

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.10>

Пашук І.О.¹, студ.
Лівінська Г.В.¹, к.ф.-м.н., доц.

Моделювання функцій життєдіяльності та смертності по даних для населення України

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: pashchuk.ira@gmail.com
livinskaav@gmail.com

I.O. Pashchuk¹, stud.
H.V. Livinska¹ Ph.D.(Phys.-Math.), Ass.Professor

Modeling of health and mortality func- tions based on data for the population of Ukraine

¹ Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkov ave, 4d,
e-mail: pashchuk.ira@gmail.com
livinskaav@gmail.com

В роботі наведено підхід до моделювання наборів даних таблиці життя. Також досліджуються межі очікуваної тривалості життя на основі стохастичного моделювання смертності та застосування теорії першого досягнення критично низького рівня.

Ключові слова: Функція стану здоров'я, стохастичне моделювання, модель Гомперца, час першого досягнення критичного рівня, інтенсивність смертності.

In the work the approach to modeling of data sets of the life table is given. Life expectancy limits based on stochastic mortality modeling and the application of the critically low first achievement theory are also investigated. Particular attention is paid to the representation of the function of health, together with a well-established theory of the Force of Mortality, as well as life tables. The parameters of the model are estimated and analyzed according to the data of demographic tables for the population of Ukraine.

Key words: The State Health function, stochastic modeling, Gompertz model, the first exit time, the Force of Mortality.

Вступ. Динаміка старіння населення — напрямок у вивченні старіння за допомогою методів популяційної динаміки, тобто вивчення вікової структури старіючих біологічних популяцій і того, як ця залежність змінюється залежно від типу організму та умов середовища. Найбільший інтерес представляє динаміка старіння в різних організмах, включаючи людей, де старіння відбувається та прогресує через тривалий час після статевого дозрівання. Популяційні методи враховують залежність чисельності популяції від біологічного віку. Метою такого підходу є виявлення закономірностей у часі на основі чисельності популяції, яка використовується для визначення швидкості процесу старіння. У свою чергу, ці дані можуть бути використані для перевірки моделей старіння, отриманих від фізіологічних і

генетичних механізмів або за допомогою загальних системних механізмів.

Також на основі даних про смерть та популяцію можна дослідити стан здоров'я людини. Здоров'я людини можна розглядати як стохастичну змінну, оскільки воно тісно пов'язане з невизначеністю, обумовленою різними факторами як навколишнього середовища, так і внутрішнього механізму та інформації, що міститься в ДНК і генах. Ймовірність раптових змін стану здоров'я людини внаслідок захворювань чи нещасних випадків досить велика, що підтверджує припущення, що стан здоров'я людини можна розглядати як стохастичну змінну. Смерть настає, коли траєкторія стохастичного процесу, який описує стан здоров'я, вперше перетинає

нульову лінію, що представляє нульовий рівень життєвої сили або нульовий стан здоров'я.

Перші моделі старіння. Однією з перших і найпоширеніших математичних моделей, що використовуються для опису старіння багатьох організмів, є так званий закон смерті Гомперца-Мейхама, або скорочено Гомперца, згідно з яким ймовірність смерті з віком зростає експоненційно:

$$p = a + b^x \quad (1)$$

де x — вік, a і p — ймовірність смерті за певний проміжок часу, a і b — коефіцієнти.

Таким чином, розмір популяції знижується з віком за подвійною експонентою:

$$s(x) = \exp[-m(b^x + c)] \quad (2)$$

Закон Гомперца-Макхема найкраще описує динаміку смертності людей у віковому діапазоні 30-80 років. У літніх людей смертність зростає не так швидко, як цей закон смертності, явище, відоме як зниження смертності в більш пізньому віці.

Наприкінці 20 століття почали з'являтися багато нових моделей смертності населення. Наявність великої кількості нових даних (часто для гетерогенних популяцій) призвело до нових способів аналізу таблиць смертності. Оскільки лінійне зниження функцій організму відоме давно, необхідно співвідносити цю тенденцію з віком експоненційного зростання та відносною смертністю. Першим поясненням цього явища була модель Стрелера-Мілдвана.

Модель Стрелера-Мілдвана пропонує обґрунтування експоненціального збільшення інтенсивності смертності $\mu(t)$, і описує деякі формальні властивості кривої смертності Гомперца:

$$\mu(t) = ae^{bt} \quad (3)$$

Протягом кількох десятиліть кореляція теорії Стрелера-Мілдвана вважалася універсальним демографічним законом, дійсним як для даних про період, так і для когортної смертності. Проте деякі відхилення від цієї моделі також спостерігалися.

Систематичний збір інформації про народжуваність та смертність в країнах дали початок теоретичним і прикладним дослідженням як у якісних, так і в кількісних галузях демографії, ймовірності та статистики,

прикладної математики, а останнім часом і комп'ютерних досліджень та моделювання.

Стан здоров'я або життєздатність організму можна оцінити за наборами даних про народження та смерть. З точки зору якісних досліджень можна сказати, що гарний стан здоров'я населення призведе до збільшення тривалості життя. Проте кількісна відповідь має включати дані народжуваності та смертності.

Але як кількісно оцінити та змоделювати стан здоров'я населення, передбачивши функцію стану здоров'я за віком? Причина відсутності розвитку кількісної теорії переважно пов'язана з тим, що здоров'я людини — це стохастичний процес, а смерть — це "кінець" цього процесу, коли стан здоров'я падає нижче межі, що називається бар'єром, тобто в момент першого досягнення рівня (бар'єра) цим стохастичним процесом. В подальшому для стохастичного процесу, пов'язаного зі станом («кількістю») здоров'я людини, момент першого досягнення критично низького рівня будемо називати «моментом (або часом) першого виходу».

Стохастична модель і пов'язані з нею параметри. Смерть виникає як наслідок втрати життєвих сил або здоров'я, що можна розглядати як випадковий процес. Змоделювати цей процес можна простим стохастичним диференціальним рівнянням[1]:

$$dS_t = \mu_t^* dt + \sigma_t dW_t \quad (4)$$

Тут S_t — це стан здоров'я або життєва сила людини, μ_t^* — функція, що виражає втрату життєвих сил або швидкість зниження стану здоров'я залежно від віку t , σ_t — дисперсія здоров'я людини, яка вважається сталою для даної моделі, $W(t)$ — стандартний вінерівський процес.

Шляхом прямого інтегрування S_t визначатиметься як:

$$S_t = S_0 + \int_{t_0}^t \mu_s^* ds + \sigma_s [W_t - W_0] \quad (5)$$

де S_0 — значення S_t у момент $t = 0$. Тепер наше головне завдання — отримати аналітичний вигляд функції μ_t^* . Вважаємо, що математичне сподівання значення S_t є функцією $H = H_t$, заданою формулою

$$H_t = E|S_t| = S_0 + \int_{t_0}^t \mu_s^* ds \quad (6)$$

ми отримаємо

$$\mu_t^* = \frac{dH_t}{dt} \quad (7)$$

де H_t – функція стану здоров'я.

Основна проблема тут полягає не в тому, щоб знайти розв'язок (4), а в переході до щільності неперервної випадкової величини. З (4) ми можемо перейти до пов'язаного диференціального рівняння Фоккера-Планка [1]:

$$\frac{\partial p(S_t, t)}{\partial t} = -\mu_t^* \frac{\partial p(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 p(S_t, t)}{\partial S_t^2} \quad (8)$$

Розв'язок, буде мати вигляд:

$$p(t) = \frac{1}{[2\pi \int_0^t \sigma_s^2 ds]^{1/2}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2 \int_0^t \sigma_s^2 ds}} \quad (9)$$

Для сталого значення σ ця формула набуває вигляд

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (10)$$

Знаходження функції щільності, що виражає розподіл часу першого досягнення критично низького рівня надано Е. Шредінгером [2] і М. Смолуховським [3] у двох роботах, опублікованих незалежно в одному номері журналу. Пізніше А. Зігерт [4] дав інтерпретацію, ближчу до нашого сучасного позначення, тоді як в роботах [3]-[7] дано найцікавішу форму функції щільності першого виходу. Для простого випадку, представленого раніше (9), запропонована форма:

$$g(t) = \frac{|a|}{t} p(a, t) = \frac{|a|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2 t}} \quad (11)$$

К. Дженнен [5] запропонував більш загальну форму для випадку криволінійної межі, використовуючи дотичну апроксимацію щільності першого виходу. Застосування цієї теорії до моделювання смертності призводить до наступної форми [1], [8]:

$$g(t) = \frac{|H_t - tH_t'|}{t} p(t) = \frac{|H_t - tH_t'|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (12)$$

Як бачимо з останньої формули $|H_t - tH_t'|$ враховує локальну лінеаризацію і в кількох випадках може розглядатися як константа. У цьому випадку виникає простіша форма:

$$g(t) = \frac{k}{t} p(t) = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (13)$$

Або форма запропонована в [1]:

$$g(t) = \frac{k}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{(H_t)^2}{2t}} \quad (14)$$

Без втрати загальності ми можемо встановити $\sigma = 1$ в рівнянні (10) для $g(t)$ і продовжити використання простої форми моделі представленою в (14), де новий параметр $k = k^*/\sqrt{2\pi}$.

Тепер можемо перейти до оцінки форми невідомої функції стану здоров'я $H(t)$, підставивши в попереднє рівняння та виразивши $H(t)$ як функцію $g(t)$. Отримана функція має вигляд

$$H_t = \left[\left(-2t \ln \frac{g(t)\sqrt{t^3}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (15)$$

Щоб забезпечити позитивний знак члену в дужках у правій частині останньої формули, має виконуватись таке співвідношення:

$$k \geq g(t)\sqrt{t^3} \quad (16)$$

Необхідні дані для дослідження – це кількість померлих у віці x протягом року (dx), а також спостережувана чисельність населення за віком x в певному році (lx). Тоді інтенсивність смертності в точці x (у віці x) μ_x визначається як

$$\mu_x = \frac{dx}{lx} \quad (17)$$

Коли дані надані в термінах μ_x , ми переходимо до безпосереднього пошуку H_x . Оскільки в наших розрахунках нам потрібні дані для оцінки функції щільності ймовірності $g(x)$, ми можемо знайти цю функцію з визначення μ_x з формули

$$\mu_x = \frac{g(x)}{1 - \int_0^x g(t) dt} \quad (18)$$

Після перегрупування та диференціювання отримуємо

$$g_x = \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt} \quad (19)$$

Формула для g_x надає функцію щільності ймовірності $g(x)$ як функцію μ_x . Відповідно, ми можемо знайти наступну форму для функції стану здоров'я

$$H_x = \left[\left(-2x \ln \frac{\sqrt{x^3} \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (20)$$

Параметр k тепер визначається як

$$k = \max_{x \in (0; \infty)} (\sqrt{x^3} \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt}) \quad (21)$$

Моделювання на основі даних про населення для України. Дослідження проведено на основі даних наданих базою даних

про смертність людей <https://www.mortality.org/>. З вказаної бази даних було використано кількість померлих у віці x протягом року, а також спостережувана чисельність населення за віком x в певному році. Дане оціювання було проведено за допомогою середовища MS Excel.

Застосувавши формулу (20) було змодельовано функцію стану здоров'я для жінок та чоловіків України у 2000 році (Рисунок 1).

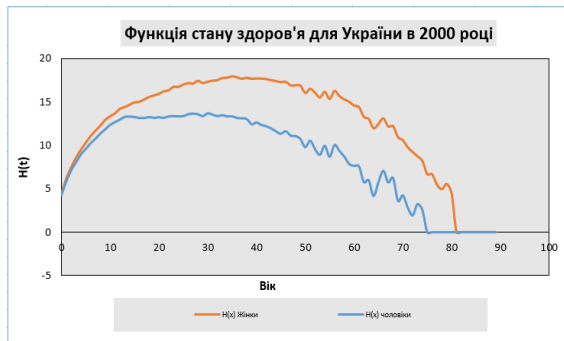


Рисунок 1 - Функція стану здоров'я чоловіків і жінок в Україні

Отримані графіки для $H(x)$ забезпечують несиметричну форму, подібну до параболи. Ця функція описує середнє значення стану здоров'я населення за конкретний рік як функцію віку. Стан здоров'я починається з низького рівня при народженні та зростає до максимального значення стану здоров'я, а потім знижується до нуля у віці максимальної смертності.

Оскільки графіки мають форму параболи для функції $H(x)$, ми можемо знайти вік x , де $H(x)$ отримує максимум. Для випадку України в 2000 році він становить $x=36$ років і $H(x)=17,94$ для жінок та $x=31$ рік і $H(x)=13,72$ для чоловіків.

Для спостереження зміни значення функції життєвості для України за даними в різні роки була побудована модель за формулою (20) для жінок (Рисунок 2) та чоловіків (Рисунок 3) України за період з 2000 року по 2012 рік з інтервалом в 2 роки.

На основі розрахунків та графіків спостерігається чітка тенденція зростання стану здоров'я жінок: при відносно сталому максимальному значенні функції стану здоров'я, вік максимального значення стану здоров'я підвищується (Таблиця 1). Також, помітно

різницю віку нульового значення стану здоров'я, в жінок він значно вищий, ніж в чоловіків (Таблиця 2).

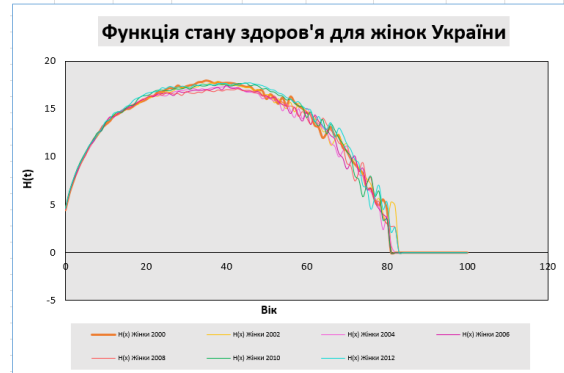


Рисунок 2 - Функція стану здоров'я (жінки 2000-2012р.)

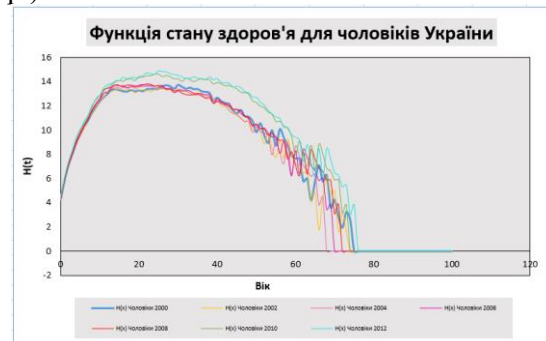


Рисунок 3 - Функція стану здоров'я (чоловіки 2000-2012р.)

| Рік | Максимальне значення функції $H(x)$ | Вік максимального значення стану здоров'я, р. | Вік нульового значення стану здоров'я, р. |
|------|-------------------------------------|---|---|
| 1990 | 18,3 | 37 | 83 |
| 1992 | 18,1 | 34 | 82 |
| 1994 | 17,7 | 41 | 82 |
| 1996 | 17,5 | 35 | 78 |
| 1998 | 18,1 | 36 | 80 |

| | | | |
|------|-------|----|----|
| 2000 | 17,94 | 36 | 82 |
| 2002 | 17,87 | 39 | 84 |
| 2004 | 17,32 | 41 | 83 |
| 2006 | 17,50 | 41 | 82 |
| 2008 | 17,09 | 44 | 84 |
| 2010 | 17,70 | 46 | 82 |
| 2012 | 17,75 | 47 | 84 |

Таблиця 1 - Порівняння значень функції стану здоров'я та років масимального і нульового стану здоров'я жінок в Україні

| Рік | Максимальне значення функції $H(x)$ | Вік максимального значення стану здоров'я, р. | Вік нульового значення стану здоров'я, р. |
|------|-------------------------------------|---|---|
| 1990 | 14,9 | 29 | 78 |
| 1992 | 14,3 | 31 | 74 |
| 1994 | 13,9 | 29 | 76 |
| 1996 | 13,6 | 32 | 72 |

Список використаних джерел

1. *Janssen J.* Dynamic modelling of life-table data/ J. Janssen and C. H. Skiadas// Applied Stochastic Models and Data Analysis - 1995, -11, N1. -P. 35-49.
2. *Schrödinger E.* Zur theorie der fall- und steigversuche an teilchenn mit Brownsche bewegung/ E. Schrödinger// Phys. Zeit. - 1915, -16. – P. 289-295.
3. *Smoluchowsky M.* Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung/ M. Smoluchowsky// Phys. Zeit. – 1915, -16, - P. 318.

| | | | |
|------|-------|----|----|
| 1998 | 14,0 | 31 | 80 |
| 2000 | 13,72 | 31 | 76 |
| 2002 | 13,44 | 29 | 75 |
| 2004 | 13,73 | 19 | 69 |
| 2006 | 13,76 | 22 | 71 |
| 2008 | 13,84 | 23 | 73 |
| 2010 | 14,64 | 26 | 75 |
| 2012 | 14,90 | 26 | 77 |

Таблиця 2 - Порівняння значень функції стану здоров'я та років масимального і нульового стану здоров'я чоловіків в Україні

Висновки. За результатами дослідження спостерігається чітка тенденція зростання стану здоров'я жінок: при відносно сталому максимальному значенні функції стану здоров'я, вік максимального значення стану здоров'я підвищується. Також, помітно різницю віку нульового значення стану здоров'я, в жінок він значно вищий, ніж в чоловіків. Така різниця зумовлена сукупністю факторів, які можна узагальнити способом життя. Найсуттєвіший негативний вплив на здоров'я спричиняють: алкоголь, куріння та неправильне харчування. Також чоловіки більш схильні до ризику та мають більш небезпечні форми зайнятості.

4. *Siebert, A.J.F.* On the first passage time probability problem/ A.J.F. Siebert// Physical Review – 1951, - 81, - P. 617-623.
5. *Jennen C.* Second-order approximation for Brownian first exit distributions/ C. Jennen// Ann. Probab. – 1985, - 13, - P. 126-144.
6. *Lerche H. R.* Boundary crossing of Brownian motion/ H. R. Lerche // SpringerVerlag – 1986.
7. *Jennen C.* First exit densities of Brownian motion through one-sided moving boundaries/ C. Jennen, C. Lerche and H. R. Lerche// Z. Wahrsch. Uerw – 1988, - 55, - P. 133-148.
8. *Skiadas C. H.* A modeling approach to life table data, in Recent Advances in Stochastic Modeling and Data

Analysis/ C. H. Skiadas and C. Skiadas// World Scientific – 2007, - P. 350–359.

References

1. J. JANSSEN & C. H. SKIADAS (1995) Dynamic modelling of life-table data. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. 11(1). p. 35-49.
2. E. SCHRÖDINGER (1915) Zur theorie d fall- und steigversuche an teilchenn mit Brownsche bewegung. *Phys. Zeit.*, 16. p. 289-295.
3. M. SMOLUCHOWSKY (1915) Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung. *Phys. Zeit.* 16. p. 318.
4. A.J.F. SIEGERT (1951) On the first passage time probability problem. *Physical Review*. 81. p. 617-623.
5. C. JENNEN (1985) Second-order approximation for Brownian first exit distributions. *Ann. Probab.* 13. p. 126-144.
6. H. R. LERCHE (1986) Boundary crossing of Brownian motion. *SpringerVerlag*.
7. C. JENNEN & C. LERCHE & H. R. LERCHE (1988) First exit densities of Brownian motion through one-sided moving boundaries. *Z. Wahrsch. Uerw.* 55. P. 133-148.
8. C. H. SKIADAS & C. SKIADAS (2007) A modeling approach to life table data, in Recent Advances in Stochastic Modeling and Data Analysis. *World Scientific*. p. 350-359.

Надійшла до редакції 23.03.2022