересікає його. Тому альтернатива $X^{(2)}$ не є розв'язком

задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(X) = 2.2x_1 + 1.8x_2$ та обмеженнями (3.8).

У зв'язку з цим оберемо іншу пару параметрів цільової функції, наприклад, $c_1^{(2)} = 3.5$, $c_2^{(2)} = 1.5$. Степені належності цих параметрів задачі відповідним нечітким множинам дорівнюють $k_1(3.5) = 0.125$, $k_2(1.5) = 0.5$. Причому для альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ маємо

$$r^{(2)} = f(x_{21}, x_{22}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 5.8.$$

Пряма $1.45x_1 + 0.3x_2 = 5.8$ доторкається до трикутника обмежень у крайній точці $B = (4, 0)$. Тому альтернатива $X^{(2)} = (4, 0)$ може розглядатися як розв'язок задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(x) = 1.45x_1 + 0.3x_2$ та обмеженнями (3.).

Значення $r^{(2)} = 5.8$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ зі степенем, що дорівнює $\varphi^{(2)} = \min\{k_1(4), k_2(2)\} = \min\{0.125, 0.5\} = 0.125$.

Для пошуку іншого набору (c_1, c_2) , для якого $f(X^{(2)}, c_1, c_2) = 5.8$ та одночасно $\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} > \varphi^{(2)} = 0.125$, розв'яжемо наступну чітку задачу математичного програмування:

знайти набір (c_1, c_2) , що максимізує

$$\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} \quad (3.19)$$

та задовольняє обмеження $c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) = 5.8$.

З останнього співвідношення маємо $c_1 = 2.9 + 0.4c_2$. Підставимо отриманий вираз для c_1 у (3.15):

$$k_1(c_2) = \begin{cases} 0, & 2.9 + 0.4c_2 < 3, \\ \frac{2.9 + 0.4c_2 - 3}{4}, & 3 \leq 2.9 + 0.4c_2 < 7, \\ 1, & 7 \leq 2.9 + 0.4c_2 < 9, \\ \frac{13 - 2.9 - 0.4c_2}{4}, & 9 \leq 2.9 + 0.4c_2 \leq 13, \\ 0, & 2.9 + 0.4c_2 > 13. \end{cases}$$

Звідси маємо:

$$k_1(c_2) = \begin{cases} 0, & c_2 < 0.25, \\ \frac{0.4c_2 - 0.1}{4}, & 0.25 \leq c_2 \leq 10.25, \\ 1, & 10.25 \leq c_2 < 15.25, \\ \frac{10.1 - 0.4c_2}{4}, & 15.25 < c_2 \leq 25.25, \\ 0, & c_2 > 25.25. \end{cases} \quad (3.20)$$

Тепер для пошуку набору (c_1, c_2) , який максимізує (3.19), відобразимо функції належності (3.20) та (3.16) (рис. 3.3).

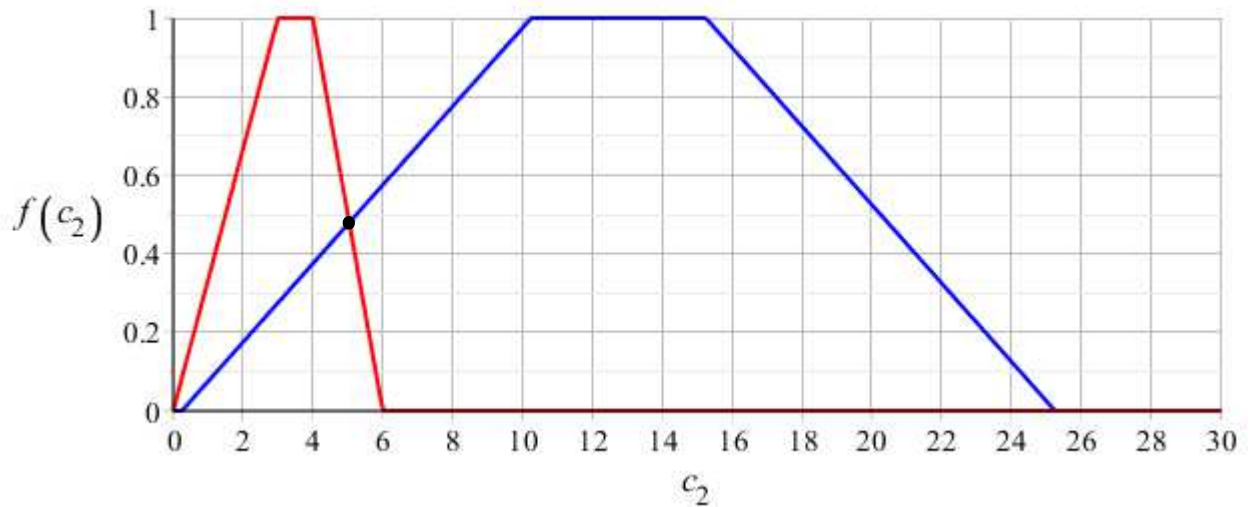


Рис. 3.3. Функції належності $k_1(c_2), k_2(c_2)$

Із рис. 3.3 очевидно, що максимальне значення функції (3.21) досягається у точці F , координати якої знайдемо з рівняння

$$\frac{6 - c_2}{2} = \frac{0.4c_2 - 0.1}{4}.$$

Звідси $c_2 \approx 5.04$, $c_1 = 2.9 + 0.4c_2 \approx 4.92$. При цьому значення $r^{(2)} = 5.8$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ зі степенем

$$\varphi = \min\{k_1(4.92), k_2(5.04)\} = \min\{0.64, 0.48\} = 0.48 > \varphi^{(2)} = 0.125.$$

Таким чином, у результаті розв'язку задачі для допустимих альтернатив $X^{(2)} = (3.6, 0.8)$, $X^{(2)} = (4, 0)$ отримані відповідні значення цільової функції $f(X^{(1)}) = f(3.6, 0.8) = 9.36$, $f(X^{(2)}) = f(4, 0) = 5.8$, що належать нечітким оцінкам перерахованих вище альтернатив зі степенями, які дорівнюють 0.75, 0.48, відповідно.

3.2.3 Нечіткі параметри цільової функції з дзвоноподібними функціями належності

Розглянемо задачу (3.7), (3.8), для якої параметри c_1, c_2 – нечіткі числа з дзвоноподібними функціями належності, відповідно рівними

$$k_1(c_1) = \frac{1}{1 + \left| \frac{(c_1 - 8)}{2} \right|^{2*2}}, \quad (3.21)$$

$$k_2(c_2) = \frac{1}{1 + |c_2 - 4|^{2*2}}. \quad (3.22)$$

Допустима область даної задачі не відрізняється від попередньої. Перша допустима альтернатива розв'язку – $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$, а друга альтернатива – $X^{(2)} = (4, 0)$.

Задаємо деякий конкретний допустимий набір значень параметрів цільової функції $c_1^{(1)} = 6$, $c_2^{(1)} = 5$. Степені належності обраних значень параметрів відповідним нечітким множинам дорівнюють $k_1(c_1^{(1)}) = k_1(6) = 0.5$, $k_2(c_2^{(1)}) = k_2(5) = 0.5$.

Виберемо альтернативу $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ та обчислимо:

$$r^{(1)} = f(x_{11}, x_{12}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}) = c_1^{(1)}(0.5x_{11} - 0.3x_{12}) + c_2^{(1)}(-0.2x_{11} + 0.9x_{12}),$$

$$r^{(1)} = 6(0.5 \cdot 3.6 - 0.3 \cdot 0.8) + 5(-0.2 \cdot 3.6 + 0.9 \cdot 0.8) = 9.36.$$

Пряма $2x_1 + 2.7x_2 = 9.36$ доторкається до трикутника обмежень у крайній точці $A = (3.6, 0.8)$. Тому альтернатива $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$ може розглядатися як розв'язок задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(x) = x_1 + x_2$ та обмеженнями (3.8).

З метою пошуку іншого можливого набору $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)})$, для якого

$$f\left(X^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}\right) = 9.36 \quad (3.23)$$

та

$$\varphi^{(2)} = \min\left\{k_1\left(c_1^{(2)}\right), k_2\left(c_2^{(2)}\right)\right\} > \varphi^{(1)} = 0.5,$$

розв'яжемо наступну чітку задачу математичного програмування:

знайти набір (c_1, c_2) , що максимізує

$$\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} \quad (3.24)$$

та задовольняє обмеження $c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) = 9.36$.

У цьому випадку параметр c_1 зафіксований, тому значення критерію (3.24) не може бути покращено.

Ці ж міркування повторимо для альтернативи $X^{(2)} = (x_{21}, x_{22}) = (4, 0)$. Знову виберемо $c_1^{(2)} = 6$, $c_2^{(2)} = 5$ та обчислимо

$$\begin{aligned} r^{(2)} &= f\left(x_{21}, x_{22}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}\right) = 6(0.5 \cdot 4 - 0.3 \cdot 0) + 5(-0.2 \cdot 4 + 0.9 \cdot 0) = \\ &= 11.6. \end{aligned}$$

Пряма $2.9x_1 + 0.6x_2 = 11.6$, яка проходить через крайню точку $B = (4, 0)$ трикутника обмежень, пересікає його. Тому альтернатива $X^{(2)}$ не є розв'язком задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(X) = 2.9x_1 + 0.6x_2$ та обмеженнями (3.8).

У зв'язку з цим оберемо іншу пару параметрів цільової функції, наприклад, $c_1^{(2)} = 2.5$, $c_2^{(2)} = 1.25$. Степені належності цих параметрів задачі відповідним нечітким множинам дорівнюють $k_1(2.5) \approx 0.02$, $k_2(1.25) \approx 0.02$. Причому для альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ маємо $r^{(2)} = f\left(x_{21}, x_{22}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}\right) = 4$.

Пряма $x_1 + 0.375x_2 = 4$ доторкається до трикутника обмежень у крайній точці $B = (4, 0)$. Тому альтернатива $X^{(2)} = (4, 0)$ може розглядатися

як розв'язок задачі лінійного програмування з цільовою функцією $f(x) = x_1 + 0.375x_2$ та обмеженнями (3.8).

Значення $r^{(2)} = 4$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ зі степенем, що дорівнює $\varphi^{(2)} = \min\{k_1(2.5), k_2(1.25)\} = \min\{0.02, 0.02\} = 0.02$.

Для пошуку іншого набору (c_1, c_2) , для якого $f(X^{(2)}, c_1, c_2) = 14$ та одночасно $\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} > \varphi^{(2)} = 0.02$, розв'яжемо наступну чітку задачу математичного програмування:

знайти набір (c_1, c_2) , що максимізує

$$\varphi = \min\{k_1(c_1), k_2(c_2)\} \quad (3.25)$$

та задовольняє обмеження $c_1(0.5x_1 - 0.3x_2) + c_2(-0.2x_1 + 0.9x_2) = 4$.

З останнього співвідношення маємо $c_1 = 2 + 0.4c_2$. Підставимо отриманий вираз для c_1 у (3.21):

$$k_1(c_2) = \frac{1}{1 + \left| \frac{(2 + 0.4c_2 - 8)}{2} \right|^{2*2}}.$$

Звідси маємо:

$$k_1(c_2) = \frac{1}{1 + \left| \frac{(0.4c_2 - 6)}{2} \right|^{2*2}}. \quad (3.26)$$

Тепер для пошуку набору (c_1, c_2) , який максимізує (3.25), відобразимо функції належності (3.26) та (3.22) (рис. 3.4).

Із рис. 3.4 очевидно, що максимальне значення функції (3.25) досягається у точці F , координати якої знайдемо з рівняння

$$|c_2 - 4| = \left| \frac{(0.4c_2 - 6)}{2} \right|.$$

Звідси $c_2 = 1.25$ або $c_2 \approx 5.83$, $c_1 = 2 + 0.4c_2 = 2.5$ або $c_1 = 4.33$. Набір $(c_1, c_2) = (2.5, 1.25)$ – це початковий набір, який ми намагалися покращити, для якого $\varphi^{(2)} = 0.02$. Розглянемо набір $(c_1, c_2) = (4.33, 5.83)$. Значення $r^{(2)} = 4$ належить нечіткій оцінці альтернативи $X^{(2)} = (4, 0)$ зі ступенем

$$\varphi = \min\{k_1(4.33), k_2(5.83)\} = \min\{0.08, 0.08\} = 0.08 > \varphi^{(2)} = 0.02.$$

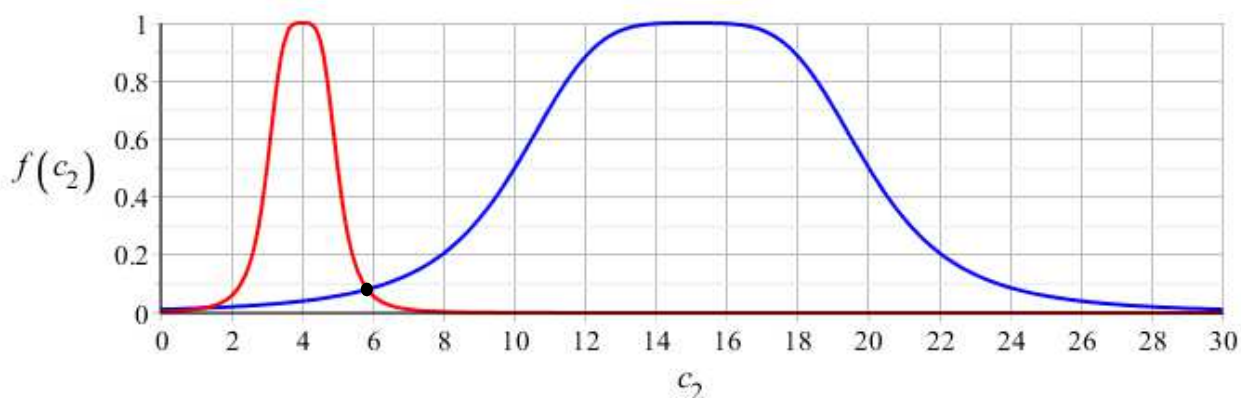


Рис. 3.4. Функції належності $k_1(c_2), k_2(c_2)$

Таким чином, у результаті розв'язку задачі для допустимих альтернатив $X^{(1)} = (3.6, 0.8)$, $X^{(2)} = (4, 0)$ отримані відповідні значення цільової функції $f(X^{(1)}) = f(3.6, 0.8) = 9.36$, $f(X^{(2)}) = (4, 0) = 4$, що належать нечітким оцінкам перерахованих вище альтернатив зі ступенями, які дорівнюють 0.5 та 0.08, відповідно.

Висновки

У ході виконання даної дипломної роботи було розв'язано задачу математичного програмування на основі моделі Леонтьєва–Форда з нечітко заданими коефіцієнтами цільової функції з трикутними, трапеціє- та дзвоноподібними функціями належності. Описана у роботі технологія розв'язку даної задачі орієнтована на збільшення степені належності початкової альтернативи шуканому розв'язку.

У результаті дослідження найбільшого покращення степеню належності шуканого розв'язку вдалося досягти з трапецієподібними функціями належності, найкраще значення нечіткої функції цілі було отримано з трикутними функціями належності. Найгірші значення були здобуті для дзвоноподібних функцій належності.

Проаналізувавши отримані результати, можна стверджувати, що для нечітких оптимізаційних задач на основі моделі Леонтьєва–Форда найефективнішим є використання трапецієподібних функцій належності цільових функцій.

Такий підхід відкриває можливості робити оцінки щодо оптимального розвитку економічної системи, яка, зокрема, несе витрати на знешкодження забруднення довкілля у випадку, коли оцінка економічного зиску та вищезгаданих витрат не можуть бути чітко визначеними.

Подальшим кроком проведення дослідження може стати аналіз оптимізаційних задач на основі моделі Леонтьєва–Форда з нечіткими параметрами цільової функції та нечіткими коефіцієнтами обмежень.

Список використаних джерел

1. Кудін, В.І. Моделювання технологічних змін балансової схеми «витрати-випуск» в умовах дії Паризької угоди [Текст] / В.І. Кудін, А.М. Онищенко // Економічний аналіз: збірник наукових праць. – Т.: «Економічна думка», 2016. – Том 25. – №1. – с. 37-44.
2. United Nations [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.un.org/en/sections/issues-depth/climate-change/>
3. United Nations Climate Change [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://unfccc.int/process-and-meetings/the-paris-agreement/what-is-the-paris-agreement>
4. Раскин, Л.Г., Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352с.
5. Зайченко, Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. / Ю.П. Зайченко. – К.: Издательский дом «Слово», 2008. – 344с.
6. Волошин, О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336с.
7. Заде, Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 100с.
8. Ляшенко, І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку – К.: Вища школа, 1999. – 236с.
9. Ляшенко, І.М. Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів: навч. посіб. / І.М. Ляшенко, М.В. Коробова, І.А. Горіцина. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 320с.