УДК 517.43
MSC 30E20, 45P05

RIQUET PROBLEM FOR ONE MODEL EQUATION OF THE 4TH ORDER HYPERBOLIC TYPE

I. M. Aleksandrovych[1], S. I. Lyashko[1], V. I. Lyashko[2], N. I. Lyashko[3], M. V.–S. Sidorov[4]

[1]Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, E-mail: ialexandrovich@ukr.net, lyashko.serg@gmail.com
[2]National University «Kyiv-Mohyla Academy», E-mail: v.lyashko@ukr.net
[3]V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS Ukraine, E-mail: lyashko.natali@gmail.com
[4]Faculty of Sociology,Taras Shevchenko National University of Kyiv, E-mail: myksyd@knu.ua

ЗАДАЧА РІК'Є ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ 4-ГО ПОРЯДКУ

І. М. Александрович[1], С. І. Ляшко[1], В. І. Ляшко[2], Н. І. Ляшко[3], М. В.–С. Сидоров[4]

[1]Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, E-mail: ialexandrovich@ukr.net, lyashko.serg@gmail.com
[2]Національний університет «Києво-Могилянська Академія», E-mail: v.lyashko@ukr.net
[3]Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, E-mail: lyashko.natali@gmail.com
[4]Факультет социології, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, E-mail: myksyd@knu.ua

Abstract. Integral operators that transform arbitrary functions into regular solutions of hyperbolic equations of the second and higher orders are applied to solving boundary value problems. In particular, the Riquet problem for the Euler–Poisson–Darboux equation of the 4th order is posed and solved.
Keywords: integral operators, regular solutions, equations of higher orders, boundary value problem.

Анотація. Інтегральні оператори, що переводять довільні функції в регулярні розв'язки рівнянь гіперболічного типу другого і вищих порядків, застосовані до розв'язування крайових задач. Зокрема, ставиться і розв'язується задача Рік'є для рівняння типу Ейлера–Пуассона–Дарбу 4-го порядку.
Ключові слова: інтегральні оператори, регулярні розв'язки, рівняння вищих порядків, крайова задача.

Постановка задачі

Дослідженням крайових задач для вироджених гіперболічних рівнянь 2-го та вищих порядків присвячено ряд робіт ([1–6] та інші). В даній роботі для рівняння

$$L^2_{\nu,k}U = 0, \quad \nu > 0, \quad k \geq 0,$$

де $L_{\nu,k}$ — сингулярний диференціальний оператор вигляду

$$L_{\nu,k} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + k,$$

ставиться і розв'язується задача Рік'є.

Отже, в області $0 < x, y < \infty$ знайти чотири рази неперервно диференційований розв'зок рівняння

$$L_{\nu,k}^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + k\right)^2 U = 0, \tag{1}$$

що задовольняє умовам

$$U|_{x=0} = f_1(y), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + k\right) U|_{x=0} = f_2(y),$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \tag{2}$$

де $f_1(y)$, $f_2(y)$ — задані достатнє число разів неперервно диференційовані функції.

Зображення розв'язку

Розв'язок задачі, у відповідності з доведеною в роботі [4] лемою, шукаємо у вигляді

$$U(x, y) = U_0(x, y) + xU_1(x, y).$$

Оскільки U_0 та U_1 задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial U}{\partial y} + kU = 0,$$

то задовольняючи умови (2), задача (1), (2) розпадається на такі:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial U_0}{\partial y} + kU_0 = 0, \tag{3}$$

$$U_0|_{x=0} = f_1(y), \quad \left.\frac{\partial U_0}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U_0}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{3$'$}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial U_1}{\partial y} + kU_1 = 0, \tag{4}$$

$$U_1|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2} f_2(y), \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{4$'$}$$

Почнемо з задачі (4), (4$'$). Розв'язок задачі шукаємо у вигляді такої формули [4]:

$$U_1(x, y) =$$
$$= y^{1-2\nu} \int\limits_{x-y}^{x+y} \left[y^2 - (t-x)^2\right]^{\nu-1} {}_0F_1\left[\nu; -\frac{k}{4}\left(y^2 - (x-t)^2\right)\right] f(t)\, dt, \tag{5}$$

де ${}_0F_1\left[\nu; z\right]$ — частинний випадок узагальненої гіпергеометричної функції, при умові $\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, $f\left(t\right)$ — довільна функція, двічі неперервно диференційована на скінченому проміжку осі t.

Формула обернення інтегрального зображення (5) має вигляд [7]:

$$f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=$$
$$=\begin{cases} \dfrac{2}{\Gamma\left(m-\nu+1\right)\Gamma\left(\nu\right)}\dfrac{d}{dy}\int\limits_0^y \dfrac{d^m\left[\tau^{2\nu-1}U_1\left(x,\tau\right)\right]}{\left(d\tau^2\right)^m}\left(y^2-\tau^2\right)^{m-\nu}\times \\ \times\,{}_0F_1\left[m-\nu+1;\dfrac{k}{4}\left(y^2-\tau^2\right)\right]\tau d\tau,\ \ m=\left[\nu\right]; \\ \\ \dfrac{2}{\left(n-1\right)!}\dfrac{d}{dy}\int\limits_0^y \frac{d^n\left[\tau^{2\nu-1}U_1(x,\tau)\right]}{(d\tau^2)^n} I_0\left(\sqrt{k\left(y^2-\tau^2\right)}\right)\tau d\tau,\ \ \nu=n. \end{cases} \tag{6}$$

Задовольняючи умови (4′), одержимо

$$f\left(y\right)+f\left(-y\right)=0, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}f_2\left(y\right)=y^{1-2\nu}\int\limits_0^y\frac{\left[f'\left(\tau\right)+f'\left(-\tau\right)\right]{}_0F_1\left[\nu;-\frac{k}{4}\left(y^2-\tau^2\right)\right]}{\left(y^2-\tau^2\right)^{1-\nu}}d\tau. \tag{8}$$

Із (8), з урахуванням умови $\left.\dfrac{\partial U_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, матимемо

$$f'\left(y\right)+f'\left(-y\right)=$$
$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{\Gamma\left(m-\nu+1\right)\Gamma\left(\nu\right)}\dfrac{d}{dy}\int\limits_0^y \dfrac{d^m\left[\tau^{2\nu-1}f_2\left(\tau\right)\right]}{\left(d\tau^2\right)^m}\times \\ \times\,{}_0F_1\left[m-\nu+1;\dfrac{k}{4}\left(y^2-\tau^2\right)\right]\left(y^2-\tau^2\right)^{m-\nu}\tau d\tau,\ \ m=\left[\nu\right],\nu\neq n; \\ \\ -\dfrac{1}{\left(n-1\right)!}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y \dfrac{d^n\left[\tau^{2\nu-1}f_2\left(\tau\right)\right]}{\left(d\tau^2\right)^n} I_0\left(\sqrt{k\left(y^2-\tau^2\right)}\right)\tau d\tau,\ \ \nu=n. \end{cases} \tag{9}$$

Звідси, враховуючи (7), знаходимо $f\left(y\right)$.

Підставивши знайдене значення функції $f\left(y\right)$ в праву частину формули (5), одержимо шуканий розв'язок задачі у вигляді

$$U_1\left(x,y\right)=\int\limits_{x-y}^{x+y}dv\int\limits_0^v K\left(x,y,v,\tau\right)\frac{d^m\left[\tau^{2\nu-1}\left(-\frac{1}{2}f_2\left(\tau\right)\right)\right]}{\left(d\tau^2\right)^m}d\tau, \tag{10}$$

де

$$K(x,y,\tau,v) = \\ = \begin{cases} \dfrac{y^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(m-\nu+1)} \dfrac{\left[y^2-(v-x)^2\right]^{\nu-1}}{(v^2-\tau^2)^{\nu-m}} \tau\, {}_0F_1\left[m-\nu+1; \dfrac{k}{4}\left(v^2-\tau^2\right)\right] \times \\ \times\, {}_0F_1\left[\nu; -\dfrac{k}{4}\left(y^2-(v-x)^2\right)\right], \ \ m=[\nu], \ \ \nu \neq n; \\ \\ \dfrac{y^{1-2\nu}}{(n-1)!}\left[y^2-(v-x)^2\right]^{\nu-1} I_0\left(\sqrt{k\left(v^2-\tau^2\right)}\right)\tau \times \\ \times\, {}_0F_1\left[\nu; -\dfrac{k}{4}\left(y^2-(v-x)^2\right)\right], \ \ m=\nu=n. \end{cases} \tag{11}$$

Перейдемо до задачі (3), (3′). Умови такі ж, як і в задачі (4), (4′), тільки замість (4′) маємо

$$U_0(0,y) = f_1(y), \quad \left.\frac{\partial U_0}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U_0}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

Задача (3), (3′) може бути зведена до задачі (4), (4′) шляхом введення нової невідомої функції

$$V(x,y) = \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x}.$$

Для $V(x,y)$ матимемо задачу:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial V}{\partial y} + kV = 0,$$

$$V(0,y) = 0, \ \ \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = f_1''(y) + \frac{2\nu}{y} f_1'(y) + k f_1(y), \ \ \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,$$

розв'язком якої, згідно з (10), буде

$$V(x,y) = \int\limits_{x-y}^{x+y} dv \int\limits_0^v K(x,y,\tau,v) \frac{d^m}{(d\tau^2)^m}\left[\tau^{2\nu-1}\left(f_1''(\tau) + \frac{2\nu}{\tau} f_1'(\tau) + k f_1(\tau)\right)\right] d\tau.$$

Тоді розв'язок задачі (3), (3′) одержимо у вигляді

$$U_0(x,y) = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{\xi-y}^{\xi+y} dv \int\limits_0^v K(\xi,y,\tau,v) \frac{d^m}{(d\tau^2)^m} \times \\ \times \left[\tau^{2\nu-1}\left(f_1''(\tau) + \frac{2\nu}{\tau} f_1'(\tau) + k f_1(\tau)\right)\right] d\tau + f_1(y). \tag{12}$$

Остаточно, розв'язок задачі Рік'є (1), (2) має вигляд:

$$U(x,y) = U_0(x,y) + xU_1(x,y),$$

де $U_0(x,y)$ — формула (12), $U_1(x,y)$ — формула (10).

При $\nu = \frac{1}{2}$ розв'язок задачі Рік'є (1), (2) матиме вигляд

$$U(x,y) = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{\xi-y}^{\xi+y} dv \int\limits_0^v K(\xi,y,\tau,v)\left(f_1''(\tau) + \frac{1}{\tau}f_1'(\tau) + kf_1(\tau)\right)d\tau +$$

$$+ f_1(y) - \frac{x}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} dv \int\limits_0^v K(x,y,\tau,v)\, f_2(\tau)\, d\tau,$$

де

$$K(x,y,\tau,v) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(y^2 - (v-x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(v^2-\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}\tau ch\sqrt{k\left(v^2-\tau^2\right)}\cos\sqrt{k\left(y^2-(v-x)^2\right)}.$$

Література

1. Александрович И. Н., Зражевская В. Ф. Задача Коши и характеристическая задача для одного класса линейных гиперболических уравнений высшего порядка. *Доклады АН УССР*. 1991. № 4. С. 18–22.
2. Александрович І. М., Сидоров М. В.-С. Інтегральне рівняння типу Ейлера–Пуассона–Дарбу. *Вісник Київського університету*. 1999. № 4. С. 75–81.
3. Александрович І. М., Сидоров М. В.-С. Задача Коші для телеграфного рівняння вищого порядку. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 1999. № 1. С. 16–24.
4. Alexandrovich I. M., Bondar O. S., Lyashko S. I. et al. Integral Operators that Determine the Solution of an Iterated Hyperbolic-Type Equation. *Cybern. Syst. Anal.* 2020. 56. P. 401–409. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00256-3
5. Sandrakov G. V., Lyashko S. I., Bondar E. S., Lyashko N. I. Modeling and optimization of microneedle systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Volume 51. Issue 6. P. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.10
6. Александрович І. М., Молодцов О. І. Диференціальне зображення розв'язків рівнянь гіперболічного типу. *Вісник Київського університету. Серія Фіз.-мат. науки*. 2016. Вип. 2. С. 98–104.
7. Ляшко І. І., Сидоров М. В.-С., Александрович І. М. Обернення деяких інтегральних рівнянь. *Журнал обчислювальної та прикладної математики* . 2004. №2. С. 25–30.

Надійшла: 24.09.2022 / Прийнята: 28.09.2022