КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Теорія ймовірностей та математична статистика

Практикум

Навчальний посібник
для студентів закладів вищої освіти
денної та заочної форм навчання

Київ

2022

УДК 519.2 (075.8)

Ляшенко О.І., Кравець Т.В., Банна О.Л., Шпирко В.В.

Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум: електронний навчальний посібник. – 2022. – 256 с.

Посібник містить теоретичні відомості та задачі з основних розділів теорії ймовірностей та математичної статистики відповідно до програми цього курсу для спеціальностей галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» закладів вищої освіти. Подано багато розібраних прикладів і задач, а також відомості з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, які широко використовуються в сучасних соціално-економічних дослідженнях. До задач для аудиторної та самостійної роботи дано відповіді, до більш складних задач — вказівки та відповіді. Запропоновано по 30 варіантів задач для індивідуальної роботи з кожного розділу теорії ймовірностей та комплекс задач з математичної статистики.

Рецензенти: **Ю.С. Мішура**, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

В.С. Григорків, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри економіко-математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Рекомендовано до друку вченою радою економічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, протокол №13 від 17 квітня 2022 року.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу добору задач покладено багаторічний досвід викладання курсу теорії ймовірностей та математичної статистики на економічному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка та у Тернопільському національному економічному університеті.

Посібник складається з двадцяти двох розділів. В ньому викладено теоретичні відомості та підібрано задачі з комбінаторики, основ теорії ймовірностей, теорії оцінювання невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез, регресійного та дисперсійного аналізів, аналізу часових рядів. У кожному розділі (крім розділу 22) наведено приклади розв'язання задач, а також задачі для аудиторної та самостійної роботи. В кінці кожного розділу пропонуються задачі для індивідуальної роботи, які також можна використати при проведенні модульно-рейтингового оцінювання знань. У додатку вміщено основні статистичні таблиці, необхідні для розв'язання прикладів та задач.

Посібник може бути корисним для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, аспірантів та науковців, які використовують у своїх дослідженнях імовірнісно-статистичні методи.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Теоретичні відомості

Основний принцип комбінаторики (правило множення кількості способів). Нехай треба послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю – n_3 способами і т. д., то сукупність з k дій може бути виконана $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Розміщення з n елементів по k. Упорядковані k-елементні підмножини множини, що містить n елементів, називаються ***розміщеннями*** з n елементів по k. Число розміщень з n елементів по k дорівнює

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \tag{1}$$

Справді, перший елемент можна вибрати n способами, другий – $(n-1)$ способами і т. д., …, k-й елемент – $(n-k+1)$ способами. За правилом множення одержуємо формулу числа розміщень.

Перестановки. Множина з n елементів називається ***впорядкованою,*** якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа. Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Різні впорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів (тобто можуть бути утворені з тієї самої множини), називаються ***перестановками*** цієї множини. Число перестановок множини з n елементів дорівнює

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! \tag{2}$$

Справді, перестановки є розміщеннями при $n = k$, тому (2) випливає з (1) при $n = k$.

Комбінації (сполуки) з n елементів по k. Нехай A – множина, що складається з n елементів. Довільна k-елементна підмножина множини A називається ***комбінацією*** з n елементів по k елементів. Припустимо, що порядок елементів у підмножинах неістотний. За цієї умови число k-елементних підмножин множини з n елементів позначають C_n^k. Воно дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ де } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{3}$$

Дійсно, можна утворити всі сполуки, потім переставити в кожній елементи всіма можливими способами, і ми одержимо розміщення. За правилом множення $C_n^k \cdot k! = \dfrac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$, звідки випливає (3).

Домовимось, що $0! = 1$, тоді $C_n^0 = 1$.

Справедливі властивості: $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Біном Ньютона. Нехай a і b – дійсні числа, n – натуральне число. Тоді $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$. Зокрема, якщо $a = b = 1$, то

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Величина $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$ є (k+1)-м членом в розкладенні бінома, $k = 0, 1, \ldots, n.$

Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називається довільна впорядкована підмножина з k елементів, узятих таким чином, що кожен елемент, який уже ввійшов у сполуку, може повертатись у сукупність, з якої був вибраний.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k знаходиться за формулою

$$\overline{A_n^k} = n^k.$$

Число способів розбиття множини з n елементів на m груп. Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – цілі невід'ємні числа, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Число способів, якими можна подати множину A з n елементів у вигляді набору з m множин, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів, дорівнює

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_m!}.$$

При цьому порядок підмножин є суттєвим, тобто $(k_1 = 2,\ k_2 = 3)$ і $(k_1 = 3,\ k_2 = 2)$ – це різні розбиття, але порядок елементів у підмножинах несуттєвий.

Перестановки з повтореннями. Число різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m-го типу, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, дорівнює

$$C_n\left(k_1, \ldots, k_m\right) = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_m!}.$$

Комбінацією з повтореннями з n елементів по k (причому k може бути більшим за n) називається довільна впорядкована підмножина, яка складається з k не обов'язково різних елементів, що взяті з даних n і різняться принаймні одним елементом, причому порядок елементів не має значення.

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k знаходиться за формулою

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. У камері схову встановлено кодовий замок з чотирьох цифр. Скільки різних комбінацій можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) цифри в коді можуть повторюватися?

б) цифри в коді не повторюються?

в) код починається з цифри "3"?

г) код є парним числом?

д) код – парне число, цифри якого не повторюються?

Розв'язок.

а) Якщо цифри у коді можуть повторюватися, то на кожній позиції у коді може стояти будь-яка з 5 цифр, тобто загальна кількість варіантів 5·5·5·5=625. Або скористаємось формулою кількості розміщень з повтореннями з 5 елементів по 4, тобто $\overline{A_5^4} = 5^4 = 625$.

б) На першому місці може стояти будь-яка з 5 цифр, на другому – 4 (оскільки одна вже стоїть на першому місці), на третьому – 3, на четвертому – 2 цифри. Загальна кількість варіантів підраховується за основним принципом комбінаторики: 5·4·3·2=120.

в) На першому місці стоїть цифра "3", на інших місцях можуть стояти будь-які з 5 цифр. Загальна кількість варіантів 5·5·5=125.

г) Код є парним числом, якщо на останньому місці стоїть парна цифра, тобто або 2, або 4. На інших місцях можуть стояти будь-які цифри: 5·5·5·2=250.

д) Якщо цифри не можуть повторюватися, то на останньому місці стоїть парна цифра, тоді на передостанньому місці можуть стояти лише чотири цифри, на другому – 3, на першому – 2 цифри. Загальна кількість варіантів 2·3·4·2=48.

Задача 2. Скільки можна зробити перестановок з n елементів, у яких дані 2 елементи не стоять поруч?

Розв'язок. Визначимо число перестановок, у яких 2 елементи стоять поруч (a зліва, b – праворуч, і навпаки). Розставити елементи a і b (коли a попереду від b) можемо $(n-1)$ способами. Варіантів, коли b попереду від a, стільки ж. Тобто розставити поруч елементи a і b на n місцях можемо $2(n-1)$ способами. Коли розставили a і b, то залишилось $(n-2)$ елементи, які можемо переставити $(n-2)!$ способами. Тоді число перестановок, якщо a та b стоять поруч, дорівнює $2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$. Якщо від загальної кількості варіантів переставити n елементів віднімемо кількість варіантів, коли a та b стоять поруч, отримаємо кількість перестановок, коли a та b не стоять поруч $n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$.

Або ж міркування можуть бути такими. Об'єднаємо елементи a і b та будемо вважати, що ab один елемент, то загальна кількість елементів зменшиться на один, тобто їх буде не n, а $(n-1)$, які можна переставити $(n-1)!$ способами. Враховуючи, що a і b можна переставити між собою $2!$ способами, то число перестановок, якщо a та b стоять поруч, дорівнює $2(n-1)!$. Тому шукане число перестановок дорівнює $n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$.

Задача 3. Скількома способами можна скласти набір з 8 книжок, маючи 20 книг?

Розв'язок. Оскільки порядок книжок у наборі неважливий, число способів дорівнює $C_{20}^{8} = \dfrac{20!}{8!\,12!} = 125970$.

Задача 4. В деякій установі працівники можуть мати не більше 7 банківських рахунків у фіксованих 7 банках, і набори рахунків не можуть повторюватись. Якою може бути максимальна кількість працівників в цій установі?

Розв'язок. Працівників, що не мають банківських рахунків, може бути не більше одного, тих, хто має k рахунків, може бути не більше C_7^k працівників, $1 \le k \le 7$, отже, загальна кількість працівників не може перевищувати $1 + C_7^1 + ... + C_7^7 = 2^7 = 128$ осіб.

Задача 5. Скількома способами можна розставити білі шахові фігури (ферзь, король, 2 слона, 2 тури та 2 коня) на одній лінійці шахової дошки?

Розв'язок. Оскільки 2 білих слона не відрізняються один від одного, так само як і 2 тури та 2 коня, то ми маємо перестановки з повтореннями. Значить, число способів дорівнює $C_8(2,2,2,1,1) = \dfrac{8!}{2!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 5040$.

Задача 6. Нехай $\pi_1,...,\pi_n$ – різні натуральні прості числа, $\alpha_1,...,\alpha_n$ – натуральні числа, які можуть повторюватись. Скільки дільників має число $q = \pi_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \pi_n^{\alpha_n}$, включаючи 1 та q?

Розв'язок. Кожний дільник має вигляд $\pi_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot \pi_n^{\beta_n}$, де $0 \le \beta_k \le \alpha_k$, $1 \le k \le n$. Оскільки, таким чином, β_k приймає $1+\alpha_k$ значень, то за правилом множення кількості способів число дільників дорівнює $\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)$.

Задача 7. Деяка установа має в штаті 87 осіб. З них 47 знають англійську мову, 35 – французьку і 23 знають обидві мови. Скільки співробітників не знають ні англійської, ні французької мови?

Розв'язок. За умовою, 12 осіб знають тільки французьку мову, але не знають англійської. Тому в цілому 47+12=59 осіб знають хоча б одну мову, а 87-59=28 осіб не знають жодної мови.

Задача 8. У кімнаті студентського гуртожитку проживають 3 студенти, які мають 5 чашок, 6 тарілок і 7 чайних ложок, і ці всі предмети різні. Скількома способами можна накрити стіл для чаювання?

Розв'язок. Оскільки порядок предметів грає роль, то за правилом множення, число способів дорівнює

$$A_5^3 \cdot A_6^3 \cdot A_7^3 = \frac{5!}{2!} \cdot \frac{6!}{3!} \cdot \frac{7!}{4!} = (5\cdot4\cdot3)\cdot(6\cdot5\cdot4)\cdot(7\cdot6\cdot5) = 60\cdot120\cdot210 = 1512\,000.$$

Задача 9. У студентській столовій є 5 видів тістечок. Скільки є способів купити 7 тістечок?

Розв'язок. Потрібно знайти кількість комбінацій, що складаються з 7 не обов'язково різних елементів з даних п'яти, які різняться принаймні одним елементом (порядок елементів не має значення), тому

$$\overline{C_5^7} = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = \frac{11!}{7!\cdot 4!} = 330.$$

Або це рівносильно тому, що візьмемо 7 тістечок. Щоб відокремити тістечка різного виду, знадобиться 5-1=4 перегородки. Позначимо тістечка кружечками, а перегородки вертикальними рисочками. Наприклад $OOO\,|\,|\,OO\,|\,O\,|\,O$ означає розташування 7=(3, 0, 2, 1, 1) тістечок і чотирьох перегородок, тобто в даному випадку студент придбає 3 тістечка першого виду, жодного тістечка другого виду, два тістечка третього виду та по одному четвертого і п'ятого видів. Від перестановки тістечок і перегородок, отримаємо різні вибори студента. Таким чином, виберемо 7 місць з 11 можливих для тістечок, а на місця, що залишились, розставимо рисочки. Всього таких варіантів $C^7_{5+7-1} = C^7_{11} = \dfrac{11!}{7!\cdot 4!} = 330$.

Задача 10. Скільки різних частинних похідних порядку r має аналітична функція $f(x_1,...,x_n)$?

Розв'язок. Ми можемо диференціювати по першій змінній r_1 разів, по другій r_2 разів, …, по n-ій – r_n раз, причому $r_1 + r_2 + ... + r_n = r$, $r_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$. Це рівносильно тому, що у нас є r куль, ми відібрали r_1 і поклали в 1-ий ящик, потім з решти вибрали r_2 і поклали в другий і т. д. Позначимо кожне таке розташування куль рисками між ними. Наприклад $|OO|OOO|||OOO|$ означає розташування 8=(2, 3, 0, 0, 3) куль по п'яти ящиках. Таким чином, треба вибрати місця для розташування рисочок, крім першої та останньої. Тоді всього рисочок $n-1$ і можна розставити на $n+r-1$ місце. Отже, число різних частинних похідних дорівнює $C^{n-1}_{n+r-1} = C^r_{n+r-1}$.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

1.1. З Києва до Одеси можна вибрати один із 4 залізничних або один із 3 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорожі: а) Київ–Одеса; б) Київ–Одеса–Київ; в) Київ–Одеса–Київ, якщо зворотній шлях провести у поїзді?

1.2. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститися з неї? Дати відповідь на те ж запитання, якщо підйом та спуск здійснювати різними шляхами.

1.3. У розіграші чемпіонату країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

1.4. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4?

1.5. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожну з цих цифр використовувати не більше одного разу?

1.6. Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?

1.7. На першому курсі вивчають 10 предметів. У понеділок 4 пари, причому всі пари різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

1.8. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

1.9. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій – m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками, взятими на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник проведеними прямими?

1.10. Скільки партій буде зіграно в шаховому турнірі, якщо кожні два з n учасників зустрінуться лише один раз?

1.11. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

1.12. Скількома способами можна розставити на шаховій дошці розмірами $n \times n$ дві різнокольорові тури так, щоб вони не били одна одну?

1.13. Автомобільний номер складається з двох букв і чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, які можна скласти з цифр від 0 до 9 та 30 букв українського алфавіту?

1.14. Комісія складається з голови, двох його заступників і ще 4 осіб. Скількома способами члени комісії можуть розподілити між собою обов’язки?

1.15. Скільки є способів розподілити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала 5 предметів?

1.16. На книжковій полиці розміщено 10 томів. Скількома способами можна розставити їх так, щоб при цьому 1-й та 2-й томи не стояли поруч?

1.17. З 12 осіб кожен день протягом 6 днів вибирають 2 чергових. Визначити кількість різних списків чергових, якщо кожна особа чергує лише один раз.

1.18. Скільки різних слів можна утворити перестановкою букв у слові: а) “математика”? б) “комбінаторика”?

1.19. Скільки тризначних чисел, які діляться на 3, можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожне число не повинно мати однакових цифр?

1.20. Якщо повернути аркуш паперу на 180°, то цифри 0, 1, 8 не змінюються, 6 і 9 переходять одна в одну, а інші цифри втрачають смисл. Скільки існує семицифрових чисел, величина яких не змінюється при повороті аркуша паперу на 180°?

1.21. З урни, що містить 10 чорних та 6 білих куль, вибирають 2 чорні та 3 білі кулі. Скількома способами це можна зробити?

1.22. Скількома способами можна розмістити на полиці 4 різні книги (позначимо їх A, B, C, D)?

1.23. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \dots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

1.24. Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

1.25. Студентові треба за 8 днів скласти 4 іспити. Скількома способами це можна зробити?

1.26. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ..., n\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поруч і в порядку зростання?

1.27. Скільки існує перестановок з n елементів, серед яких між двома даними елементами стоїть r елементів?

1.28. На зборах має виступити 4 особи: A, B, C, D. Скількома способами їх можна записати в список ораторів, якщо B не може виступити раніше, ніж A?

1.29. Скількома способами можна розмістити n гостей за круглим столом?

1.30. Шість ящиків різних матеріалів доставляють на вісім поверхів будівництва. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? У скількох із них на восьмий поверх буде доставлено не менше двох матеріалів?

1.31. Ліфт, у якому перебуває 9 пасажирів, зупиняється на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по дві, три, чотири особи. Скількома способами це можна зробити?

1.32. Студентська група складається з 10 осіб. Скількома способами можна вибрати з них 2 підгрупи по 6 осіб так, щоб ці підгрупи відрізнялись хоча б одною особою?

Завдання для індивідуальної роботи

1.1. Скільки існує варіантів двокольорового прапора, на якому зображено дві горизонтальні смуги різних кольорів, якщо є вибір з тканин п'яти різних кольорів?

1.2. У кредитному відділені банку працюють вісім осіб. Скількома способами можна розподілити між ними три премії: а) однакового розміру; б) різних розмірів, відомих заздалегідь?

1.3. Скільки різних кодів з десяти позицій можна скласти з шести вертикальних і чотирьох горизонтальних штрихів, якщо на одну позицію можна розміщувати тільки один штрих?

1.4. П'ять плавців беруть участь у змаганнях. Скількома способами можуть бути:

а) розподілені між ними п'ять місць (жодне з місць не може бути поділене між учасниками);

б) розподілені призові місця: перше, друге, третє (жодне з місць не може бути поділене між учасниками);

в) вибрані з них три учасники запливу?

1.5. Скільки існує способів придбання двох касових апаратів виробництва однієї країни, якщо в асортименті є 5 видів різних касових апаратів виробництва України, 4 – виробництва Китаю, 3 – виробництва Японії.

1.6. У студентській групі 15 дівчат і 12 хлопців. Скількома способами можна розподілити 7 квитків у театр, щоб чотири з них одержали дівчата, а три – хлопці, або щоб навпаки, три одержали хлопці, а чотири – дівчата.

1.7. Керівник служби безпеки банку повинен щодня розставляти десять охоронців по десятьох постах. З метою посилення безпеки одна і та ж комбінація розстановки охоронців по постах не може повторюватися частіше одного разу на місяць. Щоб оцінити, чи можливо це, знайти кількість різних комбінацій розстановки охоронців.

1.8. Експерт з управління цінними паперами розглядає 20 об’єктів для інвестування. Лише 10 з них будуть вибрані. Скількома способами це можна зробити?

1.9. П’ять авіакомпаній подали заявку на експлуатацію нового міжнародного маршруту. Лише трьом буде надано дозвіл на його експлуатацію. Скільки різних груп авіакомпаній можна вибрати?

1.10. Декан факультету хоче відібрати 4 четвертокурсники, 3 третьокурсники, 2 другокурсники і 2 першокурсники до математичної команди на олімпіаду. 10 четвертокурсників, 8 третьокурсників, 8 другокурсників, 6 першокурсників подали заявки. Скільки різних команд можна скласти?

1.11. На сім заяв студентів профком має 3 путівки на курорт «Трускавець». Скількома способами їх можна розподілити, якщо: а) усі путівки в різні санаторії; б) усі путівки в один санаторій.

1.12. У диспетчерську таксопарку надійшло одночасно 7 замовлень з трьох готелів: 2 замовлення з готелю «Київ», чотири – з готелю «Салют» і одне – з готелю «Братислава». Скільки існує різних способів розподілу 7 машин за цими замовленнями?

1.13. У продаж надійшли листівки 10 різних видів. Скількома способами можна утворити набір з 12 листівок? З 8 листівок?

1.14. За даними геологорозвідки одна з 10 ділянок землі, цілком імовірно, містить нафту. Проте компанія має кошти для буріння лише 8 свердловин. Скількома способами можна вибрати 8 різних ділянок для буріння?

1.15. Студентське кафе пропонує меню, що складається з п’яти рибних і м’ясних страв, трьох салатів, чотирьох напоїв і двох десертів. Скільки різних варіантів обіду може замовити відвідувач ресторану, якщо його обід буде складатись з салату, одного десерту і одного напою та рибної або м’ясної страви?

1.16. При зустрічі п’ять чоловіків потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було зроблено?

1.17. На одному з підприємств корпорації є три різні вакансії. Президент корпорації розглядає заяви про прийняття на роботу 10 випускників магістерського курсу. Скількома способами президент може заповнити випускниками ці вакансії?

1.18. В магазині канцелярських товарів є в наявності 18 кулькових ручок червоного кольору, 8 – синього кольору і 6 – чорного кольору. Крім того, в наявності є 4 ручки, які можуть писати синім і червоним кольором, а також дві ручки, які можуть писати трьома кольорами. Скількома способами можна зробити покупку, щоб мати можливість писати усіма трьома кольорами?

1.19. Підприємство для маркування своєї продукції використовує товарний знак, що складається з чотирьох смуг, дві з яких червоного кольору, одна жовтого кольору, одна синього. Скільки різних товарних знаків може бути складено?

1.20. Наукове товариство складається з 30 осіб. Треба вибрати голову, заступника, вченого секретаря і казначея. Скількома способами це можна зробити, якщо кожний член товариства може займати лише одну посаду?

1.21. Скільки трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри від 0 до 5, якщо: а) цифри не повторюються; б) отримане число має бути непарним?

1.22. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри від 0 до 5, якщо: а) отримане число має бути парним; б) отримане число має бути кратним 5?

1.23. Скількома способами можна розставити 10 книжок на двох полицях по 5 книжок на кожній?

1.24. Скільки різних дробів, більших за одиницю, можна скласти із чисел 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 17, щоб одне число було у чисельнику дробу, а інше – у знаменнику?

1.25. Скільки різних послідовностей із нулів та одиниць можна скласти, щоб кожна з них містила: а) рівно 6 символів; б) не більше 6 символів?

1.26. Четверо біатлонисток з України брали участь у змаганнях. Скількома способами могли бути розподілені їхні місця у загальному заліку, якщо відомо, що: а) всі вони посіли місця не нижче 12-го; б) рівно одна з них увійшла до трійки призерів, і всього у змаганнях брали участь 25 учасниць?

1.27. Скількома способами можна розташувати на полиці 5 різних книг з алгебри і 4 різних книги з геометрії, щоб всі книги з одного предмету стояли поруч?

1.28. Скількома способами можна розташувати на полиці 4 різних книги з алгебри і 3 різних книги з геометрії, щоб жодні дві книги з одного предмету не стояли поруч?

1.29. На секції студентської конференції, де загалом виступають 10 учасників, мають виступити троє учасників з однієї групи: Андрій, Олена, та Сергій. Скількома способами можна розподілити цих трьох учасників у загальному списку виступаючих, якщо: а) Андрій хоче виступити безпосередньо після Олени, але не останнім; б) Сергій має виступити раніше за інших своїх одногрупників?

1.30. Шаховий гурток відвідують 3 дівчини і 5 хлопців. Для участі у змаганнях серед них необхідно вибрати команду із чотирьох учасників, до якої має входити хоча б одна дівчина. Скількома способами це можна зробити?

РОЗДІЛ 2. ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ, ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Теоретичні відомості

Стохастичний експеримент, простір елементарних подій

У теорії ймовірностей розглядаються ***випадкові (стохастичні) експерименти***, які в незмінних умовах можна повторити будь-яку кількість раз, але результати яких не можна передбачити однозначно. Такі експерименти будемо називати випробуваннями, спостереженнями чи дослідами. Підкидання монети чи гральної кості, шаховий турнір, підрахунок кількості студентів що прийшли на лекцію, спроба підключення до інтернету (ви ніколи не можете бути впевненими що підключитись вдасться, поки не спробуєте), спостереження за часом очікування автобуса на зупинці, постріли з рушниці по мішені, перевірка на придатність партії моніторів чи іншої продукції – все це стохастичні експерименти.

Найпростіший результат випробування називається ***елементарною подією*** і позначається ω. Зокрема, різні елементарні події не можуть відбутися одночасно. Множина всіх елементарних подій називається ***простором елементарних подій*** і позначається символом грецького алфавіту Ω. ***Простір елементарних подій*** **Ω** – сукупність усіх можливих наслідків експерименту.

Отже, в результаті проведення стохастичного експерименту завжди відбувається одна і тільки одна елементарна подія з простору елементарних подій. Випадіння герба при підкиданні монети, випадіння шістки при підкиданні гральної кості, виграш у шаховій партії, прибуття автобуса через 1 хвилину після появи пасажира на зупинці, влучення у центр мішені при пострілі є елементарними подіями.

Приклади стохастичних експериментів та просторів елементарних подій

1. *Підкидання однієї монети*. Простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{\Gamma, P\}$, оскільки результат підкидання, що відрізняється від герба Γ, або решки P, вважається неможливим.
2. *Підкидання двох монет*. Оскільки фіксація результату підкидання двох монет потребує задання впорядкованої пари з двох елементів – результатів підкидання першої та другої

монети, то простір елементарних подій містить пари можливих варіантів підкидань монет: $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

3. *Підкидання гральної кості.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, оскільки гральна кістка має шість граней, а падіння на ребро вважається неможливим.
4. *Підкидання монети до першого успіху*. Можна припустити, що успіх обов'язково має відбутися за якоїсь скінченної кількості підкидань, а тому Ω = {У, НУ, ННУ,...,НН...НУ,...}.
5. *Вибір випадкової точки на одиничному відрізку.* У цьому випадку Ω=[0, 1], оскільки кожна така точка однозначно задається своєю координатою з відрізку =[0, 1].

Будь-яка підмножина *A* простору елементарних подій Ω називається ***випадковою подією***. Якщо $\omega \in A$, то ω називається сприятливою елементарною подією для *A*. Випадкові події позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots$, або з відповідними індексами: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$. При цьому Ω – ***достовірна подія***, тобто подія, яка обов'язково відбудеться при будь-якому наслідку стохастичного експерименту.

Випадкова подія називається ***неможливою***, якщо в результаті експерименту вона не може відбутись. Наприклад, випадіння цифри 7 при підкиданні шестигранної кості, одночасне випадіння одиниці та двійки. Неможлива подія є порожньою множиною подій і позначається ∅.

Протилежною до *A* називається випадкова подія $\overline{A}$, якій сприяють тільки ті елементарні події, які несприятливі для A.

Основні операції над подіями:

1. ***Доповнення***: $\overline{A} = \{\omega : \omega \notin A\}$ – подія, яка полягає в тому, що *A* не відбудеться. $\varnothing = \overline{\Omega}$—неможлива подія.
2. ***Об'єднання подій***: $A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ або $\omega \in B\}$ – подія, яка полягає в тому, що відбудеться принаймні одна з подій *A* або *B*.
3. ***Перетин (переріз) подій***: $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ і $\omega \in B\}$ – подія, яка полягає в тому, що відбудеться і подія *A*, і подія *B*.
4. ***Різниця подій***: $A \setminus B = \{\omega : \omega \in A$ і $\omega \notin B\}$ –подія, яка полягає в тому, що відбудеться подія *A* і не відбудеться подія *B*.
5. ***Правило де Моргана***: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Властивості операцій над подіями:

1) Комутативність:

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cap B = B \cap A;$$

2) Асоціативність:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3) Дистрибутивність:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

4) ***Закони де Моргана:***

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

5) $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – принаймні один раз випаде герб, B – при другому підкиданні випаде герб, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.

Розв'язок. Якщо Г – випадання герба, Р – випадання решки, то ймовірнісний простір Ω={*ГГ*, *ГР*, *РГ*, *РР*}; подія A={*ГГ*, *ГР*, *РГ*}, подія B={*ГГ*, *РГ*}. Оскільки $A \supset B$, то $A \cup B$ = {*ГГ*, *ГР*, *РГ*}, $A \cap B$ =B={*ГГ*, *РГ*}, $A \backslash B$={*ГР*}.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

2.1. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – сума очок на двох кубиках дорівнює 8; B – принаймні один раз випаде 6.

2.2. Підкидають монету і гральний кубик. Описати простір елементарних подій.

2.3. Підкидають монету доти, доки не випаде герб. Описати простір елементарних подій.

2.4. Побудувати множину елементарних подій у такому експерименті: кидають монету і фіксують, чи випав герб; кидання триває доти, доки герб не випаде двічі.

2.5. Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значення з відрізка [0,1]. Описати простір елементарних подій.

2.6. Побудувати множину елементарних подій для експерименту, в якому вимірюються n величин ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, кожна з яких може набувати довільних дійсних значень.

2.7. З партії, що містить N виробів, серед яких є n бракованих, взято m виробів. Описати простір елементарних подій. Описати подію A: серед узятих виробів l – бракованих ($n < N$, $l \le m$).

2.8. Побудувати множину елементарних подій в експерименті, що полягає у виборі з урни, в якій лежать m білих і n чорних куль, k куль, якщо $k < n + m$. Чому дорівнює число елементарних подій? Розв'язати задачу при умові, що кулі виймаються послідовно по одній.

2.9. Перевіряється партія готових виробів за двома ознаками: розмір і вага. Вироби, в яких розмір або вага менші стандарту, бракуються; вироби, в яких і розмір, і вага більші, ніж стандартні, повертаються на переробку; придатні вироби йдуть споживачеві. Як побудувати множину елементарних подій у разі, якщо перевіряється партія товару з n виробів? Яка загальна кількість елементарних подій?

2.10. Які прості вирази відповідають подіям:

а) $(A \cup B) \cup (A \cup \bar{B})$;

б) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;

в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$?

2.11. Довести рівності:

а) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \bar{B}$;

б) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$;

в) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

г) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \Omega$;

д) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \varnothing$;

е) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

ж) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Завдання для індивідуальної роботи

2.1. Монету підкидають тричі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – один раз з’явиться герб, B – при другому підкиданні з’явиться герб, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

2.2. До ліфта 10-поверхового корпусу університету на першому поверсі зайшли 2 студенти. Кожен поспішає на пару. Описати простір елементарних подій Ω можливих виходів із ліфта, якщо відомо, що пари в них на різних поверхах і в жодного немає пар на останньому поверсі. Описати події: A – перший студент вийшов на поверсі з парним номером, B

– другий студент вийшов на поверсі не нижчому за п’ятий, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$.

2.3. Робочий день інспектора ДПІ з 9-00 до 17-00. Подія A – подання СПД декларації про доходи до ДПІ з 10-00 до 12-00 години. Подія B – подання цієї декларації з 16-00 до 17-00 години. Записати в чому полягають події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ та описати їх.

2.4. Тестується нове обладнання для розфасування морозива. Кожні 15 хвилин береться зі стрічки упаковка і перевіряється її вага. Відхилення від норми може бути будь-яке ціле число з інтервалу [-10; 10] грам. Подія A – вага пачки морозива перевищує норму не менше ніж на 5 грам, B – відхилення ваги пачки морозива від норми не менше 6 грам. Описати події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$.

2.5. Два стрільці по одному разу стріляють по мішені. Подія A – другий стрілець влучив у мішень, B – у мішені одна пробоїна. Записати в чому полягають події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$.

2.6. З цифр 1 і 2 складають трицифрові числа. Описати простір елементарних подій Ω можливих варіантів чисел та описати події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, якщо подія A – число має не більше однієї цифри 1, B – число має одну цифру 1.

2.7. У коробці лежать червоні і сині фломастери. Випадковим чином вибирають два з них. Описати простір елементарних подій. Подія A полягає в тому, що обидва фломастери виявилися червоними. Подія B – один з них червоний, а один – синій. Що означають події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$.

2.8. Зі студентів, присутніх на лекції з теорії ймовірностей, навмання вибирають одного. Нехай подія A полягає в тому, що обраний студент закінчив середню школу з медаллю, B – переможець обласної олімпіади, C – випускник ліцею. Описати події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \setminus (A \cap B)$. За якої умови буде справедлива рівність $A \cap B \cap C = A$?

2.9. Монету підкидають доти, поки не з’явиться герб. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – герб випаде не пізніше шостого підкидання, B – герб випаде при парній кількості підкидань. Описати події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$.

2.10. Підкидають дві гральні кістки. Нехай подія A полягає в тому, що випала сума очок непарна, а подія B – хоча б на одній з кісток випала одиниця. Описати події $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap \overline{B}$, $A \setminus B$.

2.11. Підкидають дві монети. Описати простір елементарних подій. Чи є протилежними події: *A*={поява двох гербів}; *B*={поява двох решок}? Описати події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$.

2.12. Подія *A* полягає в тому, що номер телефона закінчується на парну цифру, а подія *B* в тому, що номер телефона закінчується на нуль. Описати події $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$ $A \cap \overline{B}$, $A \setminus B$.

2.13. Підкидають гральну кістку. Нехай подія *A* полягає в тому, що випала трійка, подія *B* – випала непарна цифра, *C* – випала цифра не більша за п'ять. Описати простір елементарних подій. Описати події $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap \overline{B}$, $B \setminus A$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

2.14. Вибирають банки, серед трьох надійних, в які покласти на депозити свої кошти. Нехай подія *A* – на депозит поклали в перший банк, *B* – на депозит поклали в другий банк, *C* – на депозит поклали в третій банк. Що означають події: $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$.

2.15. Два шахіста зіграли три партії, серед яких нічиїх не було. Подія $A_i, i = 1,2,3$ полягає в тому, що *i*-ту партію виграв перший гравець, подія *B* – всі три партії виграв другий гравець, подія *C* – другий гравець виграв дві партії. Виразіть події *B* і *C* через події $A_i, i = 1,2,3$.

2.16. Літак виходить з ладу, якщо вражені обидва двигуни або кабіна пілота. Нехай подія $A_i, i = 1,2$ полягає в тому, що вражений *i*-тий двигун, подія *B* – вражена кабіна пілота. Виразити події *C* і $\overline{C}$ через $A_i, i = 1,2$ і *B*, якщо подія *C* полягає в тому, що літак вийшов з ладу.

2.17. Екзаменаційний білет містить три питання. Нехай подія *A* полягає в тому, що студент знає відповідь на перше питання, *B* – на друге, *C* – на третє, а подія *D* – студент склав іспит. Студент складає іспит, якщо він знає відповідь на перше питання і хоча б на одне з двох, що залишились. Виразіть подію *D* через події *A, B* і *C*.

2.18. З таблиці випадкових чисел взято навмання число. Нехай подія *A* полягає в тому, що число парне, *B* – закінчується нулем. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$?

2.19. Підкидають гральну кістку. Нехай подія *A* полягає в тому, що випала двійка, подія *B* – випала парна цифра. Описати простір елементарних подій. Описати події $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $B \setminus A$.

2.20. Підкидають три монети. Нехай подія A полягає в тому, що на одній монеті з трьох випав герб, подія B – хоча б на одній монеті випав герб. Описати простір елементарних подій. Описати події $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$.

2.21. Стрілець тричі стріляє по мішені. Нехай подія A полягає в тому, що є рівно одне влучення, подія B – третій постріл виявився влучним. Описати простір елементарних подій. Описати події $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$.

2.22. Студент на екзамені відповідає на білет, у якому три питання. Нехай подія A_i = {студент відповів на i-те питання}. Виразити через події A_i наступні події: A = {студент відповів принаймні на два питання }, B = {студент не відповів на жодне питання }, C = {студент відповів тільки на одне питання }, D = {студент відповів рівно на два питання}.

2.23. Підкидають дві гральні кістки. Описати простір елементарних подій. Описати: подію A = {сума очок дорівнює 9}, подію B = {принаймні один раз з'явиться 6}. Описати події $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $B \setminus A$.

2.24. З таблиці випадкових чисел навмання вибрали число. Нехай подія A полягає в тому, що число непарне, B – число просте. Що означають події: $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$?

2.25. Технічний контроль перевіряє якість трьох приладів. Описати простір елементарних подій Описати подію A = ”хоча б один з приладів є неякісним”, подію B = ”всі прилади якісні”, подію C = ”серед перевірених приладів рівно один неякісний”. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup C$?

2.26. Із множини натуральних чисел від 1 до 15 навмання беруть одне число. Описати подію A = {число кратне 2}, подію B = {число кратне 3}. Описати події $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \setminus A$.

2.27. Монету підкидають тричі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – два рази з'явиться герб, B – при першому підкиданні з'явиться решка. Описати події $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$.

2.28. Три стрільці стріляють по мішені. Описати простір елементарних подій. Описати подію A = {є рівно два влучення}, B = {перший постріл виявився влучним}. Описати події $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$.

2.29. Підкидають дві гральні кісткі. Описати подію A = {сума очок парна}, подію B = {принаймні один раз з'явиться 1}. Описати події $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $B \setminus A$.

2.30. Подія A полягає в тому, що номер телефона закінчується на непарну цифру, а подія B в тому, що номер телефона ділиться на 5. Описати події $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$ $A \cap \overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

РОЗДІЛ 3. ЙМОВІРНОСТІ У ДИСКРЕТНИХ ПРОСТОРАХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Теоретичні відомості

Простір Ω елементарних подій називається ***дискретним***, якщо множина Ω скінченна, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ або зліченна, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n, ...\}$.

Нехай простір Ω елементарних подій є дискретним. Набір невід'ємних чисел $\{p_k,\ 1 \le k \le n\}$ або $\{p_k,\ 1 \le k < \infty\}$ називається ймовірнісним розподілом на Ω, якщо кожному $\omega_k \in \Omega$ поставлено у відповідність одне число $p_k = p(\omega_k)$, причому

$$\sum_{\omega_k \in \Omega} p(\omega_k) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k, & \Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k, & \Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n, ...\} \end{cases} = 1.$$

Вибір імовірнісного розподілу на Ω залежить від реальної ситуації. В простих випадках елементарні події вважають рівноможливими. Наприклад, якщо стохастичний експеримент полягає в підкиданні симетричної монети $\Omega = \left\{\Gamma, P\right\}$ і логічно приписати цим елементарним подіям рівні ймовірності: $p(\Gamma) = p(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}$. Аналогічно, при підкиданні грального кубика маємо 6 елементарних подій, що полягають у випадінні цифр від 1 до 6, ці події логічно вважати рівноможливими і приписати кожній з них імовірність $\frac{1}{6}$. Нехай тепер стохастичний експеримент полягає в деякому випробуванні, і результатом його можуть бути лише дві елементарні події: $\omega_1 =$ "успіх", $\omega_2 =$ "невдача". Припустимо, що за деякими експертними оцінками, ймовірність "успіху" дорівнює $p,\ 0 \le p \le 1.$ Тоді ймовірність "невдачі" дорівнює $q = 1 - p.$

Нехай простір Ω дискретний. Задамо на ньому сукупність подій, що утворює алгебру. $A \subset \Omega$ – випадкова подія. Покладемо ймовірність події A рівною $P(A) = \sum\limits_{\omega_k \in A} p_k$. Мають місце властивості:

а) $P\left(A\right) \ge 0;$

б) $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)$, якщо події A і B несумісні;

в) $P\left(\Omega\right)=1$.

Розглянемо частковий випадок, коли $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_n\}$, і всі елементарні події ω_i, $1\le i\le n$ є рівноможливими. Тоді кожна ймовірність $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. Нехай $A\subset\Omega$ – випадкова подія, що містить m елементарних подій. Тоді, очевидно

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Остання формула задає так зване ***класичне означення ймовірності***. Елементарні події, що входять в множину A, називаються такими, що сприяють події A.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Довести, що для будь-яких двох подій A і B

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Розв'язок.

$$P(A\cup B)=\sum_{\omega_k\in A\cup B}p_k=\sum_{\omega_k\in A}p_k+\sum_{\omega_k\in B}p_k-\sum_{\omega_k\in A\cap B}p_k.$$

Оскільки у перших двох сумах правої частини двічі враховуються спільні точки, що належать події $A\cap B$, то загальна ймовірність об'єднання зменшується на ймовірність цієї події.

Задача 2. Навмання вибирається 1 цифра з десяти. Знайти ймовірності того, що

1) ця цифра – 5.
2) ця цифра – не 0 і не 1.

Розв'язок.

1) Оскільки всі 10 можливостей вибору є рівноможливими, то ймовірність $\frac{1}{10}$.

2) Є 8 можливостей вибрати цифру, що не є ні 0, ні 1, тому ймовірність дорівнює $\frac{8}{10}$.

Задача 3. Навмання вибирають k, $k>1$ цифр. Знайти ймовірність того, що серед вибраних k цифр

а) нема цифри 0;
б) нема цифри 1;

в) нема цифр 0 і 1;

г) нема цифри 0 або 1.

Розв'язок. При виборі k цифр, за правилом множення, загальне число можливостей $\underbrace{10\cdot 10\cdot \ldots \cdot 10}_{k}=10^k$.

а), б) число сприятливих можливостей дорівнює $\underbrace{9\cdot 9\cdot \ldots \cdot 9}_{k}=9^k$. Тому ймовірність події A – того, що всі k цифр не є одиницею, дорівнює $P(A)=\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$. Так само, ймовірність події B – того, що всі k цифр не є нулем, дорівнює $P(B)=\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$.

в) Якщо не вибирати ні 0, ні 1, то число сприятливих можливостей дорівнює $\underbrace{8\cdot 8\cdot \ldots \cdot 8}_{k}=8^k$. Тому $P(A\cap B)=\left(\dfrac{8}{10}\right)^k$.

г) Подія, що полягає в тому, що нема 0 або 1 – це $A\cup B$. Тому

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2\cdot 9^k-8^k}{10^k}.$$

Приклад 4. **Задача Банаха.** Відомий математик Стефан Банах завжди носив з собою дві коробки сірників, у кожній з яких спочатку було n сірників. Кожен раз, коли він хотів запалити сірника, Банах діставав навмання одну з коробок. Знайти ймовірність того, що коли він уперше виймав порожню коробку, в іншій коробці було рівно r сірників, де $r=0,1,2,...,n$.

Розв'язок. Сірники брались всього $2n-r$ разів, причому n разів з коробки, яка виявилась порожньою. Це відповідає n успіхам у $2n-r$ незалежних випробуваннях, тому шукана ймовірність $P(A)=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

3.1. Гральний кубик підкидають один раз. Описати простір елементарних подій. а) Описати подію A — випаде число, що ділиться на 3. Знайти ймовірність події A, вважаючи, що всі елементарні події рівноможливі; б) нехай підкидають гральний кубик, у якому масу розподілено так, що ймовірність випадання певної грані пропорційна її номеру. Описати простір елементарних подій, вказати ймовірність кожної елементарної події. Обчислити ймовірність події A.

3.2. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 спочатку вибирають одну; потім з чотирьох цифр, які залишились, вибирають другу. Описати простір елементарних подій. Вважаючи, що всі елементарні події однаково можливі, обчислити ймовірність таких подій: а) перший раз вибрано непарну цифру; б) другий раз вибрано непарну цифру; в) і перший, і другий раз вибрано непарну цифру.

3.3. У групі r студентів. Яка ймовірність того, що принаймні у двох із них збігаються дні народження?

3.4. Гральний кубик підкидають шість разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть усі шість граней.

3.5. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на 10-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажири не вийдуть на одному поверсі?

3.6. Визначити, що більш імовірно: при підкиданні чотирьох гральних кубиків випадання принаймні однієї одиниці чи при 24 підкиданнях двох кубиків випадання принаймні один раз двох одиниць. (Відповідь відома як «парадокс де Мере». Придворний кавалер і азартний гравець Шевальє де Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав ці ймовірності рівними і звинувачував математиків у своїх програшах).

3.7. У групі r студентів. Обчислити ймовірність того, що принаймні двоє з них народилися в одному місяці.

3.8. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадатимуть на різні місяці року.

3.9. Обчислити ймовірність того, що для даних тридцяти осіб з 12 місяців року на 6 місяців припадає по два дні народження і на інші 6 — по 3 дні народження.

3.10. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. З урни навмання виймається одна куля. Яка ймовірність того, що ця куля: а) біла? б) чорна?

3.11. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. Яка ймовірність того, що витягнуті навмання 2 кулі будуть: а) чорні? б) білі?

3.12. A та B і ще 8 осіб стоять у черзі. Яка ймовірність того, що A та B віддалені один від одного 3 особами?

3.13. n осіб, серед яких є A і B, шикуються в шеренгу в будь-якому порядку. Яка ймовірність того, що між A і B стане рівно r осіб?

3.14. З урни, в якій лежать n білих та m чорних куль, взяли навмання k куль. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль буде r білих куль ($r \leq n$)?

3.15. Серед N виробів M бракованих. Навмання беруть n виробів. Яка ймовірність того, що серед них m бракованих виробів ($m<n$)? Яка ймовірність того, що серед них не більше ніж m бракованих виробів?

3.16. У лотереї є n білетів, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів.

3.17. На іспиті може бути запропоновано N запитань. Студент знає відповіді на n запитань. Екзаменатор задає студентові k запитань, а для того щоб скласти екзамен, треба відповісти не менше, ніж на r запитань ($r<k$). Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

3.18. Учасник «Національної лотереї» з 39 чисел повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто правильно назве всі шість. Виграші також одержують і ті, хто вгадає не менше трьох чисел. Обчислити ймовірність повного виграшу. Обчислити ймовірність того, що учасник відгадає 5, 4 і 3 числа. Яка ймовірність одержати виграш у лотереї?

3.19. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд розбивають на дві підгрупи по n команд кожна. Яка ймовірність того, що дві найбільш сильні команди виявляться: а) в різних підгрупах? б) в одній підгрупі? Яка ймовірність того, що чотири найбільш сильні команди потраплять по дві в різні підгрупи?

3.20. Кидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел 1, 2, ..., 6 випаде двічі?

3.21. До ліфта семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли 3 особи. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність таких подій: A={всі пасажири вийдуть на 4 поверсі}, B={всі пасажири вийдуть одночасно (на одному поверсі)}, C ={всі пасажири вийдуть на різних поверхах}.

3.22. У три вагони заходять дев'ять пасажирів. Яка ймовірність того, що: а) в перший вагон зайдуть три пасажири? б) в кожен вагон зайдуть по три пасажири? в) в один з вагонів зайдуть чотири, в другий – три і в третій – два пасажири?

3.23. У шафі стоять 10 пар різноманітного взуття. З них навмання обирається 4 чоботи. Знайти ймовірність того, що серед вибраних чобіт немає парних.

3.24. На книжковій полиці розміщено 40 різних книжок, серед яких є збірка творів Тараса Шевченка у трьох томах. Ставимо наші книги у випадковому порядку на полицю (всі розстановки є рівноймовірними). Яка ймовірність того, що томи Шевченка будуть розташовані в правильній послідовності (від меншого до більшого номером, якщо рахувати книги, які стоять на полиці, зліва направо), але не обов'язково поруч?

3.25. 500 фірм отримали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сума кредиту і термін кредиту (в місяцях). Відповідну класифікацію наведено в таблиці.

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	< 2000$	2000—4999$	5000—7999$	> 8000$
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

Для перевірки навмання вибирається одна фірма.

а) Яка ймовірність того, що сума кредиту цієї фірми не менша 5000$?

б) Яка ймовірність того, що термін кредиту фірми більший двох років?

в) Яка ймовірність того, що фірма взяла кредит на суму, не меншу 2000$ на 42 місяці?

3.26. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Суми вкладу		
	< 1000$	1000—5000 $	> 5000$
< 30 років	5%	15%	8%
30—50 років	8%	25%	20%
> 50 років	7%	10%	2%

Нехай A та B такі події:

A = {у навмання вибраного клієнта вклад більший 5000$},

B = {вік навмання вибраного клієнта більший 30 років}.

Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

3.27. У супермаркеті, аналізуючи 10000 покупок за типом товарів і типом розрахунків (готівка чи кредитна картка), виявлено такий процентний розподіл:

Тип розрахунків	Тип товару			
	Жіночий одяг	Чоловічий одяг	Спортивні товари	Господарчі товари
Каса	6%	9%	3%	7%
Кредитна картка	41%	9%	22%	3%

Нехай A, B, C, D такі події:

A = {навмання вибраний рахунок сплачений кредитною карткою},

B = {навмання вибраний рахунок за жіночий одяг},

C = {навмання вибраний рахунок за чоловічий одяг},

D = {навмання вибраний рахунок за спортивні товари}.

Обчислити $P(A)$, P (В $\cap A$), P $(A \cap D)$, P $(A \cup B)$, $P(A \cup C)$.

Завдання для індивідуальної роботи

3.1. Номер банківської карти складається з 12 цифр, від 0 до 9 кожна. Яка ймовірність того, що в номері нема жодної пари однакових цифр, що стоять поруч?

3.2. Цифровий код сейфу складається з 9 цифр, від 0 до 9 кожна. Яка ймовірність того, що в номері є комбінація “123”, розташована в будь-якому місці номера? Яка ймовірність відкрити сейф з 4 спроб, не знаючи номера?

3.3. В гості прийшло 12 осіб, всі вони мають різні роки народження і розсаджуються за круглим столом. Яка ймовірність того, що вони розсядуться за віком, починаючи з найстарішого на будь-якому місці?

3.4. На 7 карточках написано букви “а”, “а”, “ї”, “к”, “н”, “р”, “У”. Ці карточки навмання розкладено в ряд. Яка ймовірність того, що вийде слово “Україна”?

3.5. Яка ймовірність того, що в написаному навмання чотиризначному числі 2 цифри однакові, а ще дві різні між собою і не збігаються з однаковими?

3.6. На бакалаврську спеціальність набрали 40 студентів, з них 10 склали сесію на “відмінно”. Цих 40 студентів після сесії розподілили на 2 групи. Яка ймовірність того, що в кожній групі буде по 5 відмінників?

3.7. Гелікоптер маркується 5-значним числом. Номер вважається “щасливим”, якщо в ньому нема сполучення “13” на будь-якому місці. Яка ймовірність, що номер буде “щасливим”?

3.8. В урні 10 куль. Імовірність того, що 2 взяті навмання кулі виявились білими, дорівнює $\frac{2}{15}$. Скільки в урні білих куль?

3.9. Є дві урни: в першій k білих і l чорних куль, у другій m білих і n чорних. З кожної урни виймають по кулі. Яка ймовірність того, що: а) обидві кулі будуть білими? Кулі будуть різного кольору?

3.10. В бібліотеці є 5 різних підручників з економічної теорії і 7 з теорії фінансів. Студент вибирає 4 підручники. Яка ймовірність того, що він матиме 2 підручники з економічної теорії і 2 з теорії фінансів?

3.11. Автобус має 15 пасажирів і повинен зробити 20 зупинок. У припущенні, що всі можливі розподіли пасажирів по зупинках рівноможливі, знайти ймовірність того, що жодні 2 пасажири не вийдуть на одній зупинці.

3.12. 10 рукописів підручників розкладено по 30 папках, кожний рукопис займає три папки. Навмання вибирають 8 папок. Яка ймовірність того, що жодний рукопис не буде відібрано повністю?

3.13. Кинуто 3 гральних кубики. Яка ймовірність того, що на всіх трьох кубиках випадуть парні числа? Що сума всіх чисел, які випадуть, буде непарною? Що найменша різниця за абсолютною величиною між будь-якими двома цифрами, що випали, перевищує 1?

3.14. Яка ймовірність, граючи в лото “Максима”, де викреслюють 5 чисел з 45, від 1 до 45, викреслити вірно всі 5 чисел? Три числа?

3.15. З множини чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ послідовно і без повернення вибирають два числа, l і r. Знайти $P\{l > r\}$.

3.16. Партія виробів складається зі 100 виробів, з них 90 відповідають стандарту повністю, 7 відповідають частково і 3 не відповідають. Навмання вибирають 10 виробів. Яка ймовірність того, що будуть вибрані 8 стандартних виробів, 2 тих, що відповідають стандарту частково і жодного невідповідного?

3.17. Художник намалював 12 картин – 7 пейзажів і 5 натюрмортів. Для своєї виставки він відбирає навмання 6 картин. Яка ймовірність того, що він відбере лише пейзажі? 3 пейзажі і 3 натюрморти? Не менше 3 натюрмортів?

3.18. В касі лежать 40 грошових купюр: 15 по 100 гривень, 15 по 200 і 10 по 500. Навмання вибирають 10 купюр. Яка ймовірність того, що серед відібраних будуть лише купюри по 100 гривень? 5 купюр по 100 гривень, 2 по 200 і 3 по 500? Що сума грошей буде ділитись на 500?

3.19. В офіс прийшло 12 чоловіків в різних капелюхах. Вони послідовно покидають офіс, вибираючи капелюхи навмання. Яка ймовірність того, що кожний візьме свій капелюх? Що лише один чоловік візьме свій капелюх?

3.20. На розкладці лежить 10 газет англійською і 5 французькою мовою. Послідовно приходять 3 покупці і навмання беруть газети. З них двоє знають лише англійську, а один – лише французьку мову. Яка ймовірність того, що кожен прочитає свою газету?

3.21. У групі із 20 студентів є 9 хлопців та 11 дівчат. Серед студентів групи випадковим чином розподіляються 7 квитків на концерт. Яка ймовірність того, що квиток: а) не отримає жоден хлопець; б) отримають рівно 4 дівчини?

3.22. В урні знаходиться дві білих та три чорних кулі. З урни одна за одною виймають всі кули. Знайти ймовірність того, що вийнята останньою куля буде білою.

3.23. Із карток, на яких написані числа від 1 до 15, навмання обирають дві картки. Яка ймовірність того, що на цих картках: а) обидва номери парні? б) обидва номери непарні; в) один з номерів парний, а інший – непарний?

3.24. Автомобілі у деякому великому місті мають у своєму номері чотири цифри. Яка ймовірність того, що у номері навмання вибраного автомобіля: а) всі цифри різні; б) дві пари однакових цифр у будь-якому порядку; в) рівно три однакові цифри; г) сума двох перших цифр дорівнює сумі двох останніх?

3.25. В ящику знаходяться 4 зелених, 3 синіх та 5 червоних куль. Навмання з ящика обирають три кулі. Яка ймовірність того, що: а) всі три кулі будуть різного кольору; б) всі три кулі будуть однакового кольору; в) всі три кулі будуть червоні; г) серед них буде рівно дві зелені кулі?

3.26. Кидають три гральні кістки. Знайдіть імовірність наступних подій: а) серед отриманих цифр присутня шістка; б) сума цифр дорівнює 6; в) присутньо рівно дві однакові цифри.

3.27. В автобусі їдуть четверо пасажирів, серед яких троє жінок та чоловік. Автобус повинен зробити вісім зупинок, причому всі можливі розподіли пасажирів по зупинках рівноможливі. Яка ймовірність того, що всі жінки вийдуть пізніше, ніж чоловік?

3.28. В умовах попередньої задачі знайти ймовірність того, що: а) всі четверо пасажирів вийдуть на одній зупинці; б) всі четверо вийдуть на різних зупинках; в) три жінки вийдуть на одній зупинці, а чоловік – на іншій.

3.29. В групі з 20 студентів є подружня пара. Для підготовки проектів групу розподіляють на чотири підгрупи по 5 студентів. Яка ймовірність того, що це подружжя опиниться в одній підгрупі?

3.30. В урні є 10 білих та 5 чорних куль. Навмання обирають три кулі. Яка ймовірність, що: а) всі обрані кулі білі; б) всі обрані кулі чорні; в) серед обраних куль є рівно одна чорна?

РОЗДІЛ 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

Теоретичні відомості

У випадку, коли елементарні події рівноможливі, але множина елементарних подій Ω – незлічена, то ймовірність настання події можна розрахувати, користуючись геометричним означенням імовірності, яке полягає в наступному.

Нехай в деякій обмеженій множині Ω n-вимірного евклідового простору, що має міру Лебега $mes(\Omega)$, навмання вибирають точку. Під висловом "точка, взята навмання" або "точка, навмання кинута у деяку множину", розуміється, що ймовірність $P(A)$ того, що точку буде взято з множини $A \subset \Omega$, дорівнює:

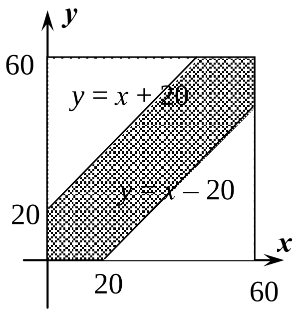
$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа, об'єм геометричної фігури, яка утворена цією множиною.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Двом працівникам фінансового відділу треба звітуватись. Директор очікує їх з 10 до 11 ранку. Звіт кожного триватиме 20 хвилин. Знайти ймовірність події, що одному з працівників доведеться чекати, поки інший відзвітує (вважаючи час приходу кожного працівника випадковим).

Розв'язок.



Розглянемо прямокутну систему координат xOy. Нехай x та y – моменти приходу працівників до директора, тоді всі можливі комбінації їх прибуття можна зобразити у вигляді квадрату зі сторонами $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$ (враховуючи, що з 10 до 11 години мине 60 хвилин).

Одному з працівників доведеться чекати у випадку, якщо різниця між часом приходу одного та іншого менше 20 хвилин, що можна записати у вигляді: $|x - y| \le 20$, на рисунку це заштрихована область.

Враховуючи геометричне означення ймовірності, необхідно знайти площу всього квадрату $S_1 = 60 \times 60 = 3\,600$ та площу заштрихованої області $S_2 = 60 \times 60 - 2 \times \frac{1}{2} \times (40 \times 40) = 3600 - 1600 = 2\,000$. Тоді ймовірність події, що одному з працівників доведеться чекати, поки інший відзвітує дорівнює $P = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2\,000}{3600} = \frac{5}{9}$.

Задача 2. На відрізку довжини l навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує kl, де $0<k<1$?

Розв'язок. Нехай координати точок x та y. Очевидно, що $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le l, 0 \le y \le l\}$. Таким чином, $m(\Omega) = l \cdot l = l^2$. Тоді $A = \{(x,y)$: $0 \le x \le l$, $0 \le y \le l$, $|x-y| \le kl\}$. Звідси $x-kl \le y \le x+kl$, й $mes(A) = l^2 - (l-kl)^2$. Таким чином,

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{l^2 - (l-kl)^2}{l^2} = 1 - (1-k)^2 = 2k - k^2.$$

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

4.1. На паркетну підлогу навмання кидають монету діаметром d. Паркет має форму квадратів із стороною a ($a > d$). Яка ймовірність того, що монета не перетне жодної зі сторін квадратів паркету?

4.2. У круг радіуса R вписано правильний n-кутник. У круг кидають навмання точку. Яка ймовірність того, що точка попаде всередину n-кутника?

4.3. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків довжини не більше a можна побудувати трикутник?

4.4. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими $2a$. На площину навмання кидають круг радіусом r ($r<a$). Яка ймовірність того, що круг не перетне жодної з прямих?

4.5. На площині проведено паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють почергово 1,5 см та 8 см. На площину кидають навмання круг радіусом 2,5 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих ліній?

4.6. На колі одиничного радіуса з центром у початку координат навмання взято точку. Яка ймовірність того, що проекція точки на діаметр знаходиться від центра на відстані, що не перевищує r ($r<1$)?

4.7. На колі радіусом R навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує r ($r \le 2R$)?

4.8. У коло радіусом R навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола не перевищує r?

4.9. На колі радіусом R навмання взято три точки A, B, C. Яка ймовірність того, що трикутник ABC гострокутний?

4.10. Стержень довжиною l навмання розламали на три частини. Яка ймовірність того, що з одержаних частин можна утворити трикутник?

4.11. Стержень довжиною l навмання розламали на дві частини. Яка ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищує $l/3$?

4.12. (Задача Бюфона). На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. На цій площині кидають навмання голку довжиною $2l$, $l \le a$. Яка ймовірність того, що вона перетне одну з прямих?

4.13. Навмання взято два додатних числа, кожне з яких не перевищує 1. Знайти ймовірність того, що сума їх не перевищує 1, а добуток не перевищує 2/9.

4.14. На відрізку $[-1, 2]$ навмання взяті 2 числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша 1, а добуток менший 1?

4.15. Навмання взято два додатні числа x та y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде не більше 1, а $\frac{y}{x}$ – не більше 2.

4.16. На відрізку $[P, Q]$ довжини l навмання вибрано дві точки A та B. Знайти ймовірність того, що точка A буде ближче до B, ніж до P.

4.17. Всередині квадрата з вершинами $\{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$ навмання вибирають точку $M(x,y)$. Знайти ймовірність подій: а) $A=\{(x,y)$: $\max(x\ ,y)<a,\ a>0\}$; б) $B=\{(x,\ y)$: $x^2+y^2\le a^2,\ a>0\}$; в) $C=\{$корені рівняння $t^2+xt+y=0$ дійсні$\}$.

Завдання для індивідуальної роботи

4.1. Два судна мають підійти до одного і того ж причалу. Час їх прибуття не залежить один від одного та рівноможливий протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна одна година, а другого – дві.

4.2. На площині намальовано два концентричні кола з радіусами 2 см та 4 см. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у велике коло, потрапить у кільце, утворене цими колами.

4.3. По маршруту незалежно один від одного ходять 2 автобуси: № 1 – кожні 10 хв, № 2 - кожні 7 хв. Студент приходить на зупинку у випадковий момент часу. Яка ймовірність того, що йому доведеться чекати автобуса менше 3 хв.

4.4. На відрізку [0, 1] навмання взяті 2 числа. Яка ймовірність того, що їх сума знаходиться в межах від 1/3 до 1?

4.5. Концентрація доходів різних соціальних груп зображується кривою Лоренца. Нехай навмання вибираються соціальні верстви, сумарна частка x яких від усього населення змінюється в межах [0; 1], а сумарний відносний дохід y змінюється відповідно в інтервалі $0 \leq y \leq x$. Знайти ймовірність події, що полягає в тому, що обрана частина населення буде мати відносний дохід, що задовольняє співвідношенню $x^2 \leq y \leq x$.

4.6. Усередині квадрата навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного у квадрат круга.

4.7. На перехресті встановлено світлофор, який 1 хв горить зеленим світлом та 0,5 хв червоним. Потім все повторюється. У випадковий момент часу до перехрестя під'їжджає автомобіль. Яка ймовірність того, що він проїде перехрестя без зупинки?

4.8. На відрізок довжиною 10 см навмання ставиться точка. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до кінців відрізка більша, ніж 1 см.

4.9. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими 6 см. На площину навмання кидають круг радіусом 1 см. Яка ймовірність того, що круг не перетне жодної з прямих?

4.10. Страховий агент запросив для подовження договору страхування двох клієнтів в офіс в проміжок часу між 11 та 12 годинами. Знайти ймовірність того, що жоден з клієнтів не буде чекати, поки звільниться страховий агент, якщо для оформлення необхідних документів необхідно 10 хвилин.

4.11. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута всередину квадрата зі стороною 2 см, опиниться нижче параболи, що проходить через дві вершини цього квадрата та дотикається до середини протилежної їм нижньої сторони.

4.12. На відрізку [0, 1] навмання взяті 2 числа. Яка ймовірність того, що їх сума не менша, ніж 0,5?

4.13. Потяги метро ходять в даному напрямку з інтервалом 2 хв. Яка ймовірність того, що пасажирові доведеться чекати потяг не більше ніж 30 с?

4.14. У кулю вписаний куб. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання всередині кулі точка, виявиться всередині куба.

4.15. На відрізку [0, 1] навмання взяті 2 числа. Яка ймовірність того, що їх частка не більша, ніж три?

4.16. На відрізок OA довжиною 21 см навмання кидають точку B. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків OB чи BA має довжину, більшу, ніж 7 см.

4.17. Робітник обслуговує два агрегати. Тривалі спостереження показали, що кожен з них потребує уваги робітника протягом 10 хв на годину. Знайти ймовірність того, що за годину якийсь агрегат потребуватиме уваги робітника в той час, коли він обслуговує другий.

4.18. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання в круг радіусом R, опиниться всередині вписаного у цей круг правильного трикутника.

4.19. Між числами –1 і 1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більшою за одиницю.

4.20. Два студенти домовились зустрітись в університеті між 8 та 9 годинами. Той, хто прийде першим, чекатиме на іншого лише 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться після 8 години 30 хвилин.

4.21. Усередині квадрата зі стороною 2 навмання вибирається точка. Яка ймовірність того, що відстань від неї до кожної з вершин квадрата більше, ніж 1?

4.22. На відрізку [1; 6] навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що добуток цих чисел менший восьми, а сума не більша шести?

4.23. У прямокутник вписано півколо так, що його діаметр співпадає з однією із сторін прямокутника, і півколо дотикається протилежної сторони. Всередині прямокутника навмання обирається точка. Знайти ймовірність того, що вона опиниться всередині півкола.

4.24. У правильний трикутник навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що ця точка не потрапить до вписаного до цього трикутника кола.

4.25. На відрізку [0; 5] навмання обирають точку. Знайти ймовірність того, що добуток відстаней від точки до кінців відрізка менше, ніж 4.

4.26. Усередині круга навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного у круг квадрата.

4.27. Навмання обирають два додатніх числа x і y, менших за 7. Яка ймовірність того, що їхня сума буде менше п'яти, а частка x/y менша двох?

4.28. Усередині квадрата навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що ця точка лежатиме ближче до центра квадрата, ніж до будь-якої з його вершин.

4.29. На відрізку [0; 1] навмання обирають три числа. Яка ймовірність того, що сума квадратів цих чисел менша за одиницю?

4.30. Усередині правильного трикутника зі стороною 4 навмання вибирається точка. Яка ймовірність того, що відстань від неї до кожної з вершин трикутника менше 2?

РОЗДІЛ 5. АКСІОМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теоретичні відомості

Аксіоматичне означення ймовірності

Кожне з наведених раніше означень імовірності має свої недоліки та обмеження застосування, хоча і дозволяють розв`язати певну серію задач теорії ймовірностей.

У світлі сучасних вимог щодо математичної строгості найдоцільніше будувати теорію ймовірностей на аксіоматичній основі. Найбільш поширеною в сучасній теорії ймовірностей є система аксіом, запропонована А.М. Колмогоровим.

Нехай простір елементарних подій Ω – довільна множина. Розглянемо S – деяку систему підмножин множини Ω.

Система S називається ***алгеброю***, якщо: 1) $\Omega\in S$; 2) $A,B\in S\Rightarrow A\cup B\in S$; 3) $A\in S\Rightarrow \overline{A}\in S$.

Звідси, зокрема, випливає, що $\varnothing\in S$, бо $\varnothing=\overline{\Omega}$, і якщо $A,B\in S$, то й $A\cap B\in S$, бо $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

Система S називається ***σ–алгеброю*** (***сигма–алгеброю***) або ***борелевським полем*** множин, якщо виконуються такі умови: 1) $\Omega\in S$; 2) якщо $A_n\in S$ для $n=\overline{1,\infty}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in S$; 3) $A\in S\Rightarrow \overline{A}\in S$.

При цьому з умови 3) випливає, що $\varnothing\in S$ та $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in S$, бо

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n}\ .$$

Вимірним простором $\{\Omega;\ S\}$ називається простір елементарних подій Ω та σ –алгебра S підмножин (подій) Ω.

Нехай задано вимірний простір $\{\Omega;\ S\}$. ***Ймовірністю*** називається числова функція $P(A)$, яка кожній події $A\in S$ ставить у відповідність деяке число $P(A)$ так, що виконуються такі умови:

Аксіома 1. $P(A)\geq 0$ для всіх $A\in S$.

Аксіома 2. $P(\Omega)=1$.

Аксіома 3 (зліченої адитивності). Якщо події $A_i \in S,\ i=\overline{1,\infty}$ попарно несумісні, тобто $A_i \cap A_j = \varnothing, \left(i \neq j\right)$, то $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Сукупність трьох об\`єктів $\{\Omega,\ S,\ P\}$ називається ***ймовірнісним простором.***

Властивості ймовірності

Властивість 1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Властивість 2. $P(\varnothing)=0$

Властивість 3. Якщо $A\subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Властивість 4. Якщо $A\subset B$, то $P(A)\leq P(B)$

Теорема додавання

Якщо A, B - довільні події, то $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Доведення. Подамо подію $A\cup B$ як об'єднання двох несумісних подій: $A\cup B = A\cup(B\setminus A)$. Тоді за властивістю ймовірності

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B\setminus A).$$

Тепер, подамо подію B як об'єднання двох несумісних подій: $B = (A\cap B)\cup(B\setminus A)$. Тоді $P(B) = P(A\cap B) + P(B\setminus A)$, тобто

$$P(B\setminus A) = P(B) - P(A\cap B).$$

Остаточно, одержимо:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B\setminus A) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

Теорема додавання для довільного числа подій

Якщо A_i, $i=\overline{1,n}$ – довільні події, то

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i\cap A_j) + \sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) - ....(-1)^{n-1} - P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Наслідок. Для довільних подій A_i, $i=\overline{1,n}$ виконується нерівність

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Теорема неперервності

Якщо A_n, $n=\overline{1,\infty}$ послідовність подій така, що $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ та $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Якщо A_n, $n=\overline{1,\infty}$ послідовність подій така, що $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$

та $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. HR – менеджер проаналізував анкети претендентів на посаду заступника керівника відділу ризиків і зробив наступні висновки: претендент має дві вищі освіти з імовірністю p_1=0.3; претендент має вищу освіту та досвід роботи керівної посади з імовірністю p_2=0.6, претендент має середню професійну освіту та досвід роботи керівної посади з імовірністю p_3=0.1. Знайти ймовірність того, що обраний навмання претендент має досвід роботи керівної посади. (Людей, які мали і середню професійну і вищу освіту, просили вказати інформацію лише про вищу освіту.)

Розв`язок. Позначимо події

A_1 - обрали людину з двома вищими освітами;

A_2 - обрали людину з вищою освітою та досвідом роботи;

A_3 - обрали людину з середньою професійною освітою та досвідом роботи;

B - обрали людину з досвідом роботи.

Зрозуміло, що $B = A_2 \cup A_3$ та $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ (несумісні), тому за аксіомою 3 одержимо

$P(B)$=$P(A_2)$+$P(A_3)$= p_2 + p_3 =0,6+0,1=0,7.

Приклад 2. Кожного дня браковані ноутбуки фірми Acer потрапляють на один з трьох сервісних центрів. Імовірність того, що ноутбуки призначено на перший сервісний центр p_1=0,4, а на другий p_2=0,35. Яка ймовіріcть того, що браковані ноутбуки потраплять на третій сервісний центр?

Розв`язок. Введемо події A_i - ноутбуки на *i*-й сервісний центр, *i*=1,2,3. Зауважимо, що A_i попарно несумісні та $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. Тому $P(A_3)$=$P(\overline{A_1 \cup A_2})$=1–$P(A_1 \cup A_2)$=1–$P(A_1)$–$P(A_2)$=1– p_1 – p_2 =1–0.4–0.35=0.25

Приклад 3. Нехай $P(A)\geq 0{,}8$; $P(B)\geq 0{,}8$. Довести, що $P(A\cap B)\geq 0{,}6$.

Розв`язок. $P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B) \geq 0,8+0,8-1=0,6$, оскільки $P(A \cup B) \leq 1$.

Приклад 4. У відділі працює 10 економістів, серед яких двоє – подружжя. Жеребкуванням вибирають трьох. Знайти ймовірність того, що серед вибраних спеціалістів буде принаймні один із подружжя.

Розв'язок.

І спосіб. Позначимо подію A – "серед вибраних спеціалістів буде принаймні один із подружжя". Ця подія відбудеться у двох випадках: якщо серед обраних спеціалістів буде хтось один із подружжя, а два – інші спеціалісти (подія B), або якщо серед вибраних спеціалістів будуть обидва із подружжя, а один – інший спеціаліст (подія C). Отже, подія A буде об'єднанням двох подій: $A = B \cup C$. Оскільки події B і C не можуть відбутися одночасно, тобто вони є несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей маємо

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C).$$

Загальне число елементарних подій даного жеребкування становить C_{10}^3. Число подій, що сприяють події B, дорівнює $C_2^1 \cdot C_8^2$. Аналогічно знаходимо, що число подій, що сприяють події C, дорівнює $C_2^2 \cdot C_8^1$.

Таким чином, шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{15}.$$

ІІ спосіб. Розглянемо протилежну подію $\overline{A}$ – "серед вибраних спеціалістів немає нікого із подружжя". Ймовірність цієї події дорівнює

$$P(\overline{A}) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}.$$

Тоді шукану ймовірність знайдемо із рівності

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Таким чином, маємо

$$P(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

5.1. Три пакети акцій, якими володіє інвестор, можуть дати доход власнику відповідно з імовірностями 0,45; 0,8 та 0,65. Чому дорівнює ймовірність того, що власник: а) матиме доход по двом пакетам; б) не матиме доходу?

5.2. Підприємство, що займається виготовленням шаф купе, отримує комплектуючі від трьох постачальників. Імовірності того, що поставки будуть вчасними, дорівнюють 0,99, 0,97, 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що підприємство виробить шафи згідно плану (це можливо у випадку, коли комплектуючі хоча б двох постачальників будуть доставлені вчасно).

5.3. Провівши аналіз, експерти страхової компанії визначили ймовірності щодо кількості страхових випадків на наступний рік:

К-ть страхових випадків, тис.	Менше 3-ьох	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	6 та більше
Ймовірність	0,3	0,4	0,2	0,06	0,04

Знайти ймовірності таких подій: а) в наступному році страховій компанії доведеться відшкодувати не менше 4 тис. страхових випадків; б) в наступному році страховій компанії доведеться відшкодувати щонайменше 4 тис., але менше 6 тис. страхових випадків.

5.4. Відомо ймовірності подій A, B, $A \cap B$. Знайти ймовірності подій:

а) $A \cap \overline{B}$; б) $\overline{A} \cap \overline{B}$; в) $\overline{A \cup B}$; г) $\overline{A \cap B}$; д) $\overline{A} \cap (A \cup B)$; е) $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.

5.5. Нехай A і B – випадкові події, P_0 – ймовірність того, що не відбудеться жодна з цих подій, P_1 – ймовірність того, що відбудеться одна і тільки одна подія, P_2 – ймовірність того, що відбудуться обидві події. Виразити P_0, P_1, P_2 через $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

5.6. Двічі підкидають монету. Описати: а) простір елементарних подій; б) події: A – при першому підкиданні випав герб; B – при другому підкиданні випав герб; в) обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B \backslash A)$.

5.7. Три рази підкидають монету. Описати: а) простір елементарних подій; б) події A – двічі випав герб, B – принаймні один раз випав герб; в) обчислити $P(A \cap B)$, $P(B)$ і $P(B \backslash A)$.

5.8. Нехай A_1, A_2, …, A_n – випадкові події. Довести, що

а) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$; б) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$.

5.9. Довести, що якщо A_1, A_2, …, A_n – випадкові події, то $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \ge P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$.

5.10. Довести, що якщо для будь-яких n подій $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n \subset A$, то: $P(A) \ge P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$.

5.11. У одному ящику 5 білих та 10 чорних куль, у іншому — 10 білих та 5 чорних куль. Знайти ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде витягнуто одну білу кулю, якщо з кожного ящика витягнуто по кулі.

5.12. У ящику 10 червоних та 6 блакитних куль. Навмання витягають дві кулі. Яка ймовірність того, що кулі будуть одного кольору?

5.13. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 2, або 5, або тому й іншому одночасно.

5.14. Студент прийшов на залік, знаючи відповідь на 24 запитання з 30. Яка ймовірність скласти залік, якщо після неправильної відповіді на запитання викладач задає ще одне запитання?

Завдання для індивідуальної роботи

5.1. Ймовірність того, що маркетингові дослідження нового ринку будуть успішними, дорівнює 0,65. Імовірність того, що розвиток досліджень цього ринку вкладеться у запланований бюджет фірми, становить 0,5. Імовірність того, що обидві цілі буде досягнуто, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що хоча б одна із вказаних цілей буде досягнута.

5.2. Для отримання кредиту підприємець звертається до трьох банків. Імовірності того, що йому нададуть кредит у певному банку, дорівнює, відповідно, 0,5; 0,55 та 0,6. Яка ймовірність, що підприємець отримає кредит хоча б в одному банку?

5.3. Відомо, що курс євро до гривні може зрости з імовірністю 0,3, а курс долара до гривні може зрости з імовірністю 0,6. Імовірність того, що зростуть обидва курси, складає 0,2. Знайти ймовірність того, що курс євро або долара по відношенню до гривні зросте.

5.4. Ймовірність зростання курсу акцій першої компанії у поточному місяці дорівнює 0,5, для другої компанії така ймовірність дорівнює 0,4. Ймовірність того, що у хоча б однієї з цих компаній в поточному місяці курс акцій зросте, дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що у поточному місяці зросте курс акцій обох компаній?

5.5. У трьох партіях 90%, 93% та 85% якісних виробів, відповідно. Навмання обирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один неякійсний виріб; б) рівно один неякісний виріб?

5.6. HR-менеджер по підбору кадрів займається вивченням резюме претендентів на посаду заступника фінансового директору страхової компанії. З попередньої статистики відомо, ймовірність того, що претендент має економічну освіту дорівнює 0,7, ймовірність того, що претендент є дипломованим актуарієм – 0,15, а ймовірність того, що претендент має економічну освіту та є дипломованим актуарієм дорівнює 0,05. HR- менеджер вивчає 200 резюме, оцінити кількість претендентів, які мають економічну освіту або є дипломованими актуаріями.

5.7. Студент шукає роботу. Він був на співбесідах в консалтинговій компанії та інвестиційному фонді. Ймовірність того, що студента візьмуть до консалтингової компанії дорівнює 0,4, до інвестиційного фонду – 0,7. Ймовірність того, що пропозиції про працевлаштування надійдуть з обох компаній дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що студенту запропонують вакансію хоча б в одній компанії.

5.8. Імовірність того, що рекламна кампанія певного продукту буде успішною, дорівнює 0,75. Імовірність того, що ця рекламна кампанія вкладеться у запланований бюджет фірми, становить 0,6. Імовірність того, що обидві цілі буде досягнуто, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що не менше однієї з вказаних цілей буде досягнуто.

5.9. Ймовірності додаткових потреб банку в коштах на наступний рік дорівнюють:

Кошти, млн.	Менше 1-го	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	4 та більше
Ймовірність	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05

Знайти ймовірності таких подій: а) в наступному році банку додатково знадобиться не менше 3 млн. у.о. б) в наступному році банку додатково знадобиться щонайменше 1 млн., але менше трьох млн. у.о.

5.10. Імовірність того, що маркетингові дослідження нового ринку будуть успішними, дорівнює 0,6. Імовірність того, що розвиток досліджень цього ринку вкладеться у запланований бюджет фірми, становить 0,5. Імовірність того, що обидві цілі буде досягнуто, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що не менше однієї з вказаних цілей буде досягнуто.

5.11. Дві фірми деякої великої корпорації торгують офісним обладнанням та оргтехнікою відповідно. Ймовірність того, що перша фірма буде мати запланований прибуток від продажів у поточному фінансовому році, дорівнює 0,6. Ймовірність того, що обидві фірми одночасно будуть мати заплановані прибутки, становить 0,35. Друга фірма буде мати заплановані прибутки з імовірністю 0,5. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з фірм буде мати запланований прибуток.

5.12. Провівши аналіз, експерти страхової компанії визначили ймовірності щодо кількості страхових випадків на наступний рік:

К-ть страхових випадків, тис.	Менше 2-ох	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	5 та більше
Ймовірність	0,2	0,5	0,2	0,08	0,02

Знайти ймовірності таких подій: а) в наступному році страховій компанії доведеться відшкодувати не менше 2 тис. страхових випадків; б) в наступному році страховій компанії доведеться відшкодувати щонайменше 3 тис., але менше 5 тис. страхових випадків.

5.13. Підприємство виробляє продукцію двох видів А і В. Відомо, що рівень продажу продукції А може зрости з імовірністю 0,8, а продукції В – з імовірністю 0,6. Імовірність того, що продаж обох видів продукції зросте, становить 0,5. Знайти ймовірність того, що зросте продаж хоча б одного виду продукції.

5.14. Ймовірності можливих об’ємів продаж фірми, яка займається імпортом бананів в Україні на наступний рік дорівнюють:

Об’єми продаж, тони	Менше 3-ьох	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	6 та більше
Ймовірність	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05

Знайти ймовірності таких подій: а) в наступному році об’єми продаж фірми становитимуть не менше 4 тон; б) в наступному році об’єми продаж фірми будуть щонайменше 3 тони, але менше шести тон.

5.15. Абітурієнт подав документи для вступу до двох університетів. Свої шанси щодо вступу він оцінює наступним чином: імовірність вступу до першого університету дорівнює 0,6, до другого – 0,8. Ймовірність того, що пропозиції про прийняття надійдуть з обох університетів дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що абітурієнта приймуть хоча б в один університет.

5.16. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при трьох пострілах дорівнює 0,973. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі, якщо вважати, що вона однакова для всіх пострілів.

5.17. Ймовірності, що потрібний покупцю розмір теніски знаходиться у першій, другій або третій коробках, дорівнюють відповідно 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що потрібний розмір теніски знаходиться: а) хоча б в одній коробці; б) не менше, ніж у двох коробках.

5.18. Технік обслуговує три автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом зміни не вийде з ладу перший автомат, дорівнює 0,8, для другого автомату така ймовірність дорівнює 0,85, а для третього – 0,75. Знайти ймовірність того, що протягом зміни з ладу не вийде жоден автомат.

5.19. Для оповіщення про пожежу встановлено два незалежно працюючих пристрої. Ймовірність того, що при виникненні пожежі спрацює перший пристрій, дорівнює 0,95, для другого пристрою така ймовірність дорівнює 0,97. Яка ймовірність того, що у випадку пожежі спрацює хоча б один пристрій?

5.20. Два стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність того, що при цьому буде хоча б одне влучення, дорівнює 0,94. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі тільки першого стрільця, якщо для другого стрільця ця ймовірність дорівнює 0,8.

5.21. Перелік теоретичних питань на екзамені складається з трьох розділів, у кожному з яких по 10 питань. Студент вивчив 6 питань із першого розділу, 7 – із другого та 9 – із третього. Викладач навмання вибирає для студента по одному питанню з кожного розділу. Знайти ймовірність того, що студент складе екзамен на «відмінно», якщо для цього йому треба відповісти на всі три питання.

5.22. Для отримання кредиту підприємець звертається до трьох банків. Ймовірності того, що йому нададуть кредит у певному банку, дорівнює, відповідно, 0,5; 0,6 та 0,8. Яка ймовірність, що підприємець отримає кредит хоча б в одному банку?

5.23. Ймовірність зростання курсу акцій першої компанії у поточному місяці дорівнює 0,6, для другої компанії така ймовірність дорівнює 0,3. Ймовірність того, що у хоча б однієї з цих компаній в поточному місяці курс акцій зросте, дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що у поточному місяці зросте курс акцій обох компаній?

5.24. Ймовірність того, що у річній декларації буде виявлено порушення, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що при перевірці п'яти таких декларацій буде виявлено хоча б одне порушення?

5.25. Претендент на роботу проходить співбесіду, яка складається із трьох запитань. Ймовірність дати правильну відповідь на кожне з питань дорівнює, відповідно 0,8; 0,6 та 0,7. Співбесіда вважається пройденою вдало, якщо претендент вірно відповів на перше питання, а також хоча б на одне з двох інших питань. Знайти ймовірність вдало пройти співбесіду для цього претендента.

5.26. Ймовірності можливих прибутків фірми на наступний рік дорівнюють:

Розмір прибутку, тис. грн.	Менше 50	[50, 100)	[100, 300)	[300, 1000)	1000 та більше
Ймовірність	0,1	0,4	0,2	0,25	0,05

Знайти ймовірність того, що у наступному році прибутки фірми складатимуть: а) менше 300 тис. грн; б) не менше 50 тис. грн.; в) від 100 тис. до 1 млн. грн.

5.27. Для певного стрільця ймовірність влучити в мішень при першому пострілі дорівнює 0,8, а з кожним наступним пострілом – зменшується на 0,05. Яка ймовірність, що після трьох пострілів буде: а) три влучення; б) рівно одне влучення.

5.28. У трьох партіях 90%, 95% та 80% якісних виробів, відповідно. Навмання обирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один неякійсний виріб; б) рівно один неякісний виріб?

5.29. Претендент на роботу пройшов співбесіду у банку та страховій компанії. Ймовірність того, що обидві організації запропонують йому роботу, дорівнює 0,5, а ймовірність, що пропозиція роботи надійде хоча б від однієї з них, дорівнює 0,8. Відомо, що ймовірність отримання пропозиції роботи від банку дорівнює 0,7. Знайдіть імовірність отримати таку пропозицію від страхової компанії.

5.30. Ймовірність потрапити в «десятку», стріляючи в мішень, дорівнює 0,05, потрапити в «дев’ятку» – 0,1. Яка ймовірність, що після двох пострілів по мішені буде «вибито»: а) 19 очок; б) не менше 19 очок?

РОЗДІЛ 6. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ

Теоретичні відомості

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і випадкова подія $B\,(B \in S),\ P(B) > 0$. ***Умовною ймовірністю*** події $A\,(A \in S)$ за умови, що відбулася подія B, називається число

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

При цьому $P(A) = P(A/\Omega)$ називають ***безумовною ймовірністю*** події A.

Зауваження. Для позначення умовної ймовірності також використовують $P_B(A) = P(A/B)$.

Властивості умовної ймовірності

З означення умовної ймовірності та властивостей імовірності безпосередньо випливає, що:

1) $P(A/B) \geq 0$,
2) $P(\Omega/B) = 1$,
3) $P(B/B) = 1$,
4) якщо $A_1, A_2, ..., A_n, ...(n \in \mathbf{N})$ послідовність попарно несумісних випадкових подій $(A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j)$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i / B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i / B).$$

Формула множення ймовірностей. Якщо $P(B) > 0,\ P(A) > 0,$ то мають місце рівності

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A).$$

Імовірність добутку довільної скінченної кількості подій обчислюється за формулою:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...P(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Випадкові події A і B $(A \in S,\ B \in S)$ називаються ***незалежними***, якщо $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Властивості незалежних подій

Властивість 1. Нехай $P(B)>0$. Випадкові події A і B незалежні тоді і тільки тоді, коли $P(A/B)=P(A)$ (умовна ймовірність події A дорівнює її безумовній імовірності).

Властивість 2. Якщо випадкові події A і B незалежні, то події A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

Властивість 3. Якщо випадкові події A і B_1 незалежні, A і B_2 незалежні, B_1 і B_2 несумісні $\left(B_1 \cap B_2 = \varnothing\right)$, то A і $B_1 \cup B_2$ незалежні.

Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ $\left(A_i \in S,\ i=1,...,n\right)$ називаються ***незалежними у сукупності***, якщо для будь-якого $k,\ 1 \le k \le n,$ та для будь-якого набору індексів $i_1, i_2, ..., i_k,\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n,$ виконується

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)...P\left(A_k\right).$$

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні у сукупності, то будь-які дві події A_i і A_j, $i \ne j,$ незалежні. Отже, із незалежності подій у сукупності випливає їх ***попарна незалежність***. Але з попарної незалежності не випливає незалежність у сукупності.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Нехай $P\left(A\right)>0$ та $P\left(B/\overline{A}\right)=P\left(B/A\right)$. Довести, що A і B незалежні.

Розв'язок. За означенням умовної ймовірності

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}, \quad P\left(B/A\right)=\frac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)},$$

тому, враховуючи умову $P\left(B/\overline{A}\right)=P\left(B/A\right)$ та $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$, маємо $P\left(B\cap\overline{A}\right)P\left(A\right)=P\left(A\cap B\right)\left(1-P\left(A\right)\right)$. Оскільки $B\cap\overline{A}=B\setminus\left(A\cap B\right)$, та $\left(A\cap B\right)\subset B$, то $P\left(B\cap\overline{A}\right)=P\left(B\setminus\left(A\cap B\right)\right)=P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$.

Тоді $\left(P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right)P\left(A\right)=P\left(A\cap B\right)\left(1-P\left(A\right)\right)$, тобто $P\left(A\right)P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)P\left(A\right)=P\left(A\cap B\right)-P\left(A\cap B\right)P\left(A\right)$, остаточно маємо $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$.

Отже, події A і B незалежні.

Приклад 2. Володар банківської картки забув її чотиризначний код. Знайти ймовірність того, що двох спроб, запропонованих банкоматом, вистачить для вгадування цього коду.

Розв'язок. Введемо випадкові події: A - двох спроб вистачить для вгадування чотиризначного коду; A_1 - код вгадано з першої спроби; A_2 - код вгадано з другої спроби. Тоді маємо рівність $A = A_1 \bigcup \left(\overline{A}_1 \bigcap A_2\right)$, де подія A представляється у вигляді об'єднання двох несумісних подій A_1 та $\overline{A}_1 \bigcap A_2$. За аксіомою зліченої адитивності $P(A) = P(A_1) + P\left(\overline{A}_1 \bigcap A_2\right)$. Імовірність події A_1 знаходимо за класичним означенням імовірності $P(A_1) = \dfrac{1}{10^4}$. Для обчислення ймовірності події $\overline{A}_1 \bigcap A_2$ застосуємо формулу множення ймовірностей $P\left(\overline{A}_1 \bigcap A_2\right) = P\left(\overline{A}_1\right) P\left(A_2 / \overline{A}_1\right)$.

Враховуючи, що $P\left(\overline{A}_1\right) = 1 - P(A_1) = 1 - \dfrac{1}{10^4}$ та $P\left(A_2 / \overline{A}_1\right) = \dfrac{1}{10^4 - 1}$, одержимо $P(A) = \dfrac{1}{10^4} + \left(1 - \dfrac{1}{10^4}\right)\dfrac{1}{10^4 - 1} = \dfrac{2}{10^4}$.

Отже, ймовірність того, що двох спроб вистачить для вгадування коду, дорівнює 0, 0002.

Приклад 3. Підприємець має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів по акціях тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38, причому для першої компанії вона дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що підприємець отримає дивіденди по акціях другої компанії.

Розв'язок. Нехай подія A_1 полягає в отриманні дивідендів по акціях першої компанії, A_2 – другої. Тоді

$$P(A_1) = 0{,}8; \qquad P(A_2) = x.$$

Введемо подію A – отримано дивіденди по акціях тільки однієї з двох компаній, $P(A) = 0{,}38$. Ця подія може бути представлена у вигляді $A = \left(A_1 \bigcap \overline{A_2}\right) \bigcup \left(A_2 \bigcap \overline{A_1}\right)$.

Зауважимо, що подія A є об'єднанням двох несумісних подій, тому за аксіомою зліченої адитивності $P(A) = P\left(A_1 \bigcap \overline{A_2}\right) + P\left(A_2 \bigcap \overline{A_1}\right)$. За умовою задачі події A_1 і A_2 є незалежними, тому незалежними є і такі події: A_1 і

$\overline{A}_2$; A_2 і $\overline{A}_1$. Використовуючи означення незалежності подій, одержимо $P(A)=P\left(A_1\cap\overline{A_2}\right)+P\left(A_2\cap\overline{A_1}\right)=P(A_1)P\left(\overline{A}_2\right)+P(A_2)P\left(\overline{A}_1\right)$.

Остаточно маємо рівняння:

$$0,8(1-x)+x(1-0,8)=0,38,$$

розв'язавши яке, знайдемо $x=0,7$. Остаточно, $P(A_2)=0,7$.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

6.1. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна трійка, якщо відомо, що сума очок дорівнює 7?

6.2. Підкидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде шістка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані?

6.3. З урни, в якій лежать m білих та n чорних куль, беруть послідовно дві кулі. Відомо, що перша куля біла. Яка ймовірність того, що друга куля також виявиться білою?

6.4. Відомо, що при підкиданні 10 гральних кубиків випала принаймні одна одиниця. Яка ймовірність того, що випаде дві або більше одиниці?

6.5. Відомо, що 5% чоловіків і 0,25% усіх жінок — дальтоніки. Навмання обрана особа — дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати кількість чоловіків і жінок однаковою).

6.6. Довести, що коли A і B — несумісні і $P\left(A\bigcup B\right)\neq 0,$ то $P\{A/A\bigcup B\}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}.$

6.7. Дано: $P(A/B)=0,7,$ $P\left(A/\overline{B}\right)=0,3,$ $P(B/A)=0,6.$ Обчислити $P(A)$.

6.8. Нехай $P(B)>0$ і виконується рівність $P(A/B)+P\left(\overline{A}\right)=1.$ Що можна сказати про події A і B?

6.9. Події A і B — несумісні, і $P(B)>0$. Обчислити $P(A/B)$.

6.10. Довести, що якщо A й B — незалежні, то $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ — теж незалежні.

6.11. Події A та B_1 й A та B_2 — незалежні, причому B_1 та B_2 — несумісні. Довести, що події A та $B_1\cup B_2$ — незалежні.

6.12. Якщо події A, B, C — незалежні у сукупності, то події A та $B \bigcup C$, а також A й $B \setminus C$ — незалежні. Довести це.

6.13. Нехай A та B, A та C— незалежні й $B \supset C$. Тоді події A та $B \setminus C$ — незалежні. Довести це.

6.14. Кинуто послідовно три монети. Визначити, залежні чи незалежні події: A={випав герб на першій монеті}, B ={випала хоча б одна цифра}.

6.15. Кинуто монету і гральний кубик. Визначити залежні чи незалежні події: A = {випав герб}, B = {випало парне число очок}.

6.16. Кинуто два гральних кубики. Розглянемо випадкові події: A={на першому кубику випала парна кількість очок}, B={на другому кубику випала непарна кількість очок}, C={сума очок на кубиках непарна}. Довести, що події A, B, C попарно незалежні, але не є незалежними у сукупності.

6.17. Довести, що якщо A і B незалежні події і $A \subset B$, то $P(A)=0$ або $P(B)=1$.

6.18. Довести, що якщо подія A не залежить сама від себе, то $P(A)=0$ або $P(A)=1$.

6.19. Два мисливці влучають у ціль з імовірностями 0,7 та 0,8, відповідно. Кожен з них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) обидва влучать? б) жоден не влучить? в) хоча б один влучить? г) лише один влучить у ціль?

6.20. Два гравці по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого першим випаде герб. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

6.21. В урні n білих та m чорних куль. Два гравці по черзі дістають кулі з урни, повертаючи кожного разу взяту кулю в урну. Виграє той, хто першим дістане білу кулю. Знайти ймовірності виграшу для кожного гравця.

6.22. Нехай $A_1,...,A_n$ — випадкові події. Довести формулу:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P(A_2 / A_1)\cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

6.23. У компанії працює 200 службовців. Розподіл їх за віком, освітою та строком роботи в компанії наведено в таблиці.

Вік	Менше 5 років у компанії		Більше 5 років у компанії	
	Вища освіта	Середня освіта	Вища освіта	Середня освіта
$\leq$ 30	40	5	50	5
> 30	50	25	15	10

Навмання вибирається один службовець.

а) Яка ймовірність того, що вибрана особа має вищу освіту?

б) Якщо вибрана особа працює в компанії більше 5 років, яка ймовірність того, що її вік більше 30?

в) Нехай A та B такі події:

A = {вибрана особа має вищу освіту},

B = {вибрана особа старша 30 років}.

Чи будуть події A та B незалежними?

6.24. Фірма, що ремонтує побутову електротехніку, проаналізувавши причини поломок, зробила висновок про такий процентний розподіл кількості поломок за їх типами:

	Тип поломки		
	Електричний	Механічний	Зовнішній
Під час гарантійного ремонту	10%	25%	17%
Після гарантійного терміну	15%	30%	3%

Нехай A та B такі події:

A = {навмання вибраний прилад має електричний тип поломки},

B = {навмання вибраний прилад зламався після гарантійного терміну}.

Чи будуть події A та B незалежними?

6.25. Імовірності вибрати навмання будь-який з 4-х бракованих виробів однакові. На трьох виробах було по одному дефекту – або ушкоджена фарба, або були вм'ятини, або були тріщини, а на четвертому виробі були всі три дефекти. Події A, B, C полягають відповідно у тому, що на навмання взятому виробі була ушкоджена фарба, була вм'ятина, була тріщина. Чи є ці події: 1) незалежними попарно; 2) незалежними в сукупності?

6.26. Підприємство випускає деякі вироби, кожний з яких має дефект з імовірністю 0,7. Після виготовлення оглядається послідовно трьома контролерами, кожний з яких виявляє дефект з імовірностями 0,8; 0,85; 0,9 відповідно. У випадку виявлення дефекту виріб бракується. Знайти ймовірність того, що виріб: 1) буде забраковано; 2) буде забраковано другим контролером; 3) буде забраковано всіма контролерами.

6.27. Підприємець вирішив вкласти свої кошти порівну в два "незалежні" контракти, кожен з яких діє два роки і принесе йому прибуток в розмірі 100%. Імовірність того, що кожен з контрактів за два роки не «лопне», дорівнює 0,8. Яка ймовірність ризику? Або наскільки ймовірним є те, що через два роки після закінчення терміну дії цих контрактів, підприємець, щонайменше, "нічого не втратить"?

Завдання для індивідуальної роботи

6.1. Діяльність продавця вважається успішною, якщо ймовірність здійснення ним акту продажу становить 0,35. Припустимо, що акти окремих продажів товарів продавцем, є незалежними подіями. Чому дорівнює ймовірність того, що продавець не продає товар до третьої спроби включно?

6.2. Брак у продукції заводу внаслідок дефекту A складає 4%, а внаслідок дефекту B – 3,5%. Придатна продукція заводу складає 95%. Знайти ймовірність того, що 1) серед продукції, яка не має дефекту A, зустрінеться дефект B; 2) серед забракованою за дефектом A продукції зустрінеться дефект B.

6.3. Пакети акцій, які є на ринку цінних паперів можуть дати дохід власнику з імовірністю 0,5 (для кожного пакету). Скільки пакетів акцій різних фірм треба придбати, щоб із імовірністю, не меншою 0,96875, можна було б сподіватися на дохід хоча б по одному пакету акцій?

6.4. Вироби, які випускає підприємство, мають дефект з імовірністю 0,7. Після виготовлення виріб оглядається послідовно трьома контролерами, кожний із яких виявляє дефект із імовірностями 0,8; 0,85; 0,9 відповідно. У випадку виявлення дефекту виріб бракується. Знайти ймовірність того, що виріб: 1) буде забраковано; 2) буде забраковано другим контролером; 3) буде забраковано всіма контролерами.

6.5. Інформаційна підтримка клієнтів банку вночі забезпечується двома окремими телефонними лініями. Ймовірність поломки першої лінії дорівнює 0,02, другої – 0,01. Знайти ймовірність того, що call-центр буде працювати безперебійно (тобто, хоча б одна лінія буде функціонувати).

6.6. Три пакети акцій, якими володіє інвестор, можуть дати доход власнику відповідно з імовірностями 0,4; 0,5 та 0,55. Чому дорівнює ймовірність того, що власник матиме доход: а) по всім пакетам; б) лише по одному пакету?

6.7. Дві фірми деякої великої корпорації торгують офісним обладнанням та оргтехнікою відповідно. Ймовірність того, що перша фірма буде мати запланований прибуток від продажів у поточному фінансовому році, дорівнює 0,6. Ймовірність того, що обидві фірми одночасно будуть мати заплановані прибутки, становить 0,35. Друга фірма буде мати заплановані прибутки з імовірністю 0,5. Знайти ймовірність того, що: а) друга фірма буде мати запланований прибуток, якщо перша фірма одержала запланований прибуток; б) хоча б одна з фірм буде мати запланований прибуток.

6.8. На автомобілі «Лексус», що належить керівнику банку та становить величезний інтерес для викрадачів, встановлені електронна сигналізація та механічне блокування важеля перемикання передач. Ймовірність того, що викрадач впорається із сигналізацією, складає 0,2, а ймовірність того, що він зламає блокування, дорівнює 0,1. Сьогодні президент, ризикнувши, вирушив у гості без водія та охорони. Знайти ймовірності таких подій: а) автомобіль буде викрадено; б) викрадач впорається лише з однією системою захисту.

6.9. Дві конкуруючі компанії A та B, що займаються транспортними перевезеннями, пропонують різні розцінки на свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом контракту з компанією A за умови наявності конкуренції компанії B (клієнт знає розцінки обох компаній) становить 0,4, а за відсутністю конкуренції ця ймовірність дорівнює 0,5. Припустимо, що клієнт з імовірністю 0,7 знає розцінки обох компаній. Яка ймовірність того, що клієнт укладе угоду з компанією A?

6.10. У групі з 1000 осіб 452 мають поточні рахунки, 336 – депозитні рахунки, а 302 – і поточні, і депозитні. Визначити, чи є події *«володіння поточним рахунком»* та *«володіння депозитним рахунком»* незалежними?

6.11. Фірма порушує закон з імовірністю 0,3. Зазвичай аудитор виявляє порушення з імовірністю 0,75. Знайти ймовірність того, що перевірка порушення не виявила, але порушення насправді є.

6.12. Підприємство виробляє продукцію двох видів A і B. Відомо, що рівень продажу продукції A може зрости з імовірністю 0,8, а продукції B – з імовірністю 0,6. Імовірність того, що продаж обох видів продукції зросте, становить 0,5. Знайти ймовірність того, що: а) продаж продукції виду B зросте, за умови, що продаж продукції виду A вже зріс; б) зросте продаж хоча б одного виду продукції.

6.13. Фірма порушує закон з імовірністю 0,3. Зазвичай аудитор виявляє порушення з імовірністю 0,75. Однак в даному випадку проведена ним перевірка порушення не виявила. Знайти ймовірність того, що порушення насправді є.

6.14. Під завантаження подано платформу, піввагон та покритий вагон. Вантажність платформи використовується з імовірністю 0,9, піввагону – з імовірністю 0,8 і покритого вагону – з імовірністю 0,7. Яка ймовірність того, що вантажність всіх трьох вагонів буде використана повністю?

6.15. Імовірність одержання дивідендів по акціях тільки однієї компанії при одночасній закупівлі акцій двох компаній дорівнює 0,3. Знайти ймовірність одержання дивідендів при закупівлі акцій тільки першої компанії, якщо відомо, що для другої компанії ця ймовірність дорівнює 0,7.

6.16. Три незалежних експерти роблять прогноз вартості акції компанії, помиляючись при цьому з однаковою ймовірністю. Знайти цю ймовірність, якщо ймовірність того, що принаймні один з них помилиться, дорівнює 0,271.

6.17. Відділ технічного контролю підприємства бракує партію із 100 деталей, якщо хоча б одна із 5 навмання відібраних із партії деталей виявиться бракованою. Партія містить 5% браку. Знайти ймовірність того, що одна партія деталей буде забракована.

6.18. Вакансії, які пропонуються безробітному біржею праці, задовольняють його з імовірністю 0,01. Скільки безробітних треба обслугувати, щоб імовірність того, що хоча б один з них знайде роботу, була не менше 0,95?

6.19. Діяльність продавця вважається успішною, якщо ймовірність здійснення ним акту продажу становить 0,4. Вважаючи, що окремі акти продажу товарів продавцем є незалежними подіями, визначити ймовірність того, що продавець не продає товар до третьої спроби включно.

6.20. Підприємство, що займається виготовленням м’яких меблів, отримує комплектуючі від трьох постачальників. Ймовірності того, що поставки будуть вчасними, дорівнюють 0,9, 0,95, 0,92 відповідно. Знайти ймовірність того, що підприємство виробить меблі згідно плану (це можливо лише у випадку, коли всі комплектуючі будуть доставлені вчасно).

6.21. Три пакети акцій, якими володіє інвестор, можуть дати доход власнику відповідно з імовірностями 0,45; 0,5 та 0,55. Чому дорівнює ймовірність того, що власник матиме доход: а) тільки по першому і третьому пакетам; б) тільки по одному пакету?

6.22. Дві фірми деякої великої корпорації торгують освітлювальним обладнанням та сантехнікою відповідно. Ймовірність того, що перша фірма буде мати запланований прибуток від продажів у поточному фінансовому році, дорівнює 0,7. Для другої фірми ця ймовірність становить 0,6. Імовірність того, що обидві фірми одночасно будуть мати заплановані прибутки, дорівнює 0,4. Знайти ймовірності того, що: а) друга фірма буде мати запланований прибуток, якщо перша фірма одержала запланований прибуток; б) хоча б одна з фірм буде мати запланований прибуток.

6.23. Пасажир може доїхати до своєї станції потягами двох призначень. Імовірність того, що в залізничній касі є квитки на потяг першого призначення, дорівнює 0,5, а на потяг другого призначення – 0,7. Знайти ймовірність того, що пасажир придбав квиток.

6.24. Дві конкуруючі компанії, що займаються транспортними перевезеннями, пропонують різні розцінки на свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом контракту з першою компанією за умови наявності конкуренції другої компанії (клієнт знає розцінки обох компаній) становить 0,3, а за відсутністю конкуренції ця ймовірність дорівнює 0,4. Припустимо, що клієнт з імовірністю 0,9 знає розцінки обох компаній. Чому дорівнює ймовірність того, що клієнт укладе угоду з першою компанією?

6.25. Фірма порушує закон з імовірністю 0,35. Зазвичай аудитор виявляє порушення з імовірністю 0,8. Однак в даному випадку проведена ним перевірка порушення не виявила. Знайти ймовірність того, що порушення насправді є.

6.26. Дві конкуруючі транспортні компанії A та B пропонують різні розцінки на свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом контракту з компанією A за умови наявності конкуренції компанії B (клієнт знає розцінки обох компаній) становить 0,2, а за відсутністю конкуренції ця ймовірність дорівнює 0,35. Припустимо, що клієнт з імовірністю 0,8 знає розцінки обох компаній. Чому дорівнює ймовірність того, що клієнт укладе угоду з компанією A?

6.27. Імовірність одержання дивідендів по акціях тільки однієї компанії при одночасній закупівлі акцій двох компаній дорівнює 0,45. Знайти ймовірність одержання дивідендів при закупівлі акцій тільки першої компанії, якщо відомо, що для другої компанії ця ймовірність дорівнює 0,6.

6.28. Брак у продукції заводу внаслідок дефекту A складає 5%, а внаслідок дефекту B – 4,5%. Придатна продукція заводу складає 94%. Знайти ймовірність того, що 1) серед продукції, яка не має дефекту A, зустрінеться дефект B; 2) серед забракованою за дефектом A продукції зустрінеться дефект B.

6.29. Підприємство випускає деякі вироби, кожний з яких має дефект з імовірністю 0,6. Після виготовлення оглядається послідовно трьома контролерами, кожний з яких виявляє дефект з імовірностями 0,7; 0,75; 0,8 відповідно. У випадку виявлення дефекту виріб бракується. Знайти ймовірність того, що виріб: 1) буде забраковано; 2) буде забраковано другим контролером; 3) буде забраковано всіма контролерами.

6.30. Пасажир може доїхати до своєї станції потягами двох призначень. Імовірність того, що в залізничній касі є квитки на потяг першого призначення, дорівнює 0,6, а на потяг другого призначення – 0,65. Знайти ймовірність того, що пасажир придбав квиток.

РОЗДІЛ 7. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЙЄСА

Теоретичні відомості

Випадкові події $H_1,...,H_n$ $\left(H_i \in S,\ i=1,...,n\right)$ утворюють ***повну групу подій***, якщо:

1) H_i — попарно несумісні ($H_i \bigcap H_k = \varnothing,\ \ i \neq k$);

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$

Формула повної ймовірності. Якщо $H_1,...,H_n$ — повна група подій і $P\left(H_i\right) > 0$ $\left(i=1,...,n\right)$, то для будь-якої події $A\left(A \in S\right)$ виконується рівність

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A / H_i\right).$$

Формула повної ймовірності справджується і для зліченної кількості подій.

Формули Байєса. Нехай $H_1,...,H_n$ — повна група подій, причому $P\left(H_i\right) > 0$ $\left(i=1,...,n\right)$. Тоді для довільної випадкової події $A\left(A \in S\right)$ такої, що $P\left(A\right) > 0$, виконуються рівності

$$P\left(H_i / A\right) = \frac{P\left(H_i\right) P\left(A / H_i\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(H_k\right) P\left(A / H_k\right)}.$$

Зауваження. Нехай подія A може відбуватись за різних умов, стосовно яких можна висунути n гіпотез $H_1,...,H_n$. З деяких міркувань відомі ймовірності цих гіпотез $P\left(H_1\right),\ ...,\ P\left(H_n\right)$ (***апріорні*** ймовірності), відомі також умовні ймовірності $P\left(A/H_1\right),\ ...,\ P\left(A/H_n\right)$. Припустимо, що проведено випробування, в результаті якого настала подія A . Це повинно призвести до переоцінювання ймовірностей гіпотез H_i. Формули Байєса дають вираз для умовних імовірностей $P\left(H_i / A\right)$, які називаються ***апостеріорними*** ймовірностями.

Приклади розв'язання задач

Приклад1. Серед N екзаменаційних білетів є n «щасливих». Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність узяти «щасливий» білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв'язок. Нехай подія A — перший візьме щасливий білет, подія B — другий візьме щасливий білет. Очевидно, що $P(A)=\frac{n}{N}$. Введемо гіпотези: H_1 — перший узяв щасливий білет $\left(P(H_1)=\frac{n}{N}\right)$; H_2 — перший узяв нещасливий білет $\left(P(H_2)=\frac{N-n}{N}\right)$. За формулою повної ймовірності:

$$P(B)=P(H_1)P(B/H_1)+P(H_2)P(B/H_2)=\frac{n}{N}\cdot\frac{n-1}{N-1}+\frac{N-n}{N}\cdot\frac{n}{N-1}=\frac{n}{N}.$$

Отже, $P(A)=P(B)$.

Приклад 2. У спортивному магазині 20% спортивних костюмів виготовлено фірмою "Puma", 30% – "Adidas" і 50% – "Reebok". Імовірність браку для кожної з цих фірм становлять 0,05, 0,01, 0,06 відповідно. Яка ймовірність того, що навмання взятий спортивний костюм виявиться бракованим?

Розв'язок. Нехай подія A – "взятий костюм із браком". Можливі три припущення: B_1 – "костюм виготовлено фірмою "Puma", B_2 – "костюм виготовлено фірмою "Adidas", і B_3 – "костюм виготовлено фірмою "Reebok". За умовою ймовірності цих гіпотез дорівнюють

$P(B_1)=0,2,\ \ P(B_2)=0,3,\ \ P(B_3)=0,5$.

Умовна ймовірність того, що взятий костюм виявиться з браком, за умови, що він виготовлений фірмою "Puma", $P(A/B_1)=0,05$.

Умовна ймовірність того, що взятий костюм виявиться з браком, за умови, що він виготовлений фірмою "Adidas", $P(A/B_2)=0,01$.

Умовна ймовірність того, що взятий костюм виявиться з браком, за умови, що він виготовлений фірмою "Reebok", $P(A/B_3)=0,06$.

Шукану ймовірність того, що взятий костюм буде з браком, знаходимо за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)=$$
$$=0,2\cdot 0,05+0,3\cdot 0,01+0,5\cdot 0,06=0,043.$$

Отже шукана ймовірність дорівнює 0,043.

Приклад 3. Відомо, що у середньому 95% випущеної продукції задовольняють вимогам стандарту. Спрощена схема контролю визнає продукцію придатною з імовірністю 0,98, якщо вона стандартна, і з імовірністю 0,06, якщо вона нестандартна. Знайти ймовірність того, що: 1) узятий навмання виріб пройде спрощений контроль; 2) виріб стандартний, якщо воно одноразово пройшло спрощений контроль; 3) виріб стандартний, якщо воно дворазово пройшло спрощений контроль.

Розв'язок. 1) Нехай подія A — узятий навмання виріб пройшов спрощений контроль, гіпотеза H_1 - виріб стандартний, гіпотеза H_2 — виріб нестандартний.

За умовою $P(H_1)=0,95,$ $P(H_2)=0,05,$ $P(A/H_1)=0,98,$ $P(A/H_2)=0,06.$

Імовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль, за формулою повної ймовірності $P(A)=0,95\cdot 0,98+0,05\cdot 0,06=0,934$.

2) Імовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, є стандартним, обчислюється за формулою Байєса

$$P(H_1/A)=\frac{0,95\cdot 0,98}{0,934}=0,997.$$

3) Нехай подія B — узятий навмання виріб дворазово пройшов спрощений контроль. Тоді за теоремою множення ймовірностей

$$P(B/H_1)=0,98\cdot 0,98=0,9604,$$

$$P(B/H_2)=0,06\cdot 0,06=0,0036.$$

За формулою Байєса

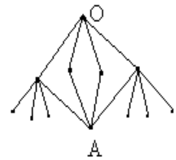
$$P(H_1/B)=\frac{0,95\cdot 0,9604}{0,95\cdot 0,9604+0,05\cdot 0,0036}=0,9998.$$

У зв'язку з тим, що апостеріорна ймовірність $P(H_2/B)=1-P(H_1/B)=1-0,9998=0,0002$ дуже мала, то подія, що виріб два рази пройшов спрощений контроль але виявився нестандартним, є практично неможливою.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

7.1. Є два однакових ящики з кулями. У першому ящику 2 білих та 1 чорна куля, у другому — 1 біла та 4 чорних кулі. Навмання вибирають один ящик і виймають з нього кулю. Яка ймовірність, що витягнута куля буде білою?

7.2. На малюнку 7.1 зображено схему доріг. Туристи вийшли з пункту O, вибираючи навмання одну дорогу з усіх можливих. Яка ймовірність того, що вони потраплять у пункт A?



мал. 7.1

7.3. У двох урнах знаходиться відповідно n_1 і n_2 куль, із яких білих куль m_1 і m_2. З першої урни переклали в другу урну одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

7.4. В урні n куль. Усі можливі припущення про число білих куль в урні рівноможливі. Навмання з урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

7.5. В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла, або чорна. В урну поклали білу кулю, а потім після ретельного перемішування взяли навмання одну кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що після цього візьмуть з урни білу кулю? (Льюис Кэрролл. История с узелками. — М. : Мир, 1973).

7.6. В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність того, що взята з урни куля буде біла, якщо всі припущення про початковий склад куль в урні рівноможливі?

7.7. У кожній з n урн m білих і k чорних куль. З першої урни взяли одну кулю і переклали в другу. З другої урни взяли одну кулю і переклали в третю і т. д. Обчислити ймовірність того, що з останньої урни буде взято білу кулю.

7.8. Урна містить n куль. Усі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

7.9. З урни, яка містить n куль невідомого кольору, взяли одну кулю, яка виявилась білою. Після цього знову виймають кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла? (Усі припущення про початковий склад куль в урні однаково ймовірні).

7.10. Кожна з k_1 урн містить m_1 білих і n_1 чорних куль, а кожна з k_2 урн містить m_2 білих і n_2 чорних куль. Із навмання взятої урни вийняли кулю, яка виявилася білою. Яка ймовірність того, що кулю взято з першої групи урн?

7.11. Стрілець A влучає в мішень з імовірністю $p_1 = 0,6$, стрілець B — з імовірністю $p_2 = 0,5$, а стрілець C — з імовірністю $p_3 = 0,4$. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш імовірно: влучив C в мішень чи ні?

7.12. Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Ведмедя вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що ведмедя вбито першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,6$?

7.13. З урни, яка містить m білих $\left(m > 3\right)$ і n чорних куль, загублено одну кулю. Для того щоб визначити склад куль в урні, з урни взяли дві кулі, які виявилися білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля біла?

7.14. З урни, яка містить 3 білих та 2 чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білих та 4 чорних кулі. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладання буде взято білу кулю?

7.15. Деталі виробляються на двох заводах. Обсяг продукції другого заводу в n разів перевищує обсяг продукції першого заводу. Частка браку на першому заводі — p_1, на другому — p_2. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її випущено другим заводом?

7.16. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого 0,8, другого — 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що у мішень влучив перший стрілець.

7.17. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга — 35%, третя — 40% усіх виробів. Частка браку відповідно 5, 4 і 2%.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибраний гвинт бракований?

б) Випадково вибраний гвинт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено першою, другою, третьою машинами?

7.18. Співробітник консалтингового агентства проводить аналіз тенденцій на валютному ринку з метою розрахунку прибутковості майбутніх інвестицій. Згідно з попереднім прогнозом, зміцнення долара США в період активного економічного зростання очікується з імовірністю 0,75; в період помірного економічного зростання з імовірністю 0,45 і в період стагнації з імовірністю 0,25. Крім того, є підстави вважати, що активне економічне зростання буде відбуватися з імовірністю 0,25, помірне економічне зростання з імовірністю 0,35 і буде спостерігатися стагнація з імовірністю 0,40. Відомо, що в прогнозований період відбулося зміцнення долара. Яка ймовірність того, що цей період ознаменований високими темпами економічного зростання?

7.19. Для прийняття рішення про купівлю цінних паперів була розроблена система аналізу ринку. З даних за попередні періоди відомо, що 5% всіх цінних паперів є *«поганими»* - не підходять для інвестування. Запропонована система визначає 98% *«поганих»* цінних паперів як потенційно *«погані»*, але при цьому 15% цінних паперів, придатних для інвестування, також визначає як потенційно *«погані»*. Знайти ймовірність того, що цінний папір підходить для інвестування, при умові, що даною системою аналізу ринку він був визначений як потенційно *«поганий»*. На основі отриманого результату прокоментувати придатність системи для прийняття інвестиційних рішень.

7.20. Щоб підтримати позиції фірми при укладанні контракту на основі проведення тендеру, необхідні значні інвестиції у визначення вартості початкових досліджень та розробок. Якщо фірма A зробить ці інвестиції, а її основний конкурент цього не зробить, то ймовірність укладання договору з фірмою A складе 0,8. Однак, якщо конкурент також проведе попередні дослідження та розробки, то ймовірність укладання договору з фірмою A зменшиться до 0,4. Аналітична служба фірми A оцінює ймовірність проведення конкурентом пошукових робіт по майбутньому проекту як 0,3. Обчислити ймовірність таких подій: а) тендерний комітет влаштує ціна, запропонована фірмою A (тобто контракт буде укладений), при відсутності інформації про рішення конкурента; б) тендерний комітет не влаштує ціна, запропонована фірмою A (тобто контракт не буде укладений), при умові, що конкурент запропонує свою ціну; в) конкурент представить свою ціну при умові, що ціна, запропонована фірмою A, приймається тендерним комітетом; г) конкурент представить свою ціну при умові, що ціна, запропонована фірмою A, не приймається тендерним комітетом.

Завдання для індивідуальної роботи

7.1. Страхова компанія поділяє застрахованих клієнтів за класами ризику: I клас – малий ризик, II клас – середній, III – великий ризик. Серед цих клієнтів 50% - першого класу ризику, 30% - другого та 20% - третього. Імовірність настання страхового випадку для першого класу ризику дорівнює 0,01, другого – 0,03, третього – 0,08. Знайти ймовірність того, що: а) застрахований одержить страхові виплати; б) клієнт, що одержав страхові виплати, належить до групи малого ризику?

7.2. Імовірність того, що продукція, вироблена на заводі, є стандартною, дорівнює 0,95. Спрощена система контролю заносить продукцію до стандартної із імовірністю 0,97, коли вона справді є стандартною, та із імовірністю 0,07, коли вона насправді не є стандартною. Знайти ймовірність того, що навмання взятий зразок продукції: 1) був занесений до стандартних; 2) був насправді стандартним, коли він був занесений до стандартних; 3) був насправді стандартним, коли він не був занесений до стандартних.

7.3. Комплект із 100 деталей містив 5% бракованих деталей. Вибірковий контроль полягав у тому, що з цього комплекту навмання вибирали 5 деталей і комплект вважали придатним до використання, якщо усі 5 вибраних деталей не були бракованими. Знайти ймовірність того, що даний комплект деталей було визнано придатним до використання.

7.4. Ймовірність того, що тижневий обіг продавця морозива перевищить 2000 грн., при сонячній погоді дорівнює 80%, при мінливій хмарності – 50%, а при дощовій погоді – 10%. Знайти ймовірність того, що наступного тижня обіг перевищить 2000 грн., якщо ймовірність сонячної погоди у дану пору року складає 20%, ймовірність мінливої хмарності та ймовірність дощу – по 40%.

7.5. Статистика запитів кредитів у банку така: 10% – державні органи, 20% – інші банки, решта – фізичні особи. Ймовірності того, що отриманий кредит не буде повернуто, складають 0,01, 0,05 та 0,2 відповідно. Начальнику кредитного відділу доповіли, що отримано повідомлення про невиконання обов’язків по поверненню кредиту, в якому дуже погано надрукувалось ім’я клієнта. Знайти ймовірність того, що кредит не повертає деякий банк.

7.6. Фінансовий аналітик оцінив шанси як 2:3, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця (зростання ціни не передбачається). Імовірність продажу облігацій у випадку падіння ціни оцінюється у 0,75. Якщо падіння ціни не відбудеться, то ймовірність продажів оцінюється у 0,55. Яка ймовірність того, що облігації буде продано у наступному місяці?

7.7. Банківський службовець збереже своє місце роботи з імовірністю 0,9, якщо голова правління банку буде переобраний на новий термін та з імовірністю 0,5, якщо буде обраний новий голова. Ймовірність переобрання голови становить 0,6. До проведення процедури виборів знайти ймовірність того, що службовець збереже своє місце роботи.

7.8. Якщо підприємець планує суттєві зміни у зразку товару, то з імовірністю 0,7 він почне вносити зміни в технологію виробництва до 1 вересня, якщо ж він не планує суттєвої переробки, то ймовірність зміни технології складе 0,2. На основі попереднього досвіду ймовірність суттєвої переробки зразка складає 0,2. Обчислити ймовірності таких подій: а) у технологію будуть внесені зміни до 1 вересня; б) зразок товару зазнає суттєвих змін, якщо зміни в технологію починають вноситись до 1 вересня; в) зразок товару зазнає суттєвих змін, якщо 1 вересня вже пройшло, а змін у технології не відбулось.

7.9. Магазин отримує товар від трьох постачальників: 55% товару надходить від першого постачальника, 20% від другого і 25% від третього. Продукція, що надходить від першого постачальника, містить 5% браку, та, що надходить від другого постачальника – 6% браку, а від третього – 8% браку. Покупець залишив у книзі скарг та пропозицій скаргу про низьку якість придбаного товару. Знайти ймовірність того, що поганий товар, який викликав нарікання з боку покупця, надійшов від другого постачальника.

7.10. На фабриці перша автоматична технологічна лінія виготовляє 65% всіх виробів, а друга - 35%. В середньому 10 виробів з 1000, виготовлених першою технологічною лінією, виявляються бракованими, а для другої лінії - 5 виробів з 500. Із виготовлених виробів за робочий день наздогад взятий один виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовлено на першій технологічній лінії?

7.11. В даний район вироби поставляються трьома фірмами у співвідношенні 3: 4: 6. Серед продукції першої фірми стандартні вироби складають 95%, другої - 80%, третьої - 75%. Знайти ймовірність того, що: а) придбаний виріб виявиться нестандартним; в) придбаний виріб виявився стандартним. Яка ймовірність того, що вона виготовлена третьої фірмою?

7.12. Відомо, що 92% виготовлених заводом виробів відповідають вимогам стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатним стандартний виріб із імовірністю 0,99, а нестандартний із імовірністю 0,01. Визначити ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощену схему контролю, відповідає вимогам стандарту.

7.13. Банківський службовець збереже своє місце роботи з імовірністю 0,8, якщо голова правління банку буде переобраний на новий термін та з імовірністю 0,65, якщо буде обраний новий голова. Ймовірність переобрання голови становить 0,5. Відомо, що службовець зберіг своє місце роботи після виборів. Яка ймовірність того, що голова правління банку був переобраний на новий термін?

7.14. Годинники виготовляються на трьох заводах, які надходять в магазин. Перший завод виготовляє 45% всієї продукції, що надходить в магазин; другий – 35%; третій – 20%. На першому заводі 80% продукції вищого сорту, для другого та третього заводів – 90%, 75%. Навмання куплений годинник в магазині виявився першого сорту. Яка ймовірність того, що його виготовив другий завод?

7.15. Імовірність загального підйому купівельного попиту на ноутбуки дорівнює 0,5. Якщо зростання попиту дійсно відбудеться, то зростання обсягів продажу окремої компанії оцінюється у 0,75. Якщо ж зростання попиту не відбудеться. то ймовірність зростання обсягів продажу компанії оцінюється у 0,6. Відомо, що обсяг продажу окремої компанії зріс. Знайти ймовірність того, що попит на ноутбуки дійсно зріс.

7.16. Аналітик, що займається прогнозом котирувань акцій компанії, очікує зростання вартості акцій з імовірністю 0,85 за умови, що економіка країни буде перебувати в стані підйому. За його оцінками, в разі економічного спаду, ймовірність зростання котирувань акції компанії знижується до 0,40. Згідно з попередніми прогнозами ймовірність економічного підйому в країні в наступному році оцінюється на рівні 65%. Перед аналітиком поставлена задача: оцінити ймовірность зростання цін на акції компанії в новому році. Який Ваш прогноз?

7.17. На склад надійшли однотипні вироби. Із них 40% надійшло з фабрики №1, 35% – з фабрики №2 і 25% – з фабрики №3. Брак при виготовленні цих виробів у середньому відповідно дорівнює: 2%, 5%, 9%. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб зі складу виявиться придатним?

7.18. Три станки виготовляють однотипні деталі, які надходять у загальний бункер. Імовірність виготовити браковану деталь для першого, другого та третього станків відповідно дорівнює: 0,09; 0,01; 0,05. Продуктивність першого станка втричі більше продуктивності другого станка, а продуктивність другого в два рази менше від третього. Яка ймовірність того, що навмання взята одна деталь із бункера виявиться стандартною?

7.19. Імовірність виготовлення виробу з браком на даному підприємстві дорівнює 0.04. Перед випуском виріб піддається спрощеної перевірці, яка в разі стандартного виробу пропускає його з імовірністю 0,96, а в разі виробу з браком – з імовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виготовлений виріб буде випущено підприємством у продаж.

7.20. Фірма бере участь у трьох проектах, кожен з яких може закінчитися невдачею з імовірністю 0,1. У разі невдачі одного з проектів імовірність розорення фірми дорівнює 0,2, двох – 0,5, трьох – 0,9. Знайти ймовірність розорення фірми.

7.21. Банківський службовець збереже своє місце роботи з імовірністю 0,9, якщо голова правління банку буде переобраний на новий термін та з імовірністю 0,55, якщо буде обраний новий голова. Ймовірність переобрання голови становить 0,7. Відомо, що службовець зберіг своє місце роботи після виборів. Яка ймовірність того, що голова правління банку був переобраний на новий термін?

7.22. Фінансовий аналітик оцінив шанси як 5:6, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця (зростання ціни не передбачається). Імовірність продажу облігацій у випадку падіння ціни оцінюється у 0,7. Якщо падіння ціни не відбудеться, то ймовірність продажу оцінюється у 0,6. Знайти ймовірність того, що акції буде продано у наступному місяці.

7.23. Два аудитори перевіряють 10 фірм (по 5 кожен). У двох фірмах допущені порушення. Ймовірність виявлення порушень (в окремій фірмі-порушнику) першим аудитором дорівнює 0,8, другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що обидві фірми-порушники будуть виявлені.

7.24. Число вантажних автомашин, що проїжджають по шосе повз бензоколонки, відноситься до числа легкових як 5:9. Ймовірність того, що до бензоколонки під'їде вантажна машина для заправки, дорівнює 0,25, для легкової ця ймовірність дорівнює 0,157. До бензоколонки для заправки під'їхала машина. Яка ймовірність того, що вона виявиться вантажною?

7.25. Маємо два контейнери. У першому містяться 10 однотипних виробів, із них 7 відповідають стандарту, а в другому – 12, із них 8 відповідають стандарту. Яка ймовірність того, що із навмання вибраного контейнера навмання вибрані три вироби будуть відповідати стандарту?

7.26. Першій робітник за зміну виготовив 80 деталей, а другий – 60. Брак в середньому складає: для першого робітника 5%, а для другого – 8%. Після зміни виготовлені деталі поміщають в один контейнер. Навмання взята одна деталь із контейнера виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що деталь була виготовлена першим робітником?

7.27. Три оператори виконують комп'ютерний набір пакету документів. При цьому продуктивності їх праці співвідносяться, як 10:8:12. Ймовірність допустити помилки при наборі для кожного з операторів відповідно дорівнює 0,02; 0,07 і 0,01. Наприкінці робочого дня документи, набрані операторами, підшивають в одну папку. Яка ймовірність того, що навмання обраний пакет документів із папки, буде без помилок?

7.28. У маршрутному таксі знаходяться чотири пасажири. На наступній зупинці кожен з них може залишити таксі із імовірністю 0,1, а зайде в таксі новий пасажир із імовірністю 0,2. Яка ймовірність того, що коли таксі знову вирушить по маршруту після зупинки, в салоні таксі буде чотири пасажири?

7.29. Господарство заготувало для посіву насіння пшениці, серед якої виявилось 85% першого сорту, 10% – другого і 5% – третього сорту. Ймовірність того, що із зернини першого сорту виросте колосок, в якому буде не менше 30 зернин, дорівнює 0,65, для другого та третього сортів ця ймовірність відповідно дорівнює 0,15 і 0,1. Яка ймовірність того, що навмання взятий колосок нового врожаю буде мати не менше 30 зернин?

7.30. Спрощена система контролю виробів складається з однієї перевірки. В результаті перевірки стандартний виріб помилково вважається бракованим з імовірністю 0,05, а бракований виріб помилково вважається стандартним з імовірністю 0,02. Припускаючи, що кожен виріб задовольняє стандарту з імовірністю 0,8, знайти ймовірності наступних подій: а) виріб, визнаний стандартним, у дійсності є бракованим; b) виріб, визнаний бракованим, насправді задовольняє стандарту.

РОЗДІЛ 8. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

Теоретичні відомості

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P). Числова функція $\xi = \xi(\omega)$, що визначена на Ω, називається ***випадковою величиною***, якщо ця функція є ***вимірною*** відносно σ - алгебри S, тобто для довільного дійсного x виконується умова $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in S$.

Множину $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ надалі будемо для скорочення позначати $\{\xi < x\}$. У силу вимірності ξ визначена ймовірність $P\{\xi < x\}$.

Функцією розподілу випадкової величини ξ називається функція

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \ x \in \mathbf{R} .$$

Надалі, якщо не виникне непорозуміння, писатимемо $F(x)$ замість $F_\xi(x)$.
Для будь-яких α і β $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}; \alpha < \beta)$ виконується співвідношення

$$P\{\alpha \le \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) .$$

Властивості функцій розподілу.

Властивість 1. Функція розподілу є неспадною: якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) < F(x_2)$.

Властивість 2. Функція розподілу неперервна зліва: $F(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x) = F(x_0)$.

Властивість 3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0.$

Властивість 4. $F(x_0 + 0) = \mathrm{P}\{\xi \le x_0\},$

$\mathrm{P}\{\xi = x_0\} = F(x_0 + 0) - F(x_0),$ тобто x_0 – точка розриву першого роду функції $F(x)$.

Випадкові величини ξ та η, називаються ***незалежними***, якщо $P\{\xi < x; \eta < y\} = P\{\xi < x\} P\{\eta < y\}$, для будь-яких $x, y \in \mathbf{R}$.

Числова функція $\xi = \xi(\omega), \ \omega \in \Omega$, називається ***дискретною випадковою величиною***, якщо множина її значень скінченна або зліченна, і для кожного можливого значення $x_i = \xi(\omega)$ визначена ймовірність

$p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\},\ i \in \mathbf{N}$. Набір цих імовірностей називається ***розподілом*** дискретної випадкової величини ξ.

Розподіл дискретної випадкової величини зручно подавати у вигляді таблиці

ξ	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$
P	p_1	$\ldots$	p_i	$\ldots$

де x_i – дійсні числа, впорядковані за зростанням $\left(x_i < x_j,\ i \neq j\right)$; $p_i > 0,\ \sum_i p_i = 1$.

Навпаки, кожна таблиця такого вигляду, в якій x_i – різні дійсні числа, $p_i > 0$, і $\sum_i p_i = 1$, є розподілом деякої дискретної випадкової величини ξ. За таблицею розподілу можна побудувати функцію розподілу ξ:

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} P\{\xi = x_i\} = \sum_{x_i < x} p_i,$$

де підсумування поширюється на ті індекси i, для яких $x_i < x$.

Дискретна випадкова величина ξ називається ***невід`ємною*** (позначається: $\xi \geq 0$), якщо всі її значення є невід`ємними дійсними числами.

Розглянемо ще одну дискретну випадкову величину $\eta = \eta(\omega),\ \omega \in \Omega$, яка приймає значення y_j з імовірностями $q_j = P\{\omega : \eta(\omega) = y_j\},\ j \in \mathbf{N}$.

Набір чисел $p_{ij} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i,\ \eta(\omega) = y_j\},\ i \in \mathrm{N}, j \in \mathrm{N}$, називається ***сумісним розподілом*** ξ та η.

Справджуються такі твердження:

а) $p_{ij} \geq 0,\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1;$

б) $\sum_j p_{ij} = p_i,\ \sum_i p_{ij} = q_j$ для всіх натуральних i та j.

Дискретні випадкові величини ξ та η називаються ***незалежними***, якщо для будь-яких i та j виконується співвідношення:

$$p_{ij} = P\left\{\xi = x_i;\, \eta = y_j\right\} = p_i \cdot q_j\,,$$

тобто якщо події $\{\xi = x_i\}$ та $\left\{\eta = y_j\right\}$ незалежні.

Аналогічно визначається попарна незалежність та незалежність у сукупності дискретних випадкових величин ξ_k, $k = \overline{1,n}.$

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини ξ називається число $M\xi$, яке є сумою абсолютно збіжного ряду

$$M\xi = \sum_i x_i p_i\,.$$

Дисперсією випадкової величини ξ називається $D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = \sum_i \left(x_i - M\xi\right)^2 p_i\,.$

Середньоквадратичним відхиленням ξ називається число $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$

$M\xi$, $D\xi$, σ_ξ є ***числовими характеристиками*** ξ.

Властивості числових характеристик

Властивість 1. Якщо $\xi \ge 0$, то $M\xi \ge 0$, причому $M\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ (з імовірністю 1).

Зауваження. Вираз "з імовірністю 1" означає, що випадкова подія $\{\xi = 0\}$ має ймовірність 1, тобто $P\{\xi = 0\} = 1$.

Властивість 2. Якщо $\xi = C$ (з імовірністю 1), $C \in \mathbf{R}$, то $M\xi = C$.

Властивість 3. $M\left(C\xi\right) = C \cdot M\xi$, $C \in \mathbf{R}$.

Властивість 4. Якщо задано дискретні випадкові величини ξ_k, $k = \overline{1,n}$, що мають $M\xi_k$, то

$$M\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k.$$

Властивість 5. Якщо дискретні випадкові величини ξ та η - незалежні, для них визначені $M\xi,\ M\eta$, то $M\left(\xi\eta\right) = M\xi \cdot M\eta$.

Властивість 6. $Mf\left(\xi\right) = \sum_i f\left(x_i\right) p_i$.

Властивість 7. $D\xi \ge 0$; $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = C$ (з імовірністю 1), $C \in \mathbf{R}$.

Властивість 8. Якщо ξ має дисперсію, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, то $D\left(C_1\xi + C_2\right) = C_1^2 D\xi.$

Властивість 9. Якщо ξ_k, $k=\overline{1,n}$, попарно незалежні та мають дисперсії, то

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k.$$

Властивість 10. $D\xi=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2$**.**

Коефіцієнтом коваріації випадкових величин ξ та η називається число $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\left(\xi-M\xi\right)\left(\eta-M\eta\right)=M\left(\xi\eta\right)-M\xi\cdot M\eta$.

Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η називається число $\rho\left(\xi,\eta\right)=\dfrac{\operatorname{cov}\left(\xi,\eta\right)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}$.

Справджуються такі твердження:

Властивість 1. $|\rho|\le 1$.

Властивість 2. Якщо ξ та η незалежні, то $\rho=0$.

Властивість 3. Якщо $|\rho|=1$, то з імовірністю одиниця $\eta=a+b\xi$, де a і b — деякі сталі, $b\neq 0$.

Випадкові величини ξ та η називаються ***некорельованими***, якщо їхній коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.

Із незалежності випадкових величин випливає їхня некорельованість. Обернене твердження у загальному випадку невірне: із некорельованості двох випадкових величин ще не випливає їхня незалежність.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на надходження бізнес плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,4. Будівельна фірма звернулася до 3-х банків. Випадкова величина ξ – кількість банків, що ухвалять рішення про надання кредиту цій фірмі. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ і середньоквадратичне відхилення σ_ξ.

Розв'язок. Дискретна випадкова величина ξ – кількість банків, що ухвалять рішення про надання кредиту будівельній фірмі – набуває таких можливих значень: $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2;\ x_4=3.$

Обчислимо відповідні ймовірності:

$p_1 = P(\xi = 0) = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^3 = 0,6^3 = 0,216$;

$p_2 = P(\xi = 1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432$;

$p_3 = P(\xi = 2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288$;

$p_4 = P(\xi = 3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,4^3 = 0,064$.

У табличній формі закон розподілу ξ матиме такий вигляд:

ξ	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

Далі знайдемо $M\xi$, $D\xi$ та σ_ξ :

$$M\xi = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2 \;;$$

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0,216 + 1^2 \cdot 0,432 + 2^2 \cdot 0,288 + 3^2 \cdot 0,064 = 2,16;$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2,16 - 1,2^2 = 0,72 \;;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = 0,84853 \,.$$

Приклад 2. Випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = 2^\xi$.

Розв'язок. Будуємо розподіл випадкової величини η :

η	0,5	1	2	4
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Математичне сподівання $M\eta$ =0,5·0,2+1·0,1+2·0,3+4·0,4=2,4.

Дисперсія $D\eta$ =$1,9^2$·0,2+$1,4^2$·0,1+$0,4^2$·0,3+$1,6^2$·0,4=1,99.

Приклад 3. Нехай ξ набуває значення ±1, ±2, кожне з імовірністю 0,25, а $\eta = \xi^2$. Знайти: а) сумісний розподіл ξ та η ; б) $\rho(\xi, \eta)$. Чи будуть ξ та η незалежними?

Розв'язок. Випадкова величина η буде набувати два значення 1 та 4 з рівними ймовірностями 0,5. Знайдемо сумісний розподіл ξ та η :

$$P\{\xi = 1, \eta = 1\} = P\{\xi = -1, \eta = 1\} = \frac{1}{4} \;;$$

$P\{\xi = 2, \eta = 1\} = P\{\xi = -2, \eta = 1\} = 0$;

$P\{\xi = 1, \eta = 4\} = P\{\xi = -1, \eta = 4\} = 0$;

$P\{\xi = 2, \eta = 4\} = P\{\xi = -2, \eta = 4\} = \frac{1}{4}$.

Випадкові величини ξ та η будуть залежними, оскільки, наприклад, $0 = P\{\xi = 1, \eta = 4\} \neq P\{\xi = 1\} P\{\eta = 4\} = \frac{1}{8}$.

$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$; $M\eta = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$;

$D\xi = \frac{5}{2}$, $D\eta = \frac{25}{4}$;

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 1 \cdot \left(1 - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \left(1 - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(4 - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \left(4 - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Таким чином, $\rho(\xi, \eta) = 0.$

Приклад 4. Інвестору запропоновано два види акцій А і В. Ефективність (норма прибутку) акцій є випадковою величиною, що залежить від стану економічного середовища. Оцінити за табличними даними ступінь ризику при виборі одного з видів акцій, якщо за міру ризику обрати коефіцієнт варіації норми прибутку.

Стан економічного середовища	Ймовірність стану	Норми прибутку акцій, %	
		A	B
Значне зростання	0,1	135	130
Незначне зростання	0,3	100	95
Стагнація	0,2	20	20
Незначна рецесія	0,3	-5	-3
Значна рецесія	0,1	-10	-8

Розв'язок. За міру ризику в економічних дослідженнях приймають дисперсію, середньоквадратичне відхилення або коефіцієнт варіації V_ξ, який є відсотковим відношенням середньоквадратичного відхилення до математичного сподівання: $V_\xi = \frac{\sigma_\xi}{M\xi} \cdot 100\%$, $M\xi \neq 0$.

Нехай ξ - норма прибутку акцій A; η - норма прибутку акцій B.

Знайдемо числові характеристики цих випадкових величин.

$M\xi = 135 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,3 - 10 \cdot 0,1 = 45$;

$D\xi = (135-45)^2 \cdot 0,1 + (100-45)^2 \cdot 0,3 + (20-45)^2 \cdot 0,2 +$

$+(-5-45)^2 \cdot 0,3 + (-10-45)^2 \cdot 0,1 = 2895;$

$\sigma_\xi \approx 54$;

$M\eta = 130 \cdot 0,1 + 95 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,2 - 3 \cdot 0,3 - 8 \cdot 0,1 = 43,8 \approx 44$;

$D\eta = (130-44)^2 \cdot 0,1 + (95-44)^2 \cdot 0,3 + (20-44)^2 \cdot 0,2 +$

$+(-3-44)^2 \cdot 0,3 + (-8-44)^2 \cdot 0,1 = 2568;$

$\sigma_\eta \approx 51$.

Зауважимо, що акції A мають вищу норму прибутку порівняно з акціями B, але акції A мають більшу дисперсію, ніж акції B. Для вибору активу обчислимо їхні коефіцієнти варіації:

$$V_\xi = \frac{\sigma_\xi}{M\xi} \cdot 100\% = \frac{54}{45} \cdot 100\% = 120\%;$$

$$V_\eta = \frac{\sigma_\eta}{M\eta} \cdot 100\% = \frac{51}{44} \cdot 100\% = 116\%.$$

Отже, акції A більше обтяжені ризиком, ніж акції B.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

8.1. Двічі кидають монету. Описати простір елементарних подій Ω. Нехай ξ – число випадань герба. Знайти розподіл випадкової величини ξ, математичне сподівання $M\xi$ та дисперсію $D\xi$.

8.2. Двічі підкидають гральний кубик. Описати простір елементарних подій Ω. Нехай ξ – сума очок, які випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ, $M\xi$.

8.3. Монету підкидають, доки випаде герб. Описати простір елементарних подій Ω. Нехай ξ – число зроблених підкидань. Обчислити: а) розподіл випадкової величини ξ; б) $P\{\xi > 1\}$, $P\{\xi \le n\}$.

8.4. Стріляють у ціль до першого влучення. Влучення при різних пострілах – незалежні події, ймовірність влучення при кожному пострілі – p. Описати простір елементарних подій Ω. Нехай ξ – число зроблених пострілів. Обчислити розподіл випадкової величини ξ.

8.5. Які з поданих нижче послідовностей є розподілами деякої дискретної випадкової величини:

а) $p^k q^2$, $q = 1 - p$, $0 < p \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$?

б) $p^{k-n}q$, $q=1-p,\ 0\le p\le 1,\ n>0,\ k=n,\ n+1,...$?

в) $\dfrac{1}{k(k+1)}, k=1,\ 2,\ \dots$?

8.6. Нехай ξ – випадкова величина, яка набуває значень 0, ±1, … , $\pm n$ з імовірностями $P\{\xi=i\}=\dfrac{1}{2n+1}$. Обчислити $M\xi,\ D\xi$.

8.7. Випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

Знайти: а) розподіл випадкової величини $\eta=|\xi|$; б) $M\eta,\ D\eta$.

8.8. Дискретна випадкова величина ξ має ряд розподілу:

ξ	1	3	5
P	0,4	0,1	0,5

Знайти розподіл випадкової величини $\eta=3\xi,\ M\eta$.

8.9. Дискретна випадкова величина ξ має ряд розподілу:

ξ	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,7	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $\eta=\sin\xi,\ M\eta,\ D\eta$.

8.10. Дискретна випадкова величина ξ має ряд розподілу:

ξ	–2	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Знайти розподіл випадкових величин $\eta=\xi^2+1$ та $\zeta=|\xi|$.

8.11. Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини ξ дорівнюють відповідно 2 та 10. Знайти математичне сподівання та дисперсію величини $2\xi+5$.

8.12. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини, поданої розподілом:

ξ	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

8.13. Нехай випадкова величина ξ набуває скінченне число невід’ємних значень $x_1,x_2,...,x_r$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\xi^{n+1}}{M\xi^n}=\max_{1\le i\le r}x_i;\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M\xi^n}=\max_{1\le i\le r}x_i.$$

8.14. Два банки (А та В) мають такі прогнози щодо прибутку на наступний рік:

А		В	
Прибуток	Ймовірність	Прибуток	Ймовірність
0	0,1	100$	0,2
200$	0,1	500$	0,2
1000$	0,2	2000$	0,25
2000$	0,5	4000$	0,3
10000$	0,1	8000$	0,05

Підрахувати економічний ризик (стандартну похибку) для вкладників у банки А та В.

8.15. Нехай випадкова величина ξ набуває цілих невід'ємних значень, причому $M\xi<+\infty$. Довести, що $M\xi=\sum_{i=1}^{\infty}P\{\xi\ge i\}$.

8.16. Кидають два гральних кубики. Нехай ξ – кількість очок на першому кубику, а η – число очок на другому кубику. Довести, що ξ та η – незалежні.

8.17. Кидають два гральних кубики. Нехай ξ – кількість очок на першому кубику, а η – мінімальне з двох очок. Знайти: а) сумісний розподіл ξ та η; б) $\rho(\xi,\eta)$.

8.18. Випадкові величини ξ та η незалежні та
$P\{\xi=\pm1\}=\frac{1}{2},\ P\{\eta=\pm1\}=\frac{1}{4},\ P\{\eta=0\}=\frac{1}{2}.$ Чи будуть випадкові величини $\xi\eta$ та η незалежними? Знайти $\rho\left(\xi\eta,\eta\right)$.

8.19. Нехай ξ_1 та ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини та $\xi=\xi_1+\xi_2$, $\eta=\xi_1-\xi_2$. Довести, що $\rho\left(\xi,\eta\right)=0$.

8.20. Нехай ξ та η – відповідно сума та різниця очок, які випали при киданні двох гральних кубиків. Довести, що $\rho\left(\xi,\eta\right)=0$. Чи будуть ξ та η незалежними?

8.21. Нехай ξ_1 та ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають цілі значення. Довести, що $P\{\xi_1+\xi_2=n\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}P\{\xi_1=k\}\cdot P\{\xi_2=n-k\}$.

8.22. Нехай ξ_1 та ξ_2 – незалежні випадкові величини, які набувають значення 0, 1, …, n, причому $P\{\xi_1 = i\} = P\{\xi_2 = i\} = \frac{1}{n+1}$, $i = 0, 1, \dots, n.$ Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

8.23. Початковий капітал торгівця-*«човника»* складає $S = 10000$ грн. Досвідчені колеги сказали йому, що після кожної поїздки капітал з імовірністю 0,5 збільшується у півтора рази, з імовірністю 0,25 залишається без змін та з імовірністю 0,25 зменшується у півтора рази. Скласти ряд розподілу випадкової величини ξ - капіталу торгівця після двох поїздок та знайти його математичне сподівання.

8.24. Клієнт повинен повернути банку кредит до сьогоднішнього дня. Тиждень тому він відправив грошовий переказ з іншого міста, який досі не дійшов. Час *T* прибуття грошей оцінюється клієнтом так:

T	1	2	3	4	5
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

За кожен день запізнення повернення кредиту клієнт повинен виплатити банку 3% від його суми (відсотки прості). Є можливість звернутись до приватного детектива, який береться за 5% від суми розшукати її протягом дня. Визначити, що клієнту вигідніше – звернутись до детектива чи зачекати на прихід грошей?

8.25. Закон розподілу системи (ξ, η) задано таблицею:

$\xi \backslash \eta$	**2**	**4**	**6**	P_i
-4	0.02	0.05	0.03	
-3	0.19	0.05	0.17	
-2	0.1	0.3	0.1	
P_j				

Обчислити: ρ, $M\left(\eta / \xi_i\right)$, $M\left(\xi / \eta_j\right)$, $P\left(-4 \le \xi < -2;\ 2 < \eta \le 6\right)$.

Завдання для індивідуальної роботи

8.1. Щороку компанія “Ензим” вибирає кількох працівників для прослуховування бізнес-тренінгу в навчальному центрі при університеті. В середньому 80% з них успішно завершують програму, склавши іспит. Компанія вирішила п'ятьох, навмання відібраних, відправити на навчання. Випадкова величина ξ – кількість працівників, що успішно склали іспит серед п'ятьох відібраних. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.2. Зроблено два високоризикових вклади – 20 млн. грн. у компанію A і 18 млн. грн. у компанію B. Компанія A обіцяє 40% річних, але може збанкрутувати з імовірністю 0,3, компанія B обіцяє 30% річних, але може збанкрутувати з імовірністю 0,2. Будемо вважати, що банкрутства компаній незалежні. Випадкова величина ξ – сума вкладів, отриманих від двох компаній через рік. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.3. Нехай ξ, η, ζ - випадкові величини: ξ - виручка фірми, η - її витрати, $\zeta = \xi - \eta$ - прибуток. Відомо, що виручка та витрати є незалежними випадковими величинами, які мають такі розподіли:

ξ	3	4	5
P	0,3	0,4	0,3

η	1	2
P	0,5	0,5

Скласти закон розподілу випадкової величини ζ, знайти її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.4. Випущено 500 лотерейних білетів, з яких 40 білетів принесуть їх власникам виграш по 100 грн., 20 білетів – по 500 грн., 10 білетів – по 1000 грн., 5 білетів – по 2000 грн., 1 білет – 5000 грн., решта – без виграшу. Випадкова величина ξ – сума виграшу для власника одного білета. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.5. Імовірність підвищення курсу акцій першого підприємства становить 0,4; другого – 0,6; третього – 0,7. Випадкова величина ξ – кількість підприємств, курс акцій яких підвищився. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.6. Імовірність прийняття на роботу кожного з 5 претендентів становить 0,2. Випадкова величина ξ – кількість претендентів, прийнятих на роботу. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.7. Імовірність отримати премію за якісно виконані роботи становить 0,8 за кожен місяць, роботи проводились протягом кварталу. Випадкова величина ξ – кількість премій, отриманих за квартал. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.8. Інвестор, що додержується консервативних поглядів, оцінив імовірності величини повернення його коштів, вкладених у акції двох компаній, таким чином:

Величина повернення (акції компанії I)	Імовірність	Величина повернення (акції компанії II)	Імовірність
0,04	0,5	0,03	0,6
0,10	0,3	0,10	0,3
0,15	0,2	0,20	0,1

Проаналізувати ризикованість інвестицій капіталу (вибір акцій компаній I або II), якщо за міру ризику прийняти коефіцієнт варіації величини повернення коштів.

8.9. На аукціоні виставлено картини, надані двома художніми салонами, у співвідношенні 3:2. Навмання вибирають чотири картини. Випадкова величина ξ – кількість картин, виставлених першим салоном серед чотирьох відібраних. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.10. На двох автоматичних верстатах виготовляються однакові вироби. Дано закони розподілу ξ та η - кількості бракованих виробів, які виготовляються протягом зміни відповідно на першому і другому верстатах:

ξ	0	1	2
P	0,1	0,6	0,3

η	0	1
P	0,4	0,6

Скласти закон розподілу кількості бракованих виробів, які виготовляються протягом зміни на обох верстатах, знайти математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

8.11. Фірмовий салон продає 20% ексклюзивного одягу. Навмання вибирають 5 виробів. Випадкова величина ξ – кількість ексклюзивних виробів серед п'яти відібраних. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.12. Спортивний клуб закупив м'ячі для гри в теніс, 70% яких білого кольору. Навмання беруть чотири м'ячі. Випадкова величина ξ – кількість білих м'ячів серед чотирьох відібраних. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.13. Інвестору запропоновано два види акцій А і В. Ефективність (норма прибутку) акцій є випадковою величиною, що залежить від стану економічного середовища. Оцінити за табличними даними ступінь ризику при виборі одного з видів акцій, якщо за міру ризику обрати коефіцієнт варіації норми прибутку.

Стан економічного середовища	Імовірність стану	Норми прибутку акцій, %	
		A	B

Значне зростання	0,1	130	120
Незначне зростання	0,3	100	90
Стагнація	0,2	15	15
Незначна рецесія	0,3	-2	2
Значна рецесія	0,1	-30	-20

8.14. Екзаменаційний білет містить три запитання. Ймовірність того, що студент правильно відповість на перше запитання, становить 0,9, на друге – 0,8, на третє – 0,7. Випадкова величина ξ – кількість питань екзаменаційного білету, на які студент дасть правильну відповідь. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.15. Керівництво страхової компанії аналізує роботу 100 страхових агентів. Кількість виданих агентами страхових полісів за останній місяць подана у таблиці:

Кількість полісів	0	1	2	3	4	5	6
Кількість агентів	14	26	30	16	9	4	1

Випадкова величина ξ – кількість страхових полісів, виданих агентами за останній місяць. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.16. Інвестиційна компанія вкладає гроші в будівельні об'єкти. Сума для першого об'єкта становить 100 млн. грн. Експерти стверджують, що після введення в експлуатацію кожного об'єкта капітал з імовірністю 0,5 збільшується в три рази, з імовірністю 0,25 збільшується в два рази і з імовірністю 0,25 зменшується в півтора рази. Скласти ряд розподілу капіталу інвестиційної компанії ξ після введення в експлуатацію двох послідовних об'єктів і знайти її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.17. Співробітники валютного відділу проходять атестацію, яка складається з трьох різних частин (незв'язаних між собою), ймовірність успішно атестуватися по кожній окремій частині дорівнює 0,75. Випадкова величина ξ описує число атестованих частин. Скласти ряд розподілу випадкової величини ξ, знайти її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.18. З 20 опитаних співробітників одного відділу, 16 людей задоволені керівництвом. З цього відділу навмання відбирають чотирьох людей, для написання зауважень і побажань керівництву. Скласти ряд розподілу числа людей, задоволених керівництвом, знайти середнє число таких людей, дисперсію і середньоквадратичне відхилення числа таких людей.

8.19. Інвестор, який придбав акції компаній А та В, оцінює ймовірності величини повернення його коштів таким чином:

Величина повернення коштів (акції компанії А)	Імовірність	Величина повернення коштів (акції компанії В)	Імовірність
0,02	0,6	0,05	0,5
0,13	0,3	0,15	0,3
0,25	0,1	0,21	0,2

Проаналізувати ризикованість інвестицій капіталу (вибір акцій компаній А або В), якщо за міру ризику прийняти коефіцієнт варіації величини повернення коштів.

8.20. Враховуючи попередній досвід, в середньому 15% відвідувачів туристичних фірм після консультації купують тур. В першій половині дня було 5 відвідувачів. Скласти ряд розподілу числа людей, які купили тур, знайти середнє число таких людей, дисперсію і середньоквадратичне відхилення числа таких людей.

8.21. У магазині побутової техніки виставлені для продажу ноутбуки. Серед представлених моделей 10% відсутні на складі. Покупець обрав собі 4 моделі. Скласти ряд розподілу числа ноутбуків (серед обраних моделей), які є на складі, знайти середнє число таких ноутбуків, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.22. Працівник валютного відділу обрав 5 купюр для перевірки. Ймовірність того, що купюра фальшива, дорівнює 0,01. Скласти ряд розподілу кількості фальшивих купюр, знайти середнє число таких ноутбуків, дисперсію і середньоквадратичне відхилення кількості фальшивих купюр.

8.23. Інвестору запропоновано акцій двох конкуруючих компаній (І та ІІ). Норма прибутку (ефективність) акцій є випадковою величиною, що залежить від стану економічного середовища. Оцінити ступінь ризику інвестора при виборі одного з видів акцій, якщо мірою ризику вважати коефіцієнт варіації норми прибутку.

Стан економічного середовища	Імовірність стану	Норми прибутку акцій, %	
		I	II
Значне зростання	0,1	125	130
Незначне зростання	0,3	90	95
Стагнація	0,2	10	10
Незначна рецесія	0,3	-5	-10
Значна рецесія	0,1	-30	-40

8.24. Працівник банку вивчає ситуацію щодо неповернутих кредитів. Для кожного окремого кредиту ймовірність неповернення складає 5%. Працівник обрав чотирьох співробітників однієї компанії, які взяли кредити. Скласти ряд розподілу кількості неповернутих кредитів, знайти середнє число таких кредитів, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.25. Зроблено дві ризиковані інвестиції: 40 тис. грн. у компанію A і 50 тис. грн. у компанію B. Компанія A обіцяє 50% річних, але може збанкрутувати з імовірністю 0,2. Компанія B обіцяє 40% річних, але може збанкрутувати з імовірністю 0,15. Скласти закон розподілу випадкової величини – загальної суми прибутку (збитків), одержаного від двох компаній через рік, знайти її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.26. Кожен з 5 об’єктів нерухомості, якими володіє інвестор, може дати доход власнику з імовірністю 75%. Скласти ряд розподілу кількості прибуткових об’єктів, знайти середнє число, дисперсію і середньоквадратичне відхилення таких об’єктів.

8.27. Інвестор, що додержується консервативних поглядів, оцінив імовірності величини повернення його коштів, вкладених у акції двох компаній, таким чином:

Величина повернення (акції компанії I)	Імовірність	Величина повернення (акції компанії II)	Імовірність
0,05	0,5	0,01	0,6
0,10	0,3	0,10	0,3
0,15	0,2	0,25	0,1

Проаналізувати ризикованість інвестицій капіталу (вибір акцій компаній I або II), якщо за міру ризику прийняти коефіцієнт варіації величини повернення коштів.

8.28. В торговому центрі знаходиться три банкомати. Ймовірність поломки першого становить 0,04; другого – 0,01; третього – 0,05. Випадкова величина ξ – кількість працюючих банкоматів. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення.

8.29. Увечері підприємцю знадобилось обміняти валюту. Він знає, що з трьох пунктів обміну валюти, розташованих поблизу, в цей час працює лише один, але не пам'ятає, який саме. Скласти ряд розподілу числа ξ обмінних пунктів, які необхідно буде відвідати Петру, якщо вважати, що кожний з пунктів може працювати з імовірністю $1/3$. Оцінити очікуваний час T, який підприємець витратить на обмін валюти, якщо на кожне відвідування витрачається півгодини.

8.30. В результаті аналізу рахунків 100 інвесторів на фондовій біржі отримана така інформація про кількість угод за останній місяць:

Кількість угод	0	1	2	3	4	5
Кількість інвесторів	16	37	23	14	8	2

Визначити ймовірності того, що випадково обраний інвестор уклав: а) нуль угод; б) хоча б одну угоду; в) більше п'яти угод; г) менше шести угод. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ - кількість угод, укладених на фондовій біржі за останній місяць, знайти її математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

РОЗДІЛ 9. СХЕМА БЕРНУЛЛІ.КЛАСИЧНІ ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ

Теоретичні відомості

Нехай проводиться скінчене число n послідовних незалежних випробувань, у кожному з яких деяка подія A може або настати (таку ситуацію назвемо ***успіхом***), або не настати (таку ситуацію назвемо ***невдачею***). Випробування проводяться в однакових, з імовірнісної точки зору, умовах, тобто ймовірність успіху в кожному окремо взятому випробуванні дорівнює p і не змінюється від випробування до випробування. При цьому ймовірність невдачі в одному випробуванні визначається як $q = 1 - p$.

Така послідовність випробувань називається ***схемою Бернуллі*** або ***біноміальною схемою***, а самі випробування – ***випробуваннями Бернуллі***.

Ймовірність $P_n(k)$ того, що в серії з n випробувань Бернуллі опиниться рівно k успіхів, розраховується за ***формулою Бернуллі:***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n).$$

Найбільш імовірне число k_0 успіхів в серії з n випробувань Бернуллі задовольняє нерівностям

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

У випадку, коли число n випробувань велике, розрахунки за формулою Бернуллі ускладнюються. Для практичних розрахунків використовують асимптотичні (наближені) формули, які є наслідками наступних граничних теорем.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p мала (прямує до нуля), так що $np \to \lambda = const$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Для розрахунку $P_n(k)$ можна скористатись наближеною формулою Пуассона:

$$P_n(k) \approx P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n),$$

де $\lambda = np$.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p успіху в кожному випробуванні відмінна від нуля та одиниці, а число випробувань n досить велике, то

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Наближена формула для розрахунку ймовірності $P_n(k)$ має вигляд:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса (табл.1 додатку).

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p відмінна від нуля та одиниці, а число випробувань n досить велике, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\alpha \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для розрахунку ймовірності $P_n(k_1, k_2)$ того, що число успіхів у серії з n випробувань буде міститись у проміжку $[k_1; k_2]$, можна скористатись наближеною формулою

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, $x \ge 0$ (табл.2 додатку). Якщо x від'ємне число, тоді $\Phi(x) = -\Phi(-x)$.

На практиці формулою Пуассона користуються у випадку, коли число n випробувань – декілька десятків або більше, а добуток $\lambda = np < 10$. У випадку, коли n велике, а $\lambda = np \ge 10$, формула Пуассона дає дуже грубе наближення, і для розрахунку $P_n(k)$ використовують локальну та інтегральну теореми Муавра-Лапласа.

Від схеми послідовних незалежних випробувань з двома наслідками (біноміальної схеми) можна перейти до ***поліноміальної схеми***, тобто схеми послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких можливі $m > 2$ наслідків з імовірностями $p_1, p_2, ..., p_m$ відповідно ($0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, ..., m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). У поліноміальній схемі ймовірність $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ того, що в серії з n випробувань перший наслідок з'явиться рівно k_1 разів, другий наслідок з'явиться рівно k_2 разів і так до m-го наслідку, який з'явиться рівно k_m разів, розраховується за формулою

$$P_n\left(k_1, k_2, ..., k_m\right) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m} ,$$

$$0 \le k_i \le n ,\ i = 1, 2, ..., m ,\ \sum_{i=1}^{m} k_i = n .$$

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний розподіл. Дискретна випадкова величина ξ має біноміальний закон розподілу з параметрами n і p, якщо вона приймає значення $1, 2, ..., n$ з імовірностями

$$P\left\{\xi = k\right\} = C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

де $0 < p < 1,\ q = 1 - p.$

Математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення ξ:

$$M\xi = np,\ \ D\xi = npq,\ \sigma_\xi = \sqrt{npq}.$$

Геометричний розподіл. Дискретна випадкова величина ξ має геометричний закон розподілу з параметром p, якщо вона приймає значення $1, 2, ..., k, ...$ з імовірностями

$$P\left\{\xi = k\right\} = pq^{k-1},$$

де $0 < p < 1,\ q = 1 - p.$

Для геометричного розподілу $M\xi = \dfrac{1}{p},\ \ D\xi = \dfrac{q}{p^2}.$

Розподіл Пуассона. Дискретна випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо вона приймає значення $0, 1, 2, ..., k, ...$ з імовірностями

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Для розподілу Пуассона $M\xi = \lambda,\ \ D\xi = \lambda.$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Відомо, що з числа глядачів певної телепрограми 70% дивляться і рекламні блоки. Групи, що складаються з трьох навмання вибраних телеглядачів, опитують відносно змісту рекламного блоку.

Розрахувати ймовірності різної кількості осіб з числа глядачів телепрограми, які дивляться рекламні блоки.

Розв'язок. **І**мовірність того, що навмання вибраний глядач даної телепрограми дивиться і рекламні блоки, згідно статистичному означенню ймовірності, дорівнює $p = 0,7$. Інтерпретуючи опитування трьох телеглядачів як три випробування Бернуллі, і, вважаючи успіхом ситуацію, коли телеглядач дивиться рекламні блоки, знайдемо відповідні ймовірності за формулою Бернуллі, в якій $n = 3$, $p = 0,7$:

$P_3(k) = C_3^k 0,7^k 0,3^{3-k}$ ($k = 0,1,2,3$);

$P_3(0) = C_3^0 0,7^0 0,3^3 = 0,027$, $P_3(1) = C_3^1 0,7^1 0,3^2 = 0,189$,

$P_3(2) = C_3^2 0,7^2 0,3^1 = 0,441$, $P_3(3) = C_3^3 0,7^3 0,3^0 = 0,343$.

Приклад 2. В умовах попередньої задачі знайти найбільш імовірне число осіб у групі, які дивляться рекламні блоки.

Розв'язок. Найбільш імовірне число k_0 осіб у групі, які дивляться рекламні блоки, визначається нерівностями $np - (1-p) \le k_0 \le np + p$, в яких $n = 3$, $p = 0,7$, тобто $3 \cdot 0,7 - 0,3 \le k_0 \le 3 \cdot 0,7 + 0,7$ або $1,8 \le k_0 \le 2,8$, звідки $k = 2$. Одержаний результат підтверджується і розв'язком попередньої задачі.

Приклад 3. Із 1000 опитаних 700 осіб підтримують певного кандидата на виборах. Знайти мінімальну чисельність групи, в якій з імовірністю, не меншою 0,9, хоча б один респондент не підтримує цього кандидата.

Розв'язок. Нехай чисельність групи дорівнює n. Будемо інтерпретувати опитування групи з n осіб як випробування Бернуллі, вважаючи успіхом те, що випадково вибраний респондент підтримує кандидата. Згідно статистичного означення ймовірності, ймовірність успіху дорівнює $p = \frac{700}{1000} = 0,7$. Нехай подія *A* полягає в тому, що в групі з n осіб хоча б один не підтримує кандидата. Тоді подія $\overline{A}$ означає, що в групі з n осіб всі підтримують цього кандидата. За формулою Бернуллі

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_n(n) = 1 - C_n^n p^n (1-p)^0 = 1 - p^n = 1 - 0,7^n.$$

За умовою ймовірність $P(A)$ повинна бути не менше 0,9, тому $1 - (0,7)^n \ge 0,9$ або $(0,7)^n \le 0,1$. Щоб знайти мінімальне значення n, при якому виконується ця нерівність, будемо послідовно підставляти у нього числа 1, 2, 3 і т.д., поки нерівність не буде задоволена: $(0,7)^1 = 0,7$;

$(0,7)^2=0,49$; $(0,7)^3=0,343$; $(0,7)^4=0,240$; $(0,7)^5=0,168$; $(0,7)^6=0,118$; $(0,7)^7=0,082$. Отже, нерівність $(0,7)^n\le 0,1$ не виконується при $n=1,2,...,6$, але виконується при $n=7$, тому мінімальна чисельність групи, у якій з імовірністю, не меншою 0,9, хоча б один респондент не підтримає даного кандидат, дорівнює 7 осіб.

Приклад 4. **Задача про розподіл ставки.** (Така задача виникає при визначенні частки інвестора, який хоче «вийти» з незавершеного проекту.)

Петро і Андрій часто грають у більярд один з одним, причому Петро виграє удвічі частіше, ніж Андрій. Виходячи з того, вони оцінили свої ймовірності перемогти як $\frac{2}{3}$ для Петра і $\frac{1}{3}$ для Андрія і почали турнір на таких умовах: кожний виграш приносить одне очко; Петро для перемоги повинен набрати дванадцять очок, а Андрій – шість. Після того, як Петро набрав вісім очок, а Андрій – чотири, гру довелося припинити, і перемогу вирішили присудити тому, в кого ймовірність виграшу більша. Визначте, кому присудили перемогу.

Розв'язок. Очевидно, максимальна кількість партій, яку залишилось зіграти Петру і Андрію, дорівнює п'яти (або Петро виграє три рази, а Андрій – два рази, або Андрій виграє один раз, а Петро – чотири рази). Тому подія, яка сприяє виграшу Петра (а значить, програшу Андрія), полягає у тому, що Андрій з п'яти партій не виграє жодної або виграє всього одну. Тому ймовірність виграшу Петра дорівнює ймовірності того, що в п'яти випробуваннях, в кожному з яких успіх інтерпретується як виграш Андрієм чергової партії (тобто ймовірність успіху у кожному випробуванні складає $p=\frac{1}{3}$), настане 0 або 1 успіх:

P(виграш Петра)=*P*(0 або 1 виграш Андрія з п'яти партій)=

$$=P_5(0)+P_5(1)=C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5+C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{112}{243}.$$

При цьому *P*(виграш Андрія)=1-*P*(виграш Петра)=$1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}$.

Тому, у даному випадку, перемогу повинні були присудити Андрію.

Приклад 5. На лекції з теорії ймовірностей присутні 200 осіб. Імовірність того, що день народження випадково вибраного студента припадає на певний день року, складає $\frac{1}{365}$. Знайти ймовірність того, що одна особа з присутніх народилась 1 січня, і дві особи народились 8 березня.

Розв'язок. Нехай подія *A* полягає в тому, що випадково обраний студент народився 1 січня, подія *B* – у тому, що k осіб з 200 народились 1 січня. Тоді за умовою $p = P(A) = \frac{1}{365}$. Припустимо, що опитування $n = 200$ студентів відносно дати їх народження задовольняє умовам, які накладаються на випробування Бернуллі, де успіхом одиничного випробування вважається настання події *A*. Тоді, оскільки $n = 200$ велике, а добуток $np = \frac{200}{365} = 0,548 < 10$, для обчислення ймовірності події *B* можна скористатись формулою Пуассона: $P_{200}(k) = \frac{(0,548)^k}{k!} e^{-0,548}$ і при $k = 1$ маємо $P_{200}(1) = 0,548 e^{-0,548} = 0,317$. Нехай подія F полягає в тому, що m осіб з 200 народились 8 березня. Тоді у відповідності з формулою множення ймовірностей $P(B \cap F) = P(B)P(F / B)$, де $P(F / B) = P_{n-k}(m)$ - ймовірність того, що з $n-k$ студентів m народились 8 березня. Оскільки число $n-k = 200-1 = 199$ велике, а $(n-k)p = \frac{198}{365} = 0,542 < 10$, для розрахунку ймовірності події F можна знову скористатись формулою Пуассона: $P_{n-k}(m) = \frac{(0,542)^2}{2} e^{-0,542} = 0,086$, тому шукана ймовірність $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{F}) = 0,317 \cdot 0,086 = 0,027$.

Приклад 6. Будівельна компанія при залученні інвестицій у будівництво нового будинку хоче скористатись банківським кредитом. Імовірність того, що деякий банк у відповідь на надходження бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування компанії, дорівнює 0,3. Будівельна компанія звернулась до 100 банків. Знайти ймовірності того, що рішення про надання кредитів цій компанії приймуть: а) один банк; б) 15 банків; в) 30 банків; г) 40 банків.

Розв'язок. Дану ситуацію можна розглядати як серію з $n = 100$ випробувань, в яких успіхом вважається прийняття банком рішення про кредитування. Ймовірність успіху в одиничному випробуванні дорівнює за умовою $p = 0,3$. Оскільки число випробувань n велике, а добуток $np = 30 > 10$, можна скористатись локальною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(1) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3)}} \varphi\left(\frac{1-100 \cdot 0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{21}} \varphi\left(\frac{1-30}{\sqrt{21}}\right) =$$

$$= 0,22 \cdot \varphi(-6,33) \approx 0,22 \cdot 0 = 0;$$

$$P_{100}(15) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \varphi\left(\frac{15-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(-3,27) =$$

$$= 0,22 \cdot \varphi(3,27) = 0,22 \cdot 0,0020 = 0,00044;$$

$$P_{100}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \varphi\left(\frac{30-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(0) = 0,22 \cdot 0,3989 = 0,088;$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \varphi\left(\frac{50-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(4,36) \approx 0,22 \cdot 0 = 0.$$

Приклад 7. Імовірність смерті тридцятирічного чоловіка складає 0,006. Страхова компанія уклала 10000 страхових контрактів з чоловіками у віці тридцяти років, згідно з якими у випадку смерті застрахованої особи протягом найближчого року його спадкоємцям виплачується 100000 грн. Вартість одного контракту дорівнює 1200 грн. Знайти ймовірності таких подій: а) до кінця року страхова компанія матиме збитки; б) дохід страхової компанії перевищить 4000000 грн.

Розв'язок. Нехай за рік настало k страхових випадків, тоді дохід страхової компанії складе $\Pi = 10000 \cdot 1200 - 100000k = 100000(120-k)$ грн. Тому компанія матиме збитки $(\Pi < 0)$, якщо за рік настане більш ніж 120 страхових випадків (тобто від 121 до 10000 страхових випадків). Дохід страхової компанії перевищить 4000000 грн. $(\Pi > 4000000)$, якщо за рік настане менш ніж 80 страхових випадків. Імовірність настання страхового випадку *p*=0,006. Всього проводиться $n = 10000$ випробувань. Оскільки число випробувань n велике, а добуток $np = 60 > 10$, можна скористатись інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{10000}(121;10000) \approx \Phi\left(\frac{10000-60}{\sqrt{60 \cdot (1-0,006)}}\right) - \Phi\left(\frac{121-60}{\sqrt{60 \cdot (1-0,006)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{9940}{\sqrt{59,64}}\right) - \Phi\left(\frac{61}{\sqrt{59,64}}\right) = \Phi(1287,56) - \Phi(7,90) \approx 0,5 - 0,5 = 0,$$ тобто

страхова компанія матиме збитки з нульовою ймовірністю;

$$P_{10000}(0;80) \approx \Phi\left(\frac{80-60}{\sqrt{60\cdot(1-0,006)}}\right)-\Phi\left(\frac{0-60}{\sqrt{60\cdot(1-0,006)}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{59,64}}\right)-\Phi\left(\frac{-60}{\sqrt{59,64}}\right)=\Phi(2,589)-\Phi(-7,77)=$$

$$=\Phi(2,589)+\Phi(7,77)\approx 0,495+0,5=0,995.$$

Отже, дохід страхової компанії перевищить 4000000 грн. з імовірністю дуже близькою до одиниці, тобто майже напевно.

Приклад 8. Побудувати очікуваний розподіл результатів випробувань, який був би отриманий для 256 абсолютно неосвічених осіб, що складають іспит, які випадковим чином вгадують відповіді на чотири питання з чотирма можливими варіантами відповіді на кожне питання (з яких один і лише один вірний).

Розв'язок. Вгадування кожною особою відповідей на чотири питання можна інтерпретувати як $n=4$ випробування Бернуллі. При цьому, оскільки особа неосвічена, для неї рівно ймовірні всі чотири відповіді на кожне питання, тобто ймовірність успіху (правильної відповіді на питання) дорівнює $p=\frac{1}{4}$. Тоді число ξ вгаданих однією особою відповідей на чотири питання являє собою біноміальну випадкову величину і $P\{\xi=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_4^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$, $k=0,1,2,3,4$, а очікуваний розподіл результатів для 256 осіб, враховуючи їх незалежність один від одного, буде мати такий вигляд:

Число правильних відповідей, ξ	0	1	2	3	4	
Число екзаменованих осіб, $256P\{\xi=k_i\}$	81	108	54	12	1	$\sum_{i=0}^{4}256P\{\xi=k_i\}=256$

Приклад 9. У середньому шульги складають 1% всього населення. Скільки в середньому потрібно опитати людей, щоб набрати десять шульг?

Розв'язок. При інтерпретації опитування як послідовності незалежних випробувань з імовірністю успіху p=1%=0,01 число ξ опитаних до появи шульги вперше (так само, як і число опитаних після появи шульги в i-й раз до появи шульги в (i+1)-й раз) – це випадкова величина, що має геометричний розподіл з параметром $p = 0,01$, а її середнє значення оцінюється математичним сподіванням $M\xi = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,01} = 100$. Для того, щоб відібрати десять шульг, враховуючи властивість адитивності математичних сподівань, в середньому потрібно опитати в 10 разів більше людей, тобто 1000 осіб.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

9.1. Імовірність влучення під час одного пострілу дорівнює 0,4. Скільки треба зробити пострілів, щоб імовірність принаймні одного влучення була не меншою 0,9?

9.2. У підручнику допущено 50 помилок на 500 сторінках. Яка ймовірність того, що у розділі з 30 сторінок допущено: а) 2? б) менше 2? в) 2 або більше помилок? г) 0 помилок?

9.3. У середньому з 200 ламп за місяць виходить з ладу 1 лампочка. Всього встановили 400 ламп. Яка ймовірність того, що за місяць вийде з ладу: а) 3 лампочки? б) не менше 3 лампочок? в) 0 лампочок?

9.4. Яка ймовірність того, що при 10 підкиданнях монети випаде герб: а) від 4 до 6 разів? б) від 3 до 5 разів? в) 0 разів? г) не менше 4 разів?

9.5. На фірмі немає в середньому 5% деталей, що поданих у каталозі. Надійшло замовлення на 8 деталей. Яка ймовірність того, що всі вони є на фірмі?

9.6. Нехай k_0 — найбільш імовірне число успіхів у схемі Бернуллі з імовірністю успіху p при n випробуваннях, тобто таке значення k, при якому ймовірність $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ максимальна. Довести, що $np-(1-p) \le k_0 \le np+p$.

9.7. Гральний кубик кидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що двічі випаде число очок кратне 3.

9.8. Батарея зробила 14 пострілів по об’єкту, ймовірність влучення в який 0,2. Обчислити: а) найбільш імовірне число влучень і його ймовірність; б) ймовірність того, що було не менше 4 влучень.

9.9. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки треба зробити пострілів, щоб найімовірніше число влучень було 20?

9.10. Двоє кидають монету по n разів. Знайти ймовірність того, що в них однакову кількість разів випаде герб.

9.11. Середній брак при виробництві продукції на підприємстві становить 0,1%. Перевіряється партія з 1000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованими буде: а) від 2 до 4 деталей? б) 1 деталь? в) не більше 3 деталей?

9.12. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

9.13. По каналу зв'язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений з імовірністю 0,004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більше 3 знаків.

9.14. Імовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть: а) рівно 75 випробувань? б) рівно 85 випробувань?

9.15. Імовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 вибраних навмання виробів бракованих буде не більше 60?

9.16. Імовірність виходу з ладу за час τ одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час τ зі 100 приладів вийдуть з ладу: а) не менше 20; б) менше 15; в) від 6 до 18 приладів.

9.17. Нехай ξ — випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з параметрами n та p. Довести, що $M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$.

9.18. Що більш імовірно: виграти у гравця (рівного собі за силою гри) 4 партії з 8 чи 3 партії з 5?

9.19. Нехай ξ — випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з параметрами n і p. Відомо, що $M\xi = 12, \quad D\xi = 4$. Знайти n і p.

9.20. Нехай ξ — випадкова величина, яка має геометричний розподіл з параметром p. Довести, що $M\xi = \frac{1-p}{p}, \quad D\xi = \frac{1-p}{p^2}$.

9.21. Довести, що випадкова величина ξ, яка набуває значень 0, 1, 2, …, має геометричний розподіл тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $P\{\xi = k + r / \xi \geq k\} = P\{\xi = r\}, \quad (r \geq 0)$ (характеристична властивість геометричного розподілу).

9.22. Тривалість міжміської телефонної розмови вимірюється хвилинами і є випадковою величиною з геометричним розподілом. Яка ймовірність того, що розмова триватиме ще 3 хвилини, якщо до цього вона тривала 10 хвилин. (Параметр геометричного розподілу дорівнює p).

9.23. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 — незалежні і мають однаковий геометричний розподіл. Довести, що

$$P\{\xi_1 = k / \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{1}{n+1}, \ \ (k = 0,1,...,n).$$

9.24. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 — незалежні і мають однаковий геометричний розподіл. Нехай $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Знайти розподіл величини η і сумісний розподіл величин ξ_1, ξ_2 та η.

9.25. Нехай ξ — випадкова величина, яка має розподіл Пуассона з параметром λ. Довести, що $M\xi = \lambda, \ D\xi = \lambda$.

9.26. Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2 відповідно.

а) Довести, що випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

б) Довести, що умовний розподіл величини ξ_1 при умові, що $\xi_1 + \xi_2 = n$, є біноміальним розподілом з параметрами n і $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, тобто

$$P\{\xi_1 = k / \xi_1 + \xi_2 = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k},$$

$$(k = 0,1,...n).$$

9.27. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити $M\left(\dfrac{1}{1+\xi}\right)$.

9.28. Випадкова величина ξ набуває цілих невід'ємних значень з імовірностями $P\{\xi = n\} = \dfrac{a^n}{(1+a)^{n+1}}$, де $a > 0$ (розподіл Паскаля). Обчислити математичне сподівання і дисперсію ξ.

9.29. Урна містить N куль, позначених номерами від 1 до N. Послідовно виймають n куль, повертаючи кожного разу взяту кулю назад. Нехай ξ — найбільший номер, який було одержано при цьому. Знайти розподіл ξ і математичне сподівання ξ.

Завдання для індивідуальної роботи

9.1. У брокерській конторі для стимулювання прибутковості торгівлі застосовується така схема преміювання співробітників. Якщо співробітник не досягав встановленого денного рівня прибутку протягом більш, ніж трьох днів за два тижні (10 робочих днів), він втрачає свою премію. Ймовірність того, що співробітник виконає денну норму прибутку, складає 0,85. Знайти число премій, втрачених 100 співробітниками цієї брокерської контори за рік (50 робочих тижнів).

9.2. Знайти ймовірність появи рівно 5 гербів при 10-кратном підкидуванні монети.

9.3. Серед 12 договорів, які перевіряє ревізор, 7 оформлені неправильно. Знайти ймовірність того, що серед 5 договорів, довільно вибраних ревізором для перевірки, опиняться неправильно оформлених: а) рівно три договори; б) не менше трьох договорів.

9.4. Що більш імовірно: виграти в більярд у рівносильного противника три партії з чотирьох чи п'ять партій з восьми?

9.5. Що більш імовірно: виграти в більярд у рівносильного противника не менше трьох партії з чотирьох чи не менше п'яти партій з восьми?

9.6. Протягом місяця певна акція може подорожчати на 1% з імовірністю 0,7 і подешевшати з імовірністю 0,3. Вважаючи щомісячні зміни ціни незалежними, розрахувати ймовірності того, що за три місяці ціна акції зросте: а) у $(1,01)^3$ рази; б) у $0,99\cdot(1,01)^2$ рази?

9.7. Серед білетів лотереї половина виграшних. Знайти мінімальне число білетів, щоб з імовірністю, не меншою 0,99, бути впевненим у виграші хоча б за одним білетом.

9.8. В країні працюють 1000 комерційних банків, з яких 330 допускають порушення податкового законодавства. Визначити число банків, які повинна відібрати для перевірки податкова інспекція, щоб з імовірністю, не меншою 0,99, серед них опинився хоча б один порушник законодавства.

9.9. В умовах попередньої задачі податкова інспекція проводить перевірку 12 банків, обираючи їх випадковим чином. Обрані банки перевіряються незалежно один від одного. Допущені порушення у банку, що перевіряється, можуть бути виявлені інспекцією з імовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в ході цієї перевірки буде виявлений хоча б один порушник податкового законодавства.

9.10. Банк має п'ять відділень. Щоденно з імовірністю 0,3 кожне відділення, незалежно від інших, може замовити на наступний день велику суму грошей. У кінці робочого дня один з віце-президентів банку знайомиться із заявками, що надійшли. Знайти ймовірність таких подій: а) надійшли рівно дві заявки; б) надійшла хоча б одна заявка; в) серед двох заявок, що надійшли, є заявка від першого відділення.

9.11. Гральну кістку підкидають п'ять разів. Знайти ймовірність того, що двічі з'явиться число, кратне трьом.

9.12. Петро грав з Арсенієм (рівносильним противником) у шахи на приз у 100 грн.: кожний виграш приносив одне очко, нічиї не враховувались. Гра йшла до 8 очок. Коли Петро виграв п'ять партій, а Арсеній – три, раптом погасло світло, і гру довелося припинити. Як їм розділити приз – 100 грн.?

9.13. На лекції з теорії ймовірностей присутні 200 осіб. Ймовірність того, що день народження випадково обраного студента припадає на певний день року, складає $\frac{1}{365}$. Знайти ймовірність того, що число осіб, що народились 1 січня і 8 березня, не більше двох.

9.14. Власники кредитних карток цінують їх і гублять дуже рідко – ймовірність загубити кредитну картку протягом тижня для випадково обраного вкладники складає 0,001. Банк видав кредитні картки 2000 клієнтам. Знайти: а) ймовірність того, що на наступному тижні буде загублена рівно одна кредитна картка; б) ймовірність того, що на наступному тижні буде втрачена хоча б одна кредитна картка; в) найбільш імовірне число кредитних карток, загублених за місяць.

9.15. Один відсоток стодоларових банкнот складають фальшиві, виготовлені, однак, доволі майстерно, так що операціоніст обмінного пункту десяту їх частину приймає за справжні. Кожного дня для обміну приносять приблизно 200 стодоларових банкнот. Визначити: а) ймовірність того, що серед них є хоча б одна фальшива; б) найбільш імовірний час, за який виправдає себе детектор валюти, який коштує 100 доларів і визначає всі фальшиві банкноти як фальшиві.

9.16. На свята Петро і Марина вирушили в похід на байдарках. Відомо, що при проходженні одного порогу байдарка не отримує пошкоджень з імовірністю 0,7, повністю ламається з імовірністю 0,1 або отримує серйозні пошкодження з імовірністю 0,2. Два серйозних пошкодження приводять до повної поломки. Знайти ймовірність того, що при проходженні 10 порогів байдарка не буде повністю зламана.

9.17. Ймовірність появи успіху в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в серії з 300 випробувань успіх настане рівно 75 разів.

9.18. Ймовірність появи успіху в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в серії з 300 випробувань успіх настане від 70 до 100 разів.

9.19. В умовах задачі (приклад 6) знайти ймовірності того, що рішення про надання кредиту цій компанії приймуть: а) хоча б один банк; б) більше 15 банків; в) більше 50 банків.

9.20. У страховій компанії 10000 клієнтів, внесок кожного складає 1000 грн. Ймовірність настання страхового випадку дорівнює (за оцінками експертів компанії) 0,005б а страхова виплата при настанні страхового випадку складає 100000 грн. Визначити, на який прибуток може розраховувати страхова компанія з імовірністю 0,99. Визначити мінімальний розмір страхової премії, при якому страхова компанія отримає прибуток, не менший 1000000 грн., з імовірністю 0,999.

9.21. До диспетчерської таксопарку надходить найпростіший потік замовлень таксі з інтенсивністю $\lambda = 1,2$ замовлень на хвилину. Знайти ймовірність таких подій: а) за дві хвилини не надійде жодного замовлення; б) за дві хвилини надійде рівно одне замовлення; в) за дві хвилини надійде хоча б одне замовлення.

9.22. Під час канікул Петро працював у передвиборчому штабі кандидата у депутати, який проводив вибіркове опитування виборців. Приблизний розподіл голосів був відомий: по 40% виборців *«за»* та *«проти»* кандидата, інші утримались. Скільки потрібно опитати людей, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, гарантувати відхилення відсотка голосів, відданих за кандидата при вибірковому опитуванні, від істинної думки виборців не більш, ніж на 2% від усього електорату?

9.23. У дачному селищі 2500 мешканців, кожен з яких приблизно шість разів на місяць їздить поїздом до міста, обираючи дня поїздок випадковим чином і незалежно від інших мешканців. Яку найменшу місткість повинен мати поїзд, щоб він переповнювався в середньому не частіше одного разу на 100 днів (поїзд ходить раз на день)?

9.24. Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами $n = 5,\ p = 2/3$. Скласти ряд розподілу цієї випадкової величини, знайти її функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію. Побудувати графік її функції розподілу.

9.25. У групі з 16 осіб 12 підтримують певного кандидата на виборах. З цієї групи навмання вибирають трьох осіб. Скласти ряд розподілу числа осіб у вибірці, що підтримують кандидата, знайти середнє число таких осіб та дисперсію числа таких осіб.

9.26. До банку надійшло 30 авізо, серед яких 5 фальшивих. Ретельній перевірці (яка гарантовано виявляє фальшиві документи) піддаються десять навмання вибраних авізо. Знайти очікуване число виявлених фальшивих авізо.

9.27. Для просування своєї продукції на ринок фірма розкладає по поштовим скринькам рекламні листки. Попередній досвід роботи фірми показує, що приблизно в одному випадку з 2000 після цього відбувається замовлення. Знайти ймовірність того, що при розміщенні 10000 рекламних листків надійде хоча б одне замовлення, середнє число замовлень, що надійшли, та дисперсію числа замовлень, що надійшли.

9.28. Серед випущених заводом автомобілів 80% некомплектні. Визначити, скільки автомобілів повинен в середньому оглянути покупець, щоб обрати комплектний автомобіль.

9.29. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Визначити ймовірності $P\{\xi = 2\}$, $P\{\xi > 1\}$, $P\{0 < \xi < 3\}$ та $P\{\xi = 1 / \xi > 0\}$. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини, побудувати графік її функції розподілу.

9.30. Пивний завод відправив до магазину 400 ящиків пива. Ймовірність того, що ящик буде розбитий при транспортуванні в даних умовах, дорівнює 0,005. По прибуттю до магазину експедитор, який перевозив вантаж, заявив, що сім ящиків з пивом було розбито при транспортуванні. Роздумуючи, чи можна довіряти експедитору, директор магазину хоче знайти ймовірність розбити сім ящиків, імовірність розбити не менше семи ящиків, математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення кількості ящиків, розбитих при транспортуванні, щоб оцінити можливість втрат, заявлених експедитором. Знайти указані величини.

РОЗДІЛ 10. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Теоретичні відомості

Випадкова величина ξ називається ***неперервною***, якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du ,$$

де $p(x)$ - деяка кусково-неперервна функція.

При цьому функція $p(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей*** (або, коротше, ***щільністю розподілу***) випадкової величини ξ. Графік щільності розподілу випадкової величини ξ називається ***кривою розподілу ймовірностей*** (або, коротше, ***кривою розподілу***) випадкової величини ξ.

Щільність розподілу має такі властивості:

1)для всіх $x \in \mathbf{R}: \quad p(x) \geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1;$

3)для всіх точок $x \in \mathbf{R}$, в яких існує похідна $F'(x): \quad p(x) = F'(x).$

Імовірність того, що неперервна випадкова величина ξ набуде конкретного числового значення, дорівнює нулю, тобто для всіх $x \in \mathbf{R}: \quad P\{\xi = x\} = 0.$

Імовірність потрапляння випадкової величини ξ у числовий проміжок можна розрахувати за формулою

$$P\{c \leq \xi \leq d\} = P\{c < \xi \leq d\} = P\{c \leq \xi < d\} =$$

$$= P\{c < \xi < d\} = F(d) - F(c) = \int_{c}^{d} p(x)dx$$

для всіх $c, d \in \mathbf{R}$ таких, що $c < d$.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ називається число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx .$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини має ті ж властивості, що і математичне сподівання дискретної випадкової величини. При цьому виконується

$$Mf\left(\xi\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dF\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)p\left(x\right)dx,$$

де $f\left(x\right)$ — борелівська функція і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x\right)\right|dF\left(x\right)<+\infty$.

Формули для обчислення ***дисперсії*** неперервних випадкових величин мають вигляд

$$D\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2 p(x)dx,\quad D\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 p(x)dx-(M\xi)^2.$$

Дисперсія неперервної випадкової величини має ті ж властивості, що і дисперсія дискретної випадкової величини.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величини

Рівномірний розподіл. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $\left[a,\,b\right]$, якщо функція та щільність розподілу мають вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 1, & x>b,\end{cases}\qquad p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія виражаються через параметри розподілу: $M\xi=\dfrac{a+b}{2},\;D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показниковий розподіл. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ, якщо

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}\quad p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$$M\xi=\frac{1}{\lambda},\;D\xi=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальний розподіл. Випадкова величина ξ має нормальний $N(a,\,\sigma^2)$ розподіл, якщо

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\varphi(x)$ – функція Гауса, $\Phi(x)$ – функція Лапласа. Значення цих функцій наведено у табл. 1–2 додатку.

$M\xi=a,\ \ D\xi=\sigma^2$.

Логнормальний розподіл. Випадкова величина ξ має логнормальний $LN(a,\,\sigma^2)$ розподіл, якщо

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right),\ \ p(x)=\frac{1}{\sigma x}\varphi\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right).$$

$$M\xi=ae^{\sigma^2/2},\ \ D\xi=ae^{\sigma^2/2}\left(e^{\sigma^2/2}-1\right).$$

Функція розподілу випадкового вектора $(\xi_1,\,\xi_2,\,...,\,\xi_n)$ визначається наступним чином:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P\{\xi_1<x_1,\ \xi_2<x_2,\ldots,\ \xi_n<x_n\}.$$

Випадкові величини $\xi_1,\,\xi_2,\,...,\,\xi_n$ називаються ***незалежними***, якщо

$$P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\ldots,\xi_n<x_n\}=P\{\xi_1<x_1\}P\{\xi_2<x_2\}\ldots P\{\xi_n<x_n\}.$$

Нерівність Чебишева. $P\{|\xi-M\xi|>\varepsilon\}\le\dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}.$

Правило 3σ. $P\{|\xi-M\xi|>3\sigma\}\le\dfrac{1}{9}$, де $\sigma=\sqrt{D\xi}$.

Аналогічно дискретним випадковим величинам вводяться коефіцієнти кореляції і коваріації випадкових величин.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Річний дохід випадково обраного платника податків описується випадковою величиною ξ зі щільністю розподілу (***розподіл Парето***)

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{c}{x^{3,5}}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти значення параметра *c*, функцію розподілу річного доходу, середній річний дохід та середнє квадратичне відхилення річного доходу. Визначити розмір річного доходу $x_{\min}$, не нижче якого з імовірністю 0,5 виявиться річний дохід випадково обраного платника податків.

Розв'язок. Параметр *c* знайдемо з властивостей щільності розподілу:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{\infty}\frac{c}{x^{3,5}}dx=-\frac{c}{2,5}\cdot\frac{1}{x^{2,5}}\bigg|_{1}^{\infty}=\frac{c}{2,5},$$

звідки *c*=2,5. Таким чином, $p(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{2,5}{x^{3,5}}, & x\ge 1.\end{cases}$

Функцію розподілу знайдемо за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-\infty}^{x}0du=0 \text{ при } x<1;$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-\infty}^{1}p(u)du+\int_{1}^{x}p(u)du=\int_{1}^{x}\frac{2,5}{u^{3,5}}du=-\frac{1}{u^{2,5}}\bigg|_{1}^{x}=1-\frac{1}{x^{2,5}}$$

при $x\ge 1$.

Таким чином, $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1-\dfrac{1}{x^{2,5}}, & x\ge 1.\end{cases}$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_{1}^{\infty}x\frac{2,5}{x^{3,5}}dx=-\frac{2,5}{1,5}\cdot\frac{1}{x^{1,5}}\bigg|_{1}^{\infty}=\frac{5}{3};$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx-(M\xi)^2=\int_{1}^{\infty}x^2\frac{2,5}{x^{3,5}}dx-\left(\frac{5}{3}\right)^2=$$

$$=-\frac{2,5}{0,5}\cdot\frac{1}{x^{0,5}}\bigg|_{1}^{\infty}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=5-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{20}{9};\quad \sigma_{\xi}=\frac{2\sqrt{5}}{3}\approx 1,49.$$

За умовою $P\{\xi\ge x_{\min}\}=1-P\{\xi<x_{\min}\}=1-F(x_{\min})=0,5$, звідки $F(x_{\min})=0,5,$ тобто $1-\dfrac{1}{x_{\min}^{2,5}}=0,5$ або $x_{\min}^{2,5}=2$. Тому $\ln x_{\min}=\dfrac{\ln 2}{2,5}\approx\dfrac{0,693}{2,5}\approx 0,28$. Остаточно, $x_{\min}\approx e^{0,28}\approx 1,32.$

Приклад 2. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,100]$. Знайти ймовірності $P\{\xi>10\}$, $P\{40<\xi<90\}$,

$P\{\xi = 50\}$, $P\{\xi > 50 / \xi < 80\}$, а також математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Розв'язок. $P\{\xi > 10\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi < 10\} = 1 - F(10) = 1 - \dfrac{10-0}{100-0} = 0,9;$

$$P\{40 < \xi < 90\} = F(90) - F(40) = \frac{90-0}{100-0} - \frac{40-0}{100-0} = 0,5;$$

$P\{\xi = 50\} = 0;$ $P\{\xi > 50 / \xi < 80\} = \dfrac{3}{8};$ $M\xi = \dfrac{0+100}{2} = 50;$

$$D\xi = \frac{(100-0)^2}{12} = \frac{2500}{3}.$$

Приклад 3. Зазвичай батько сварить Петра за *«двійку»* близько 6 хв. На цей раз нотація продовжується більше 6 хв. Знайти математичне сподівання та дисперсію тривалості нотації. Визначити, з якою ймовірністю батько закінчить *«читати нотацію»* протягом найближчої хвилини?

Розв'язок. Тривалість нотації ξ можна вважати розподіленою за показниковим законом. За умовою звичайна середня тривалість нотації (або її математичне сподівання) складає $M\xi = 6$ хв. Але для показникового розподілу $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$, звідки $\lambda = \dfrac{1}{M\xi} = \dfrac{1}{6}$. Дисперсія тривалості нотації при цьому дорівнює $D\xi = \dfrac{1}{\lambda^2} = \left(\dfrac{1}{1/6}\right)^2 = 36$. Ймовірність того, що батько закінчить *«читати нотацію»* протягом найближчої (сьомої) хвилини за умови, що нотація триває більше 6 хв., дорівнює

$$P\{\xi < 7 / \xi > 6\} = \frac{P\{(\xi < 7) \cap (\xi > 6)\}}{P(\xi > 6)} = \frac{P(6 < \xi < 7)}{P(\xi > 6)} =$$

$$= \frac{F(7) - F(6)}{1 - F(6)} = \frac{1 - e^{-7/6} - (1 - e^{-6/6})}{1 - (1 - e^{-6/6})} = \frac{e^{-1} - e^{-7/6}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1/6} \approx 0,154 .$$

Приклад 4. Значення тесту *IQ* (коефіцієнта інтелекту) Стенфорда-Біне розподілені приблизно за нормальним законом з математичним сподіванням *a*=100 та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 16$. Записати вирази для функції розподілу коефіцієнта інтелекту та щільності його розподілу.

Розв'язок.

$$F(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-100)^2}{512}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-100}{16}\right),$$

$$p(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{512}}=\frac{1}{16}\varphi\left(\frac{x-100}{16}\right).$$

Приклад 5. Нехай $F(x)$, $p(x)$ — відповідно функція розподілу і щільність випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини $\eta=e^{\xi}$.

Розв'язок. При $x\le 0$ $P\left\{e^{\xi}<x\right\}=0$, при $x>0$ маємо $F_{\eta}(x)=P\left\{e^{\xi}<x\right\}=P\left\{\xi<\ln x\right\}=F(\ln x).$

Отже, $F_{\eta}\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ F\left(\ln x\right), & x>0,\end{cases}$ $p_{\eta}\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\ne 0,\\ p\left(\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

Приклад 6. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні рівномірно розподілені на відрізку $\left[0,1\right]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta=\xi_1+\xi_2$.

Розв'язок. Функція розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 має вигляд:

$$F_{\xi_1}\left(x\right)=F_{\xi_2}\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Помітимо, що при $x<0$ $F_{\eta}\left(x\right)=0$ та при $x>2$ $F_{\eta}\left(x\right)=1.$

Якщо $0\le x\le 1,$ то $F_{\eta}\left(x\right)=\int_0^x\left(x-u\right)du=\frac{x^2}{2},$

а при $1<x\le 2$ $F_{\eta}\left(x\right)=\int_0^{x-1}du+\int_{x-1}^{1}\left(x-u\right)du=1-\frac{\left(2-x\right)^2}{2}.$

Отже, $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x\le 1,\\ 1-\dfrac{(2-x)^2}{2}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

10.1. Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:

а) $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}arctgx$;

б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{[x]}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ в) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{1+x}, & x>0;\end{cases}$

г) $F(x)=e^{-e^{-x}}$; д) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-\dfrac{1-e^{-x}}{x}, & x>0\end{cases}$?

10.2. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює $f(x)=ae^{-\lambda|x|}$ ($\xi>0$). Обчислити: а) коефіцієнт *a*; б) функцію розподілу ξ ; в) $M\xi$, $D\xi$; г) побудувати графіки щільності розподілу і функції розподілу.

10.3. Нижче подано функції, що залежать від певних параметрів. Визначити, при яких значеннях параметрів ці функції будуть щільностями розподілів.

а) $p(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{ax+b}, & d\le x<\infty,\\ 0, & x<d;\end{cases}$ б) $p(x)=\begin{cases}cx^a e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

10.4. Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ . Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини $\eta=-\xi$.

10.5. Нехай ξ — випадкова величина, рівномірно розподілена на [–1, 1]. Знайти розподіл випадкової величини $\eta=|\xi|$.

10.6. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку [0, 1]. Знайти щільності розподілу випадкових величин: а) $\eta = \xi^2$; б) $\eta = 1/\xi$; в) $\eta = e^{\xi}$ і побудувати їхні графіки.

10.7. Нехай ξ — випадкова величина з неперервною функцією розподілу $F(x)$ і $\eta = F(\xi)$. Обчислити функцію розподілу η.

10.8. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ (розподіл Коші). Обчислити ймовірності: а) $P\{\xi \geq 1\}$; б) $P\{|\xi| \geq 1\}$.

10.9. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = \frac{1}{3}$. Обчислити ймовірності: а) $P\{\xi > 3\}$; б) $P\{\xi > 6 / \xi > 3\}$; в) $P\{\xi > t + 3 / \xi > t\}$.

10.10. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = arctg\xi$.

10.11. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку [0, 2]. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = |\xi - 1|$.

10.12. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Обчислити щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

10.13. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sin\xi$.

10.14. Випадкова величина ξ має розподіл Коші з щільністю $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{\xi}$.

10.15. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл зі щільністю $p(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Знайти функцію розподілу і щільність імовірності випадкової величини $\eta = e^{-\xi}$.

10.16. Нехай ξ — випадкова величина, яка рівномірно розподілена на (0,1). Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \ln\frac{1}{\xi}$. Обчислити $M\eta$.

10.17. Нехай ξ — рівномірно розподілена на [0,1] випадкова величина. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = -\frac{1}{\xi}\ln(1-\xi)$.

10.18. Нехай ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Обчислити $M\xi^k$, $D\xi$, $P\{\xi > 1\}$.

10.19. Нехай ξ рівномірно розподілена на $[a, b]$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$.

10.20. Нехай ξ нормально розподілена з параметрами (a, σ^2). Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $M|\xi - a|$.

10.21. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:

$$p(x) = \begin{cases} a\cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

а) знайти сталу a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки функцій $p(x)$ та $F(x)$; в) обчислити $P\left\{0 \le \xi \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

10.22. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$$

а) знайти сталу a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки функцій $p(x)$ та $F(x)$.

10.23. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x \le 0, x > 1; \end{cases}$$

а) знайти функцію розподілу та побудувати її графік; б) обчислити ймовірність $P\{-1 < \xi < 0,5\}$.

10.24. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0,5x, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти $M\xi,\ D\xi$, обчислити ймовірність того, що відхилення ξ від математичного сподівання не перевищить 0,5.

10.25. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ, що має щільність розподілу:

$$p(x)=\begin{cases}1-|x-1|, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x<0,\ x>2.\end{cases}$$

10.26. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $M\xi,\ D\xi$.

10.27. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на [0,1]. Обчислити: а) $M\sin^2\pi\xi$; б) Me^{ξ}.

10.28. Нехай ξ — випадкова величина з щільністю розподілу $p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$. Обчислити $M\min(|\xi|,1)$.

10.29. Нехай ξ_1 та ξ_2 — незалежні випадкові величини і $\eta=\xi_1+\xi_2$. Довести, що:

а) $F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{\xi_2}(x-u)\,dF_{\xi_1}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{\xi_1}(x-v)\,dF_{\xi_2}(v)$;

б) якщо існують щільності розподілу, то $f_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(x-v)\,p_{\xi_2}(v)\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_2}(x-u)\,p_{\xi_1}(u)\,du.$

10.30. Нехай ξ_1 та ξ_2 — незалежні випадкові величини і $\eta=\xi_1-\xi_2$. Довести, що:

а) $F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{\xi_1}(x+v)\,dF_{\xi_2}(v)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F_{\xi_2}(u-x)\right)dF_{\xi_1}(u)$;

б) якщо існують щільності розподілу ξ_1 та ξ_2, то $p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(x+v)\,p_{\xi_2}(v)\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_2}(u-x)\,p_{\xi_1}(u)\,du.$

10.31. Нехай ξ_1 та ξ_2 — незалежні випадкові величини і $\eta=\xi_1\xi_2$. Довести, що:

а) $F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{0}\left(1-F_{\xi_2}\left(\frac{x}{u}\right)\right)dF_{\xi_1}(u)+\int_{0}^{\infty}F_{\xi_2}\left(\frac{x}{u}\right)dF_{\xi_1}(u);$

б) якщо випадкові величини ξ_1 та ξ_2 мають щільність розподілу, то $p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|u|}p_{\xi_1}\left(\frac{x}{u}\right)p_{\xi_2}(u)du.$

10.32. Нехай ξ_1 та ξ_2 — незалежні випадкові величини і $\eta=\frac{\xi_1}{\xi_2}$

Довести, що:

а) $F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{0}\left(1-F_{\xi_1}(vx)\right)dF_{\xi_2}(v)+\int_{0}^{\infty}F_{\xi_1}(vx)dF_{\xi_2}(v);$

б) якщо випадкові величини ξ_1 та ξ_2 мають щільність розподілу, то $p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|v|\,p_{\xi_1}(vx)\,p_{\xi_2}(v)dv.$

10.33. Нехай ξ_1 та ξ_2 — незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta=\xi_1+\xi_2$.

10.34. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні і рівномірно розподілені на відрізку [0,1]. Знайти щільність розподілу випадкових величин:

а) $\eta=\xi_1\xi_2$; б) $\eta=\xi_1-\xi_2$; в) $\eta=|\xi_1-\xi_2|$.

10.35. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають показниковий розподіл з параметром λ. Обчислити: а) щільність розподілу $\xi-\eta$; б) щільність розподілу $|\xi-\eta|$.

10.36. Випадкові величини ξ і η незалежні, причому $p_\xi(x)=12x^2(1-x),\quad x\in(0,1),\quad p_\eta(x)=2y,\ y\in(0,1).$ Обчислити розподіл добутку $\xi\eta$.

10.37. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають щільність розподілу

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1,\end{cases}\qquad p_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

Довести, що випадкова величина $\xi\eta$ має нормальний розподіл.

10.38. Випадкові величини ξ і η нормально розподілені $N(0,\sigma^2)$ і незалежні. Довести, що відношення $\gamma = \dfrac{\xi}{\eta}$ має розподіл Коші.

10.39. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини, які мають показниковий розподіл з параметром λ.

Обчислити: а) функцію розподілу $\dfrac{\xi}{\eta}$; б) щільність розподілу $\dfrac{\xi}{\eta}$; в) математичне сподівання $\dfrac{\xi}{\eta}$.

10.40. Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні і мають нормальні розподіли $N\left(a_1,\sigma_1^2\right)$ і $N\left(a_2,\sigma_2^2\right)$. Довести, що випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має нормальний розподіл $N\left(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.

10.41. **Розподіл Ерланга.** Нехай $\left\{\xi_k, \quad 1 \le k \le n\right\}$ — незалежні однаково розподілені за показниковим розподілом з параметром $\lambda > 0$ випадкові величини. Довести, що величина $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ має таку щільність розподілу: $f_{s_n}\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(\lambda x\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$

10.42. **Розподіл χ^2 з n степенями свободи.** Нехай випадкові величини $\xi_1,\ldots,\xi_n$ незалежні і мають нормальний розподіл $N(0,1)$. Довести, що щільність розподілу випадкової величини $\chi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ дорівнює

$$p_{\chi^2}\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \ge 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$$

10.43. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_m$, $\eta_1,\ldots,\eta_n$ — незалежні випадкові величини, які мають нормальний розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2}{\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2}$.

10.44. **Розподіл Стьюдента.** Нехай $\xi, \xi_1, ..., \xi_n$ — незалежні випадкові величини, які мають нормальний розподіл $N(0,1)$. Довести, що щільність розподілу випадкової величини $t = \dfrac{\xi}{\sqrt{\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}}}$ дорівнює

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$ n — число степенів свободи.

10.45. Знайти щільність розподілу суми $\xi_1 + \xi_2$, якщо ξ_1 та ξ_2 незалежні, ξ_1 має рівномірний розподіл на [0,1], а ξ_2 рівномірно розподілена на [0,2].

10.46. Знайти щільність розподілу суми незалежних випадкових величин ξ_1 та ξ_2, якщо ξ_1 має рівномірний розподіл на [–1, 1], а ξ_2 має показниковий розподіл з параметром λ.

10.47. Випадкова величина має рівномірний розподіл на відрізку [–*a*; *a*]. Знайти коефіцієнт кореляції між: а) ξ та ξ^2; б) ξ та ξ^3.

10.48. Випадкові величини ξ та η незалежні і мають однаковий розподіл, $M\xi = M\eta = a$, $D\xi = D\eta = \sigma^2$. Знайти $\rho\left(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2\right)$, де $\overline{\xi}_1 = \alpha\xi + \beta\eta$, $\overline{\xi}_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

10.49. Нехай ξ, η та ζ попарно некорельовані випадкові величини. Чи можна стверджувати, що некорельованими будуть випадкові величини: а) ξ та $\zeta + \eta$; б) ξ та $\zeta\eta$?

Завдання для індивідуальної роботи

10.1. Річний дохід випадково обраного платника податків описується випадковою величиною ξ зі щільністю розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{c}{x^4}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Знайти значення параметра *c*, функцію розподілу річного доходу, середній річний дохід та середнє квадратичне відхилення річного доходу.

Визначити розмір річного доходу $x_{\min}$, не нижче якого з імовірністю 0,6 виявиться річний дохід випадково обраного платника податків.

10.2. Щільність розподілу випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases} ax, & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$$

Знайти значення параметра *a*, функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$ та $D\xi$, побудувати графіки функцій $p(x)$ та $F(x)$. Обчислити $P\left\{\left|\xi-M\xi\right|<0,5\right\}$ двома способами, а саме, використовуючи $p(x)$ та $F(x)$; відмітити цю ймовірність на обох графіках.

10.3. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величині з функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \dfrac{x}{4}+0,5, & -2\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$$

10.4. Нехай ξ - неперервна випадкова величина, $\zeta=\dfrac{\xi-M\xi}{\sigma_\xi}$. Довести, що $M\zeta=0,\ D\zeta=1$.

10.5. Знайти ймовірність того, що сума значень випадкової величини ξ, визначеної в ***прикладі 2***, у двох незалежно проведених випробуваннях перевищить 80. Задачу розв'язати графічно.

10.6. Всі значення рівномірно розподіленої випадкової величини розташовані на відрізку $[2;8]$. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини, а також імовірності її потрапляння на відрізок $[6;9]$ та в інтервал (3;5).

10.7. При з'ясуванні причин нестачі дорогоцінних металів у ювелірному магазині встановлено, що їх зважування проводиться на вагах, ціна поділки яких 0,1 г, а показання ваг заокруглюються при зважуванні до найближчої поділки їх шкали, причому заокруглення на будь-які значення від -0,05 до 0,05 рівноймовірні. Оцінити можливість виникнення похибки більш, ніж на 0,03 г, обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення втрат.

Розв'язати наступні задачі **10.8-10.16**, використовуючи рівномірний розподіл імовірностей.

10.8. На 200-кілометровій ділянці газопроводу між компресорними станціями A і B відбувається витік газу, який однаково можливий у будь-якій точці газопроводу. Найти ймовірності таких подій: а) витік розташований не далі 20 км від A або B; б) витік розташований ближче до A, ніж до B.

10.9. При проведенні інвентаризації для визначення на складі рідкого хімічного реактиву використовується вимірювальний прилад з ціною поділки 0,2 л. Покази приладу заокруглюються до найближчої поділки шкали. Знайти ймовірність того, що похибка заокруглення не перевищить 0,04 л.

10.10. Місткість цистерни для зберігання бензину на автозаправній станції дорівнює 50 т. Знайти ймовірність подій, що полягають у тому, що при випадковій перевірці в цистерні буде виявлено: а) менше 5 т бензину; б) більше 30 т бензину; в) хоча б 1 т бензину.

10.11. Оксана витрачає на дорогу до університету від 40 до 50 хв., причому будь-який час у цьому проміжку є рівно ймовірним. Знайти ймовірність того, що в день іспиту вона витратить на дорогу від 45 до 50 хв.

10.12. Щоб доїхати до університету, Петро може скористатись автобусом одного з двох маршрутів. Автобуси першого маршруту рухаються з інтервалом 18 хв., другого маршруту – з інтервалом 15 хв. Знайти ймовірність того, що Петро буде очікувати автобуса не більше 10 хв.

10.13. Петро і Марина домовились зустрітись з 12 до 13 год. на станції метро *«Васильківська»* біля останнього вагона поїзду, що йде до центра міста, однак ні один з них не зміг точно вказати час свого приходу. Вони домовились чекати один одного протягом 15 хв. Знайти ймовірність їх зустрічі.

10.14. В умовах попередньої задачі знайти ймовірність зустрічі Петра та Марини, якщо Петро чекає вже 10 хв., а Марини все ще немає.

10.15. Іван, Степан і Василь домовились зустрітись на перерві, яка продовжується годину, біля бібліотеки. Ніхто з них не зміг точно вказати час свого приходу, тому вони домовились чекати один одного не більше 10 хв. Знайти ймовірність таких подій: а) вони всі зустрінуться; б) хоча б двоє з них зустрінуться.

10.16. Рибалки спіймали у ставку 100 рибин, окільцювали їх та випустили назад у воду. Наступного дня вони спі1мали 120 рибин, з яких 10 виявилися окільцьованими. Знайти: а) ймовірність того, що впіймана рибина окільцьована; б) кількість рибин у ставку.

10.17. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$. Знайти $P\{|\xi - M\xi| < 3\sigma\}$.

10.18. Випадкові величини ξ і ζ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[a, b]$. Знайти $M(\xi\zeta)$ та $D(\xi\zeta)$.

10.19. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Визначити ймовірності $P\{\xi > 1\}$, $P\{\xi < 2\}$, $P\{\xi > -1\}$, $P\{\xi = 3\}$ та $P\{\xi > 1 / \xi < 3\}$, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

10.20. Ціна деякої акції розподілена нормально. Протягом останнього року у 20% робочих днів ціна була менше 20 грн., а у 75% робочих днів вона була більше 25 грн. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення ціни цієї акції.

10.21. Зазвичай нарада триває годину. На цей раз вона за годину не закінчилась. Яка ймовірність того, що вона закінчиться у найближчі 15 хв.? Тривалість наради розподілена за показниковим законом.

10.22. Тривалість міжміських телефонних розмов розподілена приблизно за показниковим законом, розмова продовжується у середньому 3 хв. Знайти ймовірність того, що чергова розмова буде тривати більше 3 хв. Визначити частку розмов, які продовжуються менше 1 хв. Знайти ймовірність того, що розмова, яка триває вже 10 хв., закінчиться протягом найближчої хвилини, а також математичне сподівання та дисперсію тривалості розмови.

10.23. Час, необхідний для оформлення договору, є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}3$ договору за годину. Знайти ймовірність того, що оформлення договору займе менше 7 год. Знайти середній час оформлення договору.

10.24. При розслідуванні причин аварії було встановлено, що вона могла трапитись через встановлення на автомобіль деталі, розміри якої виходять за межі допустимого інтервалу (15 мм; 25 мм). Відомо, що розмір деталей, що надходять на конвеєр автозаводу, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням рівним 20мм та середнім квадратичним відхиленням рівним 5 мм. Оцінити ймовірність того, що причиною аварії стало встановлення на автомобіль деталі нестандартного розміру.

10.25. Поточна ціна акції може бути наближена нормальним розподілом з математичним сподіванням 15,28 грн. Та середнім квадратичним відхиленням 0,12 грн. Розрахувати ймовірності того, що ціна акції виявиться: а) не нижче 15,50 грн.; б) не вище 15, 50 грн.; в) між 15,10 грн. та 15, 40 грн.; г) між 15,05 грн. та 15,10 грн.

10.26. В умовах задачі ***приклада 4*** знайти частку осіб, у яких коефіцієнт інтелекту виявиться: а) менше 60; б) менше 75; в) менше 95; г) менше 100; д) менше 120; е) в межах від 80 до 120.

10.27. В умовах приклада 4 знайти частку осіб, у яких коефіцієнт інтелекту відхилиться від 100 менш, ніж на 48.

10.28. В умовах приклада 4 знайти ймовірність того, що з шести незалежно відібраних осіб у двох коефіцієнт інтелекту буде вище 92.

10.29. Статистика за вкладами населення у деякий банк говорить про те, що розмір вкладу випадково обраного клієнта розподілений за нормальним законом з параметрами a=1200 гр.од., $\sigma = 2$ гр.од. Визначити: а) середній розмір вкладу; б) частку клієнтів, розмір вкладу яких складає не менше 1000 гр.од.

10.30. З даних, отриманих керівництвом цеху при його перевірці, відомо, що брак складає 5% всієї випущеної продукції. За даними, отриманими з технічної документації, встановлено, що розмір продукції є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням, рівним 10 мм та середнім квадратичним відхиленням, рівним 0,2 мм. Величина максимально допустимого відхилення розміру деталі від номінального, при якому деталь ще вважається придатною, складає 0,3 мм. Оцінити за допомогою ймовірності достовірність інформації, отриманою від керівництва цеху про якість випущеної продукції.

РОЗДІЛ 11. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Теоретичні відомості

Нерівність Маркова. Для будь-якої випадкової величини ξ, що приймає невід'ємні значення та має скінченне математичне сподівання $M\xi < \infty$, для кожного додатного числа $a > 0$ має місце нерівність

$$P(\xi \ge a) \le \frac{M\xi}{a}.$$

Ця нерівність еквівалентна наступній:

$$P(\xi < a) \ge 1 - \frac{M\xi}{a}.$$

Нерівність Чебишова. Для будь-якої випадкової величини ξ, що має скінченну дисперсію $D\xi$, для кожного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P\left\{\left|\xi - M\xi\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Цю нерівність часто використовують у вигляді

$$P\left\{\left|\xi - M\xi\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ та ξ – випадкові величини. Кажуть, що ξ_n ***збігається до ξ за ймовірністю***, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ при $n \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\xi_n - \xi\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$.

Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ та ξ – випадкові величини. Кажуть, що ξ_n ***збігається до ξ з імовірністю 1***, $\xi_n \xrightarrow{P1} \xi$ (ще кажуть, що ξ_n збігається до ξ майже напевно і позначають $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} \xi$) при $n \to \infty$, якщо $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1$.

Між цими двома видами збіжності існують такі співвідношення: якщо $\xi_n \xrightarrow{P1} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ при $n \to \infty$, тобто із збіжності з імовірністю 1 випливає збіжність за ймовірністю. Зі збіжності за ймовірністю взагалі кажучи, не випливає збіжність з імовірністю 1, але випливає існування підпослідовності $\left\{\xi_{n_k}, k \ge 1\right\}$ такої, що $\xi_{n_k} \xrightarrow{P1} \xi$, $k \to \infty$.

Нехай $\left\{\xi_n, n \ge 1\right\}$ – послідовність випадкових величин із скінченними математичними сподіваннями $a_n = M\xi_n, n \ge 1$. Кажуть, що для цієї послідовності виконується ***закон великих чисел (ЗВЧ)*** (або що вона підпорядкована ЗВЧ), якщо $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \to 0, n \to \infty$ за ймовірністю, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$, або, що те саме $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$.

Зміст закону великих чисел полягає в тому, що при зростанні кількості доданків (тобто однаково розподілених випадкових величин) середнє арифметичне цих доданків мало відрізняється від математичного сподівання a_n. Будь-яке відхилення середнього арифметичного випадкових величин від числа a_n при достатньо великій кількості доданків малоймовірно.

Теорема Чебишова. Якщо $\left\{\xi_n, n \ge 1\right\}$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з $M\xi_k = a_k < \infty,\quad D\xi_k \le C < \infty, k \ge 1,$ то для неї виконується закон великих чисел.

Теорема Маркова. Якщо $\{\xi_n,\ n\ge 1\}$ – послідовність випадкових величин з $M\xi_k = a_k < \infty,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = 0,$ то для неї виконується закон великих чисел.

Наслідок теореми Маркова. Якщо $\left\{\xi_n, n \ge 1\right\}$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з $M\xi_n^2 < \infty$, $n \ge 1$ та $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k \to 0,\ n \to \infty$, то для неї виконується закон великих чисел.

Теорема Пуассона. Нехай μ_n – число появ події A в послідовності n незалежних випробувань, причому ймовірність появи події A в k-ому випробуванні дорівнює p_k. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| \ge \varepsilon\right\}=0 .$$

Зокрема, якщо всі $p_k = p$, $k \ge 1$, то $\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$, $n \to \infty$ (це твердження називається ***теоремою Бернуллі***).

Теорема Хінчина. Якщо $\{\xi_n, n \ge 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин із скінченним математичним сподіванням, то для неї виконується закон великих чисел.

Кажуть, що послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n \ge 1\}$ підпорядкована посиленому закону великих чисел, якщо $M\xi_k = a_k < \infty,$ і $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) \xrightarrow{P1} 0,\ n \to \infty$. Очевидно, якщо послідовність випадкових величин підпорядкована посиленому закону великих чисел, то вона підпорядкована закону великих чисел.

Теорема Колмогорова. Якщо послідовність взаємно незалежних випадкових величин задовольняє умову $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{n^2} < \infty,$ то ця послідовність підпорядкована посиленому закону великих чисел. Зокрема, якщо $\{\xi_n, n \ge 1\}$– послідовність взаємно незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченною дисперсією, то вона підпорядкована посиленому закону великих чисел, тобто $P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = a\right\} = 1$.

Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ – послідовність таких незалежних випадкових величин, що $a_k = M\xi_k$, $\sigma_k^2 = D\xi_k$, $B_n^2 = \sum \sigma_k^2$, $F_k(x) = P\{\xi_k < x\}$. Кажуть, що для послідовності $\{\xi_n, n\ge1\}$ виконується:

а) ***умова Ліндеберга***, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x) = 0;$$

б) ***умова Ляпунова***, якщо для деякого $\delta>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n} M\,|\,\xi_k - a_k\,|^{2+\delta} = 0.$$

Позначимо через $F_{(0,1)}(x) = 0{,}5 + \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ функцію стандартного нормального розподілу.

Центральна гранична теорема. Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин із скінченними математичними сподіваннями та дисперсіями. Якщо для цієї послідовності виконується умова Ліндеберга, то для всіх $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k - a_k \right) < x \right\} = 0{,}5 + \Phi\left(x\right).$$

Якщо послідовність $\{\xi_n, n \ge 1\}$ задовольняє умову рівномірної малості, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ $\max\limits_{1\le k\le n} P\left\{ \frac{1}{B_n} | \xi_k - a_k | > \varepsilon \right\} \to 0,\ n \to \infty$ і виконується центральна гранична теорема, то виконується умова Ліндеберга.

Наслідок 1. Для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин із скінченними другими моментами виконується центральна гранична теорема, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x \right\} = 0{,}5 + \Phi\left(x\right)$, де $a = M\xi_k$, $\sigma^2 = D\xi_k$.

Наслідок 2. Якщо для послідовності $\{\xi_n, n \ge 1\}$ виконується умова Ляпунова, то виконується і центральна гранична теорема.

Центральна гранична теорема стверджує, що достатньо велика сума порівняно малих випадкових величин розподілена наближено за нормальним законом.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Нехай $\{\xi_n, n \ge 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, причому ξ_n набуває значення 2^n та -2^n з імовірністю $\frac{1}{2}$. Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язок. Обчислимо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ_n. Маємо $M\xi_n = 0$; $D\xi_n = 2^{2n} \cdot \frac{1}{2} + 2^{2n} \cdot \frac{1}{2} = 4^n$. Тому теорему Чебишова або наслідок з теореми Маркова до цієї послідовності застосовувати неможливо.

Задача 2. Нехай $\{\xi_n,\ n\geq 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин із нульовим математичним сподіванням і скінченною дисперсією: $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Знайти $\sigma^2 = D\xi_k$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\} = 0,4.$

Розв'язок. Для даної послідовності випадкових величин справджується центральна гранична теорема, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} < x\right\} = 0,5 + \Phi(x).$ Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\sigma\right\} = 0,5 - \Phi(x).$ За таблицею 2 додатку знаходимо, що $0,5 - \Phi(x) = 0,4$ при x=0,26. Таким чином, $\sigma = \frac{1}{x} \approx 3,85$ та $\sigma^2 \approx 14,82.$

У низці задач доводиться зіштовхуватись з ситуацією, коли досліджувана випадкова величина є сумою великої кількості незалежних доданків, вплив кожного з яких на суму несуттєвий. Такими випадковими величинами є, наприклад, капітали банків і страхових компаній (частка кожного окремо взятого вкладника не залежить від частки інших вкладників і відносно мала, але в сумі усі ці частки дуже вагомі), дохід торгових підприємств (покупці діють незалежно один від одного і купують товари за відносно невеликі суми) і інші.

Задача 3. У районі 10 універсамів. Сумарний добовий дохід в них дорівнює в середньому 10000 грн. і у 90% випадків відрізняється від 10000 грн. не більше, ніж на 1 тисячу грн. Знайти ймовірність того, що наступний сумарний добовий дохід виявиться у межах від 8000 до 12000 грн.

Розв'язок. Нехай X – сумарний добовий дохід. Покупці діють незалежно один від одного і купують товари на відносно невеликі суми X_i, але покупців у районі достатньо багато, так що можна вважати, що їх кількість $n \to \infty$. Тому сумарний дохід буде мати нормальний розподіл з деякими параметрами a і σ. Оскільки для нормального розподілу $a = MX$, то за умовою $a = MX = 10000$. Також в умові сказано, що $P(9000 < X < 11000) = 0,9$. З іншого боку

$$P(9000 < X < 11000) = \Phi\left(\frac{11000 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{9000 - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-1000}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right).$$

Маємо, $2\Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right) = 0,9$, тоді $\Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right) = 0,45$, звідки за таблицею 2 додатку $\frac{1000}{\sigma} \approx 1,65$.

Отже, $P(8000 < X < 12000) = \Phi\left(\frac{12000 - 10000}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{8000 - 10000}{\sigma}\right) =$

$$= 2\Phi\left(\frac{2000}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(2 \cdot 1,65\right) = 2\Phi\left(3,3\right) = 2 \cdot 0,4995 = 0,999.$$

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

11.1. Нехай $M\xi = 1$, $D\xi = 0,04$. Оцінити ймовірність того, що $0,5 < \xi < 1,5$.

11.2. Математичне сподівання річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік не менше 175 см опадів.

11.3. Середнє річне число сонячних днів у даній місцевості дорівнює 75. Оцінити ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде не більше 200 сонячних днів.

11.4. Встановити, чи буде виконано умови застосування закону великих чисел для послідовності незалежних випадкових величин із розподілом:

а) $P\{\xi_n = \pm 2^n\} = 2^{-(2n+1)}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - 2^{-2n}$;

б) $P\{\xi_n = \pm\sqrt{n}\} = \frac{1}{2n}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}$;

в) $P\{\xi_n = \pm n\} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$;

г) $P\{\xi_n = \pm n\} = \frac{1}{2n^2}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}$;

д) $P\{\xi_n = \pm n\} = \frac{1}{4}$, $P\{\xi_n = 0\} = \frac{1}{2}$;

е) $P\{\xi_n = n\} = 2^{-n}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - 2^{-n+1}$;

є) $P\{\xi_n = \pm\sqrt{\ln n}\} = \frac{1}{2}$.

11.5. При яких значеннях параметра α до послідовності незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, … таких, де $P\{\xi_n=\pm n^{\alpha}\}=1/2$, можна застосувати закон великих чисел?

11.6. Нехай $\{\xi_n, n\geq 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, що мають рівномірний розподіл на відрізку [0, 1]. Довести, що

$$\eta_n = \left\{ e^n \prod_{k=1}^{n} \xi_k \right\}^{\frac{1}{n}} \to 1,\ n\to\infty \text{ за ймовірністю.}$$

11.7. Нехай $\{\xi_n, n\geq 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, що мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що випадкова величина $\eta_n = \left\{ \prod_{k=1}^{n} \xi_k \right\}^{\frac{1}{n}}$ збігається за ймовірністю, і знайти границю.

11.8. Для дійсної неперервної на [0,1] функції $f(x)$ обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \right) dx_1 \ldots dx_n.$$

11.9. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}^{n} \exp\left(-\left(x_1+\ldots+x_n\right)\frac{m}{n} \right) dx_1 \ldots dx_n$.

11.10. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}^{n} \sin^{2m} \frac{\pi}{2n}\left(x_1+\ldots+x_n\right) dx_1 \ldots dx_n$.

11.11. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}^{n} \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\, dx_1 \ldots dx_n$.

11.12. Послідовність незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, … задана законом розподілу:

ξ	a	$-a$
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Чи можна застосувати до цієї послідовності: а) закон великих чисел? б) центральну граничну теорему?

11.13. При яких α для послідовності незалежних випадкових величин із задачі 11.2 виконується центральна гранична теорема?

11.14. Нехай $\{\xi_n,\ n\geq 1\}$ – послідовність таких незалежних випадкових величин, що $M\xi_n = 0,\ P\{\xi_n = \pm 2^n\} = \frac{1}{2}.$ Чи виконується для цієї послідовності центральна гранична теорема?

11.15. Нехай $\{\xi_n,\ n\geq 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають пуассонівський розподіл з параметром λ. Знайти

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_{2i-1}-\xi_{2i}\right)}{\sqrt{n}} < x\right\}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

11.1. Середній розмір вкладу у відділенні банку становить 6000 грн. Оцінити ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищить 10 000 грн.

11.2. В середньому зміна курсу акції компанії протягом біржових торгів складає 0,3%. Оцінити ймовірність того, що на найближчих торгах курс зміниться більше ніж на 3%.

11.3. Відділення банку обслуговує в середньому 100 клієнтів за день. Оцінити ймовірність того, що сьогодні у відділенні банку буде обслуговано: а) не більше 200 клієнтів; б) більше 150 клієнтів.

11.4. Щоденно нова угода укладається з імовірністю 0,2 (але не більше однієї за день). За скільки днів з імовірністю 0,9 можна очікувати, що буде укладено не менше 50 угод.

11.5. Середньодобове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює $12\ \text{МВт}\cdot\text{год}$. Визначити ймовірність того що споживання електроенергії в цьому населеному пункті протягом даної доби перевищить $50\ \text{МВт}\cdot\text{год}$.

11.6. В середньому студенти запізнюються на 3 хвилини. Яка ймовірність того, що запізняться на 15 хвилин і більше?

11.7. В середньому в даній місцевості 90 сонячних днів у році. Оцінити ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде не більше 240 сонячних днів.

11.8. Сума усіх вкладів в деякому банку складає 20 000 000 грн., а ймовірність того, що випадково взятий вклад менший за 100 000 грн. дорівнює 0,8. Що можна сказати за кількість вкладників даного банку?

11.9. Імовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює ¼. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що число X настання події міститься в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

11.10. Відомо що ймовірність дозрівання кукурудзяного стебла з 3-ма стручками дорівнює 4/5. Оцінити ймовірність того що число стеблів з 3-ма стручками серед 500 000 вирощених буде відрізнятись від математичного сподівання цього числа не більше ніж на 5 000 шт.

11.11. Імовірність появи деякої події $p = 0{,}3$ в кожному з $n = 900$ незалежних випробувань. Використовуючи нерівність Чебишова оцінити ймовірність того, що подія повториться від 240 до 300 разів.

11.12. Імовірність того, що електроприлад витримає гарантійний термін роботи, дорівнює 0,9 для всіх 100 електроприладів, які обслуговує гарантійна майстерня. Оцінити ймовірність того, що число електроприладів, які витримають гарантійний термін роботи, буде в межах [85; 95], а також знайти точніше значення цієї ж імовірності.

11.13. Статистичні дані рекламної компанії показали, що адресна реклама дає дві заявки в 50 випадків. Компанія розіслала 2000 рекламних проспектів. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що число заявок виявиться не меншим 60 і не більшим 100. Уточнити отриманий результат за допомогою інтегральної формули Муавра-Лапласа.

11.14. Для експериментальної перевірки ЗВЧ були в різні часи проведені наступні експерименти:

1) Монету підкинули 4 040 разів, герб випав 2 048 разів (експеримент Бюффона).

2) Монету підкинули 12 000 разів, і відносна частота випадіння герба становила 0,5016; в іншому експерименті монету підкинули 24 000 разів, і відносна частота випадіння герба становила 0,5005 (експеримент Пірсона).

Для кожного з цих експериментів знайти ймовірність того, що при повторенні експеримента відхилення (за абсолютною величиною) відносної частоти від імовірності $\frac{1}{2}$ не перевищить одержаного результату.

11.15. Гральний кубик підкидають 1000 разів. Знайти межі, в яких з імовірністю 0,99 буде лежати сумарне число очок, що випали.

11.16. Стрілок при пострілі по мішені попадає в десятку з імовірністю 0,5; в дев'ятку – 0,3, у вісімку – 0,1, у сімку – 0,05 і в шістку – 0,05. Стрілок зробив 100 пострілів. Яка ймовірність того, що він набрав більше 980 очок? Більше 950 очок?

11.17. Потяги метро йдуть з інтервалом 2 хвилини. Кожен з пасажирів незалежно один від одного підходить до платформи у випадковий момент часу та очікує найближчий потяг. У даний потяг зайшло 75 пасажирів.

Знайти наближено ймовірність того, що їх сумарний час очікування перевищує одну годину.

11.18. Гральний кубик підкидають до того моменту, поки загальна сума очок, що випали, не перевищить 700. Оцінити ймовірність того, що буде потрібно більше 210 підкидань? Менше 180 підкидань? Від 190 до 210 підкидань?

11.19. Монету підкидають 1600 разів. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що герб випаде: а) більше 900 разів; б) більше 1200 разів.

11.20. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу.

X	-2	-1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,15	0,25

Знайти ймовірність того, що $\left|X - MX\right| \leq 3$ та оцінити її, користуючись нерівністю Чебишова.

11.21. Відомо, що $P\left\{\left|X - MX\right| < \varepsilon\right\} \geq 0,9$, $\sigma = 0,2$. Використовуючи нерівність Чебишова знайти ε.

11.22. Річна виручка авіакомпанії від перевезення пасажирів – випадкова величина з середнім значенням 200 млн грн і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 20 млн грн. Знайти: а) оцінку ймовірності того, що в наступному році авіакомпанія матиме виручку не менше 220 млн грн; б) оцінку ймовірності того, що виручка міститиметься в межах від 180 до 220 млн грн.

11.23. Маса деталей, що виготовляються на верстаті, є випадковою величиною, середнє значення якої (математичне сподівання) дорівнює 1,2 кг. Дисперсія цієї величини дорівнює 0,012. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що: а) відхилення маси деталі від її середнього значення за абсолютною величиною не перевищить 0,2; б) маса деталі набуде значення від 1,18 до 1,22.

11.24. Випадкова величина задана законом розподілу

X	2	5
P	0,3	0,7

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що X відхилиться від свого математичного сподівання на величину, яка за абсолютною величиною не перевищить 2. Перевірити точність отриманої оцінки.

11.25. Середня кількість викликів наладчика верстатів за зміну дорівнює 21. Оцінити ймовірність того, що за зміну надійде викликів:

- щонайменше 60;

- менше 35.

11.26. Нехай X – число очок, що випали на гральній кістці. Оцінити ймовірність того, що X прийме значення менше 5, користуючись нерівністю Маркова. Перевірити точність отриманої оцінки.

11.27. Електрична підстанція обслуговує мережу з 10 000 ламп, імовірність включення кожної з яких увечері дорівнює 0,6. Оцінити ймовірність того, що кількість одночасно включених ламп перебуватиме в межах від 5900 до 6100.

11.28. Випадкова величина X має характеристики $MX = 1$ і $\sigma = 0,2$. Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити такі ймовірності:

а) $P(0,5 < X < 1,5)$; б) $P(0,75 < X < 1,35)$; в) $P(X < 2)$.

11.29. Кількість води, яка використовується підприємством протягом доби для технічних потреб, є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 120 м^3. Оцінити ймовірність того, що найближчої доби витрати води підприємством виявляться: а) більшими від 140 м^3; б) не більшими 150 м^3.

11.30. Протягом певного періоду на біржі зберігався відносно стабільний курс долара США до євро. На підставі біржової статистики за цей період складено закон розподілу випадкової величини. X – зміна курсу долара до євро (у відсотках):

X	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5
P	0,1	0,2	0,5	0,15	0,05

За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що відбудеться зміна курсу долара до євро не більше ніж на 0,03% за абсолютною величиною. Перевірити точність отриманої оцінки.

РОЗДІЛ 12. ВИБІРКА ТА ЇЇ ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ЕМПІРИЧНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ, ГІСТОГРАМА

Теоретичні відомості

Випадковою ***вибіркою*** об'єму n (чи вибіркою) називається випадковий вектор $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, де ξ_i — незалежні і однаково розподілені випадкові величини, функція розподілу яких $F_\xi(x) = P\{\xi_i < x\}, i = 1, 2, \dots, n.$ Іноді кажуть, що вибірка $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ добута з генеральної сукупності випадкової величини ξ (ознаки генеральної сукупності) з функцією розподілу $F_\xi(x)$. Реалізацію вибірки будемо позначати відповідно $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Розташуємо величини $x_1, x_2, ..., x_n$ у порядку зростання: $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$, де $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $x_{(2)}$ — друга за величиною серед $x_1, x_2, ..., x_n$, $x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Позначимо через $\xi_{(k)}$ випадкову величину, яка для кожної реалізації X вибірки з ξ набуває значення $x_{(k)}$, $k = 1, 2, ..., n$. Послідовність випадкових величин $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, ..., \xi_{(n)}$ називається ***варіаційним рядом вибірки*** $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Члени варіаційного ряду називаються ***порядковими статистиками вибірки,*** вони задовольняють нерівність: $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le ... \le \xi_{(n)}$.

Позначимо через $\nu_n(x)$ випадкову величину, рівну числу елементів вибірки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, значення яких менші x, і введемо функцію $F_n^*(x) = \dfrac{\nu_n(x)}{n}$, яка називається ***емпіричною функцією розподілу***. Її можна використовувати як оцінку функції $F_\xi(x)$. Легко бачити, що $F_n^*(x)$ — випадкова величина, яка набуває значення $\left\{0, \dfrac{1}{n}, ..., \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$ з імовірністю:

$$P\left\{F_n^*(x) = \frac{k}{n}\right\} = C_n^k \left(F_\xi(x)\right)^k \left(1 - F_\xi(x)\right)^{n-k}.$$

Для кожної реалізації X вибірки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ функція $F_n^*(x)$ задовольняє всі властивості функції розподілу: змінюється від 0 до 1, неперервна зліва, неспадна.

Якщо всі компоненти вектора X різні, то

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le x_{(1)}, \\ \dfrac{k}{n}, & \text{якщо } x_{(k)} < x \le x_{(k+1)}, \\ 1, & \text{якщо } x > x_{(n)}. \end{cases}$$

Якщо деякі компоненти вектора X повторюються, то реалізацію вибірки зручніше задавати таблицею (***статистичний ряд***):

Значення	y_1	y_2	...	y_s
Частота	m_1	m_2	...	m_s

де $y_1, y_2, ..., y_s$ — різні значення даних варіаційного ряду, які називаються варіантами вибірки $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$, а m_i — кількість повторів значення y_i у цьому ряді (частоти y_i), $i = 1, 2, ..., s$. Легко бачити, що $m_1 + m_2 + ... + m_s = n$. Тоді

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le y_1, \\ \dfrac{1}{n}(m_1 + m_2 + ... + m_k), & \text{якщо } y_k < x \le y_{k+1}, \\ 1, & \text{якщо } x > y_s. \end{cases}$$

Теорема Гливенка. $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_x \left|F_n^*(x) - F_\xi(x)\right| = 0\right\} = 1.$

Теорема Колмогорова. Якщо $F_\xi(x)$ — неперервна, тоді для будь-якого $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n}\sup_x \left|F_n^*(x) - F_\xi(x)\right| < t\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2t^2}.$$

Теорема Колмогорова показує, що оцінка $F_n^*(x)$ дає рівномірну оцінку з точністю до величини порядку $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Нехай тепер ξ неперервна випадкова величина з щільністю $p(x)$. Для оцінки $p(x)$ з реалізації $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вибірки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ розіб'ємо множину значень вибірки на s інтервалів довжини h_i,

$i = 1, 2, ..., s$. При побудові інтервалів однакової довжини рекомендоване число інтервалів, відповідно до формули Стерджеса, $s = 1 + 3,322\lg n$, а довжина інтервалу

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322\lg n},$$

де $x_{\max} - x_{\min}$ - різниця між найбільшим та найменшим значенням ознаки.

Нехай x_i^* – середина *i*-го інтервалу, ν_i – кількість елементів вибірки, які потрапили в *i*-ий інтервал. Тоді $\frac{\nu_i}{nh_i}$ – оцінка щільності в точці x_i^*. Прямокутники з основами h_i і висотами $\frac{\nu_i}{nh_i}$, $i = 1, 2, ..., s$ у прямокутній системі координат називаються ***гістограмою вибірки***. Якщо на гістограмі ординати, відповідні x_i^*, послідовно з'єднати відрізками прямих, то здобута ламана буде ***полігоном частот***. Полігон частот є також статистичним аналогом теоретичної щільності. Для інтервальних оцінок

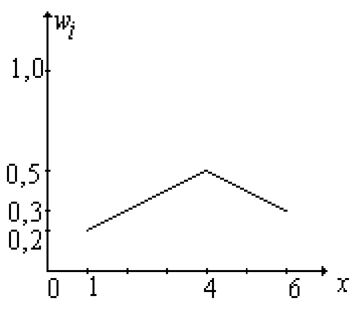
$$F_n^*\left(x_i^*\right) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{i-1} m_k + \frac{m_i}{2}\right].$$

Приклад розв'язання задачі

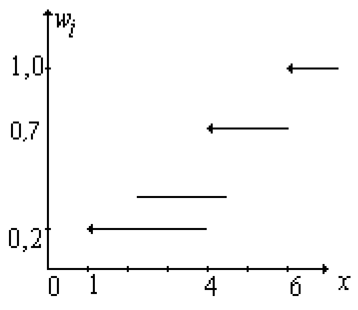
Задача 1. Побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу для вибірки, представленої статистичним рядом:

y_i	1	4	6
m_i	10	25	15

Розв'язок. На малюнку 12.1 зображено полігон відносних частот, а на малюнку 12.2 — емпіричну функцію розподілу.



Мал. 12.1



Мал. 12.2

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

12.1. Записати вибірку 4, 2, 10, 3, 5, 4, 4, 10, 7, 3, 2, 4, 3, 5, 2 у вигляді: а) варіаційного; б) статистичного ряду.

12.2. Побудувати емпіричну функцію розподілу та полігон частот для вибірки, поданої у вигляді таблиці частот:

а)

y_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	8

б)

y_i	0	1	2	3	4	5	7
m_i	8	17	16	10	6	2	1

12.3. Побудувати емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот:

а)

Інтервал	[–3;–2)	[–2;–1)	[–1;0)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)
m_i	3	10	15	24	25	13	7	3

б)

Інтервал	[0,2;2,2)	[2,2;4,2)	[4,2;6,2)	[6,2;8,2)	[8,2;12,2)
m_i	70	20	4	3	3

12.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з рівномірного на відрізку $[a, b]$ розподілу. Довести, що сумісна щільність розподілу $\xi_{(1)}$ та $\xi_{(n)}$ має вигляд

$$p(x, y) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}, a \le x \le y \le b.$$

Знайти $M\xi_{(1)}, M\xi_{(n)}, D\xi_{(1)}, D\xi_{(n)}, \operatorname{cov}(\xi_{(1)}, \xi_{(n)})$.

РОЗДІЛ 13. ОЦІНЮВАННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛІВ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОЦІНОК. ВИБІРКОВЕ СЕРЕДНЄ ТА ДИСПЕРСІЯ, МОДА, МЕДІАНА

Теоретичні відомості

Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з розподілом $F_\xi(x,\theta)$. Причому функція розподілу $F_\xi(x,\theta)$ спостережуваної випадкової величини ξ має відому функціональну форму, але залежить від невідомого параметра θ. Цей параметр може бути будь-якою точкою заданої параметричної множини Θ.

Оцінювання невідомого параметра θ є процедурою, яка дозволяє зробити статистичні висновки про справжнє значення невідомого параметра, використовуючи статистичну інформацію, що міститься у вибірці $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Далі будь-яку функцію від вибірки $h = h(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ будемо називати ***статистикою***. При цьому множиною визначення статистики є вибірковий простір $\mathbb{R}^n$, а множиною значень — Θ.

Точковою оцінкою $\hat{\theta}_n$ параметра θ називається статистика $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, значення якої при заданій реалізації $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вибірки приймають за наближене значення параметра θ.

Точкові оцінки класифікують за наступними основними властивостями.

Оцінка $\hat{\theta}_n$ параметра θ називається ***незміщеною***, якщо $M\hat{\theta}_n = \theta$. Якщо $M\hat{\theta}_n = \theta + b(\theta)$, то величину $b(\theta)$ будемо називати ***зсувом оцінки*** $\hat{\theta}_n$.

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n,\ n = 1,2,\ldots$ параметра θ називається ***спроможною***, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0,$ або $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta,\ n \to \infty.$

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n,\ n = 1,2,\ldots$ параметра θ називається ***сильно спроможною***, якщо $\hat{\theta}_n \to \theta$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n, \ n=1,2,\ldots$ параметра θ називається ***асимптотично нормальною***, якщо $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\Rightarrow N\left(0,\ \sigma^2\right),\ n\to\infty,$ тобто $\hat{\theta}_n$ має нормальний розподіл $N\left(0,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

Символ $\xrightarrow{P}$ означає збіжність за ймовірністю, а символ $\Rightarrow$ означає слабу збіжність функцій розподілів.

Позначимо клас усіх незміщених оцінок параметра θ через M_0. Додатково припустимо, що дисперсії всіх оцінок з класу M_0 скінченні, тобто $D\hat{\theta}_n=M\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)^2<\infty$ для будь-якого $\hat{\theta}_n\in M_0$.

Оцінка $\hat{\theta}^*$ параметра θ називається ***оптимальною***, якщо $D\hat{\theta}^*=\inf\limits_{M_0} D\hat{\theta}.$

Незміщеною, сильно спроможною та асимптотично нормальною оцінкою математичного сподівання є ***вибіркове середнє*** $\overline{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

Через $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ будемо позначати реалізацію цієї оцінки. Вибіркове середнє для дискретного статистичного ряду підраховується за формулою $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{s}y_i m_i,\quad n=\sum\limits_{i=1}^{s}m_i$. Вибіркове середнє для інтервального статистичного ряду підраховується за формулою $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{s}y_i^* m_i,$ де $y_i^*=\dfrac{y_i+y_{i+1}}{2}$ – середина інтервалу $\left[y_i, y_{i+1}\right)$.

Вибіркова дисперсія $\overline{S}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\overline{\xi}\right)^2$ є зміщеною оцінкою σ^2, а ***виправлена вибіркова дисперсія*** $\hat{S}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\overline{\xi}\right)^2$ – незміщеною оцінкою σ^2. Очевидно, що $\hat{S}^2=\dfrac{n}{n-1}\overline{S}^2$. При розрахунках зручно використовувати формулу $\overline{S}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2-\left(\overline{\xi}\right)^2$.

Вибіркова дисперсія для статистичного та інтервального статистичного ряду підраховується відповідно за формулами:

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} y_i^2 m_i - (\overline{x})^2, \ \overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\left(y_i^*\right)^2 m_i - (\overline{x})^2.$$

Якщо математичне сподівання a відоме, то незміщеною, сильно спроможною і асимптотично нормальною оцінкою дисперсії є оцінка $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2$.

Розв'язок x_p рівняння $F_\xi(x) = p,$ де $p \in (0, 1),$ називається ***p*-*квантиллю*** розподілу $F_\xi(x)$. При $p = 0,5$ квантиль називають ***медіаною*** розподілу. Вибірковою *p*-квантиллю $Z_{n,p}$ називають порядкову статистику

$$Z_{n,p} = \begin{cases} \xi_{([np]+1)}, & \text{якщо } np \text{ дробове}, \\ \xi_{(np)}, & \text{якщо } np \text{ ціле}. \end{cases}$$

$Z_{n,p}$ — це елемент вибірки, зліва від якого знаходиться частка $\frac{[np]}{n} \le p$ спостережень і $Z_{n,p}$ — порядкова статистика з максимальним номером, що задовольняє цю властивість. Величина $Z_{n,\,1/2}$ називається ***вибірковою медіаною***.

Реалізацію величини $Z_{n,\,1/2}$ позначають Me. Для дискретних статистичних рядів:

$$Me = \begin{cases} x_{(m)}, & \text{при } n = 2m-1, \\ \dfrac{x_{(m)} + x_{(m+1)}}{2}, & \text{при } n = 2m. \end{cases}$$

Для інтервальних статистичних рядів:

$$Me = y_i + h_i \frac{\frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{i-1} m_k}{m_i},$$

де y_i — початок медіанного інтервалу, тобто такого, якому відповідає перша з нагромаджених частот, що перевищує половину всіх спостережень, h_i — довжина медіанного інтервалу, m_i — частота медіанного інтервалу.

Вибіркова мода — це елемент, який найчастіше трапляється у вибірці. Для дискретного статистичного ряду:

$Mo = y_k$, якщо $m_k = \max\limits_i m_i$.

Для інтервального статистичного ряду:

$$Mo = y_i + h_i \frac{m_i - m_{i-1}}{2m_i - m_{i-1} - m_{i+1}},$$

де y_i — початок інтервалу з найбільшою частотою (модального інтервалу), m_i — частота цього інтервалу.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Обчислити вибіркове середнє, дисперсію, моду, медіану для вибірки:

Інтервал	[–2; 0)	[0; 4)	[4; 6)	[6; 10]
m_i	5	10	20	15

Розв'язок. Інтервальний статистичний ряд має $s = 4$ інтервали розбиття, середини цих інтервалів дорівнюють відповідно $-1, 2, 5, 8$. Вибіркове середнє для цього ряду

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} y_i^* m_i = \frac{1}{50}\left(-1\cdot 5 + 2\cdot 10 + 5\cdot 20 + 8\cdot 15\right) = 4,7.$$

Для обчислення вибіркової дисперсії спочатку знайдемо вибірковий другий початковий момент

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\left(y_i^*\right)^2 m_i = \frac{1}{50}\left((-1)^2\cdot 5 + 2^2\cdot 10 + 5^2\cdot 20 + 8^2\cdot 15\right) = 30,1.$$

Тоді $\overline{S}^2 = M_2 - \left(\overline{x}\right)^2 = 30,1 - \left(4,7\right)^2 = 8,01.$

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S}^2 = \frac{50}{49}\cdot 8,01 \approx 8,17.$$

Для даного ряду $n = 50$, $\frac{n}{2} = 25$. Інтервалу $[4,\ 6)$ відповідає нагромаджена частота, рівна 35, а попередньому інтервалу – 15. Тому інтервал $[4,\ 6)$ є медіанним і вибіркова медіана $Me = 4 + 2\cdot\frac{25-15}{20} = 5.$

Інтервалу $[4,\ 6)$ відповідає найбільша частота, тому він є модальним та

$$Mo = 4 + 2\cdot\frac{20-10}{40-10-15} = 5,33.$$

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

13.1. Обчислити незміщені оцінки математичного сподівання та дисперсії, вибіркову медіану та моду для вибірки:

y_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

13.2. Обчислити вибіркове середнє і дисперсію, моду, медіану для вибірки:

Інтервал	[2, 4)	[4, 6)	[6, 10)	[10, 16)	[16, 20)
m_i	2	8	35	40	15

13.3. Побудувати емпіричну функцію розподілу, полігон частот. Знайти моду, медіану, вибіркове середнє та дисперсію для вибірки:

y_i	0	1	3	5	6
m_i	5	2	4	4	5

13.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з нормальним розподілом $N\left(a, \sigma^2\right)$. Довести, що статистика $T = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - a\right|$ є незміщеною оцінкою параметра σ (a — відомий параметр).

13.5. Нехай ξ_1 та ξ_2 — два спостереження випадкової величини ξ з нормальним розподілом $N\left(0, \sigma^2\right)$. Показати, що статистика $T\left(\xi\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\xi_1 + \xi_2\right|$— незміщена оцінка σ .

13.6. Нехай ξ_1 та ξ_2 — два спостереження випадкової величини ξ з нормальним розподілом $N\left(a, \sigma^2\right)$. Показати, що статистика $T\left(\xi\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\xi_1 - \xi_2\right|$ — незміщена оцінка σ .

13.7. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з рівномірним на відрізку $\left[a,b\right]$ розподілом. Побудувати незміщені оцінки параметрів $a,\ b$, а також незміщені та спроможні оцінки параметрів $\frac{a+b}{2},\ b-a.$

13.8. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з рівномірним розподілом на відрізку $[0, 2\theta]$. На який коефіцієнт треба помножити статистику $T(\xi) = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i - \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$, щоб отримати незміщену оцінку параметра θ?

13.9. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з рівномірним розподілом на відрізку $[\theta, \theta + 1]$. Побудувати незміщену оцінку параметра θ.

13.10. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з щільністю $p(x, \theta) = \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ e^{-(x-\theta)}, & x \ge \theta. \end{cases}$ Довести, що оцінка $\hat{\theta}_n = \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_i - \frac{1}{n} = \xi_{(1)} - \frac{1}{n}$ є незміщеною оцінкою параметра θ.

РОЗДІЛ 14. ЕФЕКТИВНІ ОЦІНКИ. ДОСТАТНІ СТАТИСТИКИ

Теоретичні відомості

Нехай $L(X,\theta)$ — щільність розподілу вибіркового вектора $\zeta=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta$ (або ймовірність у дискретному випадку). Якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ вибірка з генеральної сукупності з розподілом $F_\xi(x,\theta)$, то $L(X,\theta)=\prod_{k=1}^{n} p(x_k,\theta)$, де $p(x_k,\theta)$ — щільність випадкової величини ξ (або ймовірність у дискретному випадку). Функція $L(X,\theta)$ називається ***функцією правдоподібності***.

Функцію $I(\theta)=M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\zeta,\theta)\right)^2$ називають ***кількістю інформації за Фішером.*** У разі, якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з щільністю $p(x,\theta)$, то

$$I(\theta)=nI_1(\theta)=nM\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\xi,\theta)\right)^2.$$

Нехай для деякої функції $h(\theta)$ існує незміщена оцінка $\hat{h}(\zeta)$.

Теорема (нерівність Крамера-Рао). Нехай функція $L(X,\theta)$ двічі диференційована за θ і

$$M\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\zeta,\theta)\right|<\infty,\ M\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\zeta,\theta)\right|<\infty,\ M\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\zeta,\theta)\right|^2<\infty,$$

функція $h(\theta)$ диференційована і

$$D\hat{h}(\zeta)<\infty,\ \int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{h}(X)\frac{\partial}{\partial\theta}L(X,\theta)\right|dX<\infty,$$

тоді

$$D\hat{h}(\zeta)\ge\frac{\left(h'(\theta)\right)^2}{I(\theta)}.$$

Нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial\ln L(\zeta,\theta)}{\partial\theta}=\pm A(\theta)\left(\hat{h}(\zeta)-h(\theta)\right)$$

з імовірністю одиниця, де $A(\theta)=\dfrac{I(\theta)}{h'(\theta)}$.

Якщо $h(\theta)=\theta,$ то $M\left(\hat{h}(\xi)-\theta\right)^2 \geq I^{-1}(\theta)$.

Нехай тепер $\hat{h}(\zeta)$ зміщена оцінка θ і $M\hat{h}(\zeta)=\theta+b(\theta)$. Тоді

$$D\hat{h}(\zeta)\geq\frac{\left(1+b'(\theta)\right)^2}{I(\theta)}.$$

Якщо нижня межа нерівності двох останніх нерівностей для незміщеної чи зміщеної оцінки відповідно досягається, то така оцінка називається ***ефективною.***

Статистика $T(\zeta)$ називається ***достатньою*** для невідомого параметра θ, якщо умовна щільність (або ймовірність у дискретному випадку) $L(X\,|\,t;\theta)$ випадкового вектора ζ при умові $T(\zeta)=t$ не залежить від θ.

Це означає, що статистика T містить усю інформацію про параметр θ, що є у вибірці. Достатня статистика задає оптимальний спосіб зображення статистичних даних, що особливо важливо при обробці великих масивів статистичної інформації. Потрібно знайти достатню статистику мінімальної вимірності, що подає дані в найбільш стиснутому вигляді. При цьому йдеться про ***мінімальну достатню статистику***. Очевидно вибірка ζ є достатньою статистикою, але ця статистика тривіальна, оскільки не скорочує даних.

Теорема (критерій факторизації). Для того, щоб статистика $T(\zeta)$ була достатньою, необхідно і достатньо, щоб функція правдоподібності мала вигляд:

$$L(X,\theta)=\varphi(T(X),\theta)h(X),$$

де функції $h(X)$ і $T(X)$ не залежать від θ.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайти оцінку параметрів нормального розподілу.

Розв'язок. Нехай $\zeta=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ — вибірка з генеральної сукупності з нормальним розподілом $N(a,\theta)$. Розглянемо два випадки:

1) a — невідомий параметр, а дисперсія θ відома. Тоді

$$L(X,a)=(2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2}{2\theta}},$$

$$\ln L(X,a)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta)-\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2}{2\theta},$$

$$\frac{\partial\ln L(X,a)}{\partial a}=\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}(x\ \ -a)=\frac{n}{\theta}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-a\right)=\frac{n}{\theta}(\overline{x}-a).$$

Тобто $\dfrac{\partial\ln L(\zeta,a)}{\partial a}=\dfrac{n}{\theta}(\overline{\xi}-a).$

Підрахуємо тепер $I(a)$: $I(a)=-M\dfrac{\partial^2\ln L(\zeta,\ a)}{\partial a^2}=\dfrac{n}{\theta},\ D\overline{\xi}=\dfrac{\theta}{n}.$

Отже, $D\overline{\xi}=I^{-1}(a)$ і $\dfrac{\partial\ln L(\zeta,a)}{\partial a}=I(a)(\overline{\xi}-a).$ Таким чином, оцінка $\overline{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ параметра a ефективна. Крім того, вона сильно спроможна і асимптотично нормальна;

2) a — відомий параметр, а дисперсія θ невідома. Аналогічно,

$$\ln L(\zeta,\theta)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\theta-\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2}{2\theta},$$

$$\frac{\partial\ln L(\zeta,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2=\frac{n}{2\theta^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2-\theta\right)=\frac{n}{2\theta^2}\left(S^2-\theta\right)$$

.

Оцінка S^2 є незміщеною, сильно спроможною і асимптотично нормальною оцінкою дисперсії θ.

$$I(\theta)=-M\left(\frac{n}{2\theta^2}-\frac{1}{\theta^3}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2\right)=-\frac{n}{2\theta^2}+\frac{n\theta}{\theta^3}=\frac{n}{2\theta^2}.$$

Отже, $\dfrac{\partial\ln L(\zeta,\theta)}{\partial\theta}=I(\theta)(S^2-\theta)$ і S^2 — ефективна оцінка параметра θ. Її дисперсія $DS^2=\dfrac{2\theta^2}{n}.$

Задача 2. Знайти оцінку параметра показникового розподілу.

Розв'язок. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з $p(x,\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \ge 0$, $M\xi_k = \dfrac{1}{\theta}$. Нехай $\hat{\theta}_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}$.

Випадкова величина $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ має розподіл Ерланга, щільність якого $p_{\gamma n}(x) = \dfrac{\theta^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta x}, x \ge 0.$ Тоді

$$M\hat{\theta}_n = \int_0^\infty \frac{n}{x} \frac{\theta^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta x} dx = \frac{n\theta}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-t} dt = \frac{n\theta}{(n-1)!} \Gamma(n-1) =$$

$$= \frac{n\theta(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{n\theta}{n-1} = \theta + \frac{\theta}{n-1},$$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма-функція, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Отже, $\hat{\theta}_n$ — зміщена оцінка параметра θ, $b(\theta) = \dfrac{\theta}{n-1}$. Підрахуємо $I(\theta)$:

$$L(\zeta,\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k}, \quad \ln L(\zeta,\theta) = n \ln\theta - \theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

$$\frac{\partial \ln L(\zeta,\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \frac{\partial^2 \ln L(\zeta,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}, \quad I(\theta) = \frac{n}{\theta^2}.$$

Далі обчислимо $D\hat{\theta}_n$:

$$M\hat{\theta}_n^2 = \int_0^\infty \frac{n^2}{x^2} \frac{\theta^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta x} dx = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-3} e^{-t} dt =$$

$$= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)!} \Gamma(n-2) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)};$$

$$D\hat{\theta}_n = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2} = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

Далі $\dfrac{(1+b'(\theta))^2}{I(\theta)} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^2 \theta^2}{n} = \dfrac{\theta^2 n}{(n-1)^2};$

$$D\hat{\theta}_n = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} > \frac{\theta^2 n}{(n-1)^2} \text{ для } n = 3, 4, \ldots.$$

Отже, оцінка $\hat{\theta}_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}$ не є ефективною оцінкою параметра θ.

Задача 3. Знайти достатню статистику для нормального розподілу $N(a,\theta)$.

Розв'язок.

$$L(X,a,\theta) = (2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2} = (2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2 - \frac{1}{2\theta}\sum\limits_{k=1}^{n}(\overline{x}-a)^2}.$$

Згідно з критерієм факторизації $T(\zeta) = \left(\overline{\xi}, \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \overline{\xi}\right)^2\right)$. Якщо дисперсія θ відома, то достатньою статистикою для параметра θ буде $\overline{\xi}$. Якщо ж, навпаки, a — відомий параметр, то достатньою статистикою для θ буде $\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2$.

Задача 4. Знайти достатню статистику для параметра розподілу Коші.

Розв'язок. Нехай

$$p(x,\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}; \; L(X,\theta) = \frac{1}{\pi^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(x_k-\theta)^2}.$$

Для параметра θ існує лише тривіальна достатня статистика $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Задача 5. Знайти достатню статистику для параметра рівномірного розподілу на відрізку $[-\theta;\theta]$.

Розв'язок. $p(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x \notin [-\theta;\theta], \\ \dfrac{1}{2\theta}, & x \in [-\theta;\theta], \end{cases} \quad \theta > 0,$

$$L(X,\theta) = (2\theta)^{-n}\prod_{k=1}^{n} I(\theta - x_k)\cdot I(\theta + x_k), \quad \text{де } I(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \ge 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що функцію правдоподібності можна зобразити у вигляді $L(X,\theta)=(2\theta)^{-n} I\left(\theta-x_{(n)}\right)\cdot I\left(\theta+x_{(1)}\right)$. Тоді достатньою статистикою для параметра θ буде вектор $\left(\xi_{(1)},\xi_{(n)}\right)$, де $\xi_{(1)}=\min\limits_{1\le k\le n}\xi_k$, $\xi_{(n)}=\max\limits_{1\le k\le n}\xi_k$.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

14.1. Нехай $\zeta=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ — вибірка з генеральної сукупності з пуассонівським розподілом $P\{\xi=k\}=\dfrac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$, $k=0,1,2,\ldots,\ \ \theta>0.$ Показати, що статистика $\hat{\theta}_n=\overline{\xi}$ є незміщеною та ефективною оцінкою параметра θ.

14.2. Нехай $\zeta=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ — вибірка з генеральної сукупності з розподілом Паскаля $P\{\xi=k\}=\dfrac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}$, $k=0,1,\ldots,\ \ \theta>0.$ Показати, що статистика $\hat{\theta}_n=\overline{\xi}$ є незміщеною та ефективною оцінкою параметра θ.

14.3. Одновимірний вектор ζ набуває скінченного числа значень 0, 1, …, n з імовірністю $P\{\zeta=x\}=C_n^x\theta^x(1-\theta)^{n-x}$, $x=0,1,\ldots,n,\ \theta\in(0;1).$ Довести, що статистика $\hat{\theta}_n=\dfrac{\zeta}{n}$ є незміщеною та ефективною оцінкою параметра θ (біноміальний розподіл).

14.4. Випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні й однаково рівномірно розподілені на відрізку $[0,\theta]$. Показати, що $\xi_{(n)}=\max\limits_{1\le k\le n}\xi_k$ — достатня статистика для параметра θ.

14.5. Нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n — вибірка з генеральної сукупності з щільністю $p(x,\theta)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ e^{-(x-\theta)},x\ge 0.\end{cases}$ Показати, що $\xi_{(1)}=\min\limits_{1\le k\le n}\xi_k$ — достатня статистика для параметра θ.

14.6. Випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні й однаково розподілені з щільністю $p(x,\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},x\ge 0,\ \theta>0.$ Знайти достатню статистику і записати щільність її розподілу.

14.7. Випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — незалежні й однаково розподілені з щільністю $p(x,\theta)=C(\theta)e^{-\theta x}$, $0\le x\le\theta.$ Знайти константу $C(\theta)$ та достатню статистику для параметра θ.

14.8. Знайти достатню статистику для параметра θ пуассонівського розподілу $P\{\xi = k\} = \dfrac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, k = 0,1,\ldots,\ \theta > 0.$ Який розподіл має достатня статистика?

14.9. Випадкова величина ξ має логарифмічний нормальний розподіл з параметрами $\left(a,\ \sigma^2\right)$, якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N\left(a,\ \sigma^2\right)$. Знайти щільність розподілу ξ , $M\xi,\ D\xi.$ Знайти достатню статистику для векторного параметра $\theta = \left(a,\ \sigma^2\right).$

РОЗДІЛ 15. МЕТОД МОМЕНТІВ ТА МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

Теоретичні відомості

Нехай $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — вибірка з генеральної сукупності з розподілом $F_\xi(x,\theta)$, де $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_S)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$. Припустимо, що у випадкової величини ξ, що спостерігається, є перші s моментів $\alpha_k = M\xi^k$, $k = \overline{1,s}$. При цьому вони є функціями від невідомих параметрів θ: $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$. Нехай $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реалізація вибірки ζ. Значення оцінок параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_s$ за ***методом моментів*** знаходиться в результаті розв'язку системи рівнянь:

$$\alpha_k(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = \overline{1,s}.$$

Оцінки, знайдені методом моментів, як правило, спроможні, але часто неефективні.

Нехай спостерігається випадковий вектор $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ з щільністю $L(X,\theta)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$. ***Оцінкою максимальної правдоподібності*** $\hat{\theta}_n$ називається така точка множини Θ, в якій ***функція правдоподібності*** $L(X,\theta)$ при заданому X набуває максимального значення. Тобто

$$L(X, \hat{\theta}_n) = \max_{\theta\in\Theta} L(X,\theta).$$

У багатьох випадках знаходять $\max\limits_{\theta\in\Theta} \ln L(X,\theta)$, причому максимум досягається в тих же точках, що і $\max\limits_{\theta\in\Theta} L(X,\theta)$.

Якщо для кожного X з вибіркового простору $\mathbb{R}^n$ максимум $L(X,\theta)$ досягається у внутрішній точці Θ і функція $L(X,\theta)$ диференційована за θ, то оцінка $\hat{\theta}_n = \left(\hat{\theta}_n^{(1)}, \hat{\theta}_n^{(2)}, \ldots, \hat{\theta}_n^{(s)}\right)$ при заданій реалізації $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вибірки ζ задовольняє систему рівнянь:

$$\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \text{ або } \frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = \overline{1,s}.$$

Останні рівняння називаються ***рівняннями правдоподібності***.

Якщо для параметра θ існує достатня статистика $T(X)$, то розв'язок рівнянь правдоподібності є функцією від достатньої статистики.

Нехай θ — скалярний параметр. Якщо для параметра θ існує ефективна незміщена оцінка, то вона збігається з оцінкою максимальної правдоподібності.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з щільністю

$$p(x,\theta) = \frac{2x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, \quad x \geq 0,\ \theta \geq 0.$$

Знайти методом моментів оцінку параметра θ. Чи буде ця оцінка незміщеною та спроможною?

Розв'язок. Спочатку підрахуємо перший момент ознаки ξ генеральної сукупності:

$$M\xi = \int_0^\infty \frac{2x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} dx = 2\int_0^\infty te^{-t} \frac{\theta}{2\sqrt{t}} dt = \theta \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt = \theta \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\theta}{2}\sqrt{\pi}.$$

За методом моментів прирівнюємо теоретичний та емпіричний перший момент: $\frac{\theta}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Оцінкою параметра θ буде $\hat{\theta}_n = \frac{2\overline{\xi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$.

Таким чином, $\hat{\theta}_n$ є незміщеною і спроможною оцінкою (закон великих чисел).

Задача 2. Задана щільність рівномірного розподілу

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \theta, & x \notin [-\theta;\theta], \\ \dfrac{1}{2\theta}, & x \in [-\theta;\theta], \end{cases} \quad \theta > 0.$$

Знайти методом моментів оцінку параметра θ .

Розв'язок. Математичне сподівання ознаки генеральної сукупності $M\xi = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{x}{2\theta} dx = 0$ і не залежить від θ, а другий момент $M\xi^2 = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx = \frac{\theta^2}{3}.$ За методом моментів маємо рівняння для знаходження оцінки невідомого параметра: $\frac{\theta^2}{3}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$. Отже, оцінкою параметра θ буде $\hat{\theta}_n=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}$.

Задача 3. Знайти оцінку максимальної правдоподібності для параметрів нормального розподілу $N(a,\theta)$.

Розв'язок. Функція правдоподібності для нормального розподілу, побудована за реалізацією вибірки

$$L(X,a,\theta)=(2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Рівняння правдоподібності у даному випадку мають вигляд:

$$\frac{\partial\ln L(X,a,\theta)}{\partial a}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=0,$$

$$\frac{\partial\ln L(X,a,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=0.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно a і θ, дістанемо:

$$\hat{a}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x},\quad \hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

Знайдемо тепер другі частинні похідні :

$$\frac{\partial^2\ln L(X,a,\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{n}{\theta}\bigg|_{\substack{\theta=\hat{\theta}_n\\ a=\hat{a}_n}}=-\frac{n}{\hat{\theta}_n}<0,$$

$$\frac{\partial^2\ln L(X,a,\theta)}{\partial\theta^2}=\frac{n}{2\theta^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{\theta^3}\Bigg|_{\substack{\theta=\hat{\theta}_n\\ a=\hat{a}_n}}=-\frac{n}{2\hat{\theta}_n^2}<0,$$

$$\frac{\partial^2\ln L(X,a,\theta)}{\partial a\partial\theta}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)}{\theta^2}\Bigg|_{\substack{\theta=\hat{\theta}_n\\ a=\hat{a}_n}}=\frac{-n^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^2}=0,$$ оскільки

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0.$$

Підрахуємо визначник у точці $(a,\theta)=\left(\hat{a}_n,\hat{\theta}_n\right)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial \theta} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \end{vmatrix} \Bigg|_{\substack{\theta = \hat{\theta}_n \\ a = \hat{a}_n}} = \frac{n^2}{2\hat{\theta}_n^3} > 0.$$

Тобто точка з координатами $\left(\hat{a}_n, \hat{\theta}_n\right)$ максимізує значення функції $\ln L\left(X, a, \theta\right)$, і для параметрів $\left(a, \theta\right)$ оцінкою максимальної правдоподібності буде $\left(\bar{\xi},\, \bar{S}^2\right)$.

Задача 4. Знайти оцінку максимальної правдоподібності для показникового розподілу з щільністю $p\left(x, \theta\right) = \theta e^{-\theta x}, x \geq 0$.

Розв'язок. Функція правдоподібності має вигляд $L\left(X, \theta\right) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$, а рівняння правдоподібності

$$\frac{\partial \ln L\left(X, \theta\right)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Отже, $\hat{\theta}_n = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$. Оскільки $\dfrac{\partial^2 \ln L\left(X, \theta\right)}{\partial \theta^2} = -\dfrac{n}{\theta^2} < 0,$ то $\hat{\theta}_n$ — точка максимуму функції $\ln L\left(X, \theta\right)$. Таким чином, оцінкою максимальної правдоподібності параметра θ буде $\dfrac{1}{\bar{\xi}}$. Ця оцінка є зміщеною і неефективною. Зауважимо, що коли щільність показникового розподілу задається у вигляді

$$p\left(x, \theta\right) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0,$$

то оцінка максимальної правдоподібності $\hat{\theta}_n = \bar{\xi}$ буде незміщеною і ефективною.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

15.1. Використовуючи метод моментів, знайти за вибіркою $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, для якої $P\{\xi = m\} = e^{-\theta} \dfrac{\theta^m}{m!}$, $m = 0, 1, \ldots$, оцінку $\hat{\theta}_n$

параметра θ. Чи буде оцінка незміщеною, спроможною? Знайти також оцінку максимальної правдоподібності параметра θ.

15.2. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з рівномірного на відрізку $[-\theta, \theta]$ розподілу. За допомогою методу моментів знайти оцінку параметра θ^2. Чи буде ця оцінка незміщеною і спроможною?

15.3. Побудувати за допомогою методу моментів спроможні оцінки параметрів a і b за результатами n незалежних спостережень випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, кожна з яких має нормальний розподіл $N(0,1)$ або $N(a,1)$ з імовірністю b і $1-b$ відповідно.

15.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з щільністю $p(x,\theta) = k(\theta)x^2 e^{-\frac{x^3}{\theta^3}}$, $x \geq 0, \theta > 0$. Знайти функцію $k(\theta)$, оцінку параметра θ методом моментів. Чи буде оцінка незміщеною та спроможною? Чи збігається вона з оцінкою максимальної правдоподібності?

15.5. Методом максимальної правдоподібності за вибіркою $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ знайти оцінку невідомого параметра θ розподілу Паскаля $P\{\xi = m\} = \dfrac{\theta^m}{(\theta+1)^{m+1}}$, $m = 0, 1, \ldots$, $\theta > 0$. Яким властивостям відповідає ця оцінка?

15.6. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з щільністю $p(x,\beta,m) = \dfrac{\beta^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\beta x}$, $x > 0, \beta > 0, m > 0$. Знайти оцінку невідомих параметрів β і m за допомогою методу моментів. Нехай при $n = 10$ $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ набули таких значень: 0,1; 0,4; 0,5; 0,7; 0,6; 0,1; 0,05; 0,8; 0,15; 0,1. Обчислити значення оцінок.

15.7. Методом максимальної правдоподібності за вибіркою $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ з генеральної сукупності з розподілом $N(\theta, \theta^2)$ знайти оцінку параметра θ.

15.8. Методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметра θ біноміального розподілу (див. задачу 14.3). Яким властивостям відповідає ця оцінка? Чи буде вона збігатися з оцінкою методу моментів?

15.9. Методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметрів $\left(a,\sigma^2\right)$ логнормального розподілу (див. задачу 14.9).

15.10. Показати, що оцінкою максимальної правдоподібності для рівномірного на $[0;\theta]$ розподілу служить $\hat{\theta}_n = \max\limits_{1\le i\le n} \xi_i$,

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & x \notin [0,\theta]. \end{cases}$$

15.11. Методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметра θ розподілу $P\{\xi = m\} = \dfrac{(\theta-1)^m}{\theta^{m+1}}, \theta > 1,\ m = 0,1,\ldots$. Чи буде ця оцінка незміщеною та ефективною?

15.12. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності з щільністю $p(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \theta \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\theta+1}, & x \ge 1, \theta > 0. \end{cases}$ Знайти оцінку максимальної правдоподібності для параметра θ. Чи буде вона спроможною?

РОЗДІЛ 16. НАДІЙНІ ІНТЕРВАЛИ

Теоретичні відомості

Нехай ζ — вибірковий вектор об'єму n, P_θ — розподіл вектора ζ, який залежить від невідомого параметра θ. При інтервальному оцінюванні невідомого параметра θ шукають такі дві статистики $h_1(\zeta)$ і $h_2(\zeta)$, що $h_1(\zeta) < h_2(\zeta)$, і для яких при заданому $(1-\alpha) \in (0,1)$ виконується умова:

$$P_\theta\{h_1(\zeta) < \theta < h_2(\zeta)\} \geq 1-\alpha.$$

Інтервал $(h_1(\zeta), h_2(\zeta))$ називається $(1-\alpha)$**–** ***надійним інтервалом,*** імовірність $(1-\alpha)$— ***рівнем надійності,*** а $h_1(\zeta)$ і $h_2(\zeta)$ — ***нижньою та верхньою межами надійності***.

Інтервал $\left(\hat{\theta}_n - \dfrac{C_\alpha}{\sqrt{I(\hat{\theta}_n)}},\ \hat{\theta}_n + \dfrac{C_\alpha}{\sqrt{I(\hat{\theta}_n)}}\right)$ — асимптотично найкоротший $(1-\alpha)$-надійний інтервал. Значення величин C_α подано у таблиці 4 додатка.

Надійні інтервали для нормального розподілу

1. Надійний інтервал для математичного сподівання при відомій дисперсії σ^2:

$$\bar{\xi} - C_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + C_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

2. Надійний інтервал для дисперсії σ^2, якщо математичне сподівання a відоме:

$$\frac{nS^2}{\chi_1^2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi_2^2},$$

де $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2$, числа χ_1^2 і χ_2^2 такі, що

$P\{\chi^2(n) < \chi_1^2\} = \dfrac{\alpha}{2}$ і $P\{\chi^2(n) \geq \chi_2^2\} = \dfrac{\alpha}{2}$ (таблиця 5 додатка).

Зауваження. При використанні таблиці 5 значень $\chi^2_{k,\alpha}$, одержаних з рівності $P\left\{\chi^2(k) \ge \chi^2_{k,\alpha}\right\} = \alpha,$ необхідно врахувати, що $P\left\{\chi^2(n) < \chi^2_1\right\} = 1 - P\left\{\chi^2(n) \ge \chi^2_1\right\},$ тому умова $P\left\{\chi^2(n) < \chi^2_1\right\} = \dfrac{\alpha}{2}$ рівносильна умові $P\left\{\chi^2(n) \ge \chi^2_1\right\} = 1 - \dfrac{\alpha}{2}.$

3. Надійні інтервали для дисперсії a та σ^2 у випадку, якщо обидва параметри невідомі:

$$\overline{\xi} - t_\alpha \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < a < \overline{\xi} + t_\alpha \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_1},$$

де t_α знаходиться з таблиці Стьюдента (табл. 6 додатка) так, щоб $P\left\{|t_{n-1}| < t_\alpha\right\} = 1 - \alpha,$ де $k = n-1$ - число степенів свободи, $\hat{S}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \overline{\xi}\right)^2,$ $P\left\{\chi^2(n-1) < \chi^2_1\right\} = \dfrac{\alpha}{2}$ і $P\left\{\chi^2(n-1) \ge \chi^2_2\right\} = \dfrac{\alpha}{2}$ (таблиця 5 додатка).

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Нехай $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — вибірковий вектор з генеральної сукупності, яка має розподіл Пуассона з параметром θ. Побудувати $(1-\alpha)$-надійний інтервал.

Розв'язок. За умовою задачі щільність розподілу ознаки генеральної сукупності $P\{\xi = k\} = \dfrac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}, k = 0,1,\ldots$, функція правдоподібності реалізації вибірки $L(X,\theta) = e^{-n\theta}\dfrac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$ Тоді

$$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta}(\overline{x} - \theta), \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(X,\theta) = -\frac{n}{\theta^2}\overline{x}.$$

Оцінка максимальної правдоподібності знаходиться з рівняння:

$$\frac{n}{\theta}\left(\bar{\xi}-\theta\right)=0$$ і

$$\hat{\theta}_n=\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\quad I\left(\theta\right)=-M\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L\left(\zeta,\,\theta\right)=\frac{n\theta}{\theta^2}=\frac{n}{\theta}.$$

Тоді $\left(1-\alpha\right)$-надійний інтервал для параметра θ буде таким:

$$\bar{\xi}-C_\alpha\sqrt{\frac{\bar{\xi}}{n}}<\theta<\bar{\xi}+C_\alpha\sqrt{\frac{\bar{\xi}}{n}}.$$

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

16.1. Побудувати надійний інтервал для параметра θ біноміального розподілу $P\left\{\xi=k\right\}=C_n^k\theta^k\left(1-\theta\right)^{n-k}$, $k=0,1,\dots,n;\ \theta\in\left(0;1\right)$.

16.2. Проведено 100 незалежних спостережень, у результаті яких подія A спостерігалась 40 разів. Визначити надійний інтервал для ймовірності виникнення події A при $1-\alpha$ = 0,95, якщо число виникнень події A має біноміальний розподіл.

16.3. На телефонній станції проводились спостереження за числом неправильних з'єднань за хвилину. Спостереження протягом години дали такі результати:

x_k	0	1	2	3	4	5	7
m_k	8	17	16	10	6	2	1

Припускаючи, що число правильних з'єднань за хвилину має пуассонівський розподіл, знайти надійний інтервал для математичного сподівання розподілу з надійністю 0,99.

16.4. Побудувати надійний інтервал для параметра θ нормального розподілу $N\left(\theta,4\theta^2\right)$.

16.5. Побудувати надійний інтервал для параметра θ за вибіркою $\zeta=\left(\xi_1,\,\xi_2,\,...,\xi_n\right)$ з генеральної сукупності з розподілом:

а) $P\left\{\xi_k=m\right\}=\dfrac{\theta^m}{\left(1+\theta\right)^{m+1}}$, $m=0,1,\dots,\theta>0;$

б) $P\left\{\xi_k=m\right\}=\dfrac{\left(\theta-1\right)^m}{\theta^{m+1}}$, $m=0,1,\dots,\theta>1.$

16.6. Знайти надійні інтервали для параметрів a і σ^2 нормального розподілу за вибіркою:

а) 0,6; 2,4; 2,1; 1,4; 1,2; 4,8; 0,9; 1,1; 3,5; 3,0; 0,5; 2,5;

б) 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 0,8; 1,0; 2,0;
для параметра *a:* $1-\alpha=0{,}95$; для σ^2: $1-\alpha=0{,}9$.

16.7. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання нормального розподілу $N\left(a,\sigma^2\right)$, якщо

$n=25,\ \bar{x}=16{,}8;\ \sigma^2=25,\ 1-\alpha=0{,}99.$

16.8. Знайти надійний інтервал для дисперсії нормального розподілу $N\left(a,\sigma^2\right)$, якщо $n=20,\ \hat{S}^2=10,\ 1-\alpha=0{,}9.$

16.9. За вибіркою з нормального розподілу

x_k	-2	1	2	3	4	5
m_k	4	3	4	6	2	1

з надійністю 0,95 знайти інтервальні оцінки для параметра *a*, якщо:

а) $\sigma^2=4$; б) σ — невідоме.

Знайти також надійний інтервал для σ^2 ($1-\alpha=0{,}9$) якщо:

а) $a=2$; б) *a* — невідоме.

16.10. Побудувати надійний інтервал для параметра θ за вибіркою $\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\xi_n$ з генеральної сукупності з щільністю

$$p(x,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},\quad x\geq 0,\ \theta>0.$$

16.11. Для з'ясування використання програмного забезпечення Microsoft у місті довільно вибрано 100 фірм. Обстеження показало, що 80 фірм використовують програмне забезпечення. Побудувати 0,95-надійний інтервал для частки фірм, що використовують програмне забезпечення Microsoft.

РОЗДІЛ 17. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ. КРИТЕРІЇ ЗГОДИ

Теоретичні відомості

Статистичною гіпотезою називається будь-яке твердження про вигляд або властивості розподілу випадкових величин, що спостерігаються в експерименті. Правило, згідно з яким гіпотеза H_0, що перевіряється, приймається чи відхиляється, називається ***статистичним критерієм*** для перевірки гіпотези H_0. Наведемо декілька прикладів статистичних гіпотез.

1. Гіпотеза про вигляд розподілу. Нехай $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — вибірка з генеральної сукупності з невідомою функцією розподілу $F_\xi(x)$. Тоді $H_0 : F_\xi(x) = F(x)$, де $F(x)$ повністю задана, або $H_0 : F_\xi(x) \in M$, де $M = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ — задане сімейство функцій розподілу.

2. Гіпотеза однорідності. Нехай маємо k вибірок ζ_i, $i = \overline{1,k}$ з генеральних сукупностей з функціями розподілу $F_i(x)$, $i = \overline{1, k}$. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що це спостереження над однією і тією ж випадковою величиною, тобто $H_0 : F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv \ldots \equiv F_k(x)$.

3. Гіпотеза незалежності. Одночасно спостерігаються дві випадкові величини ξ та η, $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$ — невідома їхня сумісна функція розподілу. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що ξ та η — незалежні випадкові величини, тобто $H_0 :\ F_{(\xi,\eta)}(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$.

Розглянемо методи перевірки гіпотез описаних вище типів. У всіх випадках формулювалася лише одна гіпотеза H_0, і необхідно перевірити, чи узгоджуються статистичні дані з цією гіпотезою, чи ні. Відповідні критерії називаються ***критеріями згоди***. Якщо гіпотеза H_0 однозначно фіксує розподіл спостережень, то гіпотеза називається ***простою***, у протилежному випадку — ***складною***. У наведених вище прикладах лише гіпотеза $H_0 : F_\xi(x) = F(x)$, є простою.

Опишемо основний процес, який використовується при побудові критерію згоди. Вибирається деяка статистика $T = T(\zeta)$, яка є мірою розбіжності статистичного й теоретичного законів розподілу і називається ***статистикою критеріїв*** або ***критерієм***. Далі знаходиться розподіл критерію T у припущенні, що розподіл спостережень збігається з гіпотетичним. Визначимо тепер таке число T_α, щоб $P\{T \geq T_\alpha / H_0\} = \alpha$, де α — достатньо мале число. Число α називається ***рівнем значущості*** критерію. Якщо значення міри розбіжності $\hat{T}$, обчислене за спостереженнями, більше або рівне T_α $\left(\hat{T} \geq T_\alpha\right)$, тоді відхилення від теоретичного закону вважається значущим, і гіпотеза відхиляється. Якщо ж $\hat{T} < T_\alpha$, то відхилення не вважається значущим, тобто дані експерименту не суперечать гіпотезі.

Критерій Колмогорова про вигляд розподілу. Критерій Колмогорова застосовується в тих випадках, коли $F(x)$ — неперервна функція. Статистикою критерію вибирається величина

$$D_n = D_n(\zeta) = \sqrt{n} \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n^*(x) - F(x)\right|,$$

де $F_n^*(x)$ — емпірична функція розподілу. За заданим рівнем значущості α знайдемо таке число λ_α, що

$$P\{D_n \geq \lambda_\alpha / H_0\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha.$$

У таблиці 8 додатка наведено значення λ_α для різних α. Отже, одержимо таке правило перевірки гіпотези H_0. Нехай $\lambda_n = D_n(X)$ — величина $D_n(\zeta)$, обчислена за реалізацєю вибірки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Якщо $\lambda_n \geq \lambda_\alpha$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а при $\lambda_n < \lambda_\alpha$ — приймається.

Критерій згоди χ^2 про вигляд розподілу. Цей критерій можна використовувати для будь-яких розподілів. Розіб'ємо множину всіх можливих значень спостережуваної випадкової величини ξ на r інтервалів $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$, що не перетинаються. Якщо спостерігається дискретна випадкова величина, то Δ_i, $i = \overline{1, r}$ — це різні значення цієї величини. Нехай v_i — число елементів вибірки, що потрапили в інтервал Δ_i, $p_i = P\{\xi \in \Delta_i / H_0\}$. Статистикою критерію χ^2 вибирається величина

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Критерій перевірки гіпотези H_0 будується таким чином. Обчисливши значення χ_n^2 і, вибравши рівень значущості α, за таблицею χ^2-розподілу (таблиця 5 додатка) визначимо величину $\chi_{r-1,\alpha}^2$ з умови

$P\left\{\chi^2(r-1) \ge \chi^2_{r-1,\alpha}\right\} = \alpha.$ Якщо $\chi^2_n \ge \chi^2_{r-1,\alpha}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, якщо ж $\chi^2_n < \chi^2_{r-1,\alpha}$, то гіпотеза приймається.

Критерій χ^2 можна використовувати для перевірки складних гіпотез. Нехай за вибіркою $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ потрібно перевірити гіпотезу $H_0 : F_\xi(x) \in M,$ де $M = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ — задане сімейство розподілу. Невідомий параметр θ оцінюється за вибіркою і в статистику χ^2_n підставляються ймовірності p_i, підраховані через $F\left(x, \hat{\theta}_n\right)$, де $\hat{\theta}_n$ — оцінка θ. Тоді граничним розподілом χ^2_n буде χ^2-розподіл з $(r-l-1)$ степенями свободи, де l — розмірність параметра θ. Далі критерії перевірки гіпотези будуються аналогічно наведеному критерію. Якщо $\chi^2_n \ge \chi^2_{r-l-1,\alpha}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, якщо ж $\chi^2_n < \chi^2_{r-l-1,\alpha}$, то гіпотеза приймається.

Нехай $\zeta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ і $\gamma = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ — дві вибірки з генеральних сукупностей з невідомими функціями розподілу $F_1(x)$ та $F_2(x)$ відповідно. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що це спостереження над однією і тією ж випадковою величиною, тобто $H_0 : F_1(x) \equiv F_2(x)$.

Критерій однорідності Смирнова—Колмогорова. Цей критерій використовується лише для неперервних розподілів. За міру розбіжності приймається величина $\lambda_{nm} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|F^*_{n1}(x) - F^*_{m2}(x)\right|,$ де $F^*_{n1}(x),\ F^*_{m2}(x)$ — емпіричні функції розподілу, побудовані за першою і другою вибірками. При $n \to \infty,\ m \to \infty$ розподіл випадкової величини λ_{nm} збігається до розподілу Колмогорова. Далі критерії будуються аналогічно критерію Колмогорова. За заданим рівнем значущості α знайдемо табличне число λ_α (таблиця 8 додатка). Якщо $\lambda_{nm} \ge \lambda_\alpha$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а при $\lambda_{nm} < \lambda_\alpha$ — приймається.

Критерій однорідності χ^2**.** Цей критерій можна використовувати для перевірки даних, які мають дискретну структуру. Окрім того, за допомогою цього критерію можна перевіряти однорідність будь-якого скінченного числа вибірок (за критерєм Смирнова—Колмогорова можна порівнювати лише дві вибірки). Нехай проведено k послідовних серій незалежних спостережень, які складаються з $n_1, n_2, ..., n_k$ спостережень. При цьому в кожному експерименті може виникнути один з l наслідків, ν_{ij} — число виникнень i-го наслідку в j-й серії. Позначимо $n_j = \sum_{i=1}^{l} \nu_{ij}$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ — загальна кількість спостережень. Потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що всі спостереження проводилися над однією і тією ж величиною. Статистикою критерію є величина

$$\chi_n^2 = n \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - \dfrac{\nu_{i0} n_j}{n} \right)^2}{\nu_{i0} n_j}; \quad \nu_{i0} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}.$$

У таблиці χ^2-розподілу (таблиця 5 додатка) за заданим α і числом степенів свободи $m = (l-1)(k-1)$ знаходимо число $\chi_{m,\alpha}^2 : P\left\{ \chi^2(m) \geq \chi_{m,\alpha}^2 \right\} = \alpha.$ Якщо $\chi_n^2 \geq \chi_{m,\alpha}^2$, то гіпотеза H_0 відхиляється, якщо ж $\chi_n^2 < \chi_{m,\alpha}^2$, то гіпотеза приймається.

Критерій незалежності χ^2**.** Критерій χ^2 дає змогу перевіряти також гіпотезу про незалежність двох випадкових величин ξ та η. Статистикою критерію є величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - m_{ij} \right)^2}{m_{ij}},$$

де ν_{ij} — число випадків, коли одночасно спостерігалися $\xi = x_i$ та $\eta = y_j$ (для неперервних випадкових величин i та j — номери відповідних інтервалів),

$$m_{ij} = \frac{\nu_{i0} \nu_{0j}}{n}, \ \nu_{0j} = \sum_{i=1}^{l} \nu_{ij}; \ \nu_{i0} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij};$$

l і k — число значень, яких набувають випадкові величини ξ та η; $n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}$ — об’єм вибірки. Вибір табличного значення $\chi_{(l-1)(k-1),\alpha}^2$ і прийняття рішення проводиться аналогічно описаній вище процедурі для критерію однорідності χ^2.

Приклади розв’язання задач

Задача 1. Нехай вибірку подано у вигляді таблиці частот:

Ін-л	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]
m_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Перевірити гіпотезу $H_0 : F_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x > 10, \\ \dfrac{x}{10}, & x \in \left[0,10\right], \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ (рівномірний розподіл на [0; 10]), α =0,05.

Розв’язок. Нехай x_i^* — середина *i*-го інтервалу. Емпіричну функцію розподілу $F_n^*\left(x\right)$ можна підрахувати за формулою:

$$F_n^*\left(x_i^*\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1} m_k + 0,5m_i\right).$$

Усі результати обчислень наведемо у таблиці (n=200):

Інтервал	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
m_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24
x_i^*	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
$F_n^*\left(x\right)$	0,087	0,215	0,292	0,372	0,457	0,547	0,622	0,69	0,805	0,94
$F\left(x\right)$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$\left\lvert F_n^*\left(x\right) - F\left(x\right) \right\rvert$	0,037	0,065	0,042	0,022	0,007	0,003	0,028	0,06	0,045	0,01

$\lambda_n = \sqrt{200} \cdot 0,065 = 0,919$; $\lambda_\alpha = 1,358$. Оскільки $\lambda_n < \lambda_\alpha$, то гіпотеза H_0 приймається.

Задача 2. За спостереженнями, наведеними в таблиці, за допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу, що випадкова величина має нормальний розподіл (α =0,05).

Інтервал	[-4; 0)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6]
m_i	20	40	30	10

Розв’язок. Обчислимо оцінки параметрів нормального розподілу за вибіркою:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(-40+40+90+50) = 1,4;$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{99}\left((-2-1,4)^2 20 + (1-1,4)^2 40 + (3-1,4)^2 30 + (5-1,4)^2 10\right) = 4,48;$$

$$\hat{S} = 2,1.$$

Тепер перейдемо до підрахунку ймовірностей p_i, $i = \overline{1,4}$.

$$p_1 = P\{-4 \le \xi < 0\} = P\left\{\frac{-4-1,4}{2,1} \le \frac{\xi - a}{\sigma} \le \frac{0-1,4}{2,1}\right\} =$$

$$= \Phi(2,57) - \Phi(0,66) = 0,4949 - 0,2455 = 0,2494.$$

$$p_2 = P\{0 \le \xi < 2\} = P\left\{\frac{0-1,4}{2,1} \le \frac{\xi - a}{\sigma} \le \frac{2-1,4}{2,1}\right\} =$$

$$= \Phi(0,286) + \Phi(0,66) = 0,1140 + 0,2455 = 0,3595.$$

$$p_3 = P\{2 \le \xi < 4\} = P\left\{\frac{2-1,4}{2,1} \le \frac{\xi - a}{\sigma} \le \frac{4-1,4}{2,1}\right\} =$$

$$= \Phi(1,23) - \Phi(0,286) = 0,3905 - 0,1140 = 0,2765.$$

$$p_4 = P\{4 \le \xi < 6\} = P\left\{\frac{4-1,4}{2,1} \le \frac{\xi - a}{\sigma} \le \frac{6-1,4}{2,1}\right\} =$$

$$= \Phi(2,19) - \Phi(1,23) = 0,4855 - 0,3905 = 0,0950.$$

(Див. таблицю 2 додатка). Далі результати наведемо у таблиці:

Інтервал	[-4; 0)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)
m_i	20	40	30	10
p_i	0,2494	0,3595	0,2765	0,095
np_i	24,94	35,95	27,65	9,5
$(m_i - np_i)^2$	24,40	16,40	5,52	0,25
$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$	0,98	0,46	0,2	0,02

$\chi_n^2 = 1,66.$ Кількість інтервалів $r = 4,$ а кількість невідомих параметрів $l = 2.$ Тоді число степенів свободи $k = r - l - 1 = 1,$ $\chi^2_{1;0,05} = 3,8.$ Отже, 1,66<3,8, гіпотеза приймається.

Задача 3. За допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу однорідності двох вибірок (α =0,05).

x_i	1	2	3	4
v_{i1}	40	26	24	10
v_{i2}	30	20	30	20
v_{i0}	70	46	54	30

Розв'язок. За умовою задачі $n_1 = 100,\ n_2 = 100,\ n = 200.$ Тоді

$$\chi_n^2 = \frac{(40-35)^2}{35} + \frac{(26-23)^2}{23} + \frac{(24-27)^2}{27} + \frac{(10-15)^2}{15} + \frac{(30-35)^2}{35} +$$

$$+\frac{(20-23)^2}{23} + \frac{(30-27)^2}{27} + \frac{(20-15)^2}{15} = 6,2; \quad \chi^2_{3;\,0,05} = 7,8.$$

Отже, оскільки 6,2<7,8, то гіпотеза однорідності приймається.

Задача 4. Проведено 300 спостережень одночасно над випадковими величинами ξ та η, які набувають значень 1, 2 і 1, 2, 3 відповідно. Кількості спостережених пар v_{ij} наведено в таблиці.

η / ξ	1	2	3	v_{i0}
1	32	68	50	150
2	40	70	40	150
v_{0j}	72	138	90	300

Перевірити за допомогою критерію χ^2, чи є незалежними випадкові величини ξ та η при рівні значущості 0,01.

Розв'язок. Знайдемо величини m_{ij}. Матриця $(m_{ij})\ i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3}$ буде такою:

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} 36 & 69 & 45 \\ 36 & 69 & 45 \end{pmatrix}, \text{ а матриця } \left((v_{ij} - m_{ij})^2 \right) = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 25 \\ 16 & 1 & 25 \end{pmatrix}..$$

Далі знайдемо матрицю, елементами якої будуть величини $\dfrac{(v_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$.

Дістанемо $\begin{pmatrix} 0,44 & 0,014 & 0,55 \\ 0,44 & 0,014 & 0,55 \end{pmatrix}$. Підсумувавши елементи матриці, знаходимо, що $\chi_n^2 = 2{,}008$. Число степенів свободи $m = 2$, $\chi_{2;001}^2 = 9{,}2$. Оскільки $\chi_n^2 < \chi_{2;0,01}^2$, то гіпотеза незалежності приймається.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

17.1. За спостереженнями, наведеними в таблиці, за допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу, що випадкова величина має пуассонівський розподіл:

а) α =0,05

x_i	0	1	2	3	4
m_i	110	65	21	3	1

б) α =0,05

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	112	168	130	68	32	5	1	1

в) α =0,05

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	229	211	93	35	7	1

г) α =0,01

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	8	17	16	10	6	2	0	1

д) α =0,1

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	376	100	81	35	7	1

17.2. За спостереженнями, наведеними в таблиці, за допомогою критерію χ^2 або критерію Колмогорова перевірити згоду з рівномірним розподілом. У першому рядку таблиці вказано ліву границю інтервалу (i — номер інтервалу $(i;i+1)$).

а) α =0,05

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m_i	45	41	34	54	39	43	41	33	37	41	47	39

б) α =0,1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

в) α =0,01

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	16	15	19	13	14	19	14	11	13	16

17.3. За спостереженнями, наведеними в таблиці, за допомогою критерію Колмогорова або критерію χ^2 перевірити згоду з нормальним розподілом:

а) α =0,05

Інтервал	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
m_i	15	75	100	50	10

б) α =0,01

Інтервал	[3,0; 3,6)	[3,6; 4,2)	[4,2; 4,8)	[4,8; 5,4)
m_i	2	8	35	43
Інтервал	[5,4; 6,0)	[6,0; 6,6)	[6,6; 7,2)	
m_i	22	15	5	

в) α =0,05

Інтервал	[-3; -1)	[-1; 0)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 5)
m_i	13	15	24	25	13	10

г) α =0,1

Інтервал	[-8; -2)	[-2; 4)	[4; 10)	[10; 16)
m_i	10	50	30	10

д) α =0,05

Інтервал	[-4; 0)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)
m_i	20	40	30	10

17.4. З продукції двох верстатів зробили дві вибірки по 38 виробів:

Розмір деталі	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
$m_i^{(1)}$	2	1	2	2	1	1	4	1	1	0	5	0	0	6	4	3	5
$m_i^{(2)}$	2	0	0	2	3	0	1	6	0	5	2	3	1	5	3	3	2

Перевірити, використовуючи критерій Смирнова—Колмогорова, гіпотезу про те, що ці вибірки належать одній і тій же генеральній сукупності при рівні значущості α =0,1.

17.5. У першому потоці з 300 абітурієнтів оцінку «2» отримало 33 чоловіка, «3» — 43, «4» — 80, «5» — 144, а в другому потоці інші 300 абітурієнтів мали такий результат: «2» — 39, «3» — 35, «4» — 72, «5» — 154. Чи можна вважати обидва потоки однорідними при рівні значущості 0,05?

17.6. За допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу однорідності двох вибірок, наведених у таблиці (α =0,05).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_i^{(1)}$	4	4	15	51	22	3	1	0
$m_i^{(2)}$	1	1	8	43	34	7	3	3

17.7. Вісім незалежних рівноточкових вимірів у першій лабораторії дали результати: 0,869; 0,874; 0,867; 0,875; 0,870; 0,869; 0,864; 0,872. Після десяти рівноточкових вимірів у другій лабораторії отримано: 0,865; 0,870; 0,866; 0,871; 0,870; 0,868; 0,871; 0,870; 0,869; 0,874.
Перевірити гіпотезу однорідності цих вибірок, використовуючи критерій Смирнова—Колмогорова при α =0,01.

17.8. Двовимірна випадкова величина (ξ, η) може набувати 4 значення: (0;0), (0;1), (1;0), (1;1). 180 незалежних спостережень дали такі результати: значення (0;0) спостерігалося 39 разів; (0;1) — 50, (1;0) — 53; (1;1) — 38. Чи можна вважати, що ξ і η — незалежні випадкові величини? (α = 0,1).

17.9. Проведено 200 спостережень одночасно над випадковими величинами ξ і η, які набувають значення 1, 2 та 1, 2, 3 відповідно. Результати спостережень наведено в таблиці:

η / ξ	1	2	3	v_{i0}
1	25	50	25	100
2	52	41	7	100
v_{0j}	77	91	32	200

Перевірити за допомогою критерію χ^2 чи є незалежними випадкові величини ξ та η при α =0,05.

17.10. Серед 300 чоловік, які вступали до університету 97 мали оцінку "5" у школі, 48 отримали "5" на вступних іспитах із того ж предмета, причому лише 18 чоловік мали “5” і в школі, і на вступних іспитах. З рівнем значущості α =0,1 перевірити гіпотезу незалежності оцінок “5” у школі й на вступних іспитах.

17.11. За допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу про однорідність двох вибірок, наведених у таблиці (α =0,05).

x_i	1	2	3	4
$m_i^{(1)}$	40	20	20	20
$m_i^{(2)}$	30	20	30	20

17.12. Зроблено 4000 підкидань монети. Решка випала 2040 разів, а герб — 1960. За допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу про те, що монета була “правильною”, тобто ймовірність випадання герба p = 1/2 , α = 0,1.

РОЗДІЛ 18. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО РІВНІСТЬ МАТЕМАТИЧНИХ СПОДІВАНЬ ТА ДИСПЕРСІЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНИХ СУКУПНОСТЕЙ

Теоретичні відомості

Нехай ξ та η — дві незалежні випадкові величини, кожна з яких має нормальний розподіл відповідно $N\left(a,\sigma_1^2\right)$ та $N\left(a,\sigma_2^2\right)$. У результаті спостережень цих випадкових величин отримано дві вибірки $\zeta=\left(\xi_1,\,\xi_2,\,...,\xi_{n_1}\right)$ та $\gamma=\left(\eta_1,\,\eta_2,\,...,\eta_{n_2}\right)$.

Гіпотеза про рівність математичних сподівань при відомих дисперсіях. Необхідно перевірити гіпотезу $H_0:\ a_1=a_2$ проти альтернативної гіпотези $H_1:\left|a_1-a_2\right|>0,\quad \sigma_1^2$ та σ_2^2 — відомі. Критична множина задається нерівністю:

$$R_{n1}=\left\{\left(X,Y\right):\frac{\left|\overline{x}-\overline{y}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq C_\alpha\right\},$$

$X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n_1}\right),\ Y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_{n_2}\right)$ — реалізація вибірок ζ та γ, $\overline{x}=\dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}x_i,\ \overline{y}=\dfrac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}y_i,\ \ \alpha$ — похибка першого роду, тобто ймовірність прийняти гіпотезу H_1, коли правильна H_0, $2\Phi\left(C_\alpha\right)=1-\alpha$ (див. таблицю 2 додатка).

Якщо $\left(X,Y\right)\in R_{n1}$, то приймається гіпотеза H_1, якщо ж $\left(X,Y\right)\notin R_{n1}$, то приймається H_0.

Гіпотеза про рівність математичних сподівань при невідомих дисперсіях. Нехай потрібно перевірити такі ж гіпотези, як і в попередньому випадку, але $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ і величина σ^2 невідома. Критична множина задається нерівністю:

$$R_{n1} = \left\{ (X,Y) : \frac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \geq t_{n_1+n_2-2;\alpha} \right\},$$

де $\hat{S}_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \overline{x})^2$, $\hat{S}_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \overline{y})^2$.

Число $t_{n_1+n_2-2;\alpha}$ знаходиться за таблицею Стьюдента (таблиця 6 додатка) при числі степенів свободи $n_1 + n_2 - 2$ і $P\left\{|t| < t_{n_1+n_2-2;\alpha}\right\} = 1 - \alpha$.

Гіпотеза про рівність дисперсій при невідомих математичних сподіваннях. Нехай тепер потрібно перевірити гіпотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проти альтернативної гіпотези $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. При справедливості гіпотези H_0 випадкова величина $F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$ має розподіл Фішера—Снедекора з $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ степенями свободи. Тоді критична множина задається нерівністю:

$$R_{n1} = \left\{ (X,Y) : \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \geq F_{(\alpha;k_1;k_2)} \right\},$$

де $\hat{S}_1^2 > \hat{S}_2^2$, чого завжди можна досягти, змінивши індекси, $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$. Величина $F_{(\alpha,k_1,k_2)}$ знаходиться за таблицею розподілу Фішера—Снедекора (таблиця 7 додатка).

Гіпотеза про рівність дисперсій при відомих математичних сподіваннях. Ця гіпотеза перевіряється аналогічно попередній, але в даному випадку $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, де $S_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_i}(\xi_i - a_1)^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(\eta_i - a_2)^2$. Якщо правильна гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то випадкова величина F має розподіл Фішера—Снедекора з (n_1, n_2) степенями свободи. Критична множина задається нерівністю:

$$R_{n1} = \left\{ (X,Y) : \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{(\alpha;n_1;n_2)} \right\}.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. За двома вибірками об'єму $n_1 = 25,\ n_2 = 50$ з генеральних сукупностей випадкових величин ξ та η, які мають нормальний розподіл $N\left(a, \sigma_1^2\right)$ та $N\left(a, \sigma_2^2\right)$, визначено $\bar{x} = 9,79,\ \bar{y} = 9,60.$ Перевірити гіпотезу $H_0 : a_1 = a_2$ при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3,\ \ \alpha = 0,01.$

Розв'язок. Маємо $$C = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{9,79 - 9,60}{0,3\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{50}}} = 2,59.$$

Порівняємо значення C з $C_\alpha = 2,57$ (таблиця 4 додатка). Оскільки 2,59>2,57, то гіпотезу про рівність математичних сподівань відхиляємо.

Задача 2. За двома вибірками об'єму $n_1 = 10,\ n_2 = 15$ з генеральних сукупностей випадкових величин ξ та η, які мають нормальний розподіл, підраховано вибіркові дисперсії $\hat{S}_1^2 = 9,6$ і $\hat{S}_2^2 = 5,7.$ Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій випадкових величин ξ та η, α =0,05.

Розв'язок. Обчислимо $F = \dfrac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \dfrac{9,6}{5,7} = 1,68,\ k_1 = 9,\ k_2 = 14.$ Порівняємо F з $F_{(0,05;9;14)} = 2,65.$ Маємо 1,68<2,65. Тоді гіпотеза про рівність дисперсій ξ та η приймається.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

18.1. У результаті спостережень над випадковими величинами ξ та η отримано такі вибірки:

а)

ξ : 45, 48, 53, 44, 59, 60, 41, 43, 57;

η : 51, 50,42, 44, 39, 40, 48, 38, 59, 55, 51.

б)

ξ : 2,50; 2,50; 2,60; 2,75; 2,80; 2,80; 2,95;

η : 2,50; 2,80; 2,85; 2,90; 2,90; 2,95; 3,40.

Чи можна вважати, що випадкові величини мають однакові математичні сподівання? Похибка першого роду дорівнює 0,05. Припускається, що випадкові величини ξ та η мають нормальний розподіл з рівними дисперсіями.

18.2. З нормальної генеральної сукупності з $\sigma^2 = 25$ здобуто дві вибірки об'ємом $n_1 = n_2 = 9$. Середнє першої вибірки $\overline{x} = 2$, а другої $\overline{y} = 3$. Чи можна пояснити цю розбіжність випадковими причинами при похибці першого роду 0,05?

18.3. Одним і тим же приладом було зроблено дві серії вимірів:

1) 2,5 3,2 3,5 3,8 3,5;

2) 2,0 2,7 2,5 2,9 2,3 2,6.

а) Припускаючи, що виміри мають нормальний розподіл з однаковими дисперсіями, перевірити гіпотезу про рівність математичних сподівань при α =0,05;

б) Перевірити гіпотезу про те, що дисперсії однакові для цих вимірів, α = 0,05.

в) Перевірити гіпотезу про те, що дисперсії однакові для цих вимірів, якщо $a_1 = 3$, $a_2 = 2,5$, $\alpha = 0,05$.

18.4. $\overline{x} = 0,103$, $\overline{y} = 0,368$ — вибіркові середні у двох вибірках об'єму $n_1 = n_2 = 50$ з нормальних сукупностей $N(a_1, 1)$ і $N(a_2, 1)$. Перевірити гіпотезу $H_0 : a_1 = a_2$ проти альтернативної $H_1 : a_1 < a_2$. Похибка першого роду 0,01.

18.5. За двома вибірками з нормальних сукупностей об'єму $n_1 = 11$, $n_2 = 15$ підраховано $\overline{S}_1^2 = 0,76$ і $\overline{S}_2^2 = 0,38$. При α =0,05 перевірити гіпотезу про рівність дисперсій цих двох нормальних сукупностей. $\overline{S}_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \overline{x})^2$, $\overline{S}_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \overline{y})^2$.

18.6. У результаті спостережень випадкових величин ξ та η отримано вибірки:

x_i	1	2	2,5	3
m_i	2	1	3	4
y_i	-1	2	2,5	3
m_i	3	2	1	2

Чи можна вважати, що випадкові величини мають однакові математичні сподівання? Вважати, що ξ та η — незалежні випадкові величини і мають нормальний розподіл з рівними дисперсіями, $\alpha = 0,05$.

РОЗДІЛ 19. ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Теоретичні відомості

Нехай існує теоретична залежність між величинами x та y у вигляді: $y=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — деяка функція. Проте в експерименті внаслідок можливих похибок вимірювань або невизначеностей у самому об'єкті в точці x_i спостерігається величина

$$y_i=\varphi(x_i)+\delta_i,$$

де δ_i — деякі випадкові величини.

Треба за спостереженнями пар (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$ зробити статистичні висновки щодо функції $\varphi(x)$.

Регресія. Нехай ξ та η — дві випадкові величини (залежні у загальному випадку), і ми хочемо знайти найкраще в деякому розумінні наближення величини η деякою функцією $g(\xi)$ від величини ξ.

Під найкращим наближенням будемо розуміти наближення в середньому квадратичному.

Величина $g(\xi)$ називається ***найліпшим наближенням величини*** η ***в середньому квадратичному***, якщо

$$M\left(\eta-g(\xi)\right)^2=\min_{\psi(\cdot)} M\left(\eta-\psi(\xi)\right)^2.$$

Функція $g(\xi)$ є ***середньоквадратичною регресією*** величини η на величину ξ. Часто функцію $g(x)=M(\eta/\xi=x)$ називають ***кореляційною залежністю випадкових величин*** ξ та η або ***функцією регресії*** випадкової величини η відносно ξ. Звичайно регресію шукають у якомусь конкретному класі функцій і мінімум береться за функціями $\psi(\cdot)$ з цього класу.

Лінійна регресія. Розглянемо регресію в класі лінійних функцій, тобто припустимо, що

$$g(\xi)=\alpha\xi+\beta,$$

де α і β — невідомі параметри.

Введемо такі позначення:

$$m_1 = M\xi,\ m_2 = M\eta,\ \sigma_1^2 = D\xi,\ \sigma_2^2 = D\eta,$$

$$\mu = M\left(\xi - m_1\right)\left(\eta - m_2\right),\ \rho = \frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2},$$

тобто ρ — коефіцієнт кореляції.

Лінійна середньоквадратична регресія $g\left(\xi\right)$ величини η на величину ξ має вигляд:

$$g\left(\xi\right) = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\xi - m_1\right).$$

Повернемося тепер до сформульованої на початку задачі про найліпше визначення функції $\varphi\left(x\right)$. Будемо вважати, що функція $\varphi\left(x\right)$ належить деякій параметричній сукупності функцій $\varphi\left(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right)$, і маємо спостереження $\left(x_i, y_i\right)$, $i = \overline{1, n}$.

Оцінкою невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ за методом найменших квадратів буде вектор $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_k$, при якому досягається мінімум функції:

$$\Phi\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \varphi\left(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right)\right)^2,$$

а функція $\varphi\left(x, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_k\right)$ буде найліпшим середньоквадратичним наближенням, що відновлює залежність між x та y за результатами спостережень.

Якщо функція $\varphi\left(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right)$ диференційована за аргументами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, для знаходження величин $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_k$ одержимо систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi\left(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right)}{\partial\alpha_j}\left(y_i - \varphi\left(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right)\right) = 0,\ j = \overline{1, k}.$$

Розглянемо важливий випадок, коли функція $\varphi\left(x\right)$ має вигляд

$$\varphi\left(x\right) = kx + b,$$

де k і b — невідомі параметри. У цьому випадку оцінками параметрів лінійної регресії будуть числа $\hat{k}$ та $\hat{b}$, при яких функція $\Phi\left(k, b\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - kx_i - b\right)^2$ досягає мінімуму.

Тоді

$$\hat{k}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)\left(x_i-\overline{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2},\quad \hat{b}=\overline{y}-\hat{k}\overline{x},$$

де $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$

У випадку поліноміальної регресії

$$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_m x^m,$$

оцінки невідомих параметрів $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\ldots,\hat{\alpha}_m$ знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\sum_{j=0}^{m} S_{k+j}\alpha_j = Z_k,\quad k=\overline{0,m},$

де $S_l=\sum_{i=1}^{n} x_i^l,\ Z_k=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k,\ k=\overline{0,m},\ l=\overline{0,\,2m}.$

Якщо значення x_i відомі без похибок, а значення y_i незалежні та рівноточні, то оцінка дисперсії (похибка вимірювань) величини y_i визначається за формулою:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\Phi_{\min}}{n-m-1},\ \text{ де }\ \Phi_{\min}=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=0}^{m}\hat{\alpha}_j x_j\right)^2.$$

Оцінки $\hat{\sigma}_k^2$ дисперсій коефіцієнтів α_k визначаються за формулами:

$$\hat{\sigma}_{\alpha_k}^2=\frac{\Delta_{kk}\hat{\sigma}^2}{\Delta},$$

де Δ — визначник системи, а Δ_{kk} — алгебраїчне доповнення до елемента, який стоїть на діагоналі й має індекс k у визначнику Δ. У випадку лінійної регресії

$$\hat{\sigma}_{\alpha_0}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\cdot\frac{\Phi_{\min}}{n-2},$$

$$\hat{\sigma}_{\alpha_1}^2=\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\cdot\frac{\Phi_{\min}}{n-2}.$$

Якщо величини y_i мають нормальний розподіл, то для коефіцієнтів α_k справджуються такі надійні інтервали:

$$\hat{\alpha}_k - t_{n-m-1;\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha_k} < \alpha_k < \hat{\alpha}_k + t_{n-m-1;\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha_k},$$

де $\hat{\alpha}_k$ — оцінки, отримані методом найменших квадратів, а число $t_{n-m-1;\alpha}$ знаходиться за таблицею розподілу Стьюдента (таблиця 6 додатка) при числі степенів свободи $k = n - m - 1$ і $P\left\{|t| < t_{n-m-1;\alpha}\right\} = 1 - \alpha.$

Вибірковий коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

У деяких випадках функція $\varphi(x)$, яка не є многочленом, може бути зведена до нього заміною змінних. Приклади такої заміни наведено в таблиці.

№	Початкова функція	До якого вигляду приводиться	Заміна змінної
1.	$y = Ae^{kx}$	$Z = \alpha_0 + \alpha_1 x$	$Z = \ln y,\ \alpha_0 = \ln A,$ $\alpha_1 = k$
2.	$y = Bx^{\beta}$	$Z = \alpha_0 + \alpha_1 u$	$Z = \ln y,\ u = \ln x,$ $\alpha_0 = \ln B,\ \alpha_1 = \beta$
3.	$y = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x}$	$y = \alpha_0 + \alpha_1 u$	$u = \frac{1}{x}$
4.	$y = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x^{\beta}}$	$y = \alpha_0 + \alpha_1 u$	$u = \frac{1}{x^{\beta}}$

Коефіцієнт кореляції рангів. У деяких випадках натрапляємо на ознаки, які не піддаються кількісним оцінкам. Тоді кожній оцінці можна поставити у відповідність порядковий номер, який назвемо рангом. Нехай n осіб за якістю A мають ранги $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а за якістю B — $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, де всі X та Y є перестановками n перших чисел натурального ряду. $d_k = X_k - Y_k$ — різниця рангів.

Тоді ***коефіцієнт кореляції рангів Спірмена***, або ***коефіцієнт щільності зв’язку*** між A та B, визначається за формулою:

$$\hat{\rho}=1-\frac{6\sum_{k=1}^{n}d_k^2}{n^3-n}.$$

Якщо не можна визначити рангову відмінність декількох осіб, то їм присвоюють однакові середні ранги. При наявності пов'язаних рангів коефіцієнт кореляції рангів Спірмена обчислюється за формулою:

$$\hat{\rho}=1-\frac{\sum_{k=1}^{n}d_k^2}{\frac{1}{6}\left(n^3-n\right)-\left(T_x+T_y\right)},$$

де $T_x=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{l_x}\left(t_{xi}^3-t_{xi}\right)$, $T_y=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{l_y}\left(t_{yj}^3-t_{yj}\right)$; t_{xi}, t_{yj} — число пов'язаних рангів у групах для *X* та *Y;* l_x, l_y - число таких груп.

Значущість $\hat{\rho}$ перевіряють за допомогою статистики $t=\frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}$, яка має розподіл Ст'юдента з $k=n-2$ ступенями свободи. Тому $\hat{\rho}$ є значущим на рівні α, якщо $|t|>t_{1-\alpha,n-2}$, де $t_{1-\alpha,n-2}$ - табличне значення критерію Ст'юдента.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Припускаючи, що кореляційна залежність величин η та ξ лінійна $\left(\varphi(x)=kx+b\right)$, за результатами спостережень, наведених у таблиці, знайти коефіцієнти *k, b*, похибку вимірювань, надійні інтервали для коефіцієнтів та вибірковий коефіцієнт кореляції, $1-\alpha=0,95$.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	4	6	8	7	10

Розв'язок. Усі результати обчислень занесемо в таблицю (n =5):

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	$\hat{y}_i$	$\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2$
	2	4	4	8	4,4	0,16
	4	6	16	24	5,7	0,09
	6	8	36	48	7	1
	8	7	64	56	8,3	1,69
	10	10	100	100	9,6	0,16
$\sum$	30	35	220	236		3,1

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 5\cdot 220 - 30^2 = 200,$$

$$\overline{x} = 6,\ \ \overline{y} = 7,\ \ \hat{k} = \frac{236 - 5\cdot 42}{40} = 0,65,$$

$$\hat{b} = 7 - 0,65\cdot 6 = 3,1,\quad \hat{y}_i = 0,65x + 3,1.\quad \Phi_{\min} = 3,1.$$

Тоді $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{3,1}{5-2} = 1,03,\qquad \hat{\sigma}_b^2 = \dfrac{220}{200}\cdot 1,03 = 1,133,\qquad \hat{\sigma}_b = 1,064,$

$\hat{\sigma}_k^2 = \dfrac{5}{200}\cdot 1,03 = 0,02575,\quad \hat{\sigma}_k = 0,16.$

З таблиці розподілу Стьюдента (таблиця 6 додатка) знаходимо $t_{3;\,0,05} = 3,18.$ Тоді з імовірністю 0,95

$3,1 - 3,18\cdot 1,064 < b < 3,1 + 3,18\cdot 1,064,$ тобто $-0,283 < b < 6,483$ і

$0,65 - 3,18\cdot 0,16 < k < 0,65 + 3,18\cdot 0,16,$ тобто $0,141 < k < 1,159.$

Для визначення вибіркового коефіцієнта кореляції підрахуємо суми:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{\Delta}{n} = 40;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = \left(4-7\right)^2 + \left(6-7\right)^2 + \left(8-7\right)^2 + \left(10-7\right)^2 = 20;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy} = 236 - 5\cdot 42 = 26.$$

Тоді $\hat{\rho} = \dfrac{26}{\sqrt{20\cdot 40}} = \dfrac{13}{10\sqrt{2}} = 0,919.$

Задача 2. Припускаючи, що кореляційна залежність величини η та ξ експоненціальна, тобто $\varphi\left(x\right) = Ae^{-kx}$, за результатами спостережень, наведених у таблиці, знайти коефіцієнти *A* та *k*.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

Розв'язок. Усі результати обчислень занесемо в таблицю ($z_i = \ln y_i$):

x_i	y_i	z_i	x_i^2	$x_i z_i$	$\hat{z}_i$
0	100	4,6	0	0	4,59
1	75	4,3	1	4,3	4,28

x_i	y_i	z_i	x_i^2	$x_i z_i$	$\hat{z}_i$
2	55	4	4	8	3,97
3	40	3,7	9	11,1	3,66
4	30	3,4	16	13,6	3,35
5	20	3	25	15	3,04
6	15	2,7	36	16,2	2,73
7	10	2,3	49	16,1	2,42
8	10	2,3	64	18,4	2,11
9	5	1,6	81	14,4	1,80
10	5	1,6	100	16	1,49
$\sum$ 55		33,5	385	133,1	

$$n=11,\quad \bar{x}=5,\quad \bar{z}=3{,}04,\quad \hat{\alpha}_1=-\hat{k}=\frac{133{,}1-11\cdot 5\cdot 3{,}04}{385-11\cdot 25}=-0{,}31,$$

$\hat{\alpha}_0=\ln\hat{A}=3{,}04+0{,}31\cdot 5=4{,}59.$ Отже, $\hat{k}=0{,}31$ і $\hat{A}=e^{\hat{\alpha}_0}=98{,}5.$

Тоді $\varphi(x)=98{,}5\cdot e^{-0{,}31x}$.

Задача 3. На змаганнях з фігурного катання судді розподілили місця між учасниками змагань таким чином:

Учасники	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
1 суддя	1,5	1,5	3	4	6	6	6	8	9,5	9,5
2 суддя	1	2	4	4	4	6	7	8	9	10

Встановити, наскільки об'єктивні оцінки суддів, тобто наскільки тісний зв'язок між оцінками.

Розв'язок. Перший суддя поділив перше місце між учасниками *A* та *B*. Їхній об'єднаний ранг $\frac{1+2}{2}=1{,}5.$ Учасники *E*, *F*, *G* поділили 5, 6, 7 місця. Їхній об'єднаний ранг дорівнює 6 і т.д. Обчислимо величини T_x, T_y. При обчисленні T_x маємо: *A* та *B* — два об'єднаних ранги, *E*, *F*, *G* — три об'єднаних ранги й *I*, *J* — два об'єднаних ранги. Таким чином:

$$T_x=\frac{\left(2^3-2\right)+\left(3^3-3\right)+\left(2^3-2\right)}{12}=3,\quad T_y=\frac{\left(3^3-3\right)}{12}=2;$$

$$\hat{\rho}=1-\frac{7}{\frac{1}{6}\left(10^3-10\right)-\left(3+2\right)}=0{,}956.$$

Для перевірки значущості $\hat{\rho}$ обчислимо $t = \dfrac{0,956\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,956^2}} = 8,83;\ \ t_{0,95;8} = 2,31;\ \ t > t_{0,95;8}$.

Звідси можна зробити висновок, що оцінки, поставлені суддями учасникам змагань, об’єктивні.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

19.1. Припускаючи, що кореляційна залежність випадкових величин η та ξ лінійна $\left(\varphi(x) = kx + b\right)$, за результатами спостережень, наведених у таблиці, знайти коефіцієнти *k* та *b*, похибку вимірювань, надійні інтервали для коефіцієнтів та вибірковий коефіцієнт кореляції, $1-\alpha = 0,95$:

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,5	7	8	7,5	9

б)

x_i	2	4	6	8	9
y_i	10	8	7	5	2

в)

x_i	–1	0	1	2	3	4
y_i	2	3	4	6	5	7

19.2. Припускаючи, що кореляційна залежність випадкових величин η та ξ має вигляд $\left(\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2\right)$, за результатами спостережень, наведених у таблиці, знайти коефіцієнти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, похибку вимірювань, надійні інтервали для коефіцієнтів та вибірковий коефіцієнт кореляції, $1-\alpha = 0,99$:

а)

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
y_i	–0,7	0	0,5	0,7	0,9	0,8	0,5

б)

x_i	0	2	4	6	8	10
y_i	5	–1	0,5	1,5	4,5	8,5

19.3. Припускаючи, що кореляційна залежність випадкових величин η та ξ має вигляд $\left(\varphi(x) = \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{x}\right)$, за результатами спостережень, наведених у таблиці, знайти коефіцієнти α_0 та α_1, похибку вимірювань, надійні інтервали для коефіцієнтів та вибірковий коефіцієнт кореляції, $1-\alpha = 0,95$:

а)

x_i	0,25	0,5	1	2
y_i	6	4	3	3

б)

x_i	1	2	5	10
y_i	10	5	2	1

19.4. Припускаючи, що кореляційна залежність випадкових величин η (статутний капітал групи комерційних банків, млн.$) та ξ (кількість юридичних осіб засновників) лінійна $(\eta = \alpha_0 + \alpha_1 \xi)$, за результатами спостережень, наведеними у таблиці, знайти коефіцієнти α_0, α_1, надійні інтервали для коефіцієнтів та вибірковий коефіцієнт кореляції, $1-\alpha = 0,95$:

ξ	2	4	6	8
η	5	7	8	9

19.5. 15 студентів склали іспити з бухгалтерського обліку та математичного аналізу. Ранжування їх за результатами іспитів наведено нижче. Чи є який-небудь зв’язок між цими двома результатами? (Підрахувати коефіцієнт кореляції рангів Спірмена).

Студент	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Бух. облік	10	5	12	1	6	2	7	11	15	3	9	14	13	4	8
Матем. аналіз	13	4	10	1	11	2	8	9	14	5	7	12	15	3	6

19.6. Побудувати лінійну регресію за спостереженнями $\left(y=\alpha_0+\alpha_1 x\right)$:

x_i	2	3	4	5
y_i	5	7	10	12

Знайти надійні інтервали для α_0, α_1, $(1-\alpha=0{,}95)$ та вибірковий коефіцієнт кореляції.

19.7. На змаганнях арбітри так розподілили місця між учасниками змагань:

Учасники	A	B	C	D	E	*F*	G	H	*I*	*J*
1 суддя	2	2	2	4,5	6	4,5	7	8,5	10	8,5
2 суддя	1	3	2	7	5,5	4	5,5	8	9,5	9,5

З'ясувати, наскільки тісний зв'язок між оцінками. (Підрахувати коефіцієнт кореляції рангів Спірмена).

19.8. При випробуванні здатності розрізняти відтінки 15 кольорових дисків, дійсний порядок розташування яких: 1, 2, 3,…, 15, пацієнт розташував диски у такому порядку: 2, 4, 1, 3, 7, 6, 8, 10, 9, 5, 15, 11, 12, 14, 13. Знайти коефіцієнт кореляції між дійсними і спостереженими рангами.

РОЗДІЛ 20. ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Теоретичні відомості

Дисперсійний аналіз — це статистичний метод аналізу результатів спостережень, які залежать від різних, одночасно діючих факторів, вибір найбільш важливих із них і оцінка їхнього впливу.

Однофакторний дисперсійний аналіз. В основі однофакторного аналізу лежить теоретично-ймовірнісна схема:

$x_{ij} = a + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, де

x_{ij} — спостереження величини, яку досліджують;

n_i — число спостережень при i-му значенні фактору;

a — загальне середнє;

α_i — ефект фактору;

ε_{ij} — похибка спостережень, незалежні випадкові величини, що мають нормальний розподіл $N\left(0, \sigma^2\right)$, тобто $M\varepsilon_{ij} = 0$, $D\varepsilon_{ij} = \sigma^2$.

Потрібно перевірити гіпотезу:

$H_0 : \alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, тобто фактор не впливає на результати спостережень.

Нехай $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ — загальне середнє,

$\overline{x}_i = \dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ — групове середнє,

$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2$ — сума квадратів відхилень спостережень від загального середнього,

$Q = Q_1 + Q_2$, де $Q_1 = \sum_{i=1}^{n_i} n_i\left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2$ — сума квадратів відхилень між групами,

$Q_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2$ — сума квадратів відхилень всередині групи.

$S_1^2 = \dfrac{Q_1}{m-1}$, $S_2^2 = \dfrac{Q_2}{n-m}$, $S^2 = \dfrac{Q}{n-1}$ — незміщена оцінка σ^2.

Статистика критерію: $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$.

Для перевірки гіпотези H_0 маємо критерій: якщо $F \ge F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а при $F < F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$ приймається. Величина $F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$ знаходиться за таблицею розподілу Фішера—Снедекора (таблиця 7 додатка), $k_1 = m-1,\ k_2 = n-m.$

Двофакторний дисперсійний аналіз

$x_{ijs} = a + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijs},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k},\ s = \overline{1,n_{ij}},$

m — число рівнів фактора A;

k — число рівнів фактора B;

α_i — ефект фактора A;

β_j — ефект фактора B;

γ_{ij} — ефект взаємодії факторів.

Якщо всі $n_{ij} = 1$, тобто при кожному рівні фактора A і фактора B маємо лише одне спостереження, то

$x_{ij} = a + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}.$

Розглянемо цю модель.

$$\overline{x}_{i*} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij},\ \overline{x}_{*j} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij},\ \overline{x} = \frac{1}{km}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}.$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2 = Q_1 + Q_2 + Q_3,\ \text{де}$$

$$Q_1 = k\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{x}_{i*} - \overline{x}\right)^2$$ — сума квадратів відхилень за фактором A,

$$Q_2 = m\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{x}_{*j} - \overline{x}\right)^2$$ — сума квадратів відхилень за фактором B,

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i*} - \overline{x}_{*j} + \overline{x}\right)^2$$ — залишкова сума квадратів.

$H_0^A : \alpha_i = 0,\ i = \overline{1,m},$

$H_0^B : \beta_i = 0,\ i = \overline{1,k}.$

$S_1^2 = \dfrac{Q_1}{m-1}$, $S_2^2 = \dfrac{Q_2}{k-1}$, $S_3^2 = \dfrac{Q_3}{(k-1)(m-1)}$, $S^2 = \dfrac{Q}{km-1}$ — незміщена оцінка σ^2.

Критерій перевірки гіпотези H_0^A: якщо $F_A = \dfrac{S_1^2}{S_3^2} \geq F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$, то гіпотеза H_0^A відхиляється; якщо $F_A < F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$ — приймається, за умови, що $k_1 = m-1,\ k_2 = (k-1)(m-1)$.

Аналогічно, H_0^B відхиляється, якщо $F_B = \dfrac{S_2^2}{S_3^2} \geq F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$, приймається, якщо $F_B < F_{(\alpha,\, k_1,\, k_2)}$, за умови, що $k_1 = k-1,\ k_2 = (k-1)(m-1)$.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Перевірити гіпотези значущості факторів для двофакторного комплексу з одним спостереженням, результати якого подано в таблиці. Рівень значущості α =0,95.

	B_1	B_2	B_3	$\bar{x}_{i*}$
A_1	1	2	3	2
A_2	5	6	10	7
$\bar{x}_{*j}$	3	4	6,5	4,5

Розв'язок. $\bar{x}_{1*} = \dfrac{1+2+3}{3} = 2,$ загальне середнє $\bar{x} = 4,5.$ Тоді

$$Q_1 = 3\left((2-4,5)^2 + (7-4,5)^2\right) = 3\left((-2,5)^2 + 2,5^2\right) = 37,5; ,$$

$$Q_2 = 2\left((3-4,5)^2 + (4-4,5)^2 + (6,5-4,5)^2\right) = 13;$$

$$Q_3 = (1-2-3+4,5)^2 + (2-2-4+4,5)^2 + (3-2-6,5+4,5)^2 + (5-7-3+4,5)^2 +$$
$$+(6-7-4+4,5)^2 + (10-7-6,5+4,5)^2 = 3;$$

$$Q = 37,5 + 13,0, +3,0 = 53,5.$$

$$S_1^2 = \frac{37,5}{1} = 37,5; \quad S_2^2 = \frac{13}{2} = 6,5; \quad S_3^2 = \frac{3}{1 \cdot 2} = 1,5.$$

Отримані дані можна записати у вигляді таблиці:

Компонента дисперсій	Сума квадратів	Число степенів свободи	Оцінка дисперсії
Між середніми в рядках (фактор *A*)	37,5	1	37,5
Між середніми в стовпчиках (фактор *B*)	13,0	2	6,5
Залишкова	3,0	2	1,5
Повна	53,5	5	10,7

Обчислюємо F_A та F_B:

$$F_A = \frac{S_1^2}{S_3^2} = \frac{37,5}{1,5} = 25,$$

$$F_B = \frac{S_2^2}{S_3^2} = \frac{6,5}{1,5} = 4,3.$$

Для рівня значущості α =0,05 та $k_2 = 2$, $k_1 = 1$ степенів свободи за таблицею Фішера—Снедекора (таблиця 7 додатка) знаходимо:

$$F_{\alpha(A)} = 18,51, \; F_A = 25,$$

$$F_{\alpha(B)} = 19,0, \; F_B = 4,3.$$

Порівнюючи табличні значення з обчисленими, маємо:

$$F_A > F_{\alpha(A)}, \; F_B < F_{\alpha(B)}.$$

Отримані результати дають змогу зробити висновок: нульова гіпотеза про рівність середніх у рядках не підтверджується, тобто вплив фактора *A* на досліджувану ознаку значний; нульова гіпотеза про рівність середніх у стовпчиках не заперечується, тобто вплив фактора *B* на досліджувану ознаку незначний.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

20.1. З чотирьох партій сировини для текстильної промисловості відібрано по 5 зразків і проведено випробування на визначення величини розривного навантаження. Результати випробувань наведено в таблиці:

Номер партії	Розривні навантаження				
1	200	140	170	145	165
2	190	150	210	150	150
3	230	190	200	190	200
4	150	170	150	170	180

З'ясувати, чи суттєвий вплив різних партій сировини (фактор *A*) на величину розривного навантаження, $\alpha = 0{,}05$.

20.2. У таблиці наведено дані про кількість угод, заключених фірмою, завдяки різноманітним рекламним агенціям та всіляким засобам реклами.

Фактор *A* Рекламна агенція	Фактор В		
	Газета	Радіо	Телебачення
1	12	20	16
2	22	24	12

За допомогою двофакторного дисперсійного аналізу з'ясувати, чи суттєвий вплив факторів *A* (рекламна агенція) та *B* (засоби реклами) на кількість укладених угод, $\alpha = 0{,}05$.

20.3. За допомогою двофакторного дисперсійного аналізу з'ясувати, чи суттєвий вплив факторів *A* та *B* на результати спостережень, $\alpha = 0{,}05$.

Фактор *A*	Фактор *B*		
	1	2	3
1	1	2	3
2	5	6	10

20.4. У таблиці наведено квартальні значення експорту товарів з України за останні 4 роки (млн. дол. США). Зробити висновок, чи є суттєвим номер кварталу, $\alpha = 0{,}05$.

Квартал	Експорт товарів			
1 квартал	2751	3544	3527	3443
2 квартал	3505	4208	3858	3750
3 квартал	3859	3905	3945	3174
4 квартал	4129	3890	4088	3332

20.5. У таблиці подано ціну квартир у різних районах міста (в у. о.). Зробити висновок про суттєвість впливу обраного району на ціну квартири, α =0,05.

Район	Ціна квартир					
Дарницький	5000	17200	16800	6900	29900	18000
Печерський	8200	6200	45000	32000	25000	13000
Старокиївський	35000	37000	42000	12000	19000	21000
Харківський	6500	6400	11200	13100	18000	4600

20.6. У таблиці подано ціну (в у. о.) квартир залежно від району міста. Зробити висновок про вплив престижності району на ціну квартир, α =0,05.

Район	1-кімнатна	2-кімнатна	3-кімнатна	4-кімнатна	5-кімнатна
Дарницький	5000	12500	24800	38000	55000
Печерський	8200	14200	31000	48000	65000
Старокиївський	9200	17000	29000	51000	80000
Харківський	6500	15400	22200	34500	50000

20.7. На 4 заводах, які належать одному холдингу, вивчали вплив величини заробітної плати на продуктивність праці, тобто кількість оброблених за робочу зміну деталей.

Завод	Заробітна плата			
	6700 гр.	7400 гр.	8600 гр.	10000 гр.
1	12	14	18	19
2	13	14	23	23
3	11	13	17	18
4	15	15	17	20

Зробіть висновок щодо доцільності підвищення заробітної плати на заводах холдинга, α =0,05.

РОЗДІЛ 21. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІЗУ ЧАСОВИХ РЯДІВ. ВИДІЛЕННЯ ТРЕНДУ, ЗГЛАДЖУВАННЯ, ПРОГНОЗ

Теоретичні відомості

Адитивна модель часового ряду (x_t):

$x_t = y_t + s_t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$, де

y_t — детермінована складова (тренд),

s_t — сезонні коливання,

ε_t — нерегульований або залишковий компонент (випадкова складова), $M\varepsilon_t = 0$.

***Мультиплікативна модель*:** $x_t = y_t \cdot s_t \cdot \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$.

***Виділення тренду*.** Нехай $x_t = y_t + \varepsilon_t$, ε_t — незалежні випадкові величини з $M\varepsilon_t = 0$, $D\varepsilon_t = \sigma^2$.

Для виділення тренду застосовується метод найменших квадратів. Наприклад, якщо $y_t = a_0 + a_1 t$, то a_0 і a_1 знаходять із співвідношення

$$Q = \sum_{t=1}^{T} \left(x_t - a_0 - a_1 t \right)^2 \to \min,$$

тоді

$$\hat{a}_1 = 12 \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} t \cdot x_t - \frac{T+1}{2} \sum_{t=1}^{T} x_t \right)}{T\left(T^2 - 1\right)},$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{T} - \hat{a}_1 \frac{T+1}{2}.$$

Аналогічно використовується метод найменших квадратів у випадку поліноміального тренду:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

***Зважене згладжування*.** $\hat{y}_t = \frac{1}{l} \sum_{i=-k}^{k} x_{t+i}$, $l = 2k + 1$, або

$$\hat{y}_t = \sum_{i=-k}^{k} w_i x_{t+i}, \text{ де } \sum_{i=-k}^{k} w_i = 1, \ 0 \le w_i \le 1, \quad k \text{ — наперед задане число.}$$

Експоненціальне згладжування. Цей метод дає змогу аналізувати часовий ряд і отримувати прогнози без попереднього задання форми тренду. Вимагається лише, щоб у множині дослідження тренд змінювався досить поступово.

$\hat{y}_1 = x_1, \ \hat{y}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}$, де $0 < \alpha \le 1$, або

$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(x_t - \hat{y}_t)$.

Прогнози: $\hat{x}_{T+k} = \hat{y}_T$, $k = 1, 2, \ldots$.

Метод згладжування Холта—Вінтерса. Нехай E_t — трендова компонента, а Y_t — приріст. Тоді

$$E_1 = x_1, \quad E_2 = x_2,$$

$$Y_2 = x_2 - x_1,$$

$$E_k = wx_k + (1-w)(E_{k-1} + Y_{k-1}),$$

$$Y_k = v(E_k - E_{k-1}) + (1-v)Y_{k-1}, \ k \ge 3.$$

Прогноз часового ряду: $\hat{x}_{T+s} = E_T + sY_T$.

Нехай тепер x_t — стаціонарний процес.

Модель авторегресії AR(p): $x_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon_t$. Коефіцієнти $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ можна оцінити методом найменших квадратів. Наприклад, для $AR(1)$ $x_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ маємо:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{t=2}^{T} x_t \sum_{t=2}^{T} x_{t-1}^2 - \sum_{t=2}^{T} x_t \cdot x_{t-1} \cdot \sum_{t=2}^{T} x_{t-1}}{(T-1)\sum_{t=2}^{T} x_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=2}^{T} x_{t-1}\right)^2},$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(T-1)\sum_{t=2}^{T} x_t \cdot x_{t-1} - \sum_{t=2}^{T} x_t \sum_{t=2}^{T} x_{t-1}}{(T-1)\sum_{t=2}^{T} x_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=2}^{T} x_{t-1}\right)^2}$$

і прогноз $\hat{x}_{T+k} = \hat{\beta}_1^k x_T + \hat{\beta}_0 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\beta}_1^i$.

Модель рухомого середнього MA(q):

$x_t = c + \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \alpha_q \varepsilon_{t-q}$.

***Модель ARMA*(*p, q*):**

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \alpha_q \varepsilon_{t-q}.$$

Міри точності прогнозів. Якщо x_t — часовий ряд, а $\hat{x}_t$ — прогнозне значення, то

$MSE = \frac{1}{n}\sum_t \left(x_t - \hat{x}_t\right)^2$ — середньоквадратична похибка прогнозу за n кроків;

$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_t \left(x_t - \hat{x}_t\right)^2}$;

$MAD = \frac{1}{n}\sum_t \left|x_t - \hat{x}_t\right|$ — середня абсолютна похибка;

$RMSPE = 100\sqrt{\frac{1}{n}\sum_t \left(\frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t}\right)^2}$ — корінь із середньоквадратичної похибки у відсотках від фактичних значень;

$MAPE = \frac{100}{n}\sum_t \left|\frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t}\right|$ — середня абсолютна похибка у відсотках.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. У таблиці наведено щорічні значення виробництва пива за 20 років. Методом експоненціального згладжування ($w = 0,7$ та $w = 0,3$) та методом Холта—Вінтерса ($w = 0,7;\ v = 0,3$ та $w = 0,3;\ v = 0,7$) побудувати прогнози значень виробництва пива на два останні роки, використовуючи дані за перші вісімнадцять років. Підрахувати похибки $RMSE,\ MAD$.

Розв'язок. Спочатку підрахуємо експоненціально згладжені значення $E_1,\ E_2, ..., E_t$ для 1 – 7 років. $E_1 = Y_1 = 133,1.$

Для $w = 0,3$:

$$E_2 = wY_2 + \left(1 - w\right)E_1 = 0,3 \cdot 137,4 + \left(1 - 0,3\right) \cdot 133,1 = 134,39.$$

$$E_3 = wY_3 + \left(1 - w\right)E_2 = 0,3 \cdot 141,3 + \left(1 - 0,3\right) \cdot 134,39 = 136,46.$$

Інші значення подано в таблиці.

Для $w = 0,7$:

$$E_2 = wY_2 + \left(1 - w\right)E_1 = 0,7 \cdot 137,4 + \left(1 - 0,7\right) \cdot 133,1 = 136,11.$$

$$E_3 = wY_3 + \left(1 - w\right)E_2 = 0,7 \cdot 141,3 + \left(1 - 0,7\right) \cdot 136,11 = 139,74.$$

Інші значення подано в таблиці.

Рік	Виробництво пива	Експоненціально згладжене значення, $w=0,3$	Експоненціально згладжене значення, $w=0,7$
1	133,1	133,10	133,10
2	137,4	134,39	136,11
3	141,3	136,46	139,74
4	148,6	140,10	145,94
5	156,2	144,93	153,12
6	160,6	149,63	158,36
7	163,7	153,85	162,10
8	170,5	158,85	167,98
9	179,1	164,92	175,76
10	184,2	170,71	181,67
11	194,1	177,72	190,37
12	193,7	182,52	192,70
13	196,2	186,62	195,15
14	195,4	189,26	195,33
15	192,2	190,14	193,14
16	194,3	191,39	193,95
17	194,4	192,29	194,27
18	195,9		
19	197,4		
20	197,8		

Використовуючи експоненціальне згладжування, отримаємо такі прогнозні значення.

Для $w=0,3$:

$F_{18}=F_{t+1}=E_t=192,29$, похибка прогнозу $\varepsilon=195,9-192,29=3,61$.

$F_{19}=F_{t+2}=F_{t+1}=192,29$, похибка прогнозу $\varepsilon=197,4-192,29=5,11$.

$F_{20}=F_{t+3}=F_{t+2}=192,29$, похибка прогнозу $\varepsilon=197,8-192,29=5,51$.

Для $w=0,7$:

$F_{18}=F_{t+1}=E_t=194,27$, похибка прогнозу $\varepsilon=195,9-194,27=1,63$.

$F_{19}=F_{t+2}=F_{t+1}=194,27$, похибка прогнозу $\varepsilon=197,4-194,27=3,13$.

$F_{20} = F_{t+3} = F_{t+2} = 194,27,$ похибка прогнозу $\varepsilon = 197,8 - 194,27 = 3,53.$

Тепер обчислимо значення за методом Холта—Вінтерса за 1 — 8 роки.

Для $w = 0,7$ та $v = 0,3$:

$E_2 = Y_2 = 137,40;$

$E_3 = wY_3 + (1-w)(E_2 + T_2) = 0,7 \cdot 141,3 + (1-0,7)(137,4 + 4,3) = 141,42;$

$T_2 = Y_2 - Y_1 = 137,4 - 133,1 = 4,3;$

$T_3 = v(E_3 - E_2) + (1-v)T_2 = 0,3 \cdot (141,42 - 137,40) + (1-0,3) \cdot 4,3 = 4,22.$

Інші значення E_t та T_t подано в таблиці.

Для $w = 0,3$ та $v = 0,7$:

$E_2 = Y_2 = 137,40;$

$E_3 = wY_3 + (1-w)(E_2 + T_2) = 0,3 \cdot 141,3 + (1-0,3)(137,4 + 4,3) = 141,58;$

$T_2 = Y_2 - Y_1 = 137,4 - 133,1 = 4,3;$

$T_3 = v(E_3 - E_2) + (1-v)T_2 = 0,7 \cdot (141,58 - 137,40) + (1-0,7) \cdot 4,3 = 4,22.$

Інші значення E_t та T_t подано в таблиці.

Рік	Виробництво пива	E_t, $w=0,7$, $v=0,3$	T_t, $w=0,7$, $v=0,3$	E_t, $w=0,3$, $v=0,7$	T_t, $w=0,3$, $v=0,7$
1	133,1				
2	137,4	137,40	4,30	137,40	4,30
3	141,3	141,42	4,22	141,58	4,22
4	148,6	147,71	4,84	146,64	4,80
5	156,2	155,10	5,61	152,87	5,80
6	160,6	160,63	5,58	159,25	6,21
7	163,7	164,45	5,05	164,93	5,84
8	170,5	170,20	5,26	170,69	5,78
9	179,1	178,01	6,03	177,26	6,33
10	184,2	184,15	6,06	183,78	6,46
11	194,1	192,93	6,88	191,40	7,27
12	193,7	195,53	5,59	197,18	6,23
13	196,2	197,68	4,56	201,24	4,72
14	195,4	197,45	3,12	202,79	2,50

15	192,2	194,71	1,36	201,36	–0,25
16	194,3	194,83	0,99	199,07	–1,68
17	194,4	194,83	0,69	196,49	–2,31
18	195,9				
19	197,4				
20	197,8				

Далі будуємо прогнози за методом Холта—Вінтерса.

Для $w = 0,7$ та $v = 0,3$:

$F_{18} = F_{t+1} = E_t + T_t = 194,83 + 0,69 = 195,52;$

похибка прогнозу $\varepsilon = 195,9 - 195,52 = 0,38;$

$F_{19} = F_{t+2} = E_t + 2T_t = 194,83 + 2 \cdot 0,69 = 196,21;$

похибка прогнозу $\varepsilon = 197,4 - 196,21 = 1,19;$

$F_{20} = F_{t+3} = E_t + 3T_t = 194,83 + 3 \cdot 0,69 = 196,90;$

похибка прогнозу $\varepsilon = 197,8 - 196,9 = 0,90.$

Для $w = 0,3$ та $v = 0,7$:

$F_{18} = F_{t+1} = E_t + T_t = 196,49 - 2,31 = 194,18;$

похибка прогнозу $\varepsilon = 195,9 - 194,18 = 1,72;$

$F_{19} = F_{t+2} = E_t + 2T_t = 196,49 - 2 \cdot 2,31 = 191,87;$

похибка прогнозу $\varepsilon = 197,4 - 191,87 = 5,53;$

$F_{20} = F_{t+3} = E_t + 3T_t = 196,49 - 3 \cdot 2,31 = 189,56;$

похибка прогнозу $\varepsilon = 197,8 - 189,56 = 8,24.$

Тепер підрахуємо похибки прогнозів.

Для експоненціального згладжування при $w = 0,3$:

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n} |F_t - Y_t|}{n} = \frac{|192,29 - 195,9| + |192,29 - 197,4| + |192,29 - 197,8|}{3} =$$

$$= \frac{14,23}{3} = 4,7433.$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (F_t - Y_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(-3,61)^2 + (-5,11)^2 + (-5,51)^2}{3}} = 4,8133.$$

Для експоненціального згладжування при $w = 0,7$:

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n}|F_t - Y_t|}{n} = \frac{|194,27-195,9|+|194,27-197,4|+|194,27-197,8|}{3} =$$

$$= \frac{8,29}{3} = 2,7633.$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(F_t - Y_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(-1,63)^2+(-3,13)^2+(-3,53)^2}{3}} = 2,8818.$$

Для методу Холта—Вінтерса при $w = 0,7$ та $v = 0,3$:

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n}|F_t - Y_t|}{n} = \frac{|195,52-195,9|+|196,21-197,4|+|196,9-197,8|}{3} =$$

$$= \frac{2,47}{3} = 0,8233.$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(F_t - Y_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(-0,38)^2+(-1,19)^2+(-0,90)^2}{3}} = 0,8889.$$

Для методу Холта—Вінтерса при $w = 0,3$ та $v = 0,7$:

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n}|F_t - Y_t|}{n} = \frac{|194,18-195,9|+|191,87-197,4|+|189,56-197,8|}{3} =$$

$$= \frac{15,49}{3} = 5,1633.$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(F_t - Y_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(-1,72)^2+(-5,53)^2+(-8,24)^2}{3}} = 2,8818.$$

Слід зазначити, що обидва значення MAD для прогнозів за методом експоненціального згладжування $(4,7433$ та $2,7633)$ лежать між значеннями MAD для прогнозів за методом Холта—Вінтерса ($0,8223$ та $5,8148$). Аналогічно, $RMSE$ для прогнозів за методом експоненціального згладжування $(4,8133$ та $2,8818)$ лежать між $RMSE$ для прогнозів за методом Холта—Вінтерса $(0,8889$ та $5,8148)$.

Можна сказати, що існує трендовий компонент у часовому ряду виробництва пива. Дані збільшуються кожного року з першого по одинадцятий, потім зростають та спадають протягом декількох років і знову збільшуються з шістнадцятого року. Модель Холта—Вінтерса з параметрами $w = 0,7$ та $v = 0,3$ є найкращою для прогнозування обсягів виробництва пива, бо ця модель має найменшу похибку.

Задачі для аудиторної та самостійної роботи

21.1. У таблиці наведено квартальні значення експорту послуг із країни за три роки. а) Методом експоненціального згладжування (α =0,8); б) методом Холта—Вінтерса ($w = 0,8, v = 0,3$) побудувати прогнози значень експорту послуг на третій рік, використовуючи дані за перші два роки. Підрахувати похибки *RMSE, MAD, RMSPE, MAPE*.

Статті платіжного балансу	1 рік				2 рік				3 рік			
	І кв.	ІІ кв.	ІІІ кв.	IV кв	І кв.	ІІ кв.	ІІІ кв.	IV кв.	І кв.	ІІ кв.	ІІІ кв.	IV кв.
Баланс товарів та послуг	–702	65	–22	–463	–741	–354	–249	–192	–722	–261	–364	140
Експорт товарів та послуг	4667	5486	5068	5125	4744	5040	5205	5366	4421	4727	4147	4326
Імпорт товарів та послуг	5369	5421	5090	5588	5485	5394	5454	5558	5143	4988	4511	4186
Експорт товарів	3544	4208	3905	3890	3527	3858	3945	4088	3443	3750	3174	3332
Імпорт товарів	5050	5019	4624	5150	4983	4882	4830	4928	4459	4270	3868	3686
Баланс послуг	804	876	697	797	715	670	636	648	294	259	330	494
Експорт послуг	1123	1278	1163	1235	1217	1182	1260	1278	978	977	973	994
Імпорт послуг	319	402	466	438	502	512	624	630	684	718	643	500

21.2. У таблиці наведено квартальні значення імпорту послуг із країни за три роки. Методами: а) експоненціального згладжування (α =0,8); б) Холта—Вінтерса ($w = 0,8, v = 0,3$) побудувати прогнози значень імпорту послуг на третій рік, використовуючи дані за перші два роки. Підрахувати похибки *RMSE, MAD, RMSPE, MAPE*.

21.3. У таблиці наведено квартальні значення балансу товарів та послуг із країни за три роки. Методами: а) експоненціального згладжування (α =0,8); б) Холта—Вінтерса ($w = 0,8, v = 0,3$) побудувати прогнози значень балансу товарів та послуг на третій рік, використовуючи дані за перші два роки. Підрахувати похибки $RMSE$, MAD, $RMSPE$, $MAPE$.

21.4. У таблиці наведено квартальні значення експорту товарів країни за три роки. Методами: а) експоненціального згладжування (α =0,8); б) Холта—Вінтерса ($w = 0,8$, $v = 0,3$) побудувати прогнози значень експорту товарів на третій рік, використовуючи дані за перші два роки. Підрахувати похибки $RMSE$, MAD, $RMSPE$, $MAPE$.

21.5. У таблиці наведено квартальні значення імпорту товарів країни за три роки. Методами: а) експоненціального згладжування (α =0,8); б) Холта—Вінтерса ($w = 0,8$, $v = 0,3$) побудувати прогнози значень товарів послуг на третій рік, використовуючи дані за перші два роки. Підрахувати похибки $RMSE$, MAD, $RMSPE$, $MAPE$.

21.6. Припускаючи, що дані часових рядів стаціонарні, побудувати AR(1) для: а) експорту послуг; б) імпорту послуг; в) експорту товарів; г) імпорту товарів; д) балансу товарів та послуг. Побудувати прогноз на третій рік, використовуючи дані за перші два роки. Підрахувати похибки $RMSE$, MAD, $RMSPE$, $MAPE$.

21.7. Виділити лінійний тренд для імпорту послуг.

РОЗДІЛ 22. ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

1. За наведеною вибіркою X реалізації дискретної випадкової величини ξ потрібно:

а) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

б) знайти точкові оцінки числових характеристик ξ $\left(\overline{x},\ \overline{S}^2,\ \overline{S},\ S^2,\ S,\ Mo^*,\ Me^*\right)$;

в) вважаючи, що досліджувана величина ξ розподілена за законом Пуассона, обчислити теоретичні частоти;

г) побудувати криву теоретичної функції розподілу;

д) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

е) побудувати надійні інтервали з надійністю $1-\alpha = 0,95$ для математичного сподівання випадкової величини ξ.

1.1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	10	15	25	20	16	10	5

1.2.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	8	16	27	30	26	12	6

1.3.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	25	32	21	16	11	5

1.4.

x_i	0	1	2	3	4	5	6

m_i	15	23	31	26	21	16	8

1.5.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	19	28	26	22	17	7

1.6.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	10	19	29	22	17	11	6

1.7.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	15	24	30	27	20	15	9

1.8.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	13	22	32	28	21	16	9

1.9.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	9	17	23	21	15	10	5

1.10.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	8	17	25	21	17	11	6

1.11.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	21	29	24	19	12	7

1.12.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	13	21	30	28	20	15	10

1.13.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	10	16	27	22	17	10	5

1.14.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	19	26	24	18	12	7

1.15.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	9	17	27	30	26	18	6

1.16.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	10	19	26	24	18	13	8

1.17.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	11	20	24	21	18	15	9

1.18.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	28	32	29	23	19	10

1.19.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	10	19	26	29	24	16	8

1.20.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	13	20	28	24	18	11	6

1.21.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	9	15	26	21	18	12	6

1.22.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	19	27	32	26	19	7

1.23.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	13	21	31	26	20	17	9

1.24.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	10	26	23	17	13	9	5

1.25.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	15	28	33	28	19	11	5

1.26.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	14	29	32	27	15	9	5

1.27.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	17	24	31	29	18	12	9

1.28.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	18	25	33	29	20	12	10

1.29.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	12	21	29	27	19	12	8

1.30.

x_i	0	1	2	3	4	5	6

m_i	10	19	26	21	16	9	5

2. За наведеною вибіркою X реалізації неперервної випадкової величини ξ потрібно:

   а) побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки;

   б) побудувати гістограму частот та емпіричну функцію розподілу;

   в) знайти точкові оцінки числових характеристик ξ $\left(\overline{x},\ \overline{S}^2,\ \overline{S},\ S^2,\ S,\ Mo^*,\ Me^*\right)$;

   г) вважаючи, що досліджувана величина ξ має нормальний закон розподілу, обчислити теоретичні частоти;

   д) побудувати криву теоретичної функції розподілу;

   е) за критеріями Пірсона та Колмогорова при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричних даних з теоретичними;

   є) побудувати надійні інтервали з надійністю $1-\alpha = 0,95$ для математичного сподівання та дисперсії випадкової величини ξ.

2.1.

4,0	1,7	2,4	2,5	2,3	2,6	2,0	3,4	1,2	2,6
2,4	1,4	2,6	2,9	2,2	1,6	2,7	2,0	2,4	1,5
1,9	2,1	2,2	2,3	1,5	1,6	2,6	0,9	1,0	1,4
3,4	1,4	3,3	2,3	2,6	3,1	1,9	3,6	2,7	1,9
1,4	1,8	2,4	2,7	3,0	3,2	1,2	2,6	1,8	2,6

2.2.

2,6	2,5	2,7	0,9	1,0	1,1	1,2	2,3	2,8	2,4
1,3	2,0	1,9	2,4	2,2	2,6	2,7	2,8	1,6	1,9
2,4	2,6	3,0	0,5	2,1	2,6	2,2	1,2	1,7	2,5
2,6	0,7	2,4	0,9	3,1	2,8	3,4	1,3	1,8	2,3

1,8	2,3	2,4	2,5	2,6	1,8	2,6	2,2	2,9	1,3

2.3.

1,3	1,4	2,3	3,3	2,5	1,2	1,3	2,9	2,2	1,0
1,1	1,2	2,1	2,3	2,9	2,3	2,5	2,7	2,0	2,5
1,8	1,9	2,6	1,4	2,5	1,7	2,8	2,6	2,1	2,5
0,7	3,5	2,6	2,2	1,6	3,2	1,7	2,4	2,4	1,9
2,4	1,8	2,0	2,1	2,8	2,6	1,8	2,1	3,2	2,6

2.4.

2,6	2,0	2,4	2,2	2,8	1,9	2,4	1,7	1,8	3,2
3,7	3,9	2,5	1,6	3,3	3,6	2,8	2,9	2,4	1,3
3,1	2,6	2,4	1,4	2,7	3,3	0,9	2,3	1,3	1,6
1,5	3,4	2,5	1,0	1,1	2,3	2,8	1,2	2,4	0,6
1,3	1,9	2,6	3,2	2,5	2,2	1,7	1,2	3,0	2,8

2.5.

1,3	2,5	1,7	2,9	2,1	3,3	0,6	1,5	2,0	2,1
1,4	2,6	1,8	3,0	2,2	3,4	2,7	1,8	1,0	2,4
1,5	2,3	3,1	2,5	1,4	1,9	2,5	2,7	1,5	2,6
1,4	0,8	2,3	2,7	0,9	1,1	2,6	2,2	3,0	1,9
2,2	2,5	1,3	2,7	2,5	1,9	3,0	2,5	2,6	2,1

2.6.

-2,9	-3,0	-3,1	-2,4	-2,1	2,5	1,4	1,7	3,1	2,7
-2,6	-1,7	-2,6	-2,0	-2,1	2,4	1,2	1,5	2,9	2,2
-2,6	-1,6	-3,1	-2,5	-2,9	1,7	3,3	2,1	2,2	2,7
-2,7	-1,3	-2,7	-2,6	-2,3	3,1	2,0	1,9	2,5	2,7
-1,3	-2,4	-1,7	-1,5	-1,6	1,3	2,6	2,5	2,3	3,1

2.7.

4,1	4,2	4,4	4,1	4,2	3,4	3,6	3,3	4,5	4,3
3,9	4,0	4,1	4,6	6,0	4,3	4,9	4,3	4,3	3,9
4,6	6,0	4,4	3,2	4,7	4,4	3,8	3,2	4,3	4,1

4,3	4,7	4,6	3,5	4,2	4,3	4,9	4,1	5,2	4,7
3,1	4,3	4,5	5,1	5,0	4,0	3,9	3,6	4,5	4,2

2.8.

2,6	2,4	2,7	3,3	3,0	3,7	1,7	1,2	2,6	2,2
1,9	2,6	2,3	3,0	2,7	3,4	3,1	3,8	1,7	2,4
2,4	2,1	2,8	2,6	3,2	2,9	3,6	1,3	2,0	1,7
2,0	2,2	2,6	0,6	3,0	1,0	3,4	1,4	2,1	2,5
2,4	2,8	0,8	3,2	1,2	1,3	1,6	2,3	1,9	3,1

2.9.

-1,5	-1,7	-2,3	-3,1	-2,4	0,8	1,0	2,4	2,9	2,0
-1,5	-2,7	-2,4	-2,5	-2,2	2,8	1,3	2,6	2,7	3,1
-1,1	-1,6	-2,2	-3,2	-2,5	1,9	2,4	2,6	1,7	1,2
-1,8	-2,0	-2,2	-1,8	-2,1	2,6	3,2	1,4	1,7	2,3
-2,6	-2,5	-1,1	-1,8	-1,7	1,6	2,9	3,0	1,6	2,7

2.10.

-2,5	-2,3	-2,0	-2,8	-3,2	2,7	1,2	1,9	1,8	3,0
-1,4	-2,9	-3,8	-2,2	-2,4	2,3	3,1	2,2	3,0	2,3
-1,2	-1,4	-2,4	-3,0	-2,1	1,5	3,2	2,5	2,4	2,2
-1,3	-1,5	-2,3	-0,8	-2,2	2,6	1,9	0,7	2,4	2,7
-2,2	-2,2	-2,4	-1,8	-2,6	2,5	2,4	1,5	2,0	2,5

2.11.

2,4	2,1	1,6	3,0	2,9	1,3	3,8	3,5	1,8	2,5
3,3	3,2	2,6	1,8	2,7	3,5	2,7	2,4	2,6	2,2
2,6	2,4	3,3	1,9	2,2	2,4	2,9	1,6	2,7	2,6
2,2	2,5	1,3	3,0	2,8	2,7	2,2	1,9	2,3	2,4
1,4	1,7	2,7	3,4	2,4	2,8	1,9	1,6	2,2	2,6

2.12.

1,9	2,0	2,6	1,4	2,3	2,7	1,6	2,5	2,6	3,1

2,7	0,9	1,4	2,6	1,3	2,7	2,3	1,9	2,0	2,2
1,0	1,7	2,5	2,6	2,3	1,9	1,4	3,0	2,9	2,5
2,4	2,8	0,8	3,2	1,2	1,7	1,3	2,7	2,5	2,3
2,1	2,3	1,9	2,6	2,4	2,8	1,6	1,2	1,1	1,0

2.13.

2,6	2,4	3,3	3,2	1,4	2,1	2,5	2,3	2,4	2,6
2,0	2,2	2,6	2,3	1,2	3,2	1,9	2,7	2,6	1,5
2,6	1,0	2,4	1,2	2,9	3,2	2,7	1,3	2,5	2,2
1,1	1,8	2,3	2,7	1,7	2,6	2,0	3,0	2,7	1,2
1,9	2,5	2,3	2,0	1,1	1,8	2,7	2,4	2,3	2,6

2.14.

2,3	2,1	1,4	2,6	3,3	2,4	1,9	2,6	3,9	1,4
3,2	1,8	2,3	2,7	1,6	1,0	1,6	2,2	2,4	2,6
2,1	2,3	2,9	2,4	2,8	1,3	1,1	1,0	1,7	1,9
2,5	3,2	2,1	2,2	2,3	2,6	2,8	2,4	1,9	2,3
1,8	2,7	26	2,5	1,8	1,2	1,7	2,0	2,8	2,1

2.15.

3,0	2,2	3,1	1,9	2,5	3,0	3,6	1,7	2,1	2,2
1,8	2,0	2,2	1,5	3,1	3,2	1,8	2,7	1,1	1,2
1,3	2,4	2,8	3,4	3,5	1,2	2,2	2,3	2,0	2,5
2,9	2,0	2,6	2,6	25	2,4	2,1	2,0	2,3	2,2
1,9	2,7	2,4	1,2	0,8	1,0	2,3	1,6	1,0	2,7

2.16.

-1,7	-3,6	-3,4	-3,8	-3,1	1,0	2,5	2,3	2,9	2,6
-1,1	-2,7	-1,7	-2,6	-2,1	3,4	3,0	3,5	1,7	3,2
-2,9	-1,6	-2,7	-1,1	-1,9	3,1	2,7	1,2	3,2	1,8
-3,3	-4,0	-0,6	-3,0	-3,3	2,4	1,9	2,4	1,9	2,1
-2,2	-2,4	-1,9	-2,1	-1,3	1,4	1,6	0,7	2,3	2,5

2.17.

-4,0	-1,7	-2,4	-2,5	-2,3	2,6	2,0	3,4	1,2	2,6
-2,4	-1,4	-2,6	-2,9	-2,2	1,6	2,7	2,0	2,4	1,5
-1,9	-2,1	-2,2	-2,3	-1,5	1,6	2,6	0,9	1,0	1,4
-3,4	-1,4	-3,3	-2,3	-2,6	3,1	1,9	3,6	2,7	1,9
-1,4	-1,8	-2,4	-2,7	-3,0	3,2	1,2	2,6	1,8	2,6

2.18.

1,5	1,7	2,6	2,4	2,2	2,1	1,3	3,3	2,8	2,0
2,3	2,7	2,8	1,1	2,9	2,3	1,8	2,5	2,9	2,2
1,1	0,9	3,0	2,2	2,5	2,7	2,3	1,6	2,7	2,4
2,2	1,5	2,3	0,7	2,3	2,6	1,9	1,0	1,2	2,7
1,2	2,3	2,0	2,5	2,8	1,6	1,8	2,1	2,4	2,5

2.19.

3,1	4,2	4,4	4,1	4,2	3,4	3,6	3,3	4,5	4,3
3,9	4,0	4,2	4,6	6,0	4,4	4,9	4,3	4,3	3,9
4,6	6,0	4,4	5,2	4,7	4,4	3,9	3,2	4,3	4,1
4,3	4,6	4,6	3,5	4,2	4,3	4,9	4,1	5,3	4,7
3,1	4,3	4,5	5,1	5,0	4,0	3,9	3,6	4,5	4,2

2.20.

-2,3	-2,2	-2,3	-2,1	-2,7	2,6	3,3	1,3	1,5	2,4
-2,0	-1,9	-2,3	-1,8	-2,2	2,1	1,3	1,5	2,1	1,2
-2,6	-1,9	-2,5	-1,8	-1,7	1,9	2,1	2,8	0,6	2,7
-2,5	-2,3	-1,7	-1,9	-0,8	0,7	2,3	0,9	2,9	2,2
-2,3	-2,1	-2,4	-3,2	-3,0	2,9	2,4	1,7	1,5	1,2

2.21.

3,0	2,2	3,1	1,9	2,5	3,0	3,6	1,7	2,1	2,2
1,8	2,0	2,2	1,5	3,1	3,2	1,8	2,7	1,1	1,2
1,3	2,4	2,8	3,4	3,5	12	2,2	2,3	2,0	2,5
2,9	2,0	2,6	2,6	2,5	2,4	2,1	2,0	2,3	2,2
1,9	2,7	2,4	1,2	0,8	1,0	2,3	1,6	1,0	2,7

2.22.

2,3	2,1	2,7	1,4	2,6	2,1	2,3	3,3	1,7	4,0
3,3	2,5	2,3	1,6	1,0	1,5	1,5	1,2	2,4	2,2
2,9	2,1	2,3	2,7	2,0	2,4	1,4	1,0	1,6	2,3
2,5	2,9	2,1	2,2	2,6	0,8	0,9	1,9	2,2	1,6
1,9	2,7	2,0	3,3	2,6	1,8	2,8	1,0	2,3	2,5

2.23.

2,5	1,5	2,5	3,4	2,6	1,5	0,5	2,8	2,5	3,1
2,7	3,0	21	0,6	2,5	2,2	1,9	1,5	0,7	3,1
2,2	1,6	0,9	3,3	2,6	0,8	0,9	3,3	2,3	2,0
1,6	2,7	2,3	1,7	1,1	2,9	4,0	1,1	2,6	2,3
1,1	2,6	2,8	1,9	1,5	1,7	2,8	3,4	1,3	1,8

2.24.

2,1	2,9	2,0	1,9	2,1	3,9	2,8	2,1	1,9	1,0
1,6	3,7	3,1	1,4	1,8	2,7	2,6	2,1	3,2	1,9
1,2	2,4	2,7	1,8	1,4	1,0	3,7	2,4	1,2	1,3
3,2	2,6	1,8	1,2	2,3	2,4	1,7	3,0	2,3	1,0
1,1	3,6	1,7	1,0	2,2	1,6	2,6	2,2	3,5	1,6

2.25.

-1,7	-3,6	-3,4	-3,8	-3,1	1,0	2,5	2,3	2,9	2,6
-1,1	-2,7	-1,7	-2,6	-2,1	3,4	3,0	3,5	1,7	3,2
-2,9	-1,6	-2,7	-1,1	-1,9	3,1	2,7	1,2	3,2	1,8
-3,3	-4,0	-0,6	-3,0	-3,3	2,4	1,9	2,4	1,9	2,1
-2,2	-2,4	-1,9	-2,1	-1,3	1,4	1,6	0,7	2,3	2,5

2.26.

3,3	2,8	1,6	3,9	2,1	2,8	1,5	3,2	1,5	2,6
1,0	2,3	2,0	2,6	2,8	1,6	2,1	1,8	2,4	1,4
2,6	0,9	1,8	2,0	2,7	1,9	1,4	2,4	0,8	2,3
0,5	2,2	2,3	2,2	2,4	2,7	2,4	1,3	2,9	0,7

2,2	1,9	1,2	0,6	3,0	1,9	3,1	1,2	3,6	1,7

2.27.

1,9	2,6	2,4	2,1	2,0	2,2	2,6	2,5	3,4	1,7
2,6	1,5	2,8	2,7	2,9	0,9	0,8	0,6	3,1	2,3
1,7	2,8	2,5	2,4	2,6	3,0	2,9	2,8	1,7	2,1
1,9	3,2	1,3	3,3	3,1	1,2	2,4	1,2	1,9	2,4
2,9	2,8	1,5	3,5	1,4	3,2	3,6	1,7	1,6	2,6

2.28.

4,2	4,3	2,5	4,7	3,0	5,1	3,4	3,5	3,1	4,4
4,6	3,3	4,2	4,2	4,1	3,4	3,3	4,3	4,1	4,0
4,0	3,3	4,1	4,2	4,3	5,8	4,9	3,8	6,0	5,9
3,6	4,6	3,8	3,8	5,4	4,5	5,6	3,7	4,7	5,9
4,7	4,5	4,3	5,0	3,9	3,7	4,3	5,6	4,2	3,4

2.29.

-2,3	-2,2	-2,3	-2,1	-2,7	2,6	3,3	1,3	1,5	2,4
-2,0	-1,9	-2,3	-1,8	-2,2	2,1	1,3	1,5	2,1	1,2
-2,6	-1,9	-2,5	-1,8	-1,7	1,9	2,1	2,8	0,6	2,7
-2,5	-2,3	-1,7	-1,9	-0,8	0,7	2,3	0,9	2,9	2,2
-2,3	-2,1	-2,4	-3,2	-3,0	2,9	2,4	1,7	1,5	1,2

2.30.

-2,4	-2,3	-2,0	-2,8	-3,2	2,8	1,2	1,9	1,8	4,0
-1,7	-3,9	-3,8	-2,2	-2,4	2,3	3,1	2,2	3,0	2,3
-1,5	-1,4	-2,4	-3,0	-2,3	1,2	3,4	2,7	2,8	2,2
-1,3	-1,1	-2,4	-0,8	-2,4	2,6	1,9	0,7	2,4	2,7
-2,2	-2,9	-2,4	-1,8	-2,6	2,5	2,4	1,5	2,0	2,5

3. Припускаючи, що кореляційна залежність величин η та ξ лінійна $\left(\varphi(x) = kx + b\right)$, за результатами спостережень, наведених у таблиці, знайти коефіцієнти *k*, *b*, похибку вимірювань, надійні інтервали для коефіцієнтів та вибірковий коефіцієнт кореляції, $1-\alpha = 0,95$.

3.1.

x_i	8	12	16	20	24
y_i	7	15	23	31	39

3.2.

x_i	5	9	11	17	21
y_i	2	5	8	11	14

3.3.

x_i	5	10	15	20	25
y_i	4	10	15	22	28

3.4.

x_i	7	9	11	14	15
y_i	5	10	15	19	23

3.5.

x_i	9	13	16	20	21
y_i	5	7	9	12	14

3.6.

x_i	5	10	15	20	25
y_i	3	8	13	16	20

3.7.

x_i	9	15	25	30	35
y_i	7	10	14	18	23

3.8.

x_i	7	10	12	15	18
y_i	10	12	14	16	19

3.9.

x_i	5	12	20	25	30

y_i	5	8	11	14	17

3.10.

x_i	4	9	14	18	22
y_i	-1	3	7	11	15

3.11.

x_i	5	7	11	14	17
y_i	6	7	9	11	13

3.12.

x_i	4	10	12	18	22
y_i	7	14	17	25	30

3.13.

x_i	3	10	15	20	25
y_i	2	11	18	25	31

3.14.

x_i	7	10	12	15	18
y_i	-3	-4	-6	-7	-9

3.15.

x_i	3	10	15	20	25
y_i	0	-7	-13	-18	-24

3.16.

x_i	5	11	16	20	23
y_i	-5	-15	-23	-30	-34

3.17.

x_i	8	13	17	20	25
y_i	-3	-9	-13	-16	-22

3.18.

x_i	5	10	17	22	26
y_i	3	0	-4	-8	-10

3.19.

x_i	7	12	15	20	24
y_i	-2	-8	-11	-18	-22

3.20.

x_i	5	11	16	20	23
y_i	-1	6	11	15	19

3.21.

x_i	8	10	17	20	27
y_i	1	0	-4	-7	-10

3.22.

x_i	7	13	16	20	25
y_i	0	6	8	12	17

3.23.

x_i	5	10	14	20	24
y_i	-1	3	6	11	14

3.24.

x_i	8	12	19	24	28
y_i	1	-3	-8	-12	-15

3.25.

x_i	8	12	16	20	24
y_i	-2	2	5	8	11

3.26.

x_i	4	10	14	20	24
y_i	-3	-1	1	3	5

3.27.

x_i	7	12	18	22	26
y_i	-2	2	7	10	14

3.28.

x_i	4	11	15	20	24
y_i	-4	-1	1	3	4

3.29.

x_i	7	12	20	25	28
y_i	2	-2	-8	-13	-15

3.30.

x_i	4	12	15	20	24
y_i	-4	0	2	4	6

4. Знання 15 студентів перевірялися за двома тестами A і B. Оцінки знань за стобальною системою наведено у таблиці.Обчислити ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена та перевірити його значущість, $1-\alpha = 0,95$.

4.1.

A	95	90	88	86	84	80	77	75	70	65	62	60	57	55	50
B	92	93	79	83	80	73	65	60	60	50	45	72	62	48	70

4.2.

A	95	90	88	86	84	80	80	75	73	65	62	60	57	55	55
B	92	93	79	83	83	83	65	55	60	50	55	72	62	58	66

4.3.

A	94	92	88	86	84	80	77	77	77	65	62	60	57	55	52
B	93	93	80	83	80	73	65	55	70	70	65	62	62	58	70

4.4.

A	94	94	88	87	84	80	77	70	70	65	62	60	60	55	53
B	92	93	85	81	81	73	68	65	65	65	55	62	62	48	55

4.5.

A	95	93	88	86	84	80	77	75	70	65	62	60	57	55	50
B	92	93	79	83	80	73	65	55	60	50	45	72	62	48	70

4.6.

A	95	90	88	88	84	80	77	75	70	62	62	62	57	55	50
B	92	92	80	83	83	76	76	75	72	58	60	64	62	57	57

4.7.

A	94	91	88	88	84	78	78	75	75	65	62	60	55	55	50
B	93	93	89	83	83	83	65	55	63	65	59	58	61	50	55

4.8.

A	96	94	90	90	90	85	79	75	70	65	65	60	60	55	53
B	93	93	82	83	85	83	75	80	70	60	60	62	62	58	50

4.9.

A	95	95	90	90	87	80	79	75	75	75	68	65	60	60	56
B	92	94	85	87	80	83	70	70	73	75	64	62	62	55	60

4.10.

A	93	93	90	86	85	80	80	78	75	65	65	60	60	55	50
B	92	95	85	90	90	75	75	73	73	70	74	72	65	68	60

4.11.

A	95	90	88	88	84	80	77	75	75	65	62	60	60	55	52
B	92	92	79	80	80	73	65	65	60	60	55	62	52	58	60

4.12.

A	93	91	90	86	84	84	77	75	75	67	62	62	60	55	52
B	92	94	91	83	80	77	75	65	65	62	55	70	62	48	60

4.13.

A	95	92	89	86	86	80	76	76	70	70	65	60	60	60	55
B	92	92	90	90	80	75	79	70	60	65	70	65	69	68	60

4.14.

A	95	93	88	84	84	80	77	77	77	68	62	62	60	58	55
B	92	93	83	88	80	75	75	65	70	60	65	70	62	62	60

4.15.

A	94	92	87	87	83	80	76	70	70	65	60	60	60	55	55
B	92	93	79	83	80	78	65	62	62	60	55	62	58	62	67

4.16.

A	93	90	90	86	84	80	78	75	70	65	65	65	62	58	58
B	90	93	85	89	80	73	65	58	65	60	68	70	65	50	60

4.17.

A	95	90	86	86	84	80	77	75	70	65	65	60	57	55	50
B	92	93	78	83	80	73	65	55	62	55	45	70	62	58	58

4.18.

A	94	91	85	85	80	80	75	75	70	65	60	60	57	55	50
B	90	93	80	88	82	75	65	60	60	62	52	68	60	49	61

4.19.

A	96	93	90	90	87	81	78	75	75	68	62	62	59	55	48
B	94	96	82	86	80	85	70	65	70	60	55	70	65	60	57

4.20.

A	95	95	90	90	87	80	79	75	75	75	68	65	60	60	56
B	91	91	83	85	80	72	72	65	70	70	55	72	62	52	67

4.21.

A	95	92	89	86	86	80	76	76	70	70	65	60	60	60	55
B	92	93	79	83	80	80	70	79	60	58	48	75	62	48	62

4.22.

A	95	90	88	88	84	80	77	75	70	62	62	62	57	55	50
B	91	96	79	82	87	72	81	65	60	55	55	72	62	62	62

4.23.

A	96	94	90	90	90	85	79	75	70	65	65	60	60	55	53
B	92	93	79	83	80	78	65	62	62	60	55	62	58	62	67

4.24.

A	95	93	88	86	84	80	77	75	70	65	62	60	57	55	50
B	92	93	79	83	80	78	65	62	62	60	55	62	58	62	67

4.25.

A	94	92	88	86	84	80	77	77	77	65	62	60	57	55	52
B	92	93	79	80	80	73	65	55	60	50	55	55	62	48	60

4.26.

A	95	90	88	88	84	80	77	75	75	65	62	60	60	56	53
B	92	92	90	90	80	75	79	70	63	65	70	65	69	69	61

4.27.

A	95	93	88	84	84	80	77	77	77	68	62	62	61	58	55
B	90	94	80	82	86	75	65	60	60	62	52	68	60	50	63

4.28.

A	95	90	88	88	84	80	77	75	70	62	62	62	57	55	55
B	92	95	80	85	80	73	65	65	60	55	45	70	62	48	70

4.29.

A	93	90	90	86	84	80	78	75	70	65	65	65	62	58	58
B	93	93	89	83	83	83	65	55	63	65	59	58	61	50	55

4.30.

A	95	90	88	86	84	80	80	75	73	65	62	60	57	55	55
B	92	92	79	80	80	73	65	65	60	60	55	62	52	58	60

Відповіді та вказівки до задач для аудиторної та самостійної роботи

Розділ 1

1.1. а) 7; б) 49; в) 28.
1.2. 49; 42.
1.3. 4080.
1.4. 100.
1.5. $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.
1.6. 5040.
1.7. 5040.
1.8. 18000.
1.9. $(m+1)(n+1)$.
1.10. $C_n^2 = \frac{(n-1)n}{2}$.
1.11. $\frac{(n-3)n}{2}$.
1.12. $n^2(n-1)^2$.
1.13. $30^2 \cdot 10^4$.
1.14. 105.
1.15. $\frac{15!}{(5!)^3}$.
1.16. 2903040.
1.17. $\frac{12!}{(2!)^6} = 7484400$.
1.18. а) $\frac{10!}{2!3!2!} = 151200$; б) $\frac{13!}{(2!)^3}$.
1.19. 40.
1.20. 300.
1.21. 900.
1.22. 4!=24.
1.23. $(n!)^2$.
1.24. A_{25}^4.

1.25. A_8^4.

1.26. $(n-2)!$

1.27. $2(n-2)!(n-r-1)$.

1.28. 12.

1.29. $(n-1)!$

1.30. $8^6; 8^6 - 13\cdot 7^5$.

1.31. $\frac{10!}{4}$.

1.32. 43890.

Розділ 2

2.1. $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$.

$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$;

$B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}$.

2.2. $\Omega = \{(\text{Г},1),(\text{Г},2),(\text{Г},3),(\text{Г},4),(\text{Г},5),(\text{Г},6),$
$(\text{Р},1),(\text{Р},2),(\text{Р},3),(\text{Р},4),(\text{Р},5),(\text{Р},6)\}$.

2.3. $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots\}$.

2.4. $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РГГ}, \text{ГРГ}, \text{ГРРГ}, \text{РГРГ}, \text{РРГГ}, \dots\}$.

2.5. $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

2.6. $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_n \in R\}$.

2.7. Ω складається з усіх можливих партій, що містять m виробів (число таких партій C_N^m); A складається з тих партій m виробів, серед яких є рівно l бракованих (число таких партій $C_n^l \cdot C_{N-n}^{m-l}$).

2.8. $C_{m+n}^k; A_{m+n}^k$.

2.10. а) Ω; б) $A \cap B$; в) $(A \cap C) \cup B$.

Розділ 3

3.1. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, а) $A = \{3,6\}$, $P(A) = \frac{1}{3}$; б) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$P(i) = \frac{i}{21}$, $P(A) = \frac{3}{7}$.

3.2. $\Omega=\left\{\begin{array}{l}(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\\(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\end{array}\right\}$,

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{10}$.

3.3. $1-\frac{A_{365}^{r}}{(365)^{r}}$.

3.4. $\frac{6!}{6^{6}}\approx 0,0154$.

3.5. $\frac{A_{10}^{7}}{10^{7}}\approx 0,06$.

3.6. $p_1=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$, $p_2=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Беручи до уваги нерівність

$(1+x)^{n}\geq 1+nx, x>-1,$ дістанемо $\left(\frac{35}{36}\right)^{6}=\left(1-\frac{1}{36}\right)^{6}>1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Тоді

$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}>\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$ і $p_1>p_2$.

3.7. $P(A)=1-\frac{A_{12}^{r}}{12^{r}}, r\leq 12$ і $P(A)=1$ при $r>12$.

3.8. $\frac{12!}{12^{12}}\approx 0,0005$.

3.9. $\frac{30!}{2^{6}\cdot 3^{6}}\cdot C_{12}^{6}\cdot\frac{1}{12^{30}}\approx 0,0035$.

3.10. а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{7}{10}$.

3.11. а) $\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$; б) $\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$.

3.12. $\frac{12\cdot 8!}{10!}=\frac{2}{15}$.

3.13. $\dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$.

3.14. $\dfrac{C_n^r \cdot C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k}$.

3.15. $\dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$; $\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

3.16. $\sum\limits_{s=1}^{\min(m,r)} \dfrac{C_m^s \cdot C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}$.

3.17. $\sum\limits_{i=r}^{k} \dfrac{C_n^i \cdot C_{N-n}^{k-i}}{C_N^k}$.

3.18. Імовірність повного виграшу $\dfrac{1}{C_{39}^6} \approx 10^{-5}$; ймовірність відгадати i чисел дорівнює $\dfrac{C_6^i \cdot C_{33}^{6-i}}{C_{39}^6}, i = 5, 4, 3$; ймовірність одержати виграш $\sum\limits_{i=3}^{6} \dfrac{C_6^i C_{33}^{6-i}}{C_{39}^6}$.

3.19. а) $\dfrac{C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \dfrac{n}{2n-1}$; б) $\dfrac{2C_2^2 C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \dfrac{n-1}{2n-1}$; в) $\dfrac{C_4^2 C_{2n-4}^{n-2}}{C_{2n}^n}$.

3.20. $\dfrac{12!}{2^6 \cdot 6^{12}} \approx 0,003438$.

3.21. $P(A) = \dfrac{1}{216}; P(B) = \dfrac{1}{36}; P(C) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \dfrac{5}{9}$.

3.22. а) $\dfrac{C_9^3 2^6}{3^9}$; б) $\dfrac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3^9}$; в) $\dfrac{C_9^4 C_5^3 C_2^2}{3^9} \cdot 3!$.

3.23. $\dfrac{C_{10}^4 \cdot 2^4}{C_{20}^4} \approx 0,6935$.

3.24. $\dfrac{1}{6}$.

3.25. а) $\frac{392}{500}$; б) $\frac{439}{500}$; в) $\frac{167}{500}$.

3.26. $P(A)=0,3; P(B)=0,72;$

$P(A\cup B)=0,8; P(A\cap B)=0,22.$

3.27. $P(A)=0,75; P(A\cap B)=0,41;$

$P(A\cap D)=0,22; P(A\cup B)=0,81;$

$P(A\cup C)=0,84.$

Розділ 4

4.1. $\frac{(a-d)^2}{a^2}$.

4.2. $\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}$.

4.3. $\Omega=\{(x,y,z):0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a\}$,

$A=\{(x,y,z):x+y>z, x+z>y, y+z>x\}$; $P(A)=\frac{1}{2}$.

4.4. $1-\frac{r}{a}$.

4.5. $\frac{6}{19}\approx 0,316$.

4.6. $\frac{2\arccos\left(r/R\right)}{\pi}$.

4.7. $\frac{2\arcsin\left(r/2R\right)}{\pi}$.

4.8. $\frac{r^2}{R^2}$.

4.9. $\frac{1}{4}$.

4.10. $\frac{1}{4}$.

4.11. $\frac{2}{3}$.

4.12. Нехай x — відстань від середини голки до найближчої паралелі, φ — кут, який утворює голка з цією паралеллю. Тоді
$\Omega = \{(x,\varphi): 0 \le x \le a, 0 \le \varphi \le \pi\}$; $A = \{(x,\varphi): x \le l \sin\varphi\}$;
$P(A) = \frac{2l}{a\pi}$.

4.13. $P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$.

4.14. $\frac{4\ln 2 + 3}{18}$.

4.15. $\frac{3\ln 2 + 1}{8}$.

4.16. $\frac{3}{4}$.

4.17. а) a^2, при $0 < a < 1$ і 1, при $a > 1$;

б) $\frac{\pi a^2}{4}$, при $0 < a < 1$; $\sqrt{a^2 - 1} + \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{1}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\right)$,

при $1 \le a < \sqrt{2}$ і
1, при $a > \sqrt{2}$;

в) $\frac{1}{12}$.

Розділ 5

5.1. а) $0,4705$; б) 0,0385.

5.2. 0,99576.

5.3. а) 0,3; б) 0,26.

5.4. а) $P(A) - P(A \cap B)$; б) – в) $1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$; г) $1 - P(A \cap B)$;
д) $P(B) - P(A \cap B)$; е) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5.5. $P_0 = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$; $P_1 = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$;

5.6. а) $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$; б) $A = \{\text{ГГ}, \text{ГР}\}, B = \{\text{ГГ}, \text{РГ}\}$;

в) $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}; P(B\setminus A)=\frac{1}{4}.$

5.7. в) $P(B)=\frac{7}{8}; P(A\cap B)=\frac{3}{8}; P(B\setminus A)=\frac{1}{2}.$

5.8. а) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$, де $B_1=A_1, B_2=\overline{A_1}\cap A_2, \ldots,$

$B_n=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{n-1}}\cap A_n$. Події B_i несумісні і $B_i\subset A_i$. Тоді

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\le\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5.9. При $n=2$

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)\ge P(A_1)+P(A_2)-1.$$

Далі скористатися методом математичної індукції.

5.10. Використати нерівність задачі 5.6.

5.11. $\frac{7}{9}.$

5.12. $\frac{1}{2}.$

5.13. 0,6.

5.14. $\frac{28}{29}\approx 0{,}9655.$

Розділ 6

6.1. $\frac{1}{3}.$

6.2. $\frac{1}{2}.$

6.3. $\frac{m-1}{m+n-1}.$

6.4. $1-\frac{10\cdot 5^{9}}{6^{10}-5^{10}}\approx 0{,}61.$

6.5. $\frac{20}{21}.$

6.6. $P(A/A\bigcup B)=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

6.7. $\dfrac{21}{46}$.

6.8. Незалежні.

6.9. 0.

6.14. $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{7}{8},\ P(A\bigcap B)=\dfrac{3}{4}\neq P(A)\cdot P(B)=\dfrac{7}{16}$.

6.15. Незалежні.

6.16. $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}, P(A\bigcap B)=P(A\bigcap C)=P(B\bigcap C)=\dfrac{1}{4}$.

$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$. Аналогічно, попарно незалежними є події *A* і *C*, *B* і *C*.

Але $P(A\bigcap B\bigcap C)=\dfrac{1}{4}\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\dfrac{1}{8}$.

6.19. а) 0,56; б)0,06; в) 0,94; г) 0,38.

6.20. Імовірність виграшу першого гравця $\dfrac{2}{3}$, а другого — $\dfrac{1}{3}$.

6.21. $\dfrac{n+m}{n+2m}$ та $\dfrac{m}{n+2m}$.

6.22. Використати метод математичної індукції.

6.23. а) $\dfrac{155}{200}$; б) $\dfrac{25}{80}$;

в) $P(A)=0{,}775, P(B)=0{,}5, P(A\bigcap B)=0{,}325\neq P(A)\cdot P(B)=0{,}3875$.

Тобто події *A* та *B* – залежні.

6.24. $P(A)=0{,}25, P(B)=0{,}48; P(A\bigcap B)=0{,}15\neq P(A)\cdot P(B)=0{,}12$.

A і *B* – залежні події.

6.25. 1) попарно незалежні; 2) не є незалежними в сукупності.

6.26. 1) $0{,}6979$;

2) $0{,}119$; 3) $0{,}4284$.

6.27. 0,96.

Розділ 7

7.1. $\dfrac{13}{30}$.

7.2. $\frac{5}{8}$.

7.3. $\frac{m_1 + n_1 m_2}{n_1 \left(n_2 + 1\right)}$.

7.4. $\frac{1}{2}$.

7.5. $P\left(B / A\right) = \frac{2}{3}$.

7.6. $\frac{n+2}{2\left(n+1\right)}$.

7.7. Нехай подія A_i — з i-ї урни переклали білу кулю.

$$P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = P\left(A_3\right) = \ldots = P\left(A_n\right) = \frac{m}{m+k}.$$

7.8. $P\left(H_i / A\right) = \frac{2i}{n\left(n+1\right)}$, $P\left(H_n / A\right) = \max\limits_i P\left(H_i / A\right) = \frac{2}{n+1}$.

7.9. Див. 7.4. Нехай подія A — перша витягнута куля біла, B — друга витягнута куля біла. Тоді

$$P\left(B / A\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P\left(A \bigcap B / H_i\right) P\left(H_i\right)}{1/2} =$$

$$= \frac{2}{n\left(n-1\right)\left(n+1\right)} \cdot \sum_{i=2}^{n} i\left(i-1\right) = \frac{2}{n\left(n-1\right)\left(n+1\right)} \cdot \frac{n\left(n+1\right)\left(n-1\right)}{3} = \frac{2}{3}.$$

7.10. $P\left(H_1 / A\right) = \frac{m_1 k_1 \left(m_2 + n_2\right)}{m_1 k_1 \left(m_2 + n_2\right) + m_2 k_2 \left(m_1 + n_1\right)}$.

7.11. Нехай D — випадкова подія, яка полягає в тому, що є два влучення. Тоді $P\left(C / D\right) = \frac{10}{19} > \frac{1}{2}$.

7.12. Введемо такі випадкові події: A_i — ведмедя вбив i-й мисливець, i=1, 2, 3; B — ведмедя вбито однією кулею.

$P\left(B\right) = 0,464$; $P\left(A_1 / B\right) = \frac{3}{29}$; $P\left(A_2 / B\right) = \frac{8}{9}$; $P\left(A_3 / B\right) = \frac{18}{29}$.

7.13. $\frac{m-2}{n+m-2}$.

7.14. $0,52$.

7.15. $\dfrac{np_2}{p_1 + np_2}$.

7.16. $6/7$.

7.17. а) 0,0345; б) $25/69$; $28/69$; $16/69$.

7.18. 0,421.

7.19. 0,744.

7.20. а) 0,68; б) 0,6; в) 0,176; г) 0,563.

Розділ 8

8.1.

ξ	0	1	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$M\xi = 1; M\xi^2 = \frac{3}{2}; D\xi = \frac{1}{2}.$

8.2.

ξ	2	3	4	5	6
P	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$

ξ	7	8	9	10	11	12
P	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$M\xi = 7.$

8.3.

$$\Omega = \left\{ Г, РГ, РРГ, ..., \underbrace{РР...РГ}_{n}, ... \right\},$$

$$\omega_n = \underbrace{РР...РГ}_{n}, \quad \xi(\omega_n) = n,$$

$$p_n = P\{\xi = n\} = \frac{1}{2^n}, \quad P\{\xi > 1\} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi \le n\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

8.4. $p_n = P\{\xi = n\} = (1-p)^{n-1} \cdot p.$

8.5. а) не розподіл, бо $\sum_{k=1}^{\infty} p^k q^2 = pq \neq 1;$

б) розподіл, бо $\sum_{k=n}^{\infty} p^{k-n} q = 1;$

в) розподіл, бо $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$

8.6. $M\xi = 0, D\xi = \frac{n(n+1)}{3}.$

8.7.

η	0	1
P	$1/3$	$2/3$

$M\eta = 2/3;\ D\eta = 2/9.$

8.8.

η	3	9	15
P	0,4	0,1	0,5

$M\eta = 9,6.$

8.9.

η	$\sqrt{2}/2$	1
P	0,3	0,7

$M\eta = \left(14 + 3\sqrt{2}\right)/20, \qquad D\eta = 0,315 - 0,21\sqrt{2}.$

8.10.

η	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

ξ	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

8.11. 9; 40.

8.12. 2.

8.13. Нехай $x_m = \max\limits_{1 \le i \le r} x_i$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\xi^{n+1}}{M\xi^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{n+1}\cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{n}\cdot p_i} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_m p_m + \sum\limits_{i\ne m}\left(\frac{x_i}{x_m}\right)^n p_i\cdot x_i}{p_m + \sum\limits_{i\ne m}\left(\frac{x_i}{x_m}\right)^n p_i} = x_m.$$

При цьому використовується, що $\frac{x_i}{x_m} < 1, i \ne m.$

8.14. Нехай ξ — прибуток у банку *A*, а η — у банку *B*.

Тоді $M\xi = M\eta = 2220\$, \sigma_\xi = 2697, \sigma_\eta = 2030.$

8.15. $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P\{\xi \ge i\} = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=i}^{+\infty} P\{\xi = k\} = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} iP\{\xi = i\} = M\xi.$

8.16. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Показати, що для будь-яких $i, j = 1,2,...,6$

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = P\{\xi = i\}P\{\eta = j\} = \frac{1}{36}.$$

8.17. $P\{\xi = i, \eta = j\} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \frac{1}{36}(6 - i + 1), & i = j. \\ \frac{1}{36}, & i > j \end{cases}$

$$M\xi = \frac{7}{2}, D\xi = \frac{35}{12}. P\{\eta = i\} = \frac{(13 - 2i)}{36}, i = 1,2,...,6.$$

$$M\eta = \frac{91}{36},\ D\eta = \frac{1555}{1296},\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{85}{72},\ \rho(\xi,\eta) = 0,68.$$

8.18.Ні. Розподіл $\gamma = \xi\eta$ має вигляд $P\{\gamma = 0\} = \frac{1}{2},\ P\{\gamma = \pm 1\} = \frac{1}{4};$

$$P\{\gamma = 1, \eta = 1\} = \frac{1}{8} \ne P\{\gamma = 1\}P\{\eta = 1\} = \frac{1}{16}.$$

$$M\xi = 0,\ D\xi = 1,\ M\eta = 0,\ D\eta = 1/2;$$

$\operatorname{cov}(\gamma,\eta) = M\xi\eta^2 = M\xi \cdot M\eta^2 = 0.$ Отже, $\rho(\xi\eta,\eta) = 0.$

8.19. Нехай $M\xi_1 = M\xi_2 = m, \quad M\xi_1^2 = M\xi_2^2 = a.$

Тоді $M\xi = 2m, \quad M\eta = 0, \quad M\xi\eta = M\left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right) = 0.$

Отже, $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta = 0$ і $\rho(\xi,\eta) = 0.$

8.20. Скористатися задачею 8.19.

8.21.

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\{\xi_1 + \xi_2 = n / \xi_1 = k\} P\{\xi_1 = k\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\{\xi_2 = n - k\} P\{\xi_1 = k\}.$$

8.22. $$P\{\eta = k\} = \begin{cases} \dfrac{k+1}{(n+1)^2}, & k = 0,1,\dots,n; \\ \dfrac{2n-k+1}{(n+1)^2}, & k = n+1,\dots,2n. \end{cases}$$

8.23.

ξ	$\frac{4}{9}S$	$\frac{2}{3}S$	S	$\frac{3}{2}S$	$\frac{9}{4}S$
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

$M\xi = 13611$ грн.

8.24. Клієнту вигідніше звернутись до детектива.

Розділ 9

9.1. $1 - 0{,}6^n \ge 0{,}9.$ Тоді $n = 5.$

9.2. а) $0{,}22404$; б) $0{,}19915$; в) $0{,}80085$; г) $0{,}04979$.

9.3. а) 0,18045; б) 0,32332; в) 0,13534.

9.4. а) $\sum_{k=4}^{6} C_{10}^k \cdot (0{,}5)^{10} = \dfrac{21}{32}$; б) $\dfrac{291}{512}$; в) $\dfrac{1}{1024}$; г) $\dfrac{53}{64}$.

9.5. $0{,}95^8 = 0{,}6634.$

9.6. $P_n(k_0 - 1) \le P_n(k_0)$ і $P_n(k_0 + 1) \le P_n(k_0)$. Розпишемо першу нерівність $C_n^{k_0-1} p^{k_0-1} q^{n-k_0+1} \le C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0}$. Після скорочення дістанемо

$\frac{q}{n-k_0+1} \le \frac{p}{k_0}$, тобто $k_0 \le np + p.$ Аналогічно розписуючи другу нерівність, дістанемо $k_0 \ge np - q.$

9.7. $\frac{80}{243}.$

9.8. а) $k_0 = 2,\ k_0 = 3,\ P_{14}(2) = P_{14}(3) \approx 0{,}25;$ б) $0{,}302.$

9.9. 24 або 25.

9.10. $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \frac{1}{4^n} = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ при великих $n.$ Тут використовувались комбінаторна тотожність $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$ і формула Стірлінга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$

9.11. а) $0{,}26058;$ б) $0{,}36788;$ в) $0{,}98101.$

9.12. $0{,}95957.$

9.13. 0,43348.

9.14. а) 0,0532; б) 0,0219.

9.15. $0{,}92364.$

9.16. а) 0,0005; б) 0,9078; в) 0,9044.

9.17. $M\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np\left(p+q\right)^{n-1} = np.$

$\left(kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}\right).$

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} + n\sum_{k=2}^{n} \left(k-1\right) C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} =$$

$$= np + n\left(n-1\right) p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-k} = np + n\left(n-1\right) p^2 = \left(np\right)^2 + npq.$$

$$D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2 = npq.$$

9.18. $\frac{40}{128} > \frac{35}{128}.$

9.19. $n = 18,\quad p = \frac{2}{3}.$

9.20. $M\xi=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^k\cdot p=pq\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=p\cdot q\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{q}{p}.$

Тут використали такі рівності:

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\frac{1}{1-q};\qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\left(\frac{1}{1-q}\right)'=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

$$M\xi^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^kp=q^2p\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}+qp\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=$$

$$=q^2\cdot p\cdot\frac{2}{(1-q)^3}+qp\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p};$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p}-\frac{q^2}{p^2}=\frac{q}{p}\left(1+\frac{q}{p}\right)=\frac{q}{p^2}.$$

9.21. Необхідність. Нехай ξ має геометричний розподіл, тоді

$$P\{\xi=k+r/\xi\ge k\}=\frac{q^{k+r}\cdot p}{\sum_{i=k}^{\infty}q^ip}=\frac{q^{k+r}\cdot(1-q)}{q^k}=q^r\cdot p=P\{\xi=r\}.$$

Достатність. Нехай виконується рівність задачі. Позначимо $p_k=P\{\xi=k\}$.

Тоді $P\{\xi=k+r/\xi\ge k\}=\dfrac{P\{\xi=k+r\}}{\sum_{i=k}^{\infty}P\{\xi=i\}}=\dfrac{P_{k+r}}{\sum_{i=k}^{\infty}p_i}=p_r.$

$$p_{r+1}=p_r\sum_{i=1}^{\infty}p_i=p_r(1-p_0)=p_{r-1}(1-p_0)^2=...=p_0(1-p_0)^{r+1}.$$

Отже, $p_k=p_0(1-p_0)^k$. Нехай $p_0=p,\ \ 1-p_0=q,$ тоді $p_k=pq^k$, що і треба було довести.

9. 22. $P\{\xi=13/\xi\ge10\}=P\{\xi=3\}=(1-p)^3\cdot p.$

9. 23. $P\{\xi_1+\xi_2=n\}=\sum_{k=0}^{n}p\cdot q^k\cdot p\cdot q^{n-k}=p^2q^n\cdot(n+1).$

$$P\{\xi_1=k/\xi_1+\xi_2=n\}=\frac{P\{\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}=\frac{P\{\xi_1=k\}\cdot P\{\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}=$$

$$=\frac{p\cdot q^k\cdot p\cdot q^{n-k}}{p^2q^n(n+1)}=\frac{1}{n+1},\qquad k=0,1,...,n.$$

9.24. $P\{\eta = k\} = pq^k\left(2 - q^k - q^{k+1}\right),$

$P\{\eta = k, \xi_1 = i\} = q^{k+i}\cdot p^2, \quad k > i$ і

$P\{\eta = i, \xi_1 = i\} = \left(1 - q^{i+1}\right)q^i p.$

9.25. $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\cdot e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda} = \lambda.$

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \lambda^2 + \lambda.$$

$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

9.26. а) $P\{\xi_1 + \xi_2 = k\} = \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\right) =$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1 + \lambda_2)^k;$$

б) див. задачу 9.23.

9.27. $M\frac{1}{1+\xi} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$

9.28. Розподіл Паскаля є геометричним розподілом з $p = \frac{1}{1+a}, \quad q = \frac{a}{a+1}.$

Тоді $M\xi = \frac{q}{p} = a, \quad D\xi = \frac{q}{p^2} = a(a+1).$

9.29. $P\{\xi = k\} = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n, \quad k = 1, 2, ..., N.$

$$M\xi = N - \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Розділ 10

10.1. в), г), д).

10.2. $a=\dfrac{\lambda}{2},\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\lambda x}, & x\le 0,\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}\quad M\xi=0,\quad D\xi=\dfrac{2}{\lambda^2}.$

10.3. а) Не може бути щільністю; б) $c=\dfrac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.$

10.4. $F_\eta(x)=1-F(-x+0).$

10.5. Рівномірний розподіл на $[0,1]$.

10.6. а) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1),\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\in(0,1);\end{cases}$ б) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{x^2}, & x>1;\end{cases}$

в) $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1,e),\\ \dfrac{1}{x}, & x\in(1,e).\end{cases}$

10.7. Рівномірний розподіл на $[0,1]$.

10.8. а) $1/4$; б) $1/2$.

10.9. а) e^{-1}; б) e^{-1}; в) e^{-1}.

10.10. Рівномірний розподіл на $\left(-\pi/2,\pi/2\right)$.

10.11. Рівномірний розподіл на $[0,1]$.

10.12. $F_\eta(x)=\dfrac{2}{\pi}arctg\left(\sqrt{x}\right), x>0;$

$p_\eta(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>0.\end{cases}$

10.13. $p_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-1,1),\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;1).\end{cases}$

10.14. При $x>0$ $F_\eta(x)=1-\dfrac{1}{\pi}arctg\left(\dfrac{1}{x}\right).$

Якщо $x<0,$ то $F_\eta(x)=\frac{1}{\pi}arctg\left(-\frac{1}{x}\right).$

$$p_\eta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x\neq 0.$$

10.15. Рівномірний розподіл на $[0,1]$. .(Див. задачу 10.7).

10.16. $F_\eta(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases} \qquad M\eta=1.$

10.17. $F_\eta(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

10.18. $M\xi^k=\frac{k!}{\lambda^k}, \quad D\xi=\frac{1}{\lambda^2}, \quad P\{\xi>1\}=e^{-\lambda}.$

10.19. $M\xi=\frac{a+b}{2}, \qquad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}.$

10.20. $M\xi=a, \qquad D\xi=\sigma^2.$

$$M|\xi-a|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

10.21. а) $a=\frac{1}{2}$; б) $F(x)=\begin{cases}1, & x>\pi/2,\\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\pi/2\le x\le \pi/2,\\ 0, & x<-\pi/2.\end{cases}$ в) $\frac{\sqrt{2}}{4}.$

10.22. а) $a=\frac{1}{2}$; б) $F(x)=\begin{cases}1, & x>2,\\ x^2/4, & 0<x\le 2,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

10.23. а) $F(x)=\begin{cases}1, & x>1,\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$ б)

10.24. $M\xi=4/3$; $D\xi=2/9$; $P\{|\xi-M\xi|<0,5\}=2/3.$

10.25. $M\xi=1, \quad D\xi=\frac{1}{6}.$

10.26. $M\xi = 0;\ \ D\xi = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.$

10.27. а) $1/2$; б) $e-1$.

10.28. $M\min\left(|\xi|,1\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\min\left(|x|,1\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\ln 2.$

10.33. $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1-|x|, & |x| \le 1. \end{cases}$

10.34. а) $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1), \\ \ln x, & x \in (0,1); \end{cases}$ б) $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1-|x|, & |x| \le 1; \end{cases}$

в) $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;1], \\ 2-2x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

10.35. а) $p_{\xi-\eta}(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$; б) $p_{|\xi-\eta|}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

10.36. $p_{\xi\eta}(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$

10.39. а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0; \end{cases}$ б) $p(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x > 0;$ в) не існує.

10.40. $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-u-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(u-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}du.$

Позначимо $z = u - a_2,\ w = x - a_1 - a_2$. Тоді $p_{\xi_1+\xi_2}(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left[z\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - w\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right]^2 + \frac{w^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\right\}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}w^2/\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}(x-a_1-a_2)^2/\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}.$$

10.41—10.42. Доведення провести, використовуючи метод математичної індукції.

10.43. $p(x)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x>0.$

10.45. $p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[0,3], \\ \dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2, \\ \dfrac{1}{2}(3-x), & 2<x\le 3. \end{cases}$

10.46. $p(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \dfrac{1}{2}\left(1-e^{-\lambda(x+1)}\right), & -1<x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(e^{-\lambda(x-1)}-e^{-\lambda(x+1)}\right), & x>1. \end{cases}$

10.47. а) 0; б) $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

10.48. $\left(\alpha^2-\beta^2\right)/\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

10.49. а) так; б) не завжди; наприклад $P\{\xi=\pm1\}=\dfrac{1}{2}$; $P\{\xi=\pm1\}=\dfrac{1}{2}$, а $\eta=\xi\cdot\varsigma$. Ці випадкові величини попарно некорельовані, але $1=M\xi\varsigma\eta\ne M\xi\cdot M\varsigma\eta=0$.

Розділ 11

11.1. $P\{0,5<\xi<1,5\}=P\{|\xi-1|<0,5\}\ge 1-\dfrac{D\xi}{0,5^2}=0,84$.

11.2. Скористаємося нерівністю $P\{\xi\ge\varepsilon\}\le\dfrac{M\xi}{\varepsilon}$. $P\{\xi\ge 175\}\le\dfrac{55}{175}=\dfrac{11}{35}$.

11.3. $P\{\xi\le 200\}\ge 1-\dfrac{75}{200}=0,625$.

11.4. а), б), г), е), є) – виконуються; в), д) – не виконуються.

11.5. $\alpha < 0{,}5.$

11.6. $\ln \eta_n = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k \to 0$ за ймовірністю в силу ЗВЧ. Тут використали те, що $M \ln \xi_k = \int_0^1 \ln x dx = -1$ і $\eta_n \to 1$ за ймовірністю.

11.7. $e^c, c = \int_0^{+\infty} \ln x e^{-x} dx.$

11.8. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з рівномірним розподілом на $[0,1]$.

В силу ЗВЧ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \to M\xi_1 = \frac{1}{2}, n \to \infty$ за ймовірністю і $f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to f\left(\frac{1}{2}\right), n \to \infty$ за ймовірністю для будь-якої неперервної функції. Згідно з теоремою Лебега, якщо $f(x)$ — обмежена функція, то

$$Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to Mf\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), n \to \infty.$$

Але $Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$

11.9. $e^{-m/2}.$

11.10. $2^{-m}.$

11.11. –1.

11.12. Закон великих чисел та центральна гранична теорема виконуються.

11.13. При $\alpha \geq -1/2$. $M\xi_k = 0, \quad D\xi_k = k^{2\alpha}, \quad M|\xi_k|^3 = k^{3\alpha},$

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} \sim \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}, \text{ при } 2\alpha + 1 > 0.$$

При $\alpha = -1/2$ $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, а при $\alpha < -1/2$ B_n^2 обмежена при $n \to \infty$.

Аналогічно при $\alpha > -1/3$ $C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^{3\alpha} \sim \frac{n^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}$,
а при $\alpha = -1/3$ $C_n^3 \sim \ln n$, і при $\alpha < -1/3$ обмежена.

Оскільки при $\alpha > -1/2$ $n^{3\alpha+1} = o\left(n^{3\alpha+3/2}\right)$, то $C_n^3 = o\left(B_n^3\right)$ і умова Ляпунова виконана. При $\alpha < -1/2$ не виконується умова рівномірної малості.

При $\alpha = -1/2$ також $C_n^3 = o\left(B_n^3\right)$.

11.14. Не виконується.

11.15. $0,5 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda}}\right)$.

Розділ 12

12.1. а) 2,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,7,10,10;

б)

y_i	2	3	4	5	7	10
m_i	3	3	4	2	1	2

12.2. а) $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 1/14, & 2 < x \le 5; \\ 4/14, & 5 < x \le 7; \\ 6/14, & 7 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$

б) $$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 8/60, & 0<x\le 1;\\ 25/60, & 1<x\le 2;\\ 41/60, & 2<x\le 3;\\ 51/60, & 3<x\le 4;\\ 57/60, & 4<x\le 5;\\ 59/60, & 5<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

12.4. $M\xi_{(1)}=b-\dfrac{n}{n+1}(b-a)$,

$$M\xi_{(n)}=a+\frac{n}{n+1}(b-a),$$

$$D\xi_{(1)}=D\xi_{(n)}=\frac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2},$$

$$\operatorname{cov}\left(\xi_{(1)},\xi_{(n)}\right)=\frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Розділ 13

13.1. $\overline{x}=16,46;\ M_0=M_e=16;\ \hat{S}^2\approx 4,92.$

13.2. $\overline{x}=11,16;\ M_0=11;\ M_e=10,75;\ \hat{S}^2\approx 16,4.$

13.3. $\overline{x}=3,2;\ M_0=0$ *та* $6;\ M_e=3;\ \hat{S}^2\approx 5,96.$

13.4. Скористатися тим, що $M\left|\xi_i-a\right|=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma.$

13.5. Скористатися тим, що $\xi_1+\xi_2$ має розподіл $N\left(0,2\sigma^2\right)$.

13.6. Скористатися тим, що $\xi_1-\xi_2$ має розподіл $N\left(0,2\sigma^2\right)$.

13.7. $\hat{a}_n=\dfrac{1}{n-1}\left(n\xi_{(1)}-\xi_{(n)}\right),\quad \hat{b}_n=\dfrac{1}{n-1}\left(n\xi_{(n)}-\xi_{(1)}\right).$

13.8. Незміщеними і спроможними оцінками $\frac{a+b}{2}$ будуть статистики $\overline{\xi}$ і $\frac{\xi_{(1)}+\xi_{(n)}}{2}$; незміщеною і спроможною оцінкою для $(b-a)$ буде статистика $\frac{(n+1)}{(n-1)}\left(\xi_{(n)}-\xi_{(1)}\right)$. Використати результати задачі 12.4.

13.9. $\frac{n+1}{2(n-1)}$.

13.10. $\hat{\theta}_n = \min\limits_{1\le i\le n}\xi_i + \frac{1}{n+1} = \xi_{(1)} + \frac{1}{n+1}$.

13.11. Показати, що $M\min\limits_{1\le i\le n}\xi_i = \theta + \frac{1}{n}$.

Розділ 14

14.1. Скористатися тим, що $I(\theta) = \frac{n}{\theta}$.

14.6. $T(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, $p_T(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x/\theta}\cdot\frac{1}{\theta^n}$.

14.7. $C(\theta) = \frac{1}{\theta}\left(1-e^{-\theta^2}\right)$, $T(\zeta) = \left(\max\limits_{1\le i\le n}\xi_i;\ \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right)$.

14.8. $T(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $T(\zeta)$ має розподіл Пуассона з параметром $n\theta$.

14.9. $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$,

14.10. $M\xi = e^{a+\sigma^2/2}$; $D\xi = e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$,

$$T(\zeta) = \left(\prod_{i=1}^{n}\xi_i,\ \sum_{i=1}^{n}\ln^2\xi_i\right).$$

Розділ 15

15.1. $\hat{\theta}_n = \overline{\xi}$ — незміщена та спроможна оцінка.

15.2. $\hat{\theta}_n^2 = \dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ — незміщена і спроможна оцінка.

15.3. $\hat{a}_n = \dfrac{\alpha_2 - 1}{\overline{\xi}}$, $\hat{b}_n = 1 - \dfrac{\overline{\xi}^2}{\alpha_2 - 1}$, де $\alpha_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2$.

15.4. $k(\theta) = \dfrac{3}{\theta^3}$, $\hat{\theta}_n = \dfrac{1}{\Gamma\left(4/3\right)}\cdot\overline{\xi}$. Оцінка максимальної правдоподібності —

$$\hat{\theta}_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^3}.$$

15.5. $\hat{\theta}_n = \overline{\xi} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ — незміщена й ефективна оцінка.

15.6. $\hat{\beta} = \dfrac{\overline{\xi}}{\alpha_2 - \overline{\xi}^2}$, $\hat{m} = \dfrac{\overline{\xi}^2}{\alpha_2 - \overline{\xi}^2}$, де $\alpha_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$. Ці оцінки спроможні. У числовому прикладі $\hat{m} = 1{,}678$, $\hat{\beta} = 4{,}79$.

15.7. $\hat{\theta}_n = \dfrac{-\overline{\xi} + \sqrt{\overline{\xi} + \dfrac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}{2}$.

15.8. $\hat{\theta}_n = \dfrac{\zeta}{n}$.

15.11. $\boldsymbol{\hat{\theta}_n = \overline{\xi} + 1}$ — незміщена й ефективна оцінка.

15.12. $\hat{\theta}_n = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i}$ — спроможна оцінка.

Розділ 16

16.1. $\hat{\theta}_n - \dfrac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\theta}_n\left(1-\hat{\theta}_n\right)} < \theta < \hat{\theta}_n + \dfrac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\theta}_n\left(1-\hat{\theta}_n\right)}$, $\qquad \hat{\theta}_n = \dfrac{\zeta}{n}$.

16.2. $0{,}304 < \theta < 0{,}496$.

16.3. $1{,}53 < \theta < 2{,}47$.

16.4. $\dfrac{\overline{\xi}}{1 + \dfrac{2C_\alpha}{\sqrt{n}}} < \theta < \dfrac{\overline{\xi}}{1 - \dfrac{2C_\alpha}{\sqrt{n}}}$

16.5. а) $I\left(\theta\right)=\dfrac{n}{\theta\left(\theta+1\right)};\quad \hat{\theta}_n=\bar{\xi}.$

$$\bar{\xi}-\frac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{\xi}\left(\bar{\xi}+1\right)}<\theta<\bar{\xi}+\frac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{\xi}\left(\bar{\xi}+1\right)}.$$

б) $I\left(\theta\right)=\dfrac{n}{\theta\left(\theta-1\right)},\quad \hat{\theta}_n=\bar{\xi}+1.$

$$\bar{\xi}+1-\frac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{\xi}\left(\bar{\xi}+1\right)}<\theta<\bar{\xi}+1+\frac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{\xi}\left(\bar{\xi}+1\right)}.$$

16.6. а) $1,325<a<2,675;\quad 0,951<\sigma^2<4,074.$

16.7. $14,23<\alpha<19,37.$

16.8. $6,31<\sigma^2<18,81.$

16.10. $\dfrac{\bar{\xi}}{1+\dfrac{C_\alpha}{\sqrt{n}}}<\theta<\dfrac{\bar{\xi}}{1-\dfrac{C_\alpha}{\sqrt{n}}}.$

16.11. $0,7216<p<0,8784.$

Розділ 17

17.1. а) $\chi_n^2=0,6;\ \chi^2_{3;0,05}=7,8;\ 0,6<7,8,$ гіпотеза приймається.

17.3. б) $\chi_n^2=6,22;\ \chi^2_{4;0,01}=13,3;\ 6,22<13,3,$ гіпотеза приймається;

д) $\chi_n^2=1,66;\ \chi^2_{1;0,05}=3,8;\ 1,66<3,8,$ гіпотеза приймається.

17.4. $\lambda_n=0,581;\ \lambda_{0,1}=1,224;\ 0,581<1,224,$ гіпотеза приймається.

17.5. $\chi_n^2=2,07;\ \chi^2_{3;0,05}=7,8;\ 2,07<7,8,$ гіпотеза приймається.

17.6. $\lambda_n=1,3;\ \lambda_{0,05}=1,358;\ 1,3<1,358,$ гіпотеза однорідності приймається.

17.7. $\lambda_n=0,58;\ \lambda_{0,01}=1,627;\ 0,58<1,627,$ гіпотеза однорідності приймається.

17.8. $\chi_n^2=3,75;\ \chi^2_{1;0,1}=2,7;\ 3,75>2,7,$ гіпотеза незалежності відхиляється.

17.9. $\chi_n^2=20,48;\ \chi^2_{2;0,05}=6,0;\ 20,48>6,0,$ гіпотеза незалежності відхиляється.

17.10. $\chi_n^2=0,696;\ \chi^2_{1;0,1}=2,7;\ 0,696<2,7,$ гіпотеза незалежності приймається.

17.11. $\chi_n^2 = 3,43$; $\chi_{3;0,05}^2 = 7,8$; $3,43 < 7,8$, гіпотеза однорідності приймається.

17.12. $\chi_n^2 = 1,6$; $\chi_{1;0,05}^2 = 3,8$; $1,6 < 3,8$, гіпотеза приймається.

Розділ 18

18.1. а) $t = 0,94$; $t_{18;0,05} = 2,10$; $0,94 < 2,1$, гіпотеза про рівність математичних сподівань приймається;

б) $t = 1,67$; $t_{12;0,05} = 2,18$; $1,67 < 2,18$, гіпотеза про рівність математичних сподівань приймається.

18.2. $C = 0,43$; $C_\alpha = 1,96$; $0,43 < 1,96$, розбіжність між середніми пояснюється випадковими причинами.

18.3. а) $t = 3,26$, $t_{9;0,95} = 2,26$; $3,26 > 2,26$, гіпотеза про рівність математичних сподівань відхиляється;

б) $F = 2,45$; $F_{(0,05;\,4;\,5)} = 5,19$; $F < F_{(0,05;\,4;\,5)}$, гіпотеза про рівність дисперсій приймається.

18.4. $C = 1,325$; $C_\alpha = 2,57$; $C < C_\alpha$, гіпотеза про рівність математичних сподівань приймається.

18.5. $F = 2,05$; $F_{(0,05;\,10;\,14)} = 2,60$; $F < F_{(0,05;\,10;\,14)}$, гіпотеза про рівність дисперсій приймається.

18.6. $t_n = 1,42$; $t_{16;\,0,95} = 2,12$; $1,42 < 2,12$, гіпотеза приймається.

Розділ 19

19.3. $y = 2,3 + \dfrac{0,9}{x}$; $\hat{a}_0 = 2,3$; $\hat{a}_1 = 0,9$; $1,38 < a_0 < 3,21$;

$0,51 < a_1 < 1,29$; $\hat{\rho} = 0,985$.

19.4. $y = 4 + 0,65x$, $\hat{a}_0 = 4$; $\hat{a}_1 = 0,65$; $1,979 < a_0 < 6,021$;

$0,2802 < a_1 < 1,0198$; $\hat{\rho} = 0,982$.

19.5. $\hat{\rho} = 0,882$.

19.6. $y = 0,1 + 2,4x$, $\hat{a}_0 = 1$; $\hat{a}_1 = 2,4$; $-2,13 < a_0 < 2,33$;

$1,792 < a_1 < 3,008$; $\hat{\rho} = 0,996$.

19.7. $\hat{\rho} = 0,922$.

19.8. $\hat{\rho} = 0,882$.

Розділ 20

20.1. $F = 3,65$; $F_{(0,05;\,3;\,16)} = 3,24$; $F > F_{(0,05;\,3;\,16)}$, вплив фактора *A* суттєвий.

20.2. $F_A = 0,67$; $F_{(0,05;\,1;\,2)} = 18,51$. Оскільки $0,67 < 18,51$, то вплив фактора *A* несуттєвий.

$F_B = 1,32$; $F_{(0,05;\,2;\,2)} = 19$. Оскільки $1,32 < 19$, то вплив фактора *B* несуттєвий.

20.3. $F_A = 25$; $F_{(0,05;\,1;\,2)} = 18,51$. Оскільки $25 > 18,51$, то вплив фактора *A* суттєвий.

$F_B = 4,3$; $F_{(0,05;\,2;\,2)} = 19$. Оскільки $4,3 < 19$, то вплив фактора *B* несуттєвий.

Розділ 21

21.1.

	3-I	3-II	3-III	3-IV	RMSE	MAD	RMSPE	MAPE
Експо-ненціал.	1213,0	1213,0	1213,0	1213,0	232,7	232,5	23,7%	23,7%
Холт—Вінтерс	1234,2	1253,4	1272,7	1291,9	283,1	282,6	28,9%	28,8%

21.2.

	3-I	3-II	3-III	3-IV	RMSE	MAD	RMSPE	MAPE
Експо-ненціал.	497,2	497,2	497,2	497,2	162,0	139,1	23,5%	20,3%
Холт—Вінтерс	527,8	559,4	590,9	622,5	129,7	122,3	20,5%	19,4%

21.3.

	3-I	3-II	3-III	3-IV	RMSE	MAD	RMSPE	MAPE
Експо-ненціал.	–382,6	–382,6	–382,6	–382,6	317,6	250,6	189,6%	118,0%
Холт—Вінтерс	–299,6	–228,7	–157,9	–87,0	261,5	222,0	90,9%	72,4%

21.4.

	3-I	3-II	3-III	3-IV	RMSE	MAD	RMSPE	MAPE
Експо-ненціал.	3842,2	3842,2	3842,2	3842,2	467,6	417,5	14,3%	12,6%
Холт—Вінтерс	3917,6	3985,9	4054,3	4122,6	648,2	595,4	19,8%	17,9%

21.5.

	З-I	З-II	З-III	З-IV	RMSE	MAD	RMSPE	MAPE
Експо-ненціал.	4940,7	4940,7	4940,7	4940,7	922,9	869,9	23,9%	22,1%
Холт—Вінтерс	4923,6	4908,7	4893,9	4879,0	880,3	830,5	22,8%	21,1%

21.6.

Стаття	AR(1)-процес	RMSE	MAD	RMSPE	MAPE
Експорт послуг	$x_t = 1762 - 0,44x_{t-1}$	237,96	237,6	24,3%	24,2%
Імпорт послуг	$x_t = 143 + 0,79x_{t-1}$	86,93	68,8	16,1%	11,9%
Експорт товарів	$x_t = 4765 - 0,22x_{t-1}$	521,41	468,7	15,9%	14,1%
Імпорт товарів	$x_t = 6825 - 0,39x_{t-1}$	905,36	855,7	23,5%	21,7%
Баланс товарів та послуг	$x_t = -270 + 0,03x_{t-1}$	308,30	240,8	152,8%	97,3%

21.7. $y_t = 299,86 + 41,51t$.

Додатки

Таблиця 1. Значення функції Гауса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ **(** $\varphi(-x)=\varphi(x)$ **)**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3443	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

($\Phi(-x)=-\Phi(x)$ **)**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39766	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44636	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47726	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48311	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48986	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49124	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49439	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	3,5	0,49977		4,0	0,499968				
3,1	49903	3,6	49984		4,5	499997				
3,2	49931	3,7	49989		5,0	49999997				
3, 3	49952	3,8	49993							
3,4	49966	3,9	49995							

Таблиця 3. Розподіл Пуассона. Значення функції $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9018	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5458	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003
k	λ								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Таблиця 4. Значення C_α

$1-\alpha$	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
C_α	1,28	1,64	1,96	2,57	3,29

Таблиця 5. Значення $\chi^2_{k,\alpha}$ **залежно від імовірності** $P\left\{\chi^2(k) \geq \chi^2_{k,\alpha}\right\} = \alpha$ **і числа степенів свободи** k **. Щільність розподілу** $\chi^2(k)$ **дорівнює:** $P_{\chi^2(k)}(x) = \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}}, x > 0$

k \ $1-\alpha$	0,01	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
1	0,00016	0,0039	0,016	2,7	3,8	6,6
2	0,020	0,103	0,211	4,6	6,0	9,2
3	0,115	0,352	0,584	6,3	7,8	11,3
4	0,30	0,71	1,06	7,8	9,5	13,3
5	0,55	1,14	1,61	9,2	11,1	15,1
6	0,87	1,63	2,20	10,6	12,6	16,8
7	1,24	2,17	2,83	12,0	14,1	18,5
8	1,65	2,73	3,49	13,4	15,5	20,1
9	2,09	3,32	4,17	14,7	16,9	21,7
10	2,56	3,94	4,86	16,0	18,3	23,2
11	3,1	4,6	5,6	17,3	19,7	24,7
12	3,6	5,2	6,3	18,5	21,0	26,2
13	4,1	5,9	7,0	19,8	22,4	27,7
14	4,7	6,6	7,8	21,1	23,7	29,1
15	5,2	7,3	8,5	22,3	25,0	30,6
16	5,8	8,0	9,3	23,5	26,3	32,0
17	6,4	8,7	10,1	24,8	27,6	33,4
18	7,0	9,4	10,9	26,0	28,9	34,8
19	7,6	10,1	11,7	27,2	30,1	36,2
20	8,3	10,9	12,4	28,4	31,4	37,6
21	8,9	11,6	13,2	29,6	32,7	38,9
22	9,5	12,3	14,0	30,8	33,9	40,3
23	10,2	13,1	14,8	32,0	35,2	41,6
24	10,9	13,8	15,7	33,2	36,4	43,0
25	11,5	14,6	16,5	34,4	37,7	44,3
26	12,2	15,4	17,3	35,6	38,8	45,6
27	12,9	16,2	18,1	36,7	40,1	47,0
28	13,6	16,9	18,9	37,9	41,3	48,3
29	14,3	17,7	19,8	39,1	42,6	49,6
30	15,0	18,5	20,6	40,3	43,8	50,9

Таблиця 6. Значення t_α для розподілу Стьюдента залежно від імовірності $P\left\{\left|t_k\right| < t_\alpha\right\} = 1-\alpha$ і числа степенів свободи k. Щільність розподілу дорівнює: $P_{t_k}\left(x\right) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \cdot \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

k \ $1-\alpha$	0,90	0,95	0,99
1	6,31	12,71	63,7
2	2,92	4,30	9,92
3	2,35	3,18	5,84
4	2,13	2,77	4,60
5	2,02	2,57	4,03
6	1,943	2,45	3,71
7	1,895	2,36	3,50
8	1,860	2,31	3,36
9	1.833	2,26	3,25
10	1,812	2,23	3,17
11	1.796	2,20	3,11
12	1,782	2,18	3,06
13	1,771	2,16	3,01
14	1,761	2,14	2,98
15	1,753	2,13	2,95
16	1,746	2,12	2,92
17	1,740	2,11	2,90
18	1,734	2,10	2,88
19	1,729	2,09	2,86.
20	1,725	2,09	2,84
25	1,708	2,06	2,79
30	1,697	2,04	2,46
80	1,659	1,991	2,640
100	1,651	1,984	2,627
∞	1,645	1,960	2,576

Таблиця 7. Розподіл Фішера-Снедекора. Значення $F_{(\alpha,k_1,k_2)}$ залежно від імовірності $P\left\{F_{k_1,k_2} \ge F_{(\alpha,k_1,k_2)}\right\} = \alpha$ і числа степенів свободи (k_1,k_2) і щільність розподілу F_{k_1,k_2} дорівнює

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \frac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(\frac{k_1 x}{k_2}+1\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad x>0, \ \alpha = 0,05$$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	9	10
1	161	200	216	225	230	241	242
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,38	19,39
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,81	8,78
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,78	4,74
6	5,99	5,14	4,76	.4,53	4,39	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,68	3,63
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,39	3,34
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,18	3,13
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,02	2,97
11	4,84	3,98	3,56	3,36	3,20	2,90	2,86
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	2,80	2,76
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,65	2,60
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,54	2,49
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,40	2,35
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,21	2,16
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,07	2,02
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	1,97	1,92
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	1,88	1,83

Продовження табл.7

k_2 \ k_1	20	50	100	∞	k_2 \ k_1	20	50	100	∞
1	248	252	253	254	10	2,77	2,64	2,59	2,54
2	19,44	19,47	19,49	19,50	11	2,65	12,50	2,45	2,40
3	8,66	8,58	8,56	8,53	12	2,54	2,40	2,25	2,30
4	5,80	5,70	5,66	5,63	14	2,39	2,24	2,19	2,13
5	4,56	4,44	4,40	4,36	16	2,28	2,13	2,07	2,01
6	3,87	3,75	3,71	3,67	20	2,12	1,96	1,90	1,84
7	3,44	3,32	3,28	3,23	30	1,93	1,76	1,69	1,62
8	3,15	3,03	2,98	2,93	50	1,78	1,60	1,52	1,44
9	2,93	2,80	2,76	2,71	100	1,68	1,48	1,39	1,28
					∞	1,57	1,35	1,24	1,00

Таблиця 8. Критичні значення λ_α для розподілу Колмогорова

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Література

Підручники, навчальні посібники та монографії

1.*Анісімов В. В., Черняк О. І.* Математична статистика. – К.: МП «Леся», 1995.

2.*Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976.

3. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып.1, 2. – М.: Мир, 1974.

4. *Большов Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.

5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.

6. *Боровков А.А.* Математическая статистика. – М.: Наука, 1984.

7. *Ван дер Варден.* Математическая статистика. – М.: Мир, 1960.

8.Волощенко А. Б., Джалладова І. А. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисципліни / Київський національний економічний ун-т – К. : КНЕУ, 2003.

9. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа. Головне вид-во,1988.

10. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. 7-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 1999.

11. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – 6-е изд. – М.: Наука,1988.

12. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод.посібник. У 2ч. – Ч.І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2007.

13. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1984.

14.*Карташов М.В.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.:, ТВіМС, 2004.

15.*Карташов М.В.* Ймовірність, статистика, випадкові процеси. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008.

16. *Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В.* Теория вероятностей. – К.: Вища школа, 1990.

17. *Колемаев В.А., Староверова О.В., Турундаевский В.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991.

18. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир,1975.

19. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студ. вузов, обучающихся по экон. спец. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.

20. *Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995.

21. Математическая статистика /Под ред. *Длина А. М.* – М.: Высшая школа, 1975.

22. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985.

23. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: підруч. – 2-ге вид., перероб., доп. – К. : Знання, 2007.

24. *Скороход А.В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1980.

25. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – 3-е изд. – М.: Мир, 1984.—Т.1, 2.

26.*Черняк О.І., Кравець Т.В., Банна О.Л., Полосьмак О.Л.* Теорія ймовірностей та математична статистика: навчально-методичний комплекс для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форми навчання. Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.: ВПЦ „Київський університет”, 2013.

27.*Черняк О.І., Кравець Т.В., Ляшенко О.І., Буяк Л.М., Банна О.Л., Башуцька О.С.* Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум: навчальний посібник. – Тернопіль: ТНЕУ, 2019.

28. *Шефтель З. Г.* Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994.

29. *Ширяев.* Вероятность. – М.: Наука, 1980.

30. *McClave J.T., Benson P.G.* Statistics for business and economics. – 6ed. Dellen. Macmillan, 1994.

Збірники задач

1. *Володин Б. Г., Ганин М. Н., Динер И. Я. и др.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике и теории случайных функций /Под. ред. *Свешникова А. А.* – М.: Наука, 1970.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособие для студентов вузов. – М.: Высш.шк., 2002.

3. *Климов Г.П., Кузьмин А.Д.* Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями. – М.: Изд-во МГУ, 1985.

4. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М., Наука,1986.

5. *Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1980.

6. Теорія ймовірностей: Збірник задач. /За ред. *А.В. Скорохода.* – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1976.

7. *Турчин В.М.* Математична статистика в прикладах і задачах. – К.: НМК ВО, 1993.

8. *Черняк А.И.* Методические указания и учебные задания для самостоятельной работы по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” для студентов факультета кибернетики. – К.: Вид-во КГУ, 1988.

9.Черняк О.І., Обушна О.М.,Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач. – К.:Знання,2002.