

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**ТРУНОВ Олександр Олексійович**



УДК 539.3

**ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ВИГНУТИХ ХВИЛЕВОДНИХ СТРУКТУРАХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ–2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник:** доктор фізико-математичних наук, професор  
**МАЦИПУРА Володимир Тимофійович**,  
Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка МОН України,  
професор кафедри теоретичної та прикладної механіки.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник  
**СЕНЧЕНКОВ Ігор Костянтинович**,  
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
головний науковий співробітник  
відділу термомпружності;

доктор фізико-математичних наук, професор  
**ГОРОДЕЦЬКА Наталія Сергіївна**,  
Інститут гідромеханіки НАН України,  
вчений секретар.

Захист відбудеться «30» червня 2016 року о 16:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 26.001.21 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, просп. Акад. Глушкова, 4-е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий «27» травня 2016 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради



А.В. Ловейкін

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню процесу поширення гармонічних хвиль у вигнутих хвилеводах з різними конструктивними оформленнями зони вигину та дослідженню поширення імпульсного сигналу у хвилеводі з вигином сталої ширини.

Знання закономірностей хвильових полів у пружних об'єктах є важливим при конструюванні робочих елементів акустoeлектронних, акустооптичних і гідроакустичних пристроїв. Нерегулярні хвилеводні структури часто зустрічаються в конструкціях різноманітних пристроїв, тому зацікавленість до дослідження хвильового поля в них не слабшає. Серед великого класу нерегулярностей, які мають місце у хвилеводах, можна виділити клас неоднорідностей, пов'язаних зі зміною геометрії хвилеводу, а саме, наявністю області вигину у хвилеводі. При цьому параметри середовища, що наповнює хвилевід, залишаються незмінними. Для ґрунтового дослідження полів в нерегулярних хвилеводах доцільно використовувати чисельно-аналітичні методи.

Якщо відношення характерних розмірів хвилеводу до довжини хвилі являє собою малу або досить значну величину то, зазвичай, використовують добре розроблені методи теорії дифракції. Хвилеводи з неоднорідностями, для яких характерний розмір порівняний з довжиною хвилі досліджені слабше, оскільки виникають труднощі при побудові строгого розв'язку відповідних граничних задач. У даній роботі розглядається хвилевід, геометричні розміри якого порівняні з довжиною хвилі.

У роботі розглядаються як гармонічні у часі хвилеві поля, так і імпульсне поширення хвилі. Слід відзначити, що в більшості робіт з хвилеводної тематики досліджується поширення саме гармонічної хвилі. Але в дійсності сигнал має скінченну в часі тривалість, або іншими словами, представляє собою імпульс. Поширення імпульсу в хвилеводі супроводжується цілою низкою специфічних ефектів, що викликає значний інтерес до вивчення саме нестационарних процесів. Наукове та практичне значення розгляду нерегулярних хвилеводів і визначило тему даної дисертаційної роботи.

Сказане свідчить про те, що дослідження особливостей стаціонарних та нестационарних хвилевих полів у нерегулярних хвилеводних структурах представляє **актуальну проблему** механіки деформівного твердого тіла, що має теоретичне та прикладне значення.

Дисертаційна робота виконана у рамках аспірантського **плану** кафедри теоретичної та прикладної механіки, затвердженого вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також бюджетних науково-дослідних тем: «Крайові задачі динаміки пружних тіл зі спряженими польовими фізико-механічними властивостями та їх застосування в неруйнівному контролі, сенсорних мікроелектромеханічних системах та хвильових гіроскопах» (2011–2013 рр., держреєстраційний № 0101U002477 : 11БФ038-05), «Математичні та експериментальні методи механіки спряжених коливальних процесів і хвильових полів та їх застосування в гіроскопічних геонавігаційних та мікроелектромеханічних системах» (2014–2015 рр., держреєстраційний № 0114U003474 : 14БП038-02).

**Метою дослідження** є розробка алгоритмів чисельно-аналітичного дослідження задачі поширення нормальних SH-хвиль у криволінійних хвилеводах з різними конструктивними оформленнями зони вигину та визначення закономірностей кінематичних та енергетичних характеристик при поширенні гармонічної у часі SH-хвилі та імпульсного сигналу. Основним завданням є побудова розв'язку задачі поширення хвиль у хвилеводі, тобто визначення поля у хвилеводі та проведення енергетичного аналізу.

Для досягнення поставленої мети були розглянуті такі задачі:

- поширення гармонічної SH-хвилі в лінійно-пружному ізотропному хвилеводі зі згином з різними конструктивними оформленнями зони вигину:
  - ✓ сталої ширини,
  - ✓ з заокругленням,
  - ✓ зі зрізами,
  - ✓ у хвилеводі з різкою зміною ширини зони вигину,
  - ✓ у хвилеводі з подвійним згином;
- визначення дисперсійних співвідношень для хвилеводу сталої ширини;
- дослідження залежності енергетичного коефіцієнта проходження SH-хвилею зони нерегулярності хвилеводу.

**Об'єктом дослідження** є процес поширення стаціонарної та нестаціонарної хвилі у нерегулярному хвилеводі.

**Предметом** дослідження є закономірності процесу поширення нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі з вільними від напружень стінками, визначення енергетичних характеристик процесу поширення хвиль крізь зону неоднорідності хвилеводу.

**Методом**, що використовується в роботі, є метод часткових областей. При застосуванні даного методу вся область існування хвильового поля ділиться на часткові області. У кожній такій області можна застосувати метод відокремлення змінних та записати хвильове поле у вигляді суми частинних розв'язків рівняння Гельмгольца. Далі необхідно записати умови спряження полів в єдину область існування хвильового поля. Нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду розв'язувалася методом редукції з необхідним контролем коректності отриманого розв'язку.

#### **Наукова новизна одержаних результатів**

1. Застосовано метод часткових областей для побудови розв'язку задачі про поширення нормальної SH-хвилі у хвилеводі з вигином для різних конструктивних оформлень зони вигину.

2. Проведено детальний енергетичний аналіз поширення хвилі крізь зону неоднорідності хвилеводу.

3. Показано, що заокруглення кутової області зі збереженням ширини хвилеводу на всій його довжині приводить майже до повної проникності криволінійної області в широкому діапазоні частот, при цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу.

4. Побудовано розв'язання задачі про поширення вузькосмугастого імпульсного сигналу в заокругленому хвилеводі постійної ширини. Показано, що, підбираючи

певним чином геометричні параметри хвилеводу, можна досягти збереження форми імпульсу на шляху його поширення.

**Обґрунтованість та достовірність** отриманих результатів і висновків забезпечується використанням добре апробованого математичного апарату та застосуванням теоретично обґрунтованих числових методів. Достовірність чисельних результатів забезпечувалась перевіркою точності виконання умов спряження полів на границях поділу областей зони вигину, а також перевіркою точності виконання закону збереження енергії при поширенні хвилі вздовж хвилеводу. В дисертаційній роботі, в окремих випадках, перевірялась збіжність отриманих результатів з відомими.

Дисертація має як **теоретичне**, так і **практичне значення**. Отримані результати дозволяють застосовувати побудований чисельно-аналітичний апарат до задач поширення пружних хвиль у хвилеводах з подібною геометрією. Оскільки криволінійні хвилеводи знаходять широке застосування в різноманітних пристроях, робота має практичне застосування.

**Особистий внесок здобувача.** Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені розробки автора, що дозволили вирішити поставлені завдання. Роботи [2, 4, 6] опубліковані одноосібно. У працях, опублікованих разом з д. ф.-м. н. В. Т. Маципурую [1, 3, 5], В.Т. Маципурі належить вибір загального напрямку досліджень, участь в обговоренні отриманих результатів; у працях, опублікованих разом з д. ф. – м. н. І.В. Вовком [1, 3, 5], І.В. Вовку належить постановка задач та участь в обговоренні результатів. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача. Науковому керівнику належить постановка задачі та загальне керівництво роботою.

Поставлені цілі досягнуто на основі узагальнення і розробки даних, що **опубліковані** у 10 наукових роботах. З них 5 статей [1–5] у виданнях, затверджених МОН України; 1 стаття [6] у закордонному виданні; 4 тези доповідей та матеріалів наукових конференцій [7–10]. Основний зміст дисертаційної роботи було представлено на таких наукових конференціях:

- II Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки» присвячена 150-річчю кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ ім. Т. Шевченка, м. Київ, Україна, 28–30 серпня 2013 р., Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі.
- Акустичний симпозиум «Консонанс», НАН України, Інститут гідромеханіки, м. Київ, Україна, 1–2 жовтня 2013 р., Нормальні хвилі криволінійного хвилеводу.
- Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчю від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, м. Київ, Україна, 23–24 квітня 2014 р., Хвильовий процес у криволінійному хвилеводі з різкою зміною ширини хвилеводу.

Дисертація в цілому доповідалась та отримала позитивну оцінку на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ імені Тараса Шевченка (Київ, травень 2015), на об'єднаному науковому семінарі кафедр теоретичної та прикладної механіки і механіки суцільних середовищ КНУ ім. Тараса Шевченка

(Київ, жовтень 2015), на науковому семінарі відділу гідродинамічної акустики Інституту гідромеханіки НАН України (Київ, листопад 2015).

**Дисертаційна робота складається** зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи і пункти, висновків, списку використаних джерел (135 найменувань). Робота містить 31 графік. Повний обсяг складає 112 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** охарактеризовано стан досліджуваної наукової проблеми і обґрунтовано актуальність обраної теми дисертації, визначено мету й завдання, об'єкт, предмет, методику дослідження; викладено зв'язок обраного напрямку дослідження з науковими програмами; висвітлено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, представлено особистий внесок аспіранта, апробацію отриманих результатів та публікації за темою дисертації.

У **першому розділі** міститься огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлено сучасний стан проблеми вивчення питання хвилеводного поширення пружних хвиль. Показано, що дослідження, визначені метою і задачами даної роботи, базуються на сучасній теоретичній базі наукових публікацій.

**Другий розділ** являє собою стислий довідник понять і характеристик щодо явища поширення SH-хвиль у пружному шарі.

**Третій розділ** присвячений отриманню чисельно-аналітичного розв'язку задачі поширення нормальних SH-хвиль у нерегулярних хвилеводах з різними конструктивними оформленнями зони вигину. Досліджено нормальні хвилі криволінійного хвилеводу постійної ширини у хвилеводі з вільними межами. Розглянуто особливості проходження хвилі крізь згин хвилеводу при різних варіантах конструктивного оформлення зони вигину та показані закономірності поширення імпульсного сигналу крізь округлений згин хвилеводу постійної ширини.

Розглянемо плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 1. До криволінійної ділянки примикають плоскопаралельні хвилеводи. Для опису геометрії хвилеводу та подальшої побудови розв'язку задачі поширення гармонічної хвилі в такому хвилеводі введемо три системи координат: дві декартові  $Ox_1x_3$ ,  $Ox'_1x'_3$  і полярну  $Or_\varphi$  з загальним центром у точці  $O$ . Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені  $r_1$  та  $r_2$ . Ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою і дорівнює  $h = r_2 - r_1$ . Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як  $\varphi_0$ . Хвилевід являє собою лінійно-пружний ізотропний шар. Розглядається гармонічна у часі хвиля, залежність якої від часу  $\exp -i\omega t$ .

Середовище хвилеводу характеризується густиною  $\rho$  та швидкістю поперечних хвиль  $c_t$ . У трьохвимірному випадку у хвилеводі можуть існувати три типи хвиль – поздовжня (P-хвиля) та поперечні – вертикально та горизонтально поляризовані хвилі (SV- та SH-хвилі). При поширенні нормальної SH-хвилі не збурюються інші типи хвиль, тому більш просто та наглядно буде встановлення закономірностей поширення саме SH-хвиль.

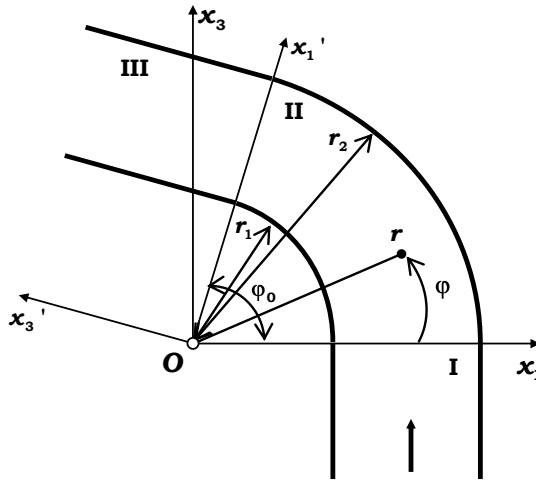


Рис. 1. Геометрія хвилеводу

Застосовуючи метод часткових областей розіб'ємо область вихідного хвилеводу на три області: область I:  $r_1 \leq x_1 \leq r_2, -\infty < x_3 \leq 0$ ; область II:  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0, r_1 \leq r \leq r_2$ ; область III:  $r_1 \leq x_1' \leq r_2, 0 \leq x_3' < +\infty$ . Поля переміщень в областях I, II, III позначимо  $u_2^I, u_2^{II}$  та  $u_2^{III}$  відповідно.

Переміщення  $u_2^I, u_2^{III}$  задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2} + k_t^2 \right] u_2^i = 0, \quad (i = I, III)$$

та граничну умову на вільних межах хвилеводу  $\sigma_{32} = \mu \partial u_2^i / \partial x_3 = 0$ .

В області II переміщення пружних частинок хвилеводу, до якого застосоване відокремлення змінних  $u_2^{II}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ , задовольняє рівняння Гельмгольца в полярних координатах

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k_t^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Нехай в області I в напрямку осі  $Ox_3$  розповсюджується нормальна SH-хвиля, що викликає зміщення вздовж осі  $Ox_2$  і задається у вигляді

$$u_2^0 = \cos \alpha_m x_1 - r_1 \exp i\gamma_m x_3,$$

де  $m$  – номер нормальної хвилі.

Поля переміщень в областях I та III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу

$$u_2^I = \cos \alpha_m x_1 - r_1 \exp i\gamma_m x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp -i\gamma_n x_3,$$

$$u_2^{III} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x_1' - r_1 \exp i\gamma_n x_3',$$

де  $\alpha_n = n\pi/h, \gamma_n = \sqrt{k_t^2 - \alpha_n^2}, k_t = \omega/c_t$ .

Для запису поля переміщень у вигині запишемо частковий розв'язок рівняння Гельмгольца в полярних координатах для області II:

$$u_2^{II}(r, \varphi) = \left[ J_\nu k_t r + EY_\nu k_t r \right] \exp i\nu\varphi.$$

Задовольняючи граничні умови на границях зони вигину  $\partial u_2^{\text{II}} / \partial r = 0$ , визначаємо сталу  $E = -J'_v k_t r_2 / Y'_v k_t r_2$  та приходимо до дисперсійного рівняння, яке встановлює зв'язок між частотою  $\omega = k_t c_t$  та сталою поширення  $\nu$ :

$$J'_v k_t r_2 Y'_v k_t r_1 - J'_v k_t r_1 Y'_v k_t r_2 = 0.$$

На рис. 2 а показані графіки дисперсійних кривих. Вздовж вісі ординат відкладемо безрозмірну частоту  $\Omega = k_t r_2 = \omega r_2 / c_t$ , вздовж вісі абсцис – сталу поширення  $\nu$ . Радіус  $r_1 = r_2 q$ , де стала  $q < 1$  (в даному випадку  $q = 0,6$ ). Точкові криві відповідають плоскому хвилеводу з тим же, що і у криволінійного хвилеводу поперечним розміром. Цифри поблизу кривих визначають номер нормальної хвилі. Як бачимо, якщо критичні частоти мод криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів з графічною точністю співпадають, то подальший хід кривих відрізняється. Природно цей факт знаходить своє відображення при побудові частотних залежностей фазових та групових швидкостей нормальних хвиль (рис. 2 б).

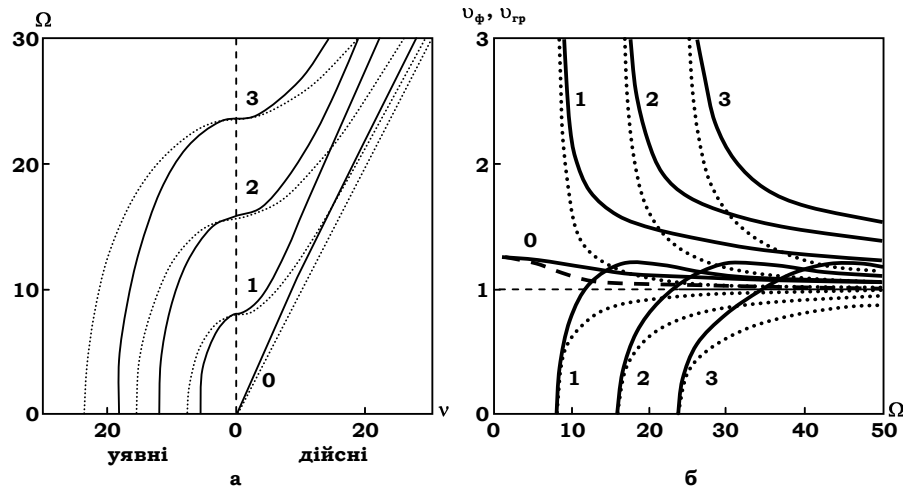


Рис. 2. Дисперсійні криві (а) та частотні залежності фазових (верхня група кривих) і групових (нижня група кривих) швидкостей (б) для криволінійного хвилеводу з вільними поверхнями,  $q = 0,6$

Провівши на рис. 2 а горизонтальну пряму, яка відповідає заданому значенню частоти, визначаємо тим самим кінцеве число однорідних і нескінченне число неоднорідних нормальних хвиль. Їх суперпозиція дозволить описати довільне поле в криволінійній частині хвилеводу. Таким чином,  $n$ -ту моду хвилеводу можна представити у вигляді  $R_n k_t r \exp i v_n \varphi$ , де власні форми мод для хвилеводу з вільними межами записуються як

$$R_n k_t r = J_{v_n} k_t r - \frac{J'_{v_n} k_t r_2}{Y'_{v_n} k_t r_2} Y_{v_n} k_t r,$$

де  $J_{v_n} k_t r$  та  $Y_{v_n} k_t r$  – функції Бесселя та Неймана, відповідно. Штрих біля функцій Бесселя та Неймана означає похідну по повному аргументу.

Отже, поле в області вигину запишемо у вигляді

$$u_2^{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n k_t r \left[ B_n \exp i v_n \varphi + C_n \exp i v_n \varphi - \varphi_0 \right].$$

Як приклад, на рис. 3 показано профілі розподілу переміщення в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу для однорідних і перших неоднорідних мод при  $\Omega = k_t r_2 = 27$  і  $q = 0,6$ . Точкові криві визначають власні форми плоского хвилеводу з тією ж хвильовою шириною, що і у криволінійного хвилеводу. Як бачимо, власні форми перших мод зазначених хвилеводів істотно відрізняються.

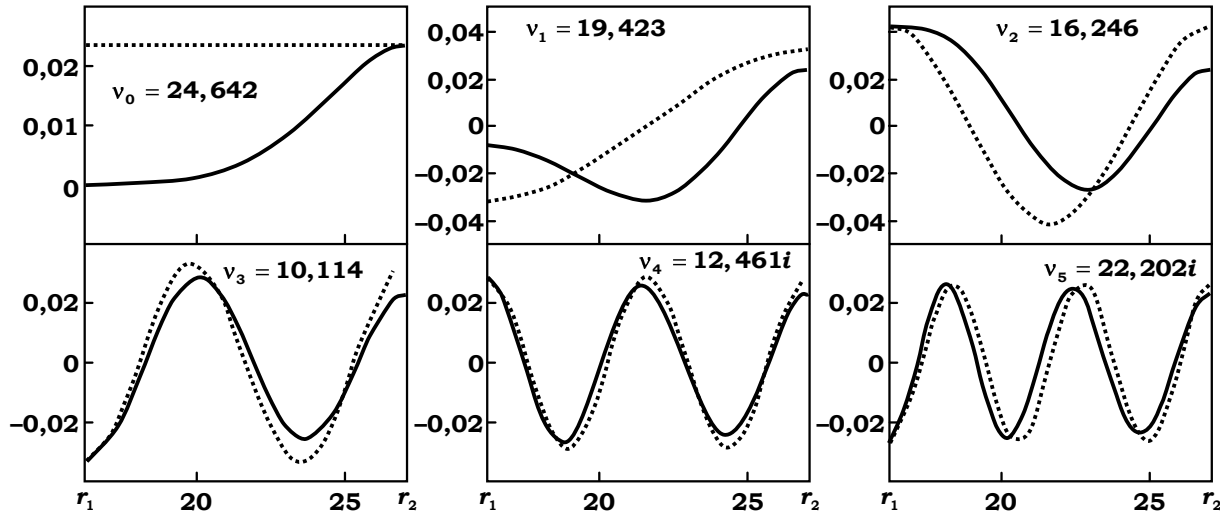


Рис. 3. Розподіл переміщень в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу для однорідних і перших неоднорідних мод

Слід відзначити можливість іншого запису поля переміщень в області вигину у вигляді суми розв'язків рівняння Гельмгольца в різних системах координат, композиція яких дозволить задовольнити умовам на границях області вигину. Отже, другий варіант представлення поля в області вигину для хвилеводу сталої ширини матиме вигляд, в якому поле переміщень представляє собою суму чотирьох нескінченних рядів:

$$u_2^{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp i \gamma_n x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \alpha_n x_3 - r_1 \exp i \gamma_n x_1 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos 2n\varphi \frac{J_{2n} k_t r}{J'_{2n} k_t r_2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos 2n\varphi \frac{Y_{2n} k_t r}{Y'_{2n} k_t r_1},$$

тут  $r_2 = r_1 + h$ .

Розглянемо тепер нерегулярні хвилеводи з різними конструктивними оформленнями зони вигину. На рис. 4 показано чотири варіанти плоского хвилеводу зігнутого під прямим кутом: хвилевід на рис. 4 а будемо називати «хвилевід зі зломом», на рис. 4 б показано хвилевід, у якого місця зламів заокруглені, причому радіуси заокруглення в двох місцях зламу однакові. Такий хвилевід назвемо «хвилевід з заокругленням». На рис. 4 в місця заокруглення зрізані, такий хвилевід визначимо як «хвилевід зі зрізами». Слід відзначити, що характерною рисою вказаних хвилеводів є

зміна поперечного розміру хвилеводу в області зламу в порівнянні з шириною самого хвилеводу  $h$ . Нарешті, на рис. 4 з, представлено варіант заокруглення зламу хвилеводу, при якому ширина хвилеводу на всій його довжині залишається незмінною. Такий хвилевід назовемо «хвилевід з заокругленням постійної ширини». Слід відзначити, що хвилеводи  $a$  та  $z$  мають 3 часткові області, хвилевід  $в$  – 5 часткових областей та хвилевід  $б$  – 6 часткових областей.

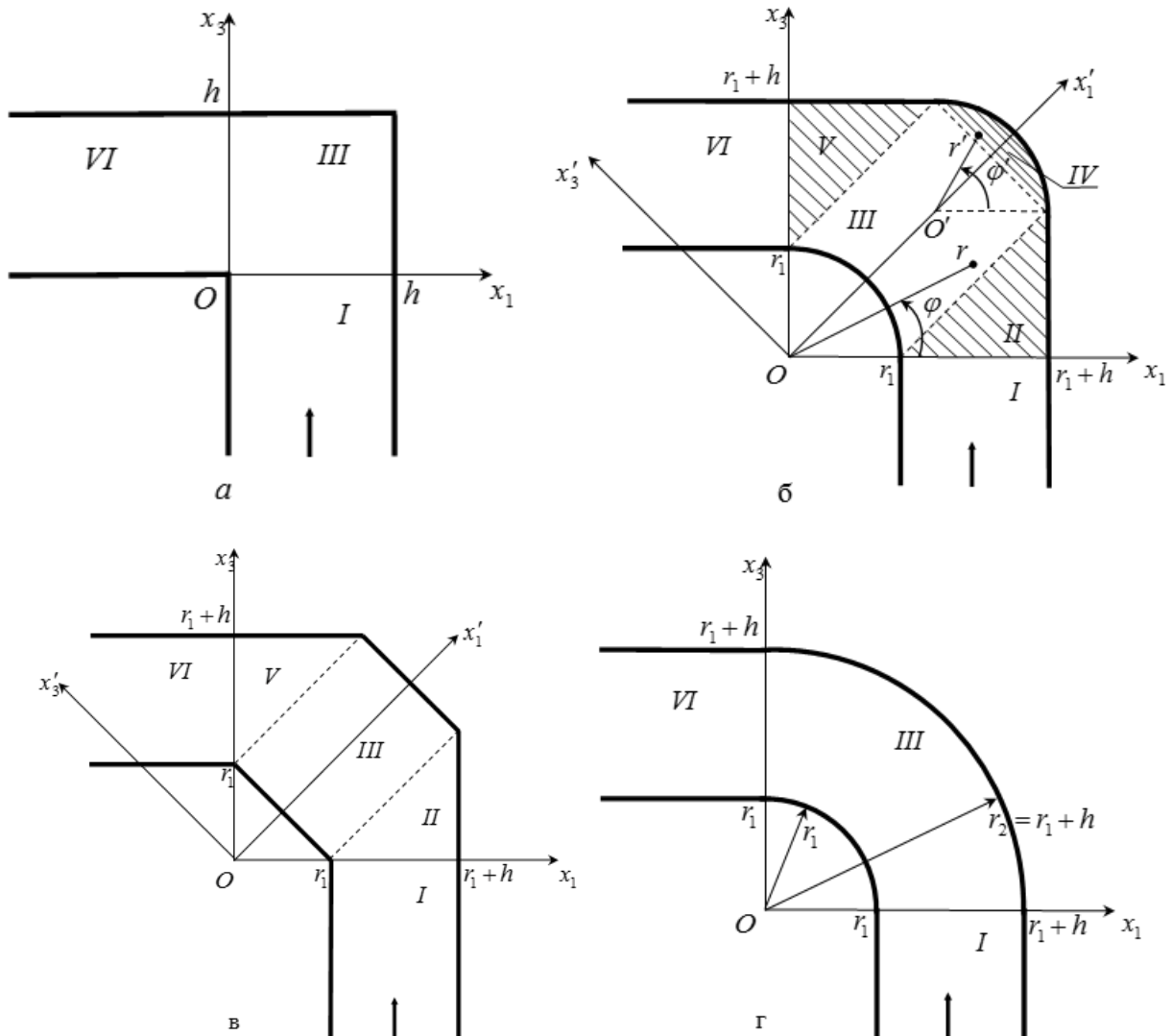


Рис. 4. Геометрія хвилеводів

Для кожної з часткових областей будується загальний розв'язок рівняння Гельмгольца, котрий дозволить виконати довільні граничні умови на межах часткових областей. Надалі розписуємо умови спряження полів на границях відокремлених часткових областей, які являють собою рівності переміщень та напружень на цих границях. Використовуючи вирази для полів переміщень для кожної часткової області та задовольняючи умови спряження полів на границях поділу часткових областей, отримуємо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь. Для цього, скориставшись властивістю ортогональності відповідних наборів функцій, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно шуканих амплі-

тудних коефіцієнтів. Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції. Достовірність отриманого розв'язку гарантується виконанням умов спряження полів на межах часткових областей, а також контролем виконання закону збереження енергії. В усіх проведених розрахунках криві, які визначають спряження полів на межах часткових областей, з графічною точністю співпадають. Така ситуація є типовою.

Важливе значення мають енергетичні характеристики процесу поширення хвиль у хвилеводі з вигином. Енергетичний коефіцієнт проходження  $W^s$  визначається як відношення середнього потоку потужності хвилі в області за вигином до середнього потоку потужності хвилі, котра набігає на вигин:

$$W^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_6} W_n^{(s)}, \text{ де } W_n^{(s)} = \left| A_n^6 \right|^2 \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 0,5, \text{ при } n > 0.$$

Тут  $s$  – номер моди, що набігає на зону вигину. Отже коефіцієнт проходження  $W^s$  представляється у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збудження  $W_n^s$  нормальних хвиль в області за вигином. Кількість доданків  $N_6$  дорівнює кількості хвиль, що поширюються в області VI (для них  $\operatorname{Re} \gamma_n \neq 0$ ).

Розглянемо енергетичні характеристики хвилеводу зі зломом (рис. 4 а) та хвилеводу з заокругленням (рис. 4 б). На рис. 5 а показані залежності коефіцієнта проходження  $W^0$  для хвилеводу зі зломом (крива 1) та хвилеводу з заокругленням. Відразу слід відзначити, що при малому радіусі заокруглення (в нашому розрахунку  $r_1/h = 0,06$ ) розрахункові криві для хвилеводу зі зломом (крива 1) та хвилеводу з заокругленням з графічною точністю співпадають. При збільшенні відносного радіусу заокруглення до 0,3, 0,6 та 1,0 (криві 2–4, рис. 5 а) середнє значення коефіцієнта проходження збільшується, однак нерегулярність частотної характеристики зберігається при всіх радіусах заокруглення.

Для розуміння характеру кривих, представлених на рис. 5 а, звернемося до залежностей коефіцієнтів збудження нормальних хвиль  $W_n^0$  області VI. На рис. 5 б, в показані частотні залежності коефіцієнтів збудження перших нормальних хвиль області VI (номер кривої визначає відповідну моду) при поширенні в області I нульової моди.

Нульова мода хвилеводу з вільними межами є однорідною при будь-якому хвильовому розмірі хвилеводу. Для області VI нормальна хвиля з номером  $n > 0$  стає однорідною при виконанні умови  $h > n\lambda/2$ . В цьому випадку середній потік потужності даної нормальної хвилі не дорівнює нулю.

Графіки показують, що коли хвильовий розмір  $h/\lambda < 0,5$ , то в області VI однорідною є тільки нульова нормальна хвиля (крива  $n = 0$ ). Вона визначає проходження нульової моди області I через згин хвилеводу. Ситуація змінюється, якщо  $h/\lambda > 0,5$ . Так, для хвилеводу зі зломом (рис. 5 б) при  $h/\lambda > 0,5$  збуджується перша нормальна хвиля (крива  $n = 1$ ), яка по величині значно перевищує нульову, а при  $h/\lambda > 1$  домінує друга нормальна хвиля (крива  $n = 2$ ) та далі більш високі моди. Таким чином, можна казати про трансформацію енергії нульової нормальної хвилі в області I в нормальні хвилі області VI з номерами  $n > 0$ . В точках частотного діапазону, де величина  $h$  кратна половині довжини хвилі (рис. 5 б), коефіцієнти збу-

дження мод, а звідси й коефіцієнти проходження, дорівнюють нулю, тобто присутній ефект «запирання» хвилеводу.

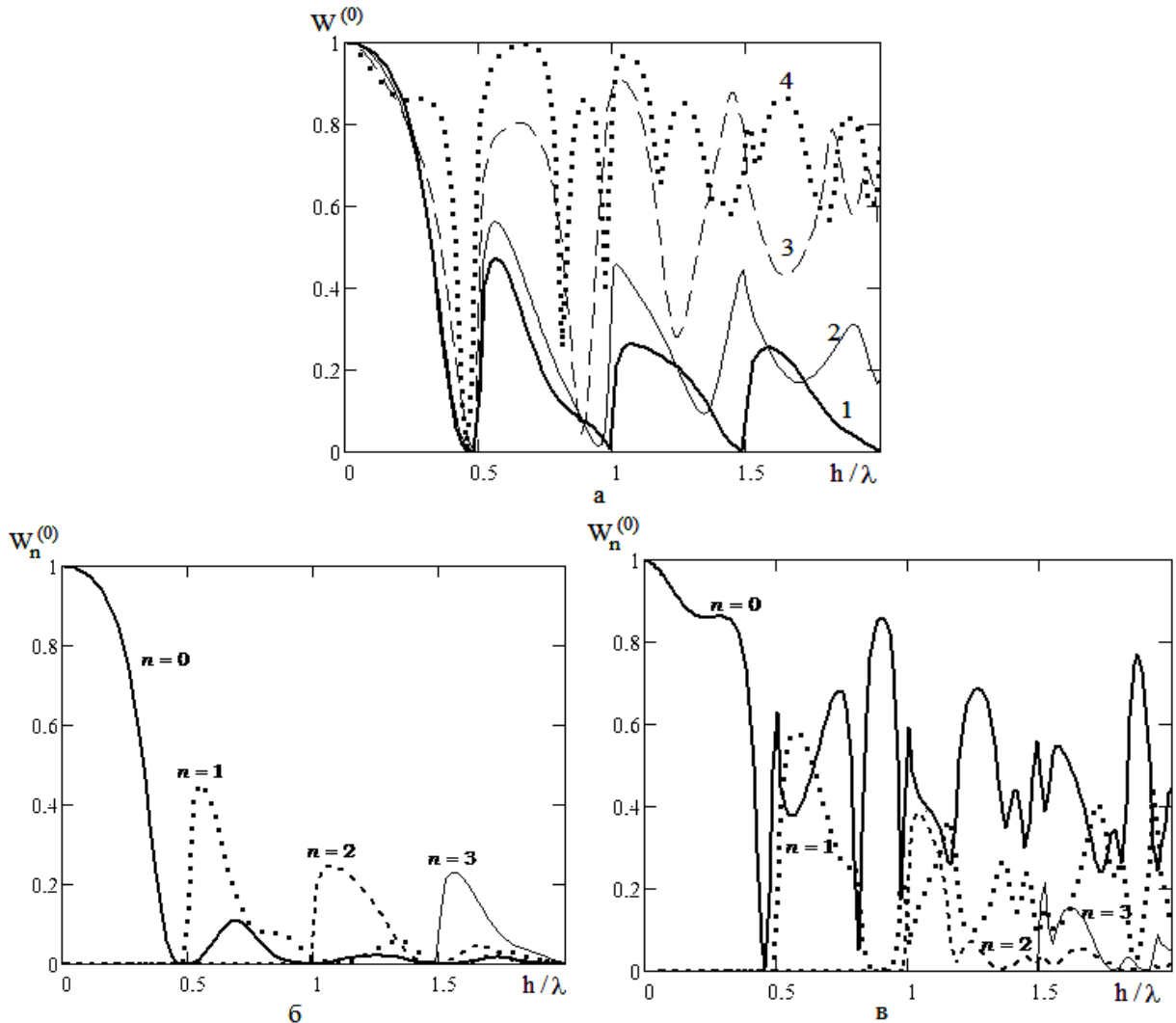


Рис. 5. Частотні характеристики коефіцієнтів проходження  $W^{(0)}$  (а) та коефіцієнтів збудження нормальних хвиль області VI  $W_n^{(0)}$  (б, в): а – крива 1 – хвилевід зі зломом, 2 –  $r_1/h = 0,3$ , 3 –  $r_1/h = 0,6$ , 4 –  $r_1/h = 1$ ; б – хвилевід зі зломом; в – хвилевід з заокругленням  $r_1/h = 1$ .

При збільшенні радіусу заокруглення вигину хвилеводу характер кривих, представлених на рис. 5. б, змінюється. Поступово, починаючи з високих частот, усуваються нульові значення коефіцієнтів збудження мод в околі точок, для яких  $h/\lambda$  кратне половині довжини хвилі. Ефект запирання проявляється лише в околі точки  $h/\lambda = 0,5$ . В якості прикладу на рис. 5 в показані відповідні графіки для випадку  $r_1/h = 1$ .

Зазначимо, що для хвилеводу зі зрізами (рис. 4 в) нерівномірність в частотних характеристиках хвилеводу проявляється ще більше.

Тепер звернемося до заокругленого хвилеводу постійної ширини  $h$ , рис. 4 г. Тут  $r_1$  – внутрішній радіус заокруглення, а зовнішній радіус заокруглення

$r_2 = r_1 + h$ . На рис. 6 показані частотні характеристики коефіцієнтів проходження  $W^0$  (крива 1) та коефіцієнтів збудження нормальних хвиль області VI  $W_n^0$  (значення величини  $n$  визначає номер нормальної хвилі). Зразу відзначимо, що на відміну від залежностей представлених на рис. 5 а, хвилевід постійної ширини у всьому частотному діапазоні є практично прозорим. Проте, як видно на рис. 6, модова структура поля в області VI суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу, тобто від відношення радіусу заокруглення до ширини хвилеводу  $r_1/h$  та хвильової ширини хвилеводу  $h/\lambda$ . При цьому в заокругленому хвилеводі постійної ширини не спостерігається ефект «запирання» хвилеводу. Як бачимо на рис. 6 з ростом величини  $r_1/h$  домінування нульової моди проявляється більше.

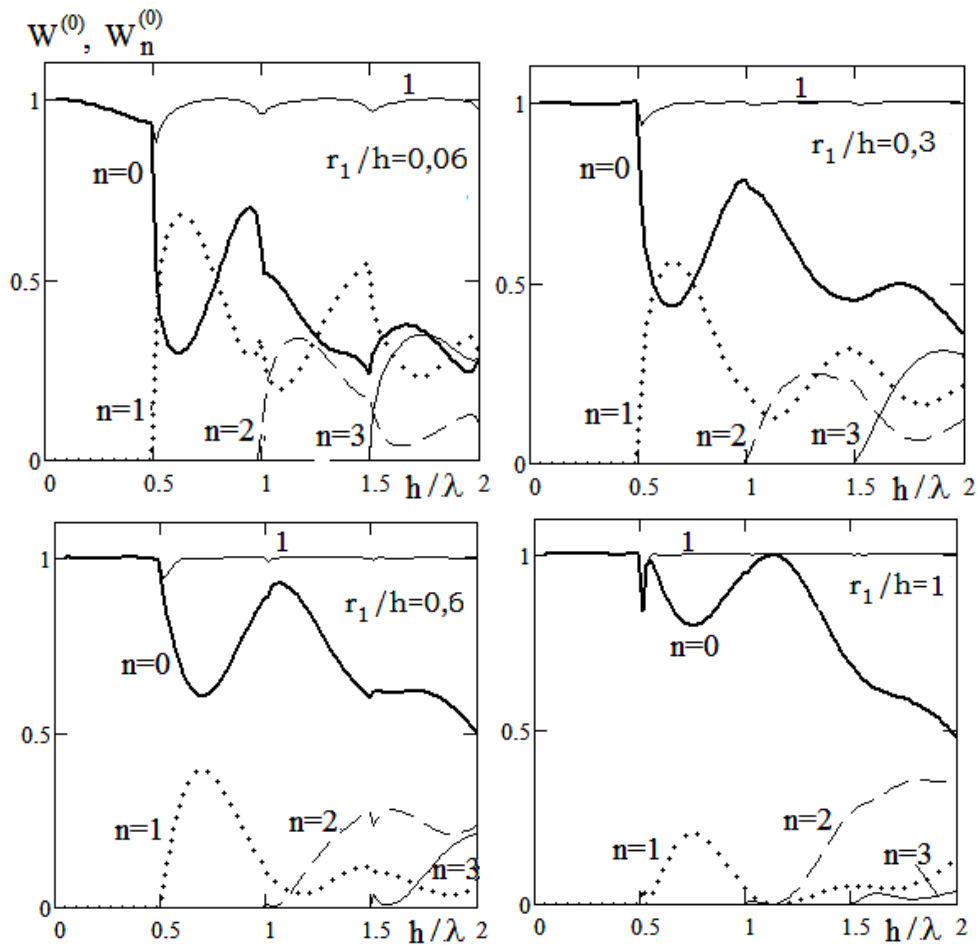


Рис. 6. Частотні характеристики коефіцієнта проходження  $W^0$  (крива 1) та коефіцієнтів збудження нормальних хвиль області VI  $W_n^0$

Звернемось до поширення імпульсного сигналу. В якості часової залежності вихідного сигналу візьмемо нескінчену періодичну послідовність імпульсів у вигляді відрізків синусоїди. Така модель дозволяє найбільш просто використовувати дані поширення гармонічного сигналу для отримання кількісних оцінок поширення імпульсного сигналу.

Слід відзначити, що запропонована модель сигналу не дозволяє розглядати задачу поширення імпульсу у хвилеводі на довільному відрізку часу. Маючи на увазі наявність в ньому дисперсії можна сказати, що таке представлення імпульсу придатне до тих пір, поки запізнювання імпульсу не порівняється з періодом слідування імпульсів.

Параметри імпульсного сигналу виберемо такі: період слідування імпульсів дорівнює  $10\tau_i$ , де  $\tau_i$  – тривалість окремого імпульсу, а імпульс утримує 10 періодів несучої. На рис. 7 представлено амплітудний спектр та часову залежність сигналу. За вибраних параметрів сигналу частота сотої гармоніки дорівнює частоті несучої сигналу. Слід відзначити, що гармоніки зі смуги частот  $\omega_{90}, \omega_{110}$  містять 90 % всієї енергії сигналу, тому даний імпульсний сигнал можна віднести до розряду вузькосмугастих сигналів.

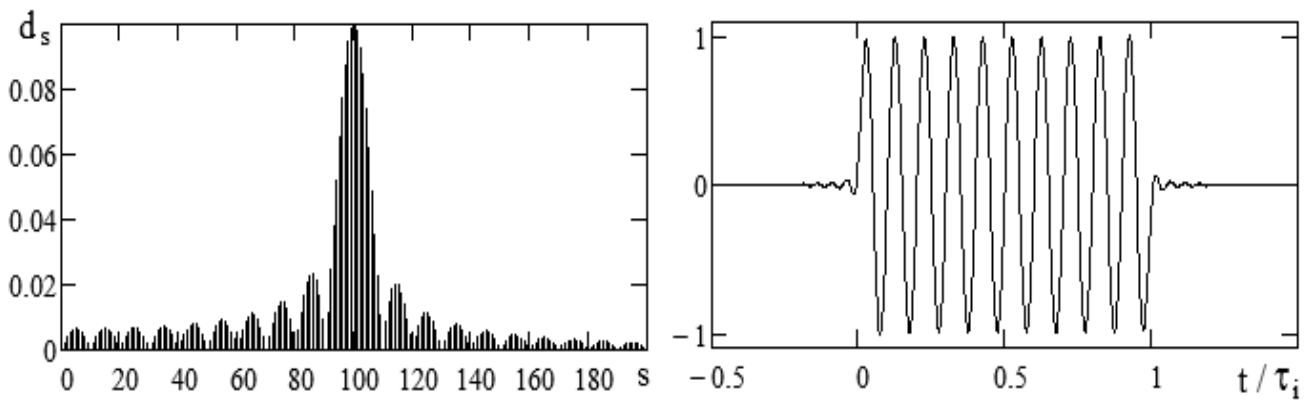


Рис. 7. Амплітудний спектр (зліва) та часова залежність вихідного сигналу (справа)

Розглянемо важливу ситуацію, коли при поширенні в області за вигином імпульс зберігає свою форму. Так згідно рис. 6, при величинах  $h/\lambda_0 = 1,15$  та  $r_1/h = 1$  визначальною є нульова мода. Оскільки дисперсія у нульовій моді відсутня, то імпульс буде зберігати свою форму на будь-якій відстані від місця згину хвилеводу. Цей факт проілюстровано на рис. 8 а, на якому зліва показана часова залежність переміщення в серединній точці хвилеводу, а праворуч – часова залежність амплітуди переміщення в перерізі, що відстає від згину на відстань 150 довжин хвиль на частоті несучої.

Різко зменшимо величину радіусу округлення  $r_1$ , залишив ширину хвилеводу тією ж самою, тобто  $h/\lambda_0 = 1,15$ ,  $r_1/h = 0,06$ . В цьому випадку, згідно з рис. 6, присутні три моди, причому домінуючими будуть нульова та друга. Як бачимо на рис. 8 б, імпульс має сильні спотворення. Він фактично розділився на два імпульси з приблизно однаковим рівнем. При цьому перший імпульс, що утворений нульовими модами, має тривалість рівну початковому імпульсу, а другий, що формується другими модами, внаслідок дисперсії, став розтягнутим у часі і просторі.

У **четвертому розділі** розглянуто задачу про поширення пружної хвилі у хвилеводі з різкою зміною ширини зони вигину рис. 9. Ширина хвилеводу в областях I

та III залишається сталою і дорівнює  $h = r_2 - r_1$ , ширина криволінійної області  $H = r_3 - r_1$ . Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як  $\varphi_0$ .

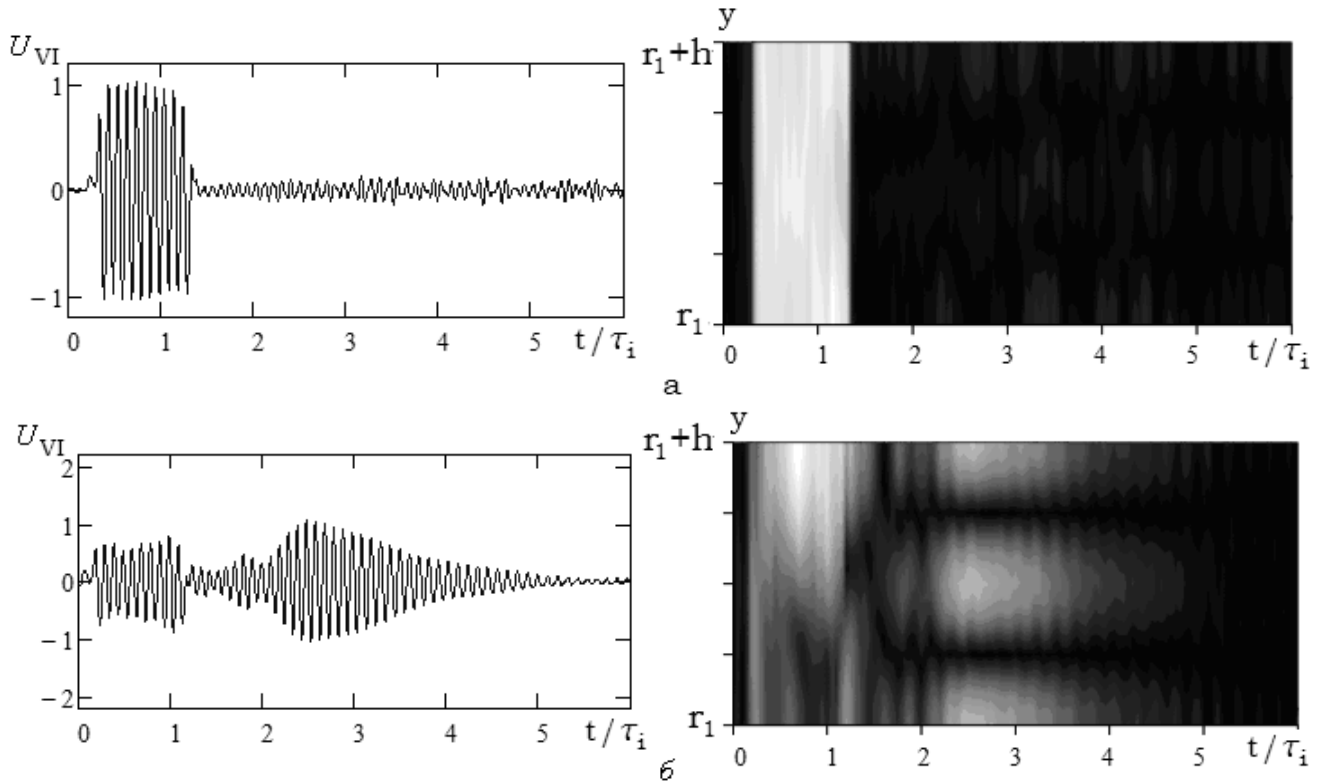


Рис. 8. Часові залежності переміщення в області VI заокругленого хвилеводу постійної ширини в точці з координатами  $y - r_1 / h = 0,5$ ,  $x / \lambda_0$  (зліва) та амплітуда переміщення в перерізі  $x / \lambda_0$  (справа):

- а –  $x / \lambda_0 = -150$ ,  $h / \lambda_0 = 1,15$ ,  $r_1 / h = 1$ ;  
 б –  $x / \lambda_0 = -20$ ,  $h / \lambda_0 = 1,15$ ,  $r_1 / h = 0,06$

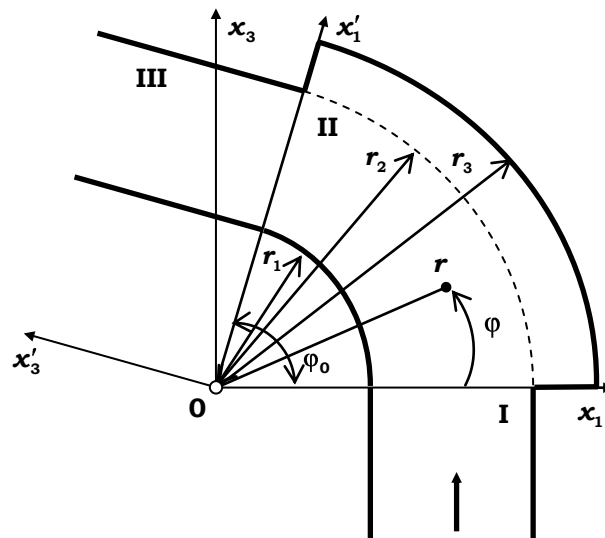


Рис. 9. Геометрія хвилеводу

В роботі показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони вигину залежить від геометричних параметрів області II. При цьому в частотній характеристиці коефіцієнту проходження можливі різкі зміни. Це пов'язано з тим, що область вигину, на певних частотах, поводить себе як об'ємний резонатор. Як приклад, на рис. 10 показані частотні залежності енергетичних коефіцієнтів проходження  $W^0$  (зліва) і збудження мод області III  $W_n^0$  (справа) для двох варіантів геометрії зони вигину. Порівнюючи рис. 10 а і рис. 10 б, слід відмітити суттєву відмінність структури поля за вигином. На рис. 10 б спостерігаємо різке зменшення проходження хвилі крізь зону вигину у вузькому частотному діапазоні.

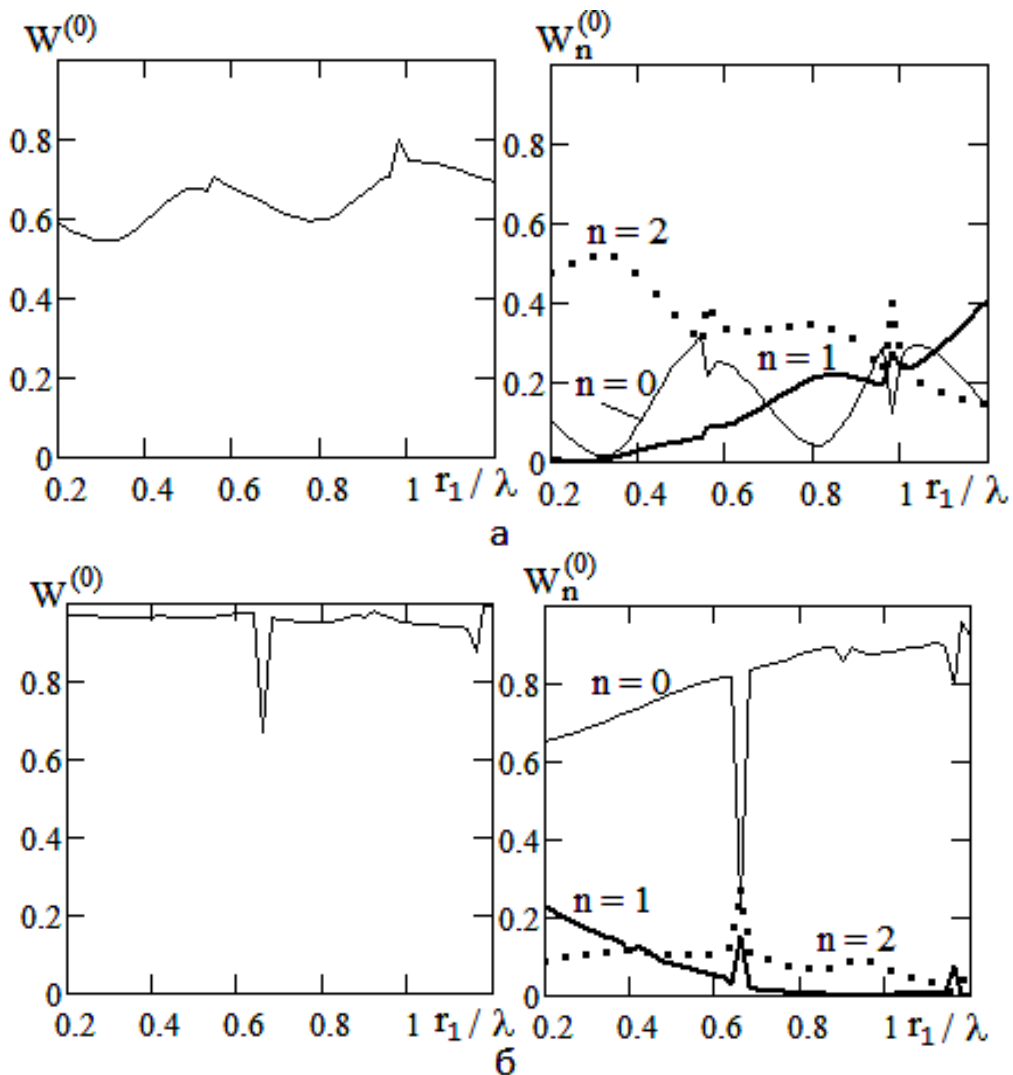


Рис. 10. Залежності енергетичних коефіцієнтів проходження  $W^0$  (зліва) і збудження мод області III  $W_n^0$  (справа):  $h/\lambda = 1,1$ ,  $H/\lambda = 1,8$ :

а –  $\varphi_0 = 70^\circ$ , б –  $\varphi_0 = 120^\circ$

У п'ятому розділі розглянуто задачу про поширення пружної хвилі у двох типах хвилеводів з подвійною зміною напрямку поширення хвилі, рис. 11. Досліджено енергетичні коефіцієнти проходження хвилі в залежності від параметрів хвилеводу.

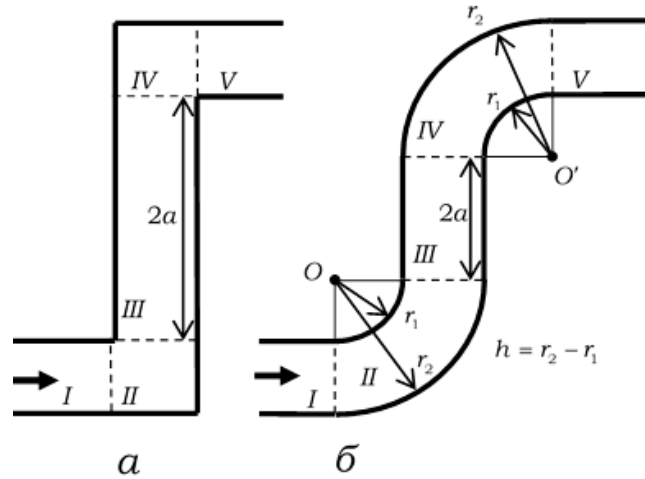


Рис. 11. Геометрія хвелеводів зі зламами (а) і з заокругленням (б)

На рис. 12 показані частотні залежності коефіцієнту проходження нульової моди  $W^0$  для трьох варіантів довжини області III, а саме  $2a/h = 1, 3, 5$ . Крива 1 відповідає хвелеводу зі зламами, криві 2 та 3 – хвелеводу з заокругленням. На трьох рисунках (рис. 12 а, б, в) криві 1 для хвелеводу зі зламами (рис. 11 а) мають схожий характер.

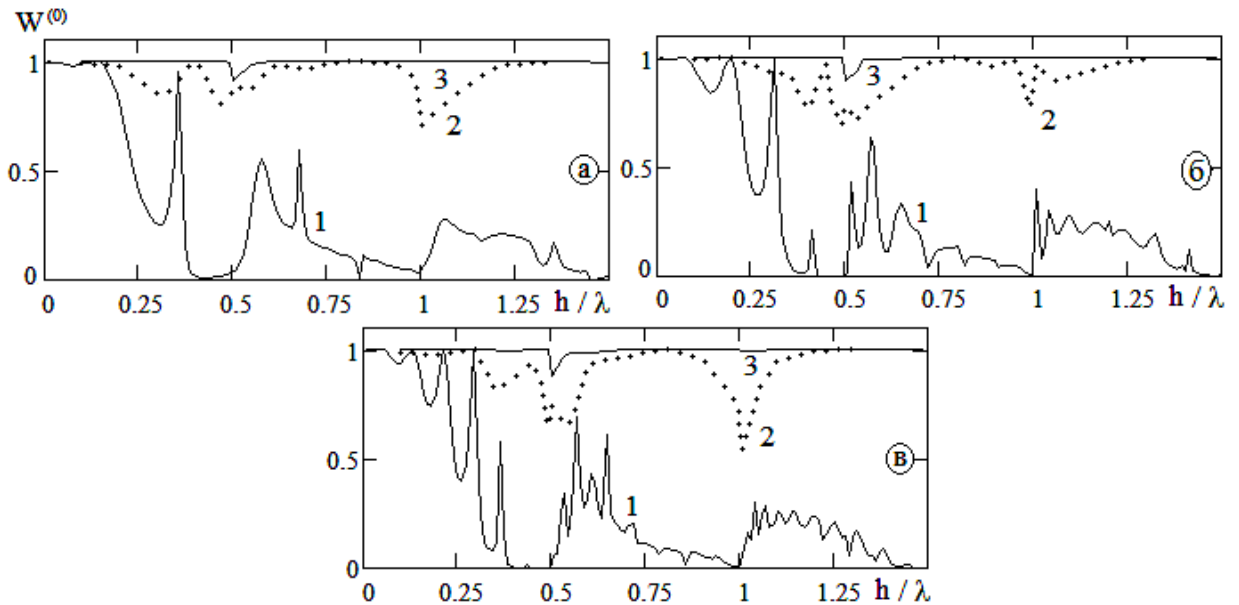


Рис. 12. Частотні залежності коефіцієнту проходження нульової моди  $W^0$  :  
 а –  $2a/h = 1$ , б –  $2a/h = 3$ , в –  $2a/h = 5$ ;  
 1 – хвелевід зі зламами, 2 – округлений хвелевід,  $r_1/h = 0,01$ , 3 – округлений хвелевід,  $r_1/h = 1$

Ситуація докорінно змінюється, коли хвелевід має заокруглену зону вигину (рис. 11 б). При цьому для кривої 2 радіус округлення становить  $r_1/h = 0,01$ . Для кривої 3 радіус округлення дорівнює  $r_1/h = 1$ , що обумовлює плавний перехід між

областями I і III та III і V. Незважаючи на провали в частотній характеристиці на певних ділянках діапазону, коефіцієнт проникнення має високі значення. Отже наявність навіть однієї поверхні заокруглення робить хвилевід значною мірою прозорим.

## ВИСНОВКИ

1. Проведено порівняльний аналіз мод плоскопаралельного та криволінійного хвилеводів однакової ширини. Показано, що власні форми однорідних мод (особливо перших номерів) криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів можуть суттєво відрізнятися.

2. Проведено розв'язання задачі про поширення хвилі у хвилеводі зі згином з різними типами заокруглення зони згину. Показано, що при малому, в порівнянні з довжиною хвилі, радіусу заокруглення згину частотні залежності енергетичного коефіцієнта проходження хвилею зони вигину з графічною точністю співпадають з результатами відповідних розрахунків для хвилеводу зі зломом. Показано, що зі збільшенням радіусу заокруглення аж до величини рівної ширини хвилеводу коефіцієнт проходження збільшується, однак нерегулярність частотної характеристики зберігається. Така ж тенденція має місце і для хвилеводу зі зрізами.

3. Показано, що заокруглення кутової області зі збереженням ширини хвилеводу на всій його довжині приводить майже до повної проникності криволінійної області в широкому діапазоні частот, при цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу.

4. Побудовано розв'язання задачі про поширення вузькосмугастого імпульсного сигналу в заокругленому хвилеводі постійної ширини. Показано, що, підбираючи певним чином геометричні параметри хвилеводу, можна досягти збереження форми імпульсу на шляху його поширення.

5. Проведено розв'язання плоскої задачі поширення хвилі у хвилеводі, який складається з двох плоскопаралельних хвилеводів, з'єднаних областю вигину з різкою зміною ширини. Показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони вигину залежить від кута розкриву області вигину. Показано, що в частотній характеристиці коефіцієнту проходження можливі різкі зміни. Це пов'язано з тим, що область вигину, на певних частотах, поводить себе як об'ємний резонатор.

6. Проведено розв'язання плоскої задачі про поширення хвилі у хвилеводі з подвійною зміною напрямку поширення хвилі. Розглянуто два варіанти області згину: злам та заокруглення. Показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони зламу хвилеводу суттєво залежить від хвильових параметрів хвилеводу. В частотній характеристиці спостерігається наявність інтервалів, де коефіцієнт проходження зменшується практично до нуля. Показано, що заокруглення зони згину робить хвилевід практично прозорим навіть за наявності заокруглення тільки з зовнішнього боку згину.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Маципура В. Т. Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі / В. Т. Маципура, І. В. Вовк, О. О. Трунов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2013. – № 3. – С. 192–195.
2. Трунов О. О. Хвильове поле у хвилеводі з вигином / О. О. Трунов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2014. – № 2. – С. 83–86.
3. Вовк І. В. Поширення хвилі у криволінійному хвилеводі з різкою зміною ширини вигину / І. В. Вовк, В. Т. Маципура, О. О. Трунов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2014. – № 3. – С. 28–31.
4. Трунов О. О. Поширення хвилі у хвилеводі з подвійним вигином / О. О. Трунов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2014. – № 4. – С. 111–114.
5. Вовк І. В. Особенности прохождения волны через округление изгиба плоского волновода / И. В. Вовк, В. Т. Маципура, А. А. Трунов // Акустичний вісник. – 2013-2014. Том 16, № 3. – С. 3–14.
6. Трунов А. А. Волновое поле в волноводе с двумя изгибами / А. А. Трунов // Естественные и технические науки. – 2015. – № 5 (83). – С. 24–25.
7. Маципура В. Т. Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі / В. Т. Маципура, І. В. Вовк, О. О. Трунов // II Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» присвячена 150-річчю кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 28–30 серп. 2013 р.: матеріали конф. – К., 2013. – С. 102–195.
8. Маципура В. Т. Нормальні хвилі криволінійного хвилеводу / В. Т. Маципура, О. О. Трунов // «КОНСОНАНС – 2013»: акуст. симп., 1–2 жовт. 2013 р.: тези доп. – К., 2013. – С. 61.
9. Трунов О. О. Хвильовий процес у криволінійному хвилеводі з різкою зміною ширини хвилеводу / О. О. Трунов // Міжнар. математична конф. «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчю від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р.: матеріали конф. – К., 2014. – С. 130.
10. Трунов О. О. Поширення хвиль у криволінійному хвилеводі змінної товщини / О. О. Трунов // III Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки», 27–29 серп. 2015 р.: матеріали конф. – К., 2015. – С. 82.

## АНОТАЦІЯ

*Трунов О. О.* Поширення хвиль у вигнутих хвилеводних структурах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2016.

Розглянута задача поширення нормальної SH-хвилі в плоскому пружному хвилеводі з округленим вигином та вільними границями. Характерний розмір хвилеводу порівняний з довжиною хвилі. Задача була розв'язана використовуючи метод часткових областей. Побудовані частотні залежності фазових та групових швидкостей мод криволінійного хвилеводу. Проведено порівняльний аналіз власних форм криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів. Проведені розрахунки енергетичного коефіцієнту проходження хвилі крізь вигин та енергетичних коефіцієнтів збурення мод в області хвилеводу за вигином в залежності від геометричних параметрів хвилеводу. Розглянута задача про поширення імпульсного сигналу у вигнутому хвилеводі постійної ширини. Показана можливість збереження форми імпульсу на шляху його поширення. Розглянута плоска задача поширення хвилі в криволінійному хвилеводі з різкою зміною ширини вигину. Досліджено залежність енергетичного коефіцієнта проходження хвилею зони вигину в залежності від хвильового розміру та кута розкриття криволінійної частини хвилеводу. Розглянута плоска задача про поширення хвилі у хвилеводах з подвійним згином. Досліджено залежність енергетичного коефіцієнта проходження хвилею зони нерегулярності хвилеводу.

Ключові слова: криволінійний хвилевід, вигин, коефіцієнт проходження, імпульс, хвильова структура мод.

## АННОТАЦІЯ

*Трунов А. А.* Распространение волн в изогнутых волноводных структурах. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2016.

Рассмотрена задача распространения нормальной SH-волны в плоском волноводе с разными типами оформления зоны изгиба. Характерный размер волновода сравним с длиной волны. Задача была решена используя метод частичных областей. Построены частотные зависимости фазовых и групповых скоростей мод криволинейного волновода. Проведён сравнительный анализ собственных форм криволинейного и плоскопаралельного волноводов. Рассчитано значение энергетического коэффициента прохождения волной зоны изгиба и энергетических коэффициентов возбуждения мод в области волновода за изгибом в зависимости от геометрических параметров волновода. Рассмотрена задача распространения импульсного сигнала в изогнутом волноводе постоянной ширины. Показана возможность сохранения формы импульса на пути его распространения. Рассмотрена задача распространения волны в криволинейном волноводе с резким изменением ширины зоны изгиба. Исследована зависимость энергетического коэффициента прохождения волной зоны изгиба в зависимости от волнового размера и угла раскрытия криволинейной части волновода. Рассмотрена задача распространения волны в волноводе с двойным изгибом. Исследована зависимость энергетического коэффициента прохождения волной зоны нерегулярности волновода.

*Ключевые слова:* криволинейный волновод, изгиб, коэффициент прохождения, импульс, волновая структура мод.

## ANNOTATION

*Trunov O. O.* The wave propagation in the bent waveguides. – Manuscript.

The thesis for the degree of candidate of physics and mathematics sciences, specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solids. – Taras Shevchenko National University of Kyiv of MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The propagation of SH-wave in bent elastic waveguide in the case of free boundaries is considered. Dimensions of the waveguide are proportional to the wave length. The problem was solved by the method of partial regions. Frequency and phase relationships of modes in bent waveguide were constructed. The comparative analysis of modes in bent waveguide and in straight waveguides was done. The infinite system of algebraic equations from matching condition was determined and using method of reduction was solved. Calculation of energy transmission coefficient through the bend and coefficients of excitation of the modes beyond the bend in the waveguide depending on geometrical parameters of the waveguide was done. Obtained result fulfillment of matching condition and law of energy conservation was checked. At certain combinations of these parameters is the dominance of one of the waveguide modes. Two representations of wave mode structure in the bend were used in current article. Calculated fields in the waveguide using both representations are equal. The propagation of the pulse signal in the bent waveguide with constant width was considered. The possibility of saving pulse signal shape was shown. The plane problem of wave propagation in the waveguide with thickened bend was considered. Calculation of energy transmission coefficient through the bend depending on the angle of the bend and size of the waveguide was done. The plane problem of wave propagation in the waveguide with two bends was considered. Two variants of bend were researched: kink and curvature. The results of these variants were compared. Calculation of energy transmission coefficient through the bends and coefficients of excitation of the modes beyond the first and the second bend in the waveguide depending on geometrical parameters of the waveguide was done. Transmission coefficient in curved waveguide almost equals unity unlike the waveguide with kink.

*Key words:* the bent waveguide, the bend, transmission coefficient, a pulse signal, wave mod structure.

---

Підписано до друку 24.05.2016 р. Формат 60x90/16.  
Ум. друк. арк. 0,9. Обл.-вид. арк. 0,9.  
Тираж 100. Зам. 59.

---

«Видавництво “Науковий світ”»<sup>®</sup>  
Свідоцтво ДК № 249 від 16.11.2000 р.  
м. Київ, вул. Казимира Малевича (Боженка), 23, оф. 414.  
200-87-15, 050-525-88-77  
E-mail: [nsvit23@ukr.net](mailto:nsvit23@ukr.net)  
Сайт: [nsvit.cc.ua](http://nsvit.cc.ua)