

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЛАХВА РОКСОЛАНА СТЕПАНІВНА

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ
СИСТЕМАМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Спеціальність 111 — Математика

Галузь знань 11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Р.С. Лахва

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор

Станжицький Олександр Миколайович

Київ – 2026

Анотація

Лавва Р. С. Задачі оптимального керування системами інтегро-диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2026.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач оптимального керування для деяких класів інтегро-диференціальних систем типу Вольтерри. Такі системи природно виникають при математичному моделюванні широкого кола процесів, де поточний стан залежить від інтегрального впливу попередніх моментів часу. Моделі цього типу застосовують у біології, економіці, термодинаміці, хімічній кінетиці, флюїдній динаміці та інших галузях. Актуальність теми зумовлена необхідністю розвитку методів оптимального керування для інтегро-диференціальних систем, які розширюють класичні підходи теорії керування на більш загальні еволюційні моделі.

Розвиток методів оптимального керування для інтегро-диференціальних систем має важливе теоретичне та прикладне значення. У теоретичному аспекті це пов'язано з необхідністю узагальнення класичних принципів оптимальності, зокрема принципу максимуму Понтрягіна та методу динамічного програмування Беллмана, на ширші класи систем з інтегральними залежностями. У прикладному аспекті це пов'язано з потребою розробки ефективних алгоритмів керування складними динамічними об'єктами, що описуються рівняннями Вольтерри. Важливим напрямом сучасних досліджень є встановлення умов існування оптимальних керувань і розроблення методів аналізу збіжності оптимальних розв'язків. Застосування методу усереднення у задачах оптимального керування дозволяє замінити вихідну задачу простішою усередненою моделлю, що полегшує аналітичне та чисельне дослідження. Попри значний прогрес у цьому напрямі,

питання існування оптимального керування для інтегро-диференціальних систем типу Вольтерри, а також обґрунтування збіжності оптимальних керувань і траєкторій при застосуванні методу усереднення залишаються відкритими й потребують подальших досліджень.

У дисертаційній роботі отримано нові результати, що стосуються існування оптимального керування для інтегро-диференціальних систем типу Вольтерри. Зокрема, вперше встановлено достатні умови існування оптимального керування для інтегро-диференціальних систем у термінах правих частин рівнянь та критерію якості на скінченному інтервалі. Такий підхід дозволив узагальнити відомі результати для звичайних диференціальних систем та поширити їх на випадок інтегро-диференціальних рівнянь. Доведено теорему існування розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних систем, аналогічну теоремі Каратеодорі для звичайних диференціальних рівнянь. Встановлено узгодженість між задачами оптимального керування на скінченному та нескінченному інтервалах, доведено слабку збіжність оптимальних керувань і точкову збіжність відповідних оптимальних траєкторій, що дає змогу обґрунтувати граничний перехід від задач із скінченним до нескінченного горизонту керування.

Окрему увагу приділено застосуванню методу усереднення до задач оптимального керування інтегро-диференціальними системами у лінійному та нелінійному випадках відносно керування. У роботі обґрунтовано збіжність розв'язків вихідної задачі до розв'язків відповідної усередненої системи, показано, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним для точної системи. Крім того, встановлено зв'язок між точною задачею оптимального керування на півосі та відповідною усередненою задачею на скінченному інтервалі, що дозволило обґрунтувати асимптотичну близькість оптимальних розв'язків при прямуванні довжини інтервалу до нескінченності й поглибити розуміння асимптотичних властивостей систем з малими параметрами.

Отримані результати можуть бути використані для аналізу, моделювання та

оптимізації процесів, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями типу Вольтерри, а також для розроблення ефективних методів дослідження систем оптимального керування з інтегральними залежностями. Дані дослідження поглиблюють теорію оптимального керування для інтегро-диференціальних систем і можуть бути використані при моделюванні, аналізі керованості та стабілізації еволюційних процесів у природничих і технічних науках.

Ключові слова: Інтегро-диференціальні рівняння, оптимальне керування, оптимальна траєкторія, критерій якості, абсолютна неперервність, метод усереднення, диференціальні рівняння, задача Коші, малий параметр, слабка збіжність, швидкоосцилюючі параметри.

Abstract

Lakhva, R.S. Optimal control problems of systems of integro-differential equations.
— Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Doctor of Philosophy thesis undertaken in specialty 111 — Mathematics — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2026.

The dissertation is devoted to the study of optimal control problems for certain classes of Volterra-type integro-differential systems. Such systems naturally arise in the mathematical modeling of a wide range of processes where the current state depends on the integral influence of previous moments in time. Models of this type are applied in biology, economics, thermodynamics, chemical kinetics, fluid dynamics, and other fields. The relevance of the topic is conditioned by the need to develop optimal control methods for integro-differential systems, which extend classical control theory approaches to more general evolutionary models.

The development of optimal control methods for integro-differential systems is of significant theoretical and practical importance. Theoretically, it is associated with the necessity of generalizing classical optimality principles, particularly the Pontryagin Maximum Principle and the Bellman dynamic programming method, to broader classes of systems with integral dependencies. Practically, it addresses the need for developing effective control algorithms for complex dynamical objects described by Volterra equations. A vital direction of modern research is the establishment of existence conditions for optimal controls and the development of methods for analyzing the convergence of optimal solutions. The application of the averaging method in optimal control problems allows for the replacement of the original problem with a simpler averaged model, facilitating both analytical and numerical investigation. Despite significant progress in this field, questions regarding the existence of optimal control for Volterra-type integro-differential systems, as well as the justification of the convergence of optimal controls and trajectories when applying the averaging method, remain open and require further research.

The dissertation presents new results concerning the existence of optimal control for Volterra-type integro-differential systems. In particular, sufficient conditions for the existence of optimal control for integro-differential systems are established for the first time in terms of the right-hand sides of the equations and the quality criterion on a finite interval. This approach allowed for the generalization of known results for ordinary differential systems and their extension to the case of integro-differential equations. A theorem on the existence of a solution to the Cauchy problem for integro-differential systems, analogous to the Carathéodory theorem for ordinary differential equations, is proven. Consistency between optimal control problems on finite and infinite intervals is established; the weak convergence of optimal controls and the pointwise convergence of the corresponding optimal trajectories are proved, enabling the justification of the limit transition from problems with a finite horizon to an infinite control horizon.

Special attention is paid to the application of the averaging method to optimal control problems for integro-differential systems in both linear and nonlinear cases with respect to control. The work justifies the convergence of the solutions of the original problem to the solutions of the corresponding averaged system, demonstrating that the optimal control of the averaged problem is asymptotically optimal for the exact system. Furthermore, a connection is established between the exact optimal control problem on the semi-axis and the corresponding averaged problem on a finite interval, which allowed for the justification of the asymptotic proximity of optimal solutions as the interval length tends to infinity and deepened the understanding of the asymptotic properties of systems with small parameters.

The obtained results can be used for the analysis, modeling, and optimization of processes described by Volterra-type integro-differential equations, as well as for developing effective research methods for optimal control systems with integral dependencies. These studies deepen the theory of optimal control for integro-differential systems and can be utilized in modeling, controllability analysis, and stabilization of evolutionary processes in the natural and technical sciences.

Keywords: integro-differential equations, optimal control, optimal trajectory, cost function, absolute continuity, averaging method, differential equations, Cauchy problem, small parameter, weak convergence, rapidly oscillating coefficients.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Могильова В., Лахва Р., Кравець В. Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2023 Випуск 26 (3), С. 386–407. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1437 Переклад англійською: Mogylova, V., Lakhva R., Kravets V. Optimal Control Problem for Systems of Integrodifferential Equations. *Journal of Mathematical Sciences* (2024). DOI: 10.1007/s10958-024-07229-3 *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, написання рукопису статті (Scopus, Q3)*.
2. Лахва Р., Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь на півосі. *Буковинський математичний журнал*. 2023. Т.11, №2. С. 141-152. DOI: 10.31861/bmj2023.02 (Фахове видання, категорія Б).
3. Lakhva R., Khaletska Z., Mogylova V. The optimal control problem for systems of integro-differential equations with finite and infinite horizon *Georgian Mathematical Journal* . 2024. Vol. 32 (3). P. 465–476 DOI: 10.1515/gmj-2024-2065 *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, написання рукопису статті (Scopus, Q2)*.
4. Lakhva R., Uteshova R., Stanzhytskyi O., Mogylova V. Averaging method in optimal control problems for integro-differential equations *Open mathematics*. 2025. Vol. 23(1). 20250167 DOI: 10.1515/math-2025-0167? *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, аналіз прикладу, написання рукопису статті (Scopus, Q2)*.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Лахва Р., Халецька З., Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 28–30 вересня 2023. С. 237–238.
2. Lakhva R., Mogylova V., Koval'chuk T. The optimal control of a system of integro-differential equations on infinite horizon // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023. Tbilisi, Georgia. December 9–11, 2023. P. 172–177.
3. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. The averaging method for optimal control problems of systems of integro-differential equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024. Tbilisi, Georgia. December 21–23, 2024. P. 167-174.
4. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. The optimal control problem for systems of integro-differential equations with finite and infinite horizon //XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 31 травня – 2 червня, 2024 С. 24–25.
5. Лахва Р., Могильова В. Застосування методу усереднення до інтегро-диференціальної задачі оптимального керування // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 23 – 27 вересня, 2024. С. 57–59.
6. Lakhva R., Mogylova V., Perestyuk Y. The averaging method in optimal control problems, linear with respect to the control, for a system of integro-differential equations //XIV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 13 червня – 15 червня, 2025 С. 19–22.
7. Лахва Р., Могильова В. Метод усереднення для інтегро-диференціальних задач оптимального керування на півосі // V Міжнародна конференція, при-

свячена 75-ій річниці від дня народження Володимира Маслюченка. Чернівці, Україна. 25 – 27 вересня, 2025. С. 56–59.

8. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. Averaging in an Optimal Control Problem for a Nonlinear-in-Control Integro-Differential System on the Infinite Interval // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2025. Tbilisi, Georgia. December 6–8, 2025. P. 103-108.
9. Lakhva R., Perestyuk Y. Existence of Optimal Control for a System of Integro-Differential Equations // Ukraine Mathematics Conference At the of the Year 2025, Kyiv, Ukraine, December 18 – 19, 2025. С. 109.

Зміст

Вступ	11
1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	28
2 ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	38
2.1 Задачі керування на скінченному інтервалі	38
2.1.1 Постановка	38
2.1.2 Деякі допоміжні результати	40
2.1.3 Теорема існування оптимального керування	44
2.2 Оптимальне керування на півосі	62
2.3 Про зв'язок на скінченних та нескінченних часових інтервалах .	74
2.3.1 Постановка задачі й формулювання тверджень	74
2.3.2 Доведення основних результатів	76
2.4 Висновки до Розділу 2	86
3 МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	87
3.1 Схема усереднення на скінченному інтервалі	87
3.1.1 Нелінійний випадок	88
3.1.2 Лінійний випадок	99
3.1.3 Приклади	110
3.2 Усереднення на півосі	113

3.2.1	Нелінійна задача оптимального керування для інтегро- диференціальних рівнянь зі швидкоосцилюючим коефіці- єнтом на півосі	113
3.2.2	Лінійний випадок	124
3.3	Висновки до Розділу 3	129
	Висновки	130
	Список використаних джерел	131
	Додаток	142

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач оптимального керування певними класами інтегро-диференціальних систем типу Вольтерри. Основна увага зосереджена на встановленні достатніх умов існування оптимальних керувань у таких задачах, а також на застосуванні методу усереднення, з метою аналізу збіжності розв'язків та оптимальних траєкторій. Отримані результати спрямовані на поглиблення теорії оптимального керування для систем такого типу та забезпечення ефективних методів їх дослідження як на скінченному інтервалі, так і на півосі.

Інтегро-диференціальні рівняння виникають при моделюванні процесів у біології, економіці, екології, термодинаміці, демографії, системах з розподіленими параметрами, кінетичній хімії, флюїдній динаміці [3, 4, 40, 86] та інших галузях. Використання інтегро-диференціальних моделей обумовлене їхньою здатністю глибше описувати складну природу реальних явищ, що робить такі системи значно ефективнішим інструментом моделювання порівняно зі стандартним методом диференціальних рівнянь.

Розвиток методів оптимального керування для інтегро-диференціальних систем має важливе теоретичне та прикладне значення. У теоретичному аспекті це зумовлено необхідністю розвитку та узагальнення класичних принципів оптимальності, зокрема ідей, покладених в основу принципу максимуму Понтрягіна [70] та методу динамічного програмування Беллмана [10], на ширші класи систем, що містять інтегральні залежності. У прикладному аспекті це пов'язано з потребою розробки ефективних алгоритмів керування складними динамічними об'єктами, що описуються рівняннями Вольтерри.

Подальший розвиток теорії оптимального керування пов'язаний із дослідже-

нням питань існування розв'язків і побудови умов оптимальності для різних типів динамічних систем. Значний внесок у цьому напрямі зроблено О. М. Станжицьким та його учнями. Зокрема, задачі оптимального керування для систем звичайних диференціальних рівнянь розглянуто в роботі [84], для стохастичних систем — у [85], для функціонально-диференціальних — у [34], а для імпульсних систем — у [37].

Застосування методу усереднення дозволяє зіставити вихідній задачі оптимального керування відповідну усереднену задачу, яка є значно простішою, що полегшує пошук її розв'язку числовими методами. Підхід, що полягає у попередньому усередненні рівнянь руху з наступним розв'язанням задачі оптимального керування для побудованої системи, обґрунтовано в працях В. О. Плотнікова на основі поширення теореми Боголюбова на диференціальні включення. У роботах В. О. Плотнікова [65, 66, 68, 69], О. М. Станжицького [80], Т. Donchev [20, 21] та їх співавторів, інших дослідників ці результати отримали розвиток для систем із повільними та швидкими змінними, на рівняння у банахових просторах.

Попри отримані результати, питання існування оптимального керування для інтегро-диференціальних систем типу Вольтерри залишаються недостатньо вивченими, зокрема для широких класів нелінійних систем. Актуальною також є проблема дослідження збіжності оптимальних керувань і траєкторій у задачах, що містять малий параметр, а саме застосування методу усереднення та обґрунтування зв'язку між розв'язками точних та відповідних усереднених систем. Отримані результати сприятимуть подальшому розвитку методів оптимального керування для систем з інтегральною складовою та можуть бути використані при математичному моделюванні складних процесів у природничих і технічних науках.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися на кафедрі загальної математики механіко-математичного факультету

тету Київського національного університету імені Тараса Шевченка відповідно до планів, передбачених у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, й у межах держбюджетних науково-дослідних проєктів "Якісний аналіз, керування та методи апроксимації у некоректних та нелокальних детермінованих і стохастичних еволюційних задачах" (Державний реєстраційний номер: 0121U109988), "Асимптотична поведінка, стійкість та керованість у нескінченновимірних еволюційних системах із детермінованими та випадковими збуреннями" (Державний реєстраційний номер: 0124U001412) та в межах проєкту "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою" Національного фонду досліджень України (реєстраційний номер проєкту 2023.03/0074).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення достатніх умов існування оптимального керування для деяких класів інтегро-диференціальних систем у термінах правих частин рівнянь та критерію якості, отримання умов близькості розв'язків точних і відповідних усереднених систем, а також дослідження збіжності оптимальних керувань і траєкторій вихідної задачі до розв'язків усередненої задачі оптимального керування.

Об'єктом дослідження є задачі оптимального керування інтегро-диференціальними системами типу Вольтерри.

Предметом дослідження є властивості оптимальних керувань і траєкторій інтегро-диференціальних систем, умови їх існування та оптимальності, умови, за яких оптимальні розв'язки та керування вихідної задачі збігаються до відповідних розв'язків усередненої задачі, та принципи побудови схем усереднення для задачі оптимального керування інтегро-диференціальними системами у лінійному й нелінійному випадках.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, методи теорії оптимального керування, метод усереднення, а також інструментарій функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Отримані в дисертаційній роботі результати є новими та сприяють подальшому розвитку теорії оптимального керування інтегро-диференціальними системами. Основними науковими результатами є такі:

- отримано достатні умови існування оптимальних керувань для систем інтегро-диференціальних рівнянь у термінах правих частини рівнянь та функцію критерію якості, що робить їх зручнішим для застосувань;
- доведено теорему існування, єдиності та продовжуваності розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, аналогічну до теореми Каратеодорі для звичайних диференціальних рівнянь;
- вперше встановлено варіаційні співвідношення між розв'язками задач оптимального керування на скінченному інтервалі та півосі. Доведено слабку збіжність оптимальних керувань і точкову збіжність відповідних оптимальних траєкторій, що дозволило обґрунтувати граничний перехід від задач оптимального керування на скінченному до задач на нескінченному інтервалі;
- обґрунтовано метод усереднення для задач оптимального керування інтегро-диференціальними системами у лінійному та нелінійному випадках відносно керування;
- доведено збіжність розв'язків вихідної системи до розв'язків усередненої системи, а також встановлено, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним для точної системи;
- вперше встановлено зв'язок між точною задачею оптимального керування на півосі та відповідною усередненою задачею на скінченному інтервалі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить переважно теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані для подальшого вивчення інтегро-диференціальних систем з керуванням. Вони також можуть знаходити застосування при дослідженні процесів у різних природничих галузях, де інтегро-диференціальні системи виступають математичними моделями досліджуваних об'єктів.

Особистий внесок здобувача. Визначення основного напрямку, постановка задачі та загальний план дослідження належать науковому керівнику О. М. Станжицькому. Всі результати даної дисертаційної роботи отримані автором самостійно та опубліковані у роботах [41, 42, 57, 94]. З них три праці виконано у співавторстві; при цьому О. М. Станжицькому належить постановка задачі, а внесок інших авторів полягає в обговоренні можливих напрямів дослідження, перевірці та аналізі одержаних результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Отримані результати дисертаційної роботи обговорювалися та доповідалися на таких міжнародних конференціях:

1. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023, Чернівці, Україна.
2. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023, December 9–11, 2023, Tbilisi, Georgia.
3. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 31 травня – 2 червня 2024, Луцьк – Світязь, Україна.
4. V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана, 23 – 27 вересня, 2024, Чернівці, Україна.
5. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024, December 21–23, 2024, Tbilisi, Georgia.

6. XIV Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 13–15 червня 2025, Луцьк – Світязь, Україна.
7. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю з дня народження Володимира Маслюченка, 25–27 вересня 2025, Чернівці, Україна.
8. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2025, December 6–8, 2025, Tbilisi, Georgia.
9. Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2025, December 18–19, 2025 Kyiv, Ukraine.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 4 статті, 3 з яких опубліковані у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus [41, 42, 57]; дві з них [41, 42] — у виданнях, що входять до квартиля Q2; одна [57] — у виданні, що входить до квартиля Q3; стаття [94] надрукована у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України категорії "Б".
- 9 тез доповідей на конференціях [43–48, 95–97].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить перелік публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 145 сторінок, основний текст займає 120 сторінок.

Зміст роботи. У **Вступі** розкрито актуальність обраної теми, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено його наукову новизну й практичне значення, наведено відомості про особистий внесок здобувача, апробацію результатів та публікації за темою дисертації.

У **першому розділі** зроблено огляд літературних джерел за тематикою дисертаційної роботи та суміжними питаннями, у ньому проаналізовано основні результати, отримані іншими дослідниками з близьких проблем.

Другий розділ присвячено дослідженню умов існування розв'язків задачі оптимального керування інтегро-диференціальними системами. У першому підрозділі розглядається задача оптимального керування на скінченному інтервалі. У пункті 2.1 наведено постановку задачі оптимального керування для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) + f_2(t, x)u(t) + \int_0^t f_3(t, s, x)u(s)ds, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

на відрізку $[0, T]$, де $x_0 \in D$ - фіксований вектор, $x \in D$ - фазовий вектор, D - деяка область в \mathbb{R}^d , ∂D - межа D , $\bar{D} = D \cup \partial D$, $\tau = \tau(u)$ - момент першого виходу розв'язку, $x(t) = x(t, u)$ на ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина в \mathbb{R}^m і $0 \in U$.

Надалі через $|\cdot|$ позначатимемо норму вектора у скінченновимірному евклідовому просторі, а через $\|\cdot\|$ - норму матриці, узгоджену із нормою вектора.

Нехай виконуються наступні умови:

Умова 0.1. Вектор-функція $f_1(t, x) : [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$, матриця $f_2(t, x) : [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ і матриця $f_3(t, s, x) : [0, T] \times [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ - неперервні за сукупністю змінних.

Умова 0.2. У випадку необмеженої області D виконуються ще й наступні умови для функцій $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $f_3(t, s, x)$, а саме існує $C > 0$ таке, що для довільних $t, s \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$:

$$|f_1(t, x)| \leq C(1 + |x|),$$

$$\|f_2(t, x)\| \leq C(1 + |x|),$$

$$\|f_3(t, s, x)\| \leq C(1 + |x|).$$

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ і $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) існують такі $k > 0$, $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq k|u|^p,$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$;

2) існують такі $K > 0$ та $\alpha > 0$, що

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(1 + |u|^{p-1} + |x|^\alpha),$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$;

3) $L(t, x, u)$ опукла за u для будь-яких фіксованих $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$.

Керування $u(t)$ вважають допустимим, якщо:

a1) $u(t) \in L^p(0, T)$, $\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$,

a2) $u(t) \in U$, для майже всіх $t \in [0, T]$.

Множину допустимих керувань позначатимемо через W .

В умовах постановки даної задачі отримано теорему про існування оптимального керування для інтегро-диференціальної системи, формулювання та доведення якої наведено у третьому пункті даного підрозділу.

Теорема 0.1. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконується Умова 0.1, а у випадку необмеженої області D також Умова 0.2 функція L задовольняє умови 1)–3). Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань W , тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

У другому пункті отримано умови існування розв'язку задачі Коші та його продовжуваності до моменту виходу з області для інтегро-диференціальних систем із вимірною за незалежною змінною правою частиною. Розглянуто наступну

задачу Коші

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right), \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

де $x \in D$, D - область в \mathbb{R}^d , а ∂D - її межа, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $x_0 \in D$. Розв'язок даної задачі будемо розуміти в наступному сенсі.

Означення 0.1. Абсолютно неперервна функція $x(t)$ називається розв'язком задачі (3) на проміжку $[0, T]$, якщо вона задовольняє на $[0, T]$ наступне інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau)) d\tau) ds.$$

Маємо наступну теорему.

Теорема 0.2. Нехай $X(t, x, y)$ визначена в області $t \in [0, T]$, $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^m$, функція $\varphi(t, s, x)$ визначена для $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$, $x \in D$ і виконуються наступні умови:

- 1) $X(t, x, y)$ для майже всіх t (за мірою Лебега) неперервна по x і y , функція $\varphi(t, s, x)$ неперервна по x для майже всіх t і s ;
- 2) $X(t, x, y)$ вимірна по t при всіх x і y , $\varphi(t, s, x)$ вимірна по t, s при всіх x ;
- 3) існують інтегровні функції $m(t)$ і $\mu(t, s)$ такі, що

$$|X(t, x, y)| \leq m(t), \quad x \in D, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

$$|\varphi(t, s, x)| \leq \mu(t, s), \quad x \in D,$$

$$\int_0^T m(t) dt < \infty, \quad \int_0^T \int_0^T \mu(t, s) ds dt < \infty.$$

Тоді існує таке $h > 0$, що задача Коші має розв'язок (3) на відрізку $[0, h]$.

Також, доведено теорему, що гарантує продовжуваність побудованого розв'язку на межу циліндра $(0, T) \times D \subset \mathbb{R}^{d+1}$, у випадку обмеженості області D .

Теорема 0.3. *В умовах Теорема 0.2 кожний розв'язок рівняння (3), що проходить всередині циліндра $(0, T) \times D$, можна продовжити до його виходу на межу циліндра.*

Другий підрозділ присвячений задачі оптимального керування системою інтегро-диференціальних рівнянь на півосі. Розглянуто задачу оптимального керування системою (1) з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^{\tau} e^{-\gamma t} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (4)$$

де $x_0 \in D$ - фіксований вектор, $t \in [0, \infty)$, $x \in D$ - фазовий вектор, D - деяка обмежена область в \mathbb{R}^d , ∂D - межа D , τ - момент виходу розв'язку $x(t)$ на ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина в \mathbb{R}^m і $0 \in U$.

Аналогічно до попереднього підрозділу, для досліджуваної задачі отримано умови існування розв'язку задачі (1), (4) на півосі.

Третій підрозділ присвячено встановленню зв'язку між задачами оптимального керування на скінченному інтервалі та півосі. Зокрема, у першому пункті підрозділу 2.3 наведено постановку задачі та основні твердження щодо існування оптимального керування на нескінченному інтервалі для системи (1) з одним із наступних критеріїв якості

$$J(u) = \int_0^{\tau} (e^{-\gamma t} A(t, x(t)) + B(t, u(t))) dt \rightarrow \inf, \quad (5)$$

$$J(u) = \int_0^{\tau} (e^{-\gamma t} A(t, x(t)) + |u(t)|^2) dt \rightarrow \inf. \quad (6)$$

Встановлено зв'язок між задачами оптимального керування на скінченному та нескінченному інтервалах. У наступному пункті з підрозділу 2.3 доводяться результати, що наведені у попередньому пункті.

Третій розділ присвячений застосування методу усереднення до задач оптимального керування інтегро-диференціальними системами.

У першому підрозділі застосовано схему усереднення на скінченному інтервалі. Зокрема, перший пункт цього підрозділу присвячений дослідженню нелінійної за керуванням задачі

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s)) ds, u(t)\right), \\ x_\varepsilon(0) = x_0, \end{cases} \quad (7)$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T L(t, x_\varepsilon(t), u(t)) dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf, \quad (8)$$

на відрізку $[0, T]$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $T > 0$ — задана стала, x — вектор стану в \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, причому $u(t) \in W \subset \mathbb{R}^m$, $d, m = 1, 2, 3, \dots$, $\Phi(x)$ — задана функція.

Функція $x_\varepsilon(t, u)$ позначає розв'язок задачі Коші (7), (8), що відповідає керуванню $u(t)$. Для спрощення позначень далі опускатимемо явну залежність від u та ε і позначаємо цей розв'язок як $x(t)$.

Припустимо, що існує функція $X_0(x, u)$, така що для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in W$ існує наступна границя:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x), u\right) - X_0(x, u) \right] d\tau = 0, \quad (9)$$

де

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds, \quad t, s \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d, u \in W$.

Задачі оптимального керування (7), (8) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами відповідає простіша усереднена задача оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{\xi} = X_0(\xi, u(t)), \\ \xi(0) = x_0, \end{cases} \quad (10)$$

з критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^T L(t, \xi(t), u(t))dt + \Phi(\xi(T)) \rightarrow \inf. \quad (11)$$

Для задачі (7), (8) будемо вважати, що виконуються наступні умови:

Умова 0.3. Допустимими керуваннями є m -вимірні вектор-функції $u(\cdot)$, такі що $u(\cdot) \in U$, де U — компакт у $L^2(0, T)$.

Умова 0.4. Функція $X(t, x, y, u)$ визначена й неперервна по всіх своїх змінних у області $Q_0 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n, u \in W\}$ і задовольняє:

0.4.1. умову лінійного росту по x, y в Q_0 , тобто існує стала $M > 0$ така, що

$$|X(t, x, y, u)| \leq M(1 + |x| + |y|)$$

для будь-якого $(t, x, y, u) \in Q_0$;

0.4.2. умову Ліпшиця зі сталою λ в Q_0 , а саме для всіх $(t, x, y, u), (t, x_1, y_1, u_1) \in Q_0$ маємо $|X(t, x, y, u) - X(t, x_1, y_1, u_1)| \leq \lambda(|x - x_1| + |y - y_1| + |u - u_1|)$.

Умова 0.5. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена та неперервна в області $Q_1 = \{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d\}$, набуває значень у \mathbb{R}^n і задовольняє умову лінійного росту та умову Ліпшиця по x , тобто існує $L_\varphi > 0$ таке, що

$$|\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi(1 + |x|) \quad \text{та} \quad |\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi|x - x_1|.$$

Умова 0.6. Існує границя (9) рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$ та $u \in W$.

Умова 0.7. Функція $L(t, x, u)$ визначена в $Q_2 = \{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d, u \in W\}$, і

0.7.1. $L(t, x, u)$ рівномірно неперервна по $x \in \mathbb{R}^d$ відносно $t \in [0, T]$ та $u \in W$;

0.7.2. $L(t, x, u)$ задовольняє умову Ліпшиця по u в Q_2 з постійною $\lambda > 0$;

0.7.3. Функція $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною по x .

Спочатку отримано наступну лему, що узагальнює схему усереднення для інтегро-диференціальних рівнянь, на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів.

Лема 0.1. *Нехай виконуються Умови 0.3 - 0.6. Тоді для будь-якого $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$, що для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ розв'язки задачі Коші (7) та (10) задовольняють оцінку*

$$|x(t, u) - \xi(t, u)| \leq \eta \quad (12)$$

для всіх $t \in [0, T]$ і всіх допустимих керувань $u(t)$.

Далі отримано теорему, яка встановлює зв'язок між оптимальним керуванням та критеріями якості точної (7), (8) та усередненої задачі (10), (11). Позначимо

$$J_\varepsilon^* = \inf_{u(\cdot) \in U} J_\varepsilon[u], \quad J_0^* = \inf_{u(\cdot) \in U} J_0[u].$$

Теорема 0.4. *Нехай виконуються Умови 0.3-0.7. Тоді задачі (7), (8) та (10), (11) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ і $(\xi^*(t), u^*(t))$, відповідно, та виконуються наступні твердження:*

(i) $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

(ii) для будь-якого $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta,$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної задачі;

(iii) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, така що

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow \xi^*(t) \quad \text{рівномірно на } [0, T], \quad (13)$$

та

$$u_{\varepsilon_n}^*(\cdot) \rightarrow u^*(\cdot) \quad \text{в } L^2(0, T). \quad (14)$$

Крім того, якщо усереднена задача (10), (11) має єдиний розв'язок, тоді збіжність (13) і (14) справджується для всіх $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

В другому пункті досліджено наступну лінійну за керуванням задачу оптимального керування

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s)) ds\right) + f_1(x_\varepsilon(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (15)$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf, \quad (16)$$

на відрізку $[0, T]$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $T > 0$ — задана стала, $x \in \mathbb{R}^d$ — вектор стану, а $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, що належить функціональному простору.

Якщо наступна границя існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x)\right) - f_0(x) \right] d\tau = 0, \quad (17)$$

де

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds, \quad t, s \in [0, T],$$

тоді задачі оптимального керування (15), (16) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність усереднена задача на відрізку $[0, T]$:

$$\dot{\xi} = f_0(\xi) + f_1(\xi)u(t), \quad \xi(0, u(0)) = x_0, \quad (18)$$

з відповідним критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(\xi(T)) \rightarrow \inf. \quad (19)$$

Припустимо, що для задачі (15), (16) виконуються наступні умови:

Умова 0.8. Допустиме керування — це m -вимірна вектор-функція $u(\cdot) \in L^p((0, T); V)$, $p > 1$, яка набуває значень у замкненій опуклій множині $W \subset \mathbb{R}^m$;

Умова 0.9. Функція $f(t, x, y)$ визначена та неперервна за сукупністю змінних в області $Q_3 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n\}$; матрична функція $f_1(x)$ розмірності $d \times m$ визначена при $x \in \mathbb{R}^d$, і

0.9.1. $f(t, x, y)$ задовольняє умову лінійного росту з константою M в області

Q_3 , тобто $|f(t, x, y)| \leq M(1 + |x| + |y|)$ для всіх $(t, x, y) \in Q_3$;

0.9.2. $f(t, x, y)$ та $f_1(x)$ задовольняють умову Ліпшиця по x з константою $\lambda > 0$ в своїх областях визначення;

Умова 0.10. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена та неперервна в області $Q_4 = \{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d\}$, набуває значень у просторі \mathbb{R}^n та задовольняє по x умову лінійного росту та умову Ліпшиця; тобто, існує $L_\varphi > 0$ таке, що

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi |x - x_1| \quad \text{і} \quad |\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi (1 + |x|);$$

Умова 0.11. Границя (17) існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$;

Умова 0.12. Скалярні функції $A(t, x)$ та $B(t, u)$ визначені для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in W$ та неперервні за всіма змінними, при цьому:

0.12.1. $A(t, x) \geq 0$, $B(t, u) \geq a|u|^p$ з деякою сталою $a > 0$ для всіх $t \in [0, T]$, а функція $B(t, u)$ опукла за $u \in W$;

0.12.2. Функція $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ невід'ємна та неперервна за x .

Отримано результат, що гарантує близькість розв'язків вихідної (точної) задачі (15) та відповідної їй усередненої моделі (18).

Лема 0.2. *Нехай виконуються Умови 0.8– 0.11. Якщо $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ слабо в $L^p(0, T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то розв'язок $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (15) при $u(t) = u_\varepsilon(t)$ збігається рівномірно на $[0, T]$ до розв'язку $\xi(t)$ відповідної задачі Коші (18) з керуванням $u(t) = u_0(t)$, тобто*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows \xi(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

рівномірно при $t \in [0, T]$.

Ключовим результатом даного розділу є наступна теорема, яка встановлює збіжність оптимальних трійок точної (15), (16) та відповідної їй усередненої задачі оптимального керування (18), (19).

Теорема 0.5. *Нехай виконуються Умови 0.8– 0.12. Тоді задачі (15),(16) та (18),(19) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ та $(\xi^*(t), u^*(t))$, відповідно, і*

(i) $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

(ii) для будь-якого $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta$$

виконується при $\varepsilon < \varepsilon_0$;

(iii) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, така що

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow \xi^*(t) \text{ рівномірно на } [0, T], \quad (20)$$

та

$$u_{\varepsilon_n}^*(\cdot) \xrightarrow{w} u^*(\cdot) \text{ слабо в } L^p(0, T). \quad (21)$$

Крім того, якщо усереднена задача (18), (19) має єдиний розв'язок, тоді збіжність (20) та (21) виконується для всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Приклади, що ілюструють теоретичні результати даного підрозділу наведено у третьому пункті.

У другому підрозділі розглянуто застосування схеми усереднення до задач оптимального керування інтегро-диференціальними системами на півосі. Аналогічно до першого підрозділу, тут досліджено згадану вище задачу (7) на півосі з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^\infty e^{-\gamma t} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf,$$

тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\gamma > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $W \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$. Обґрунтовано результати щодо близькості розв'язків задачі Коші для вихідної та усередненої систем на півосі, а також встановлено твердження, що доводять збіжність оптимальної трійки вихідної задачі до відповідної трійки усередненої задачі. Додатково, отримано результати, що встановлюють зв'язок між оптимальними траєкторіями

та критеріями якості точної задачі на півосі та відповідної їй усередненої задачі на відрізку $[0, T]$.

У наступному пункті даного підрозділу розглянуто лінійну за керуванням задачу (15) з наступним критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^\infty [e^{-jt}(A(t, x(t)) + B(t, u(t)))] dt \rightarrow \inf,$$

тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $W \subset \mathbb{R}^m$. Отримано аналогічні за змістом результати до нелінійного випадку з урахуванням притаманних їй структурних особливостей та властивостей відповідних оптимальних керувань.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Автор висловлює щирю вдячність науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Станжицькому Олександру Миколайовичу — за постановку задач, професійне керівництво, цінні поради, підтримку та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Бажання досягти найкращого результату, зокрема пошук найкоротшого шляху, чи найбільшої ефективності при найменших витратах, є однією з фундаментальних рушійних сил як у природі, так і в людській діяльності. Філософська ідея екстремуму пронизує наукову думку, починаючи ще з античності. У працях математиків Стародавньої Греції, зокрема Архімеда, вже містилися зародки пошуку оптимальних рішень. Наприклад, класичні ізопериметричні задачі, де необхідно знайти фігуру максимальної площі при заданому периметрі, демонструють ранні спроби визначення оптимальних параметрів у геометрії. Згодом ці ідеї отримали розвиток у фізичних принципах, зокрема у законі відбиття світла Герона Александрійського. Він став першим відомим прикладом застосування принципу найкоротшого шляху, який пізніше доповнили праці Ібн аль-Хайсама щодо заломлення світла. Таким чином, пошук оптимальності еволюціонував від прикладних інженерних здогадок до фундаментальної наукової категорії, що стала підґрунтям для розвитку сучасної математичної теорії керування.

Наступний вирішальний етап на шляху до формалізації оптимальності розпочався у XVII–XVIII століттях із зародженням варіаційного числення. Розвиток варіаційного числення дозволив змістити фокус із пошуку екстремумів функцій на дослідження інтегральних функціоналів, які описують динамічні процеси та траєкторії. Потужним імпульсом для розвитку цього напрямку стала задача про брахістохрону, сформульована Й. Бернуллі у 1696 році. Роботи Й. Бернуллі, І. Ньютона та Г. Лейбніца у цьому напрямі продемонстрували потребу в універсальних методах пошуку екстремумів функціоналів, що прийшли на зміну

частковим прийомам.

Систематизація та створення строгого математичного апарату варіаційного числення нерозривно пов'язані з іменами Ейлера та Лагранжа. Саме Ейлер у своїх працях вперше сформулював загальні умови необхідності екстремуму, які тепер відомі як рівняння Ейлера–Лагранжа. Згодом Лагранж довершив цей апарат, ввівши варіаційний прийом та розширивши застосування методу для задач з обмеженнями. Таким чином, варіаційне числення забезпечило потужну теоретичну базу для аналітичної механіки, ставши основою для принципу найменшої дії у фізиці. Цей апарат дозволяв ефективно моделювати процеси, що підпорядковуються законам оптимізації, проте мав суттєве обмеження. Класичні методи варіаційного числення були орієнтовані на пошук вільних екстремумів і не враховували жорстких обмежень на керуючий вплив, таких як ліміти потужності двигуна чи обсягу палива.

На сучасному етапі розвитку теорія оптимального керування вийшла за межі класичної механіки, набувши фундаментального значення у багатьох прикладних наукових та інженерних галузях, де динамічні процеси вимагають високої точності та ефективності. Зокрема, у космічній інженерії та авіабудуванні задачі оптимального керування є критичними. Йдеться про розрахунок енергоефективних траєкторій польотів та мінімізацію витрат палива, оптимальної орієнтації супутників, а також забезпечення м'якої та безпечної посадки апаратів на поверхні планет, що неможливо без урахування жорстких обмежень на тягу та час. У робототехніці та автоматизованих системах оптимальне керування використовується для планування руху маніпуляторів та автономних транспортних засобів, забезпечуючи максимальну швидкість переміщення за умови уникнення перешкод та мінімізації вібрацій. Навіть у традиційних галузях, таких як хімічна та нафтогазова промисловість, оптимальне керування забезпечує раціональні режими роботи реакторів, дистиляційних колон та трубопровідних систем, що прямо призводить до мінімізації витрат сировини та енергії.

Практична значущість оптимального керування поширюється також на соціально-економічні та біологічні системи. В економіці та фінансах методи оптимального керування незамінні для моделювання оптимальної інвестиційної політики, управління національним боргом чи оптимізації виробничих процесів з метою максимізації прибутку чи мінімізації ризиків у динамічних ринкових умовах. Окреме місце посідає застосування оптимального керування у медицині та біології [5, 15, 77]. Тут принципи керування дозволяють розробляти оптимальні протоколи дозування ліків (наприклад, інсуліну для діабетиків або хіміотерапевтичних препаратів), максимізуючи терапевтичний ефект при мінімізації токсичного впливу на організм [53, 71]. Також оптимальне керування використовується для моделювання та керування динамікою екологічних систем, наприклад, для управління популяціями чи природними ресурсами [3, 31, 40]. Такий широкий діапазон застосувань підкреслює універсальність і практичну цінність цього математичного апарату для фахівців із різних сфер.

Формальне становлення теорії оптимального керування як самостійної математичної дисципліни відбулося у другій половині ХХ століття і пов'язане з іменами Л. С. Понтрягіна та Р. Беллмана. Фундаментальний прорив було досягнуто завдяки розробці принципу максимуму Понтрягіним та його учнями [70]. Цей принцип забезпечив потужний аналітичний інструмент для знаходження необхідних умов оптимальності у задачах, які включали жорсткі обмеження на керуючі функції. Паралельно з цим Р. Беллман сформулював принцип оптимальності та розробив метод динамічного програмування [10]. На відміну від варіаційного підходу, динамічне програмування базується на рівнянні Беллмана, яке дозволяє знаходити оптимальне керування у формі оберненого зв'язку. Ці два підходи заклали основу для всебічного аналізу задач оптимального керування та стали базою для всіх наступних теоретичних і прикладних досліджень у цій галузі [23, 27, 52].

Концептуально динамічне програмування тісно пов'язане з класичною те-

орією Гамільтона-Якобі. Як показано у працях С. Carathéodory [16], аналогічні підходи виникають уже при розв'язанні найпростіших варіаційних задач. Зокрема, ідея керування у формі зворотного зв'язку безпосередньо корелює з класичним поняттям поля екстремалей. Саме цей підхід забезпечує достатні умови оптимальності, як це було показано у дослідженнях G. A. Bliss [12]. Таким чином, сучасні принципи побудови оптимальних стратегій є розвитком класичної теорії поля, що підкреслює неперервність еволюції варіаційних методів.

Дослідження задач оптимального керування для інтегро-диференціальних рівнянь базується на фундаментальних результатах теорії таких рівнянь. Питання існування та властивостей розв'язків таких систем ґрунтовно висвітлені у працях А. М. Самойленка, О. А. Бойчука, D. Vainov, P. S. Simeonov, V. Lakshmikantham та ін. [7, 14, 51, 73]. Ці дослідження становлять аналітичне підґрунтя для коректної постановки задач керування. Сучасний аналіз інтегро-диференціальних систем розвивається за двома ключовими напрямками. Перший охоплює теоретичні аспекти існування та єдиності розв'язків у гільбертових і банахових просторах. Зокрема, у працях Н. Ahmed [1, 2] за допомогою напівгрупового підходу встановлено умови існування mild-розв'язків для дробових стохастичних систем за стандартних обмежень на ріст нелінійності та інтенсивність шуму. Другий напрям стосується проблем керованості та оптимізації, зокрема для систем із міррозначними або імпульсними впливами. Результати щодо повної керованості та існування оптимальних керувань, отримані у роботах M. Dieye, R. Diop та ін. [17, 18], базуються на поєднанні теорії напівгруп із методами міри некомпактності. Встановлено, що за умови регулярності ядер інтегральних операторів та ліпшицевості нелінійних членів, забезпечується не лише єдиність розв'язків і керованість системи, а й можливість побудови збіжних чисельних методів моделювання [25, 26].

У сучасних дослідженнях значну увагу приділяють розвитку як якісних, так і наближених методів аналізу. Зокрема, у роботі [29] для напівлінійних

інтегро-диференціальних рівнянь встановлено існування асимптотично майже автоморфних розв'язків. Стосовно чисельних підходів, ефективні схеми для сингулярно збурених задач запропоновано у [59], а для систем дробового порядку — у [24, 72]. Важливе місце займають і конструктивні методи розв'язання крайових задач, зокрема метод параметризації Д. С. Джумабаєва [22]. Однак, попри ефективність таких підходів для прикладних досліджень, фундаментальний аналіз задач оптимального керування потребує строгих аналітичних підходів, що і визначає спрямованість даного дослідження.

Окремий напрям сучасних досліджень стосується інтегро-диференціальних систем гіперболічного типу, які зазвичай описують хвильові процеси. У роботі [6] цей клас задач досліджено з використанням методу апріорних нерівностей. Ключовим результатом зазначеної праці є теоретичне обґрунтування коректності задач: доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку. Крім того, встановлено факт існування оптимального керування, що забезпечує теоретичну можливість ефективного впливу на такі складні системи.

Проблема існування оптимального керування посідає ключове місце у теоретичних основах оптимального керування. Ранні спроби доведення існування мінімуму у класі гладких функцій, розпочаті у варіаційному численні, зумовили необхідність розширення класу допустимих кривих для гарантування існування розв'язку. Цю ідею, зокрема, розвивали Д. Гільберт у своїх проблемах, а потім А. Лебег та Л. Тонеллі. Вони сформулювали загальний метод, відомий як метод Лебега-Тонеллі, який полягає у доведенні напівнеперервності знизу мінімізуючого функціоналу на слабо компактній множині допустимих кривих [87]. Таким чином, встановлення існування оптимального керування зводиться до застосування аналогів класичної теореми Вейерштрасса.

Перша частина даної дисертації саме та присвячена встановленню достатніх умов існування оптимального керування для задач, описаних інтегро-диференціальними системами, у термінах властивостей правих частин системи

та функціоналу якості. Теорія керування для класичних типів рівнянь ґрунтовно висвітлена у науковій літературі: для систем звичайних диференціальних рівнянь — у працях [32, 84], для стохастичних систем — у [85], для функціонально-диференціальних рівнянь — у [33, 34], а для систем з імпульсною дією — у [36].

У працях [73, 83] висвітлено питання існування розв'язків задачі Коші та крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь, проте вимога неперервності їхніх правих частин суттєво обмежує застосування цих результатів у задачах оптимізації. Така умова є надто обтяжливою для задач оптимального керування, де функція керування $u(t)$, як правило, розглядається у класі вимірних функцій. Це породжує необхідність поширення класичної теорії на інтегро-диференціальні системи з розривними правими частинами, тобто отримання результатів, аналогічних відомій теоремі Каратеодорі для звичайних диференціальних рівнянь. У дисертації розглядається задача, яка суттєво відрізняється від класичних постановок із фіксованим часом закінчення процесу T . Дослідження проводиться для процесу, що триває до моменту виходу τ розв'язку на межу заданої області. Принципова складність тут полягає у тому, що цей момент виходу є функціоналом від керування: $\tau = \tau(u)$. У такому випадку розв'язком задачі стає не просто пара "керування–траєкторія а трійка (u^*, x^*, τ^*) — оптимальне керування, відповідна йому траєкторія та оптимальний момент виходу (частинним випадком чого є класична задача швидкодії, де мінімізується час τ). Така залежність моменту часу від керування створює додаткові математичні труднощі при доведенні теорем існування. Зокрема, ключовою нетривіальною проблемою стає обґрунтування можливості граничного переходу в моменті виходу $\tau_n = \tau(u_n)$ при збіжності послідовності керувань. Саме розв'язанню цих проблем, встановленню умов існування оптимального керування для інтегро-диференціальних рівнянь в умовах Каратеодорі та зі змінним моментом виходу, присвячено другий розділ дисертації.

Класичні підходи Беллмана та Понтрягіна, як було зазначено, орієнтовані на

пошук точних розв'язків, що для складних осцилюючих систем часто є технічно неможливим.

Проте для реальних нелінійних і осцилюючих систем такі підходи часто стають непридатними, що зумовлює потребу у використанні наближених та асимптотичних методів. У таких випадках альтернативою стають асимптотичні методи, зокрема метод усереднення. Цей метод дозволяє замінити систему зі швидкими коливаннями спрощеною моделлю, що адекватно відтворює її повільну динаміку, суттєво полегшуючи подальший аналіз та побудову керування.

Ідея усереднення виникла ще в класичній та небесній механіці, зокрема у працях К. Ф. Гаусса та А. Пуанкаре, де її використовували для дослідження складних космічних процесів. Проте, строгого математичного обґрунтування та систематизації, які дозволили застосовувати метод у широкому спектрі інженерних та фізичних задач, він набув завдяки зусиллям українських математиків. Класичний метод Крилова–Боголюбова, розроблений Криловим та Боголюбовим у 1930–1940-х роках [13, 39], став фундаментом асимптотичних методів нелінійної механіки. Вони вперше надали строгі доведення близькості розв'язків вихідної та усередненої систем на великих, але обмежених часових інтервалах. Ці результати згодом були суттєво розширені та узагальнені Ю. О. Митропольським [55, 56].

У теорії оптимального керування метод усереднення відіграє ключову роль, особливо для задач, де керування або динаміка системи мають високочастотний характер. Його застосування дає змогу замінити складну задачу оптимального керування для системи з осцилюючими коефіцієнтами на простішу задачу для усередненої системи, функціонал якості якої також усереднюється. Боголюбов та Митропольський показали, що адекватність усередненої динаміки забезпечує побудову керування, яке є високоточною апроксимацією оптимального для вихідної системи. Такий підхід став ефективним інструментом аналізу й проектування керуючих законів для складних нелінійних систем, що важко піддаються прямому дослідженню класичними методами.

Фундаментальне обґрунтування та системний розвиток методу усереднення пов'язані з діяльністю математиків Київської школи під керівництвом академіків М. М. Боголюбова та Ю. О. Митропольського. Їхні роботи заклали основу для дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь із малим параметром і швидкими осциляціями. Подальший розвиток методу пов'язаний із працями Ю. О. Митропольського [56], [13] та його послідовників — А. М. Самойленка, В. О. Плотнікова. Значний внесок у розвиток асимптотичних методів зробили також Р. І. Петришин і його учні [61–64], що підтвердило глибину та універсальність української математичної школи.

Вагомий внесок у застосування методу усереднення саме до задач оптимального керування зробили представники Одеської школи на чолі з В. О. Плотніковим. У їхніх роботах [65, 66, 69] було послідовно обґрунтовано два ключові підходи: усереднення рівнянь керованого руху та усереднення крайових задач, що впливають із принципу максимуму. У більшості зазначених праць аналіз здійснювався для систем типу $\dot{x} = \varepsilon X(t, x, u)$ або для близьких класів рівнянь, де відсутні інтегральні компоненти, що ускладнює безпосереднє застосування методу усереднення. Традиційно застосовувалися два підходи: усереднення рівнянь руху, або усереднення необхідних умов оптимальності за принципом максимуму. Для досліджуваних моделей встановлено оцінки близькості траєкторій та обґрунтовано асимптотичну оптимальність керування на скінченних інтервалах і на півосі.

Важливе теоретичне підґрунтя для розв'язання задач на асимптотично великому проміжку та на півосі закладено у працях А. М. Самойленка [74], О. М. Станжицького [58, 80] та Т. В. Добродзій [92, 93]. В дослідженні обґрунтовано метод усереднення для випадків, коли керування входить у систему лінійно та обирається із однієї і тієї самої множини допустимих значень.

Значне математичне зацікавлення викликали задачі усереднення для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Хоча фізичні моделі, що вимагали

такого усереднення, були відомі ще з часів Дж. К. Максвела та Дж. У. Релея, систематичне математичне дослідження усереднення рівнянь із швидкоосцилюючими коефіцієнтами розпочалося лише у 1970-х роках. Загальні результати цих досліджень були викладені у фундаментальній монографії А. А. Bensoussan, J. -L. Lions, G. Papanicolaou [11].

Обґрунтування методу усереднення відбулось для систем функціонально-диференціальних рівнянь [19, 20, 30, 38, 49, 50], стохастичних систем [32, 58, 74, 75, 78, 80, 88], операторних рівнянь [54, 60, 79], гіперболічних диференціальних включень [89, 90].

Окремий підхід до задач оптимального керування інтегральними рівняннями Вольтерра запропонував S. A. Velbas [8], застосувавши схему апроксимації (метод редукції), яка дозволяє замінити інтегральне рівняння на систему звичайних диференціальних рівнянь. У даній дисертаційній роботі розглядаються інтегро-диференціальні системи зі швидкоосцилюючими змінними, що суттєво ускладнює аналіз. Тому у даному дослідженні застосовано асимптотичний метод усереднення Боголюбова як в роботах Плотнікова та його учнів.

Фундаментальні результати щодо аналізу динаміки та стійкості коливань в інтегро-диференціальних системах типу Вольтерра за допомогою методу усереднення, але без оптимального керування були отримані в роботах [28, 81]. Пізніше А. В. Плотніков та Т. А. Комлева [35, 67, 68] узагальнили цей підхід на значно складніші об'єкти — інтегро-диференціальні включення та нечіткі інтегро-диференціальні системи, обґрунтувавши схеми усереднення для них.

Однак, незважаючи на ці результати, строге обґрунтування методу усереднення безпосередньо для задач оптимального керування детермінованими інтегро-диференціальними системами зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами залишалися відкритими проблемами. У другій частині дисертації розглядається клас керованих систем, що поєднує швидкоосцилюючу залежність від t/ε та

інтегральну частину. Нелінійна задача має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = X \left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s)) ds, u(t) \right), \\ x_\varepsilon(0) = x_0, \end{cases}$$

Принципова складність аналізу запропонованої моделі полягає у наявності інтегрального члена Вольтеррівського типу та залежності від оптимального керування. Це робить неможливим пряме застосування класичних схем усереднення. У даному дослідженні розвивається підхід, закладений у працях О. М. Станжицького [83], де було отримано умови збіжності для інтегро-диференціальних систем без керування. Впровадження в таку модель параметра керування та функціонала якості потребує розробки нових апроксимаційних схем, сумісних із нелінійністю системи. Проведений аналіз охоплює як нелінійний випадок, так і відповідну лінійну за керуванням задачу, а одержані результати отримані на скінченному інтервалі часу та на півосі.

Основним здобутком дисертаційного дослідження є строге математичне обґрунтування того, що оптимальне керування усередненої інтегро-диференціальної системи є ε -оптимальним для вихідної задачі. Одержані результати охоплюють як лінійну за керуванням, так і загальну нелінійну постановки на скінченних інтервалах і на півосі. Це дозволило узагальнити класичні теореми Боголюбова–Митропольського на новий клас керованих систем із швидкими осциляціями та інтегральною частиною. Таким чином, у роботі вперше побудовано повну теоретичну базу для застосування асимптотичних методів в оптимальному керуванні інтегро-диференціальними моделями, що доповнює наявні часткові або неповні результати в теорії апроксимації складних динамічних систем.

Розділ 2

ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У цьому розділі розглядається задача існування оптимального керування для інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерри. Проведено аналіз взаємозв'язку між оптимальними керуваннями та оптимальними траєкторіями на скінченному інтервалі та півосі. Отримано достатні умови існування оптимальних керувань, сформульовані термінах правих частин рівнянь та критерія якості.

Надалі через $|\cdot|$ позначатимемо норму вектора у скінченновимірному евклідовому просторі, а через $\|\cdot\|$ - норму матриці, узгоджену із нормою вектора.

2.1 Задачі керування на скінченному інтервалі

2.1.1 Постановка

Розглядається задача оптимального керування системою інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) + f_2(t, x)u(t) + \int_0^t f_3(t, s, x)u(s)ds, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^{\tau} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (2.2)$$

на відрізку $[0, T]$, де $x_0 \in D$ - фіксований вектор, $x \in D$ - фазовий вектор, D - деяка область у \mathbb{R}^d , ∂D - межа D , $\bar{D} = D \cup \partial D$, $\tau = \tau(u)$ - момент першого виходу розв'язку, $x(t) = x(t, u)$ на ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина в \mathbb{R}^m і $0 \in U$.

Нехай виконуються наступні умови для системи (2.1):

Умова 2.1. Вектор-функція $f_1(t, x) : [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$, матриця $f_2(t, x) : [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ і матриця $f_3(t, s, x) : [0, T] \times [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ є неперервними за сукупністю змінних.

Умова 2.2. У випадку необмеженої області D виконуються ще й наступні умови для функцій $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $f_3(t, s, x)$, а саме $C > 0$ таке, що для довільних $t, s \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$:

$$|f_1(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad (2.3)$$

$$\|f_2(t, x)\| \leq C(1 + |x|), \quad (2.4)$$

$$\|f_3(t, s, x)\| \leq C(1 + |x|). \quad (2.5)$$

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ і $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) існують такі $k > 0$, $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq k|u|^p, \quad (2.6)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$;

2) існують такі $K > 0$ та $\alpha > 0$, що

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(1 + |u|^{p-1} + |x|^\alpha), \quad (2.7)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$.

3) $L(t, x, u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, T], x \in \bar{D}$.

Керування $u(t)$ вважають допустимим, якщо:

$$a1) u(t) \in L^p(0, T), \quad \|u(\cdot)\|_p = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

a2) $u(t) \in U$, при $t \in [0, T]$.

Множину допустимих керувань позначатимемо через W .

2.1.2 Деякі допоміжні результати

Для подальшого нам потрібні деякі результати про існування розв'язку задачі Коші та його продовжуваність до моменту виходу з області для інтегродиференціальних систем із вимірною по незалежній змінній правою частиною. Отже, розглянемо наступну задачі Коші

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right), \quad x(0) = x_0, \quad (2.8)$$

де $x \in D$, D - область в \mathbb{R}^d , а ∂D - її межа, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $x_0 \in D$. Розв'язок даної задачі будемо розуміти в наступному сенсі.

Означення 2.1. Абсолютно неперервна функція $x(t)$ називається розв'язком задачі (2.8) на проміжку $[0, T]$, якщо вона задовольняє на $[0, T]$ наступне інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau)) d\tau) ds. \quad (2.9)$$

Маємо наступну теорему.

Теорема 2.1. Нехай $X(t, x, y)$ визначена в області $t \in [0, T], x \in D, y \in \mathbb{R}^m$, функція $\varphi(t, s, x)$ визначена для $t \in [0, T], s \in [0, T], x \in D$ і виконуються наступні умови:

- 1) $X(t, x, y)$ для майже всіх t (за мірою Лебега) неперервна по x і y , функція $\varphi(t, s, x)$ неперервна по x для майже всіх t і s ;

- 2) $X(t, x, y)$ вимірна по t при всіх x і y , $\varphi(t, s, x)$ вимірна по t, s при всіх x ;
 3) існують інтегровні функції $m(t)$ і $\mu(t, s)$ такі, що

$$|X(t, x, y)| \leq m(t), x \in D, y \in \mathbb{R}^m, \quad (2.10)$$

$$|\varphi(t, s, x)| \leq \mu(t, s), x \in D, \quad (2.11)$$

$$\int_0^T m(t) dt < \infty, \int_0^T \int_0^T \mu(t, s) ds dt < \infty. \quad (2.12)$$

Тоді існує таке $h > 0$, що задача Коші має розв'язок (2.8) на відрізку $[0, h]$.

Доведення. Виберемо $b > 0$ так, що відрізок $|x - x_0| \leq b$ цілком лежить в D , а $h > 0$ таке, щоб

$$\int_0^h m(t) dt \leq b. \quad (2.13)$$

Для кожного натурального n покладемо $\delta = h/n$ і позначимо $t_i = i\delta$. Послідовно на відрізках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ побудуємо послідовність функцій $x_n(t)$ визначену на $[0, h]$ наступним чином. Покладемо $x_n(t) \equiv x_0$ при $t \leq 0$ і

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t X(s, x_n(s - \delta), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_n(\tau - \delta)) d\tau) ds. \quad (2.14)$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ функції $x_n(t)$ визначені та неперервні на $[0, h]$. Дійсно при $t \in [0, \delta]$ маємо $x_n(t - \delta) = x_0$, і для кожного $s \in [0, \delta]$: $\int_0^s \varphi(s, \tau, x_0) d\tau$ існує та є сумовною функцією, оскільки

$$\int_0^s |\varphi(s, \tau, x_0)| d\tau \leq \int_0^s \mu(s, \tau) d\tau < \infty,$$

виконується в силу умов (2.11), (2.12) та теореми Фубіні. Тоді в силу [76, 121] підінтегральна функція (2.14) є сумовна, при цьому

$$|x_n(t) - x_0| \leq \int_0^t |X(s, x_0, \int_0^s \varphi(s, \tau, x_0) d\tau)| ds \leq \int_0^h m(t) dt \leq b.$$

Тоді на $[0, h]$ функція $x_n(t)$ є неперервною і лежить в області D . Аналогічно, при $t \in [h, 2h]$ ми отримаємо

$$\int_0^s |\varphi(s, \tau, x_n(\tau - \delta))| d\tau \leq \int_0^s \mu(s, \tau) d\tau < \infty \quad \text{та}$$

$$|x_n(t) - x_0| \leq \int_0^t |X(s, x_n(s - \delta), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_n(\tau - \delta)) d\tau)| ds \leq \int_0^h m(t) dt \leq b.$$

Отже, продовжуючи цей процес, отримаємо, що $x_n(t)$ є неперервною на $[0, h]$ і для неї виконується оцінка

$$|x_n(t) - x_0| \leq b, t \in [0, h]. \quad (2.15)$$

Окрім того, в силу абсолютної неперервності інтеграла Лебега для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що, якщо $|\alpha - \beta| < \delta$, тоді

$$|x_n(\beta) - x_n(\alpha)| \leq \int_\alpha^\beta m(t) dt < \varepsilon. \quad (2.16)$$

Таким чином, в силу (2.15) та (2.16) функції $x_n(t)$ є рівностепенено неперервними та рівномірно обмеженими на $[0, h]$. Отже, існує рівномірно збіжна на $[0, h]$ їх підпоследовність $x_{n_k}(t)$ до неперервної функції $x(t)$. Необмежуючи загальності, будемо вважати, що сама последовність $x_n(t)$ рівномірно збігається до $x(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки

$$|x_n(s - \delta) - x(s)| \leq |x_n(s - \delta) - x_n(s)| + |x_n(s) - x(s)|,$$

то в силу рівностепененої неперервності та рівномірної збіжності последовності $\{x_n(t)\}$, маємо $x_n(s - \delta) \rightarrow x(s)$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, з урахуванням неперервності функції $X(t, x, y)$ по x, y та неперервності $\varphi(t, s, x)$ по x , із (2.10)-(2.12), використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність в (2.14) можливий граничний перехід під знаком інтегралів. Отже, гранична функція $x(t)$ задовольняє рівняння (2.9) і є, очевидно, абсолютно неперервною на $[0, h]$. \square

Наступна теорема гарантує продовжуваність побудованого розв'язку на межу циліндра $(0, T) \times D \subset \mathbb{R}^{d+1}$, у випадку обмеженості області D .

Теорема 2.2. *В умовах Теорема 2.1 кожний розв'язок рівняння (2.8), що проходить всередині циліндра $(0, T) \times D$ можна продовжити до його виходу на межу циліндра.*

Доведення. Розглянемо розв'язок $x(t)$, що проходить через точку $(t_0, x_0) \subset (0, T) \times D$, яку позначимо A_0 . Межу циліндра $(0, T) \times D$ позначимо Γ . Виберемо $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $2\varepsilon_1 \leq \rho(A, \Gamma)$ - відстань від точки A до межі Γ . Із абсолютної неперервності інтеграла Лебега маємо існування такого $\delta_1 > 0$, що якщо $|\beta - \alpha| < \delta_1$, то $\int_{\alpha}^{\beta} m(t) dt < \varepsilon_1$. Тоді з доведення Теорема 2.1 випливає, що розв'язок задачі Коші $x(t_0) = x_0$ можна продовжити вправо на відрізок $[t_0, t_0 + \delta_1]$. Якщо виявиться, що відстань від точки $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ до Γ не менша $2\varepsilon_1$, то розв'язок можна продовжити вправо ще на δ_1 і т.д., поки він не дійде до точки $A_1(t_1, x_1)$, що $\rho(A_1, \Gamma) < 2\varepsilon_1$. Взавши $\varepsilon_i \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots$ можемо продовжити розв'язок до точок $A_i(t_i, x_i)$ так, що $t_1 < t_2 < \dots$, і $\rho(A_i, \Gamma) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. З іншого боку розв'язок продовжиться до верхньої основи циліндра $t = T$. Якщо, послідовність $\{t_n\}$ нескінченна, то $t_n \rightarrow t^*$. Із обмеженості D випливає, що послідовність $\{x(t_n)\}$ має збіжну підпослідовність. Без втрати загальності вважатимемо, що сама $x(t_n) \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty$. Із оцінки

$$|x(\beta) - x(\alpha)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} m(t) dt,$$

яка виконується за умови, що при $t \in [\alpha, \beta]$, $x(t)$ лежить в D , випливає рівномірна неперервність функції $x(t)$ на $[t_0, t^*)$, а отже, існування границі

$$\lim_{t \rightarrow t^*-0} x(t) = x^*.$$

Очевидно $(t^*, x^*) \in \Gamma$. Поклавши $x(t^*) = x^*$, отримуємо розв'язок, що досягає межі Γ циліндра $(0, T) \times D$ в точці (t^*, x^*) . \square

Зауваження 2.1. Якщо додатково в умовах Теорема 2.1 функції $X(t, x, y)$ і $\varphi(t, s, x)$ задовольняють за змінними $x \in D, y \in \mathbb{R}$ умову лінійного росту:

$$|X(t, x, y)| \leq m(t)(1 + |x| + |y|), \quad |\varphi(t, s, x)| \leq \mu(t, s)(1 + |x|) \quad (2.17)$$

то умову обмеженості області D в Теоремі 2.2 можна зняти.

Доведення. Дійсно, обмеженість D ми використали при доведенні існування скінченної границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x^* \quad (2.18)$$

Але з умови (2.17) для довільного $t \in [t_0, t^*)$ отримаємо:

$$|x(t)| \leq |x_0| + C + \int_{t_0}^t m(s)|x(s)|ds + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^s \mu(s, \tau)|x(\tau)|d\tau \right) ds$$

Тоді, згідно з узагальненою нерівністю Гронуолла, матимемо

$$|x(t)| \leq (|x_0| + C) \exp \left\{ C_1 \left(\int_{t_0}^t m(s) ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mu(s, \tau) d\tau ds \right) \right\},$$

де C та C_1 — відповідні додатні сталі. Звідси, випливає обмеженість $x(t)$, а отже, й існування скінченної границі (2.18), що і доводить твердження. \square

2.1.3 Теорема існування оптимального керування

Теорема 2.3. *Нехай для системи (2.1) з критерієм якості (2.2) виконується Умова 2.1, а у випадку необмеженої області D також Умова 2.2, функція L задовольняє умови 1)–3). Тоді задача (2.1), (2.2) має розв'язок в класі допустимих керувань W , тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2.2).*

Доведення. Покажемо, що для кожного допустимого керування існує розв'язок задачі Коші, що продовжується до виходу на межу циліндра $(0, T) \times D$. Для цього

перевіримо виконання умов Теорема 2.1 для кожного допустимого керування $u(t)$.

Для обмеженої області D із неперервності функцій f_1, f_2, f_3 за сукупністю змінних $t \in [0, T], s \in [0, T], x \in D$ впливає існування константи $C_2 > 0$ такої, що:

$$|f_1(t, x)| + |f_2(t, x)| + |f_3(t, s, x)| \leq C_2, \quad (2.19)$$

для всіх $t, s \in [0, T], x \in D$. Тоді у нашому випадку $\varphi(t, s, x) = f_3(t, s, x)u(t)$, маємо $|\varphi(t, s, x)| \leq C_2|u(t)|$, отже

$$|f_1(t, x) + f_2(t, x)u(t) + \int_0^t f_3(t, s, x)u(s)ds| \leq C_2 + C_2|u(t)| + C_2 \int_0^t |u(s)|ds,$$

оскільки функція $\int_0^t |u(s)|ds$ абсолютно неперервна на $[0, T]$, то умови (2.10)-(2.12) виконуються.

У випадку необмеженої області D розглянемо її перетин із кулею радіуса R із центром в нулі. Позначимо його D_R , тоді циліндр $(0, T) \times D_R$ є обмеженою множиною. З умов лінійного росту для функцій f_1, f_2, f_3 матимемо виконання (2.19) у циліндрі $(0, T) \times D_R$. Тоді розв'язок продовжується до межі циліндра. Якщо пара $(t, x(t))$ попадає на межу циліндра $(0, T) \times D$, то твердження встановлено. Якщо ні, то $x(t)$ попадає на сферу S_R , а тому пара $(t, x(t))$ лежить всередині циліндра $(0, T) \times D$, отже згідно Теорема 2.1 розв'язок продовжимо вправо.

Розглядаючи послідовність куль $B_R(0)$, що вичерпують множину D (за рахунок зростання радіуса) ми продовжуємо розв'язок до його виходу на межу циліндра $(0, T) \times D$.

Взявши в ролі допустимого керування $u(t)$ стале керування, тобто $u(t) = u_0$, отримаємо для нього відповідну допустиму траєкторію $x(t)$, що продовжуються до межі області D на відрізку $[0, \tau]$, де $\tau \leq T$. Оскільки, $x(t)$ - неперервна функція на $[0, \tau]$, а тому вона й обмежена. Тоді, в силу неперервності функції

$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ за сукупністю змінних, маємо:

$$\int_0^{\tau} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0) dt < \infty. \quad (2.20)$$

Тому множина допустимих керувань непорожня.

Оскільки критерій якості є невід'ємним, функціонал $J(\mathbf{u})$ має нижню межу m . Це дозволяє побудувати послідовність допустимих керувань $\{\mathbf{u}_n(t)\}_{n \geq 1}$, для якої значення функціоналу прямують до цієї межі при $n \rightarrow \infty$, тобто

$$J(\mathbf{u}_n) = \int_0^{\tau_n} L(t, \mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) dt \longrightarrow m, \quad n \rightarrow \infty,$$

де $\mathbf{x}_n(t)$ — розв'язки системи (2.1), що відповідають керуванням $\mathbf{u}_n(t)$, а τ_n позначає момент досягнення границі області D розв'язком $\mathbf{x}_n(t)$.

Зауважимо, що для достатньо великих n , маємо $J(\mathbf{u}_n) \leq m + 1$.

Без обмеження загальності покладемо, що $\mathbf{u}_n(s) = \mathbf{0}$ для $\tau_n < s \leq T$, коли $\tau_n < T$. Отже, відповідно до умови (2.6), маємо

$$\int_0^{\tau_n} |\mathbf{u}_n(t)|^p dt = \int_0^T |\mathbf{u}_n(t)|^p dt \leq \frac{m+1}{k},$$

$$\|\mathbf{u}_n(\cdot)\|_p \leq \left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/p}. \quad (2.21)$$

З цього випливає, що сім'я $\mathbf{u}_n(\cdot)$ є слабко компактною в просторі $L^p(0, T)$. Тому можна виділити підпослідовність (яку, для зручності, також позначатимемо $\mathbf{u}_n(t)$), що слабко збігається до деякої функції $\mathbf{u}^*(t) \in L^p(0, T)$ та задовольняє умову (2.21). З леми Мазура [91, 120], випливає існування опуклої комбінації $\mathbf{b}_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) \mathbf{u}_i(t)$ елементів $\mathbf{u}_i(t) \in U$ ($\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1$), що збігається в L^p до \mathbf{u}^* при $k \rightarrow \infty$, тобто $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{u}^*$. Отже, можна виділити підпослідовність \mathbf{b}_{k_l} , яка майже всюди на $[0, T]$ збігається до $\mathbf{u}^*(t)$ за мірою Лебега, тобто $\mathbf{b}_{k_l}(t) \rightarrow \mathbf{u}^*(t)$ для майже всіх t при $l \rightarrow \infty$. Оскільки множина U є опуклою та замкненою, то будь-яка така опукла комбінація $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i \mathbf{u}_i(t)$ належить U майже всюди на $[0, T]$. Тому і $\mathbf{u}^*(t) \in U$ для майже всіх $t \in [0, T]$.

Для розв'язків $x_n(t)$, маємо інтегральне представлення:

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u(\sigma)d\sigma]dt.$$

Покажемо рівномірну обмеженість розв'язків x_n при $t \in [0, \tau_n]$. Для обмеженої області дане твердження очевидне.

Доведемо рівномірну обмеженість у випадку необмеженої області, для цього скористаємось умовами лінійного росту (2.3)-(2.5). При $q = \frac{p}{p-1}$, маємо:

$$\begin{aligned} |x_n(t)|^q &= \left| x_0 + \int_0^t f_1(s, x_n(s)) ds + \int_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s)) u_n(\sigma) d\sigma ds \right|^q \\ &\leq 4^{q-1} \left(|x_0|^q + \left| \int_0^t f_1(s, x_n(s)) ds \right|^q + \left| \int_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s) ds \right|^q \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s)) u_n(\sigma) d\sigma ds \right|^q \right) \\ &\leq 4^{q-1} \left(|x_0|^q + C_3^q \left(T + \int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q + C_3^q \left(\int_0^t |u_n(s)| ds + \int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \right. \\ &\quad \left. + C_3^q \left(\int_0^t |u_n(s)| ds + \int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \right). \end{aligned}$$

Для оцінки другого і третього інтегралів в останній нерівності використаємо нерівність Гельдера, а також врахуємо, що $\tau_n \leq T$. В результаті матимемо

$$\begin{aligned} |x_n(t)|^q &\leq 8^{q-1} C_3^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C_3^q} + (T^q + \left(\int_0^t |x_n(s)| ds \right)^q) \left(1 + \left(\int_0^T |u_n(s)| ds \right)^q \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t |u_n(s)| ds \right)^q + \left(\int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| ds \right)^q \right) \end{aligned}$$

$$\leq 8^{q-1} C_3^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C_3^q} + T^q (1 + T \|u_n\|_p^q) + T^{\frac{q}{p}} (1 + T \|u_n\|_p^q) \int_0^t |x_n(s)|^q ds \right. \\ \left. + T \|u_n\|_p^q + \|u_n\|_p^q \int_0^t |x_n(s)|^q ds \right).$$

Позначимо

$$M_1 = 8^{q-1} C_3^q \left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C_3^q} + T^q + (T^q + 1) T \|u_n\|_p^q \right), \\ M_2 = 8^{q-1} C_3^q \left(T^{\frac{q}{p}} (1 + T \|u_n\|_p^q) + \|u_n\|_p^q \right).$$

Тоді за аналогом леми Гронуолла-Беллмана маємо:

$$|x_n(t)|^q = M_1 e^{M_2 T} = A^q < \infty, \quad (2.22)$$

при $t \in [0, \tau_n]$. Так як розв'язки x_n при $t \in [0, \tau_n]$ рівномірно обмежені, то

$$|x_n(\tau_n)| \leq A.$$

Тому функції x_n можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$ наступним чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{при } t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n) & \text{при } t \in [\tau_n, T]. \end{cases}$$

Доведемо рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T]$. Для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \tau_n]$ таких, що $s_1 < s_2$, маємо

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| \\ = \left| \int_{s_1}^{s_2} \left(f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(s)) u_n(s) ds \right) dt \right|.$$

Розглянемо два випадки, коли область D обмежена та необмежена.

Якщо область D - обмежена, то очевидно існує константа $C_4 > 0$, що $|f_1(t, x_n(t))| + |f_2(t, x_n(t))| + |f_3(t, s, x_n(t))| \leq C_4$, тоді використовуючи нерівність

Гельдера для інтеграла

$$\int_{s_1}^{s_2} (f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(t))u_n(s)ds)dt, \quad (2.23)$$

отримаємо оцінку

$$C_4(s_2 - s_1) + C_4(s_2 - s_1)^{1/q} \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{1/p} + C_4(s_2 - s_1) T \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

де $1/p + 1/q = 1$, яка й означає рівностепеневу неперервність.

Якщо ж область необмежена, то використовуючи умови (2.3)-(2.5) оцінимо (2.23) з константою $C_5 > 0$ наступним чином

$$\begin{aligned} & \int_{s_1}^{s_2} \left[C_5(1 + |x_n(t)|) + C_5(1 + |x_n(t)|) |u_n(t)| + \int_0^t C_5(1 + |x_n(t)|) |u_n(s)| ds \right] dt \\ & \leq C_5(1 + A) \left[(s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + (s_2 - s_1) T \|u_n\|_p \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, що з наведених вище оцінок, маємо $y_n(s_1) - y_n(s_2) \rightarrow 0$, при $|s_2 - s_1| \rightarrow 0$.

При $s_1 < \tau_n < s_2 < T$, маємо

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(\tau_n)| &= |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| \\ &= \int_{s_1}^{\tau_n} \left| f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(s)) u_n(s) ds \right| dt. \end{aligned}$$

Якщо область обмежена, то вираз

$$\int_{s_1}^{\tau_n} \left(f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(s)) u_n(s) ds \right) dt \quad (2.24)$$

оцінюється, аналогічно попередньому, величиною з невід'ямною сталою C_6

$$\begin{aligned} & C_6(\tau_n - s_1) + C_6(\tau_n - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + C_6(\tau_n - s_1) T \|u_n\|_p \\ & \leq C_6(s_2 - s_1) + C_6(s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + C_6(s_2 - s_1) T \|u_n\|_p. \end{aligned}$$

Оцінимо (2.24) у випадку необмеженої області. Аналогічно отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{s_1}^{\tau_n} C_7(1 + |x_n(t)|) dt + \int_{s_1}^{\tau_n} C_7(1 + |x_n(t)|) |u_n(t)| dt + \int_{s_1}^{\tau_n} \int_0^t C_7(1 + |x_n(t)|) |u_n(s)| ds dt \\ & \leq C_7(1 + A) \left[(\tau_n - s_1) + (\tau_n - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + (\tau_n - s_1) \|u_n\|_p \right] \\ & \leq C_7(1 + A) \left[(s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + (s_2 - s_1) \|u_n\|_p \right], C_7 > 0 - \text{ стала.} \end{aligned}$$

Тоді

$$|y_n(s_1) - y_n(\tau_n)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| \rightarrow 0, \text{ при } |s_2 - s_1| \rightarrow 0.$$

Якщо $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, то

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n)|.$$

Таким чином, встановлена рівностепенева неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T]$.

Отже, можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n(t), n \geq 1\}$ (яку також позначимо через $\{y_n(t), n \geq 1\}$), що $y_n(t) \rightarrow y^*(t)$, $n \rightarrow \infty$ рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Позначимо через τ^* момент першого виходу $y^*(t)$ на межу ∂D , тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] \mid y^*(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо } y^*(t) \in D \text{ для всіх } t \in [0, T]; \end{cases}$$

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] \mid x_n(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо } x_n(t) \in D, \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Покажемо, що $\tau^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Припустимо протилежне, тобто нехай $\tau^* > \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$. Згідно з теоремою про характеристизацію нижньої границі, для будь-якого $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau + \delta\}$ є нескінченною. Оберемо δ так, щоб $\tau + \delta < \tau^*$. Тоді існує така підпослідовність $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 1\}$, що існує $N \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $n_k \geq N$, $\tau_{n_k} < \tau + \delta$.

Виберемо фіксований момент часу $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$. Тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k}) \in \partial D$. З рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T]$ маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, що $n_k \geq N$ виконується наступна нерівність:

$$|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon.$$

Однак, обравши ε так, що $0 < \varepsilon < \inf_{v \in \partial D} |y^*(t_0) - v|$, отримуємо, що для фіксованого $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t_0)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k})| > \varepsilon.$$

Ми отримали протиріччя. Отже,

$$\tau^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n.$$

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$, при $t \in [0, \tau^*]$. Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (2.1) при $t \in [0, \tau^*]$, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Розглянемо два випадки.

1) Нехай $\tau^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Тоді за теоремою про характеристику нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < \tau^*\}$ - скінченна. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n > 0\}$ таку, що для довільного $k > 0$ виконується $\tau_k > \tau^*$. Тоді для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Оскільки для кожного $t \in [0, T]$, $y_k(t) \rightarrow y^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ рівномірно, то $x_k(t) \rightarrow x^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau^*]$. Так як $x_k(t)$ - розв'язок системи (2.1), то маємо

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u_k(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s))u_k(\sigma)d\sigma \right) ds \\ &+ \int_0^t f_2(s, x_k(s))u^*(s)ds - \int_0^t f_2(s, x_k(s))u^*(s)ds + \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_k(s)ds \\ &- \int_0^t f_2(s, x^*(s))u_k(s)ds + \int_0^t f_2(s, x^*(s))u^*(s)ds - \int_0^t f_2(s, x^*(s))u^*(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s)) u^*(\sigma) d\sigma ds - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s)) u^*(\sigma) d\sigma ds \\
& + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s)) u_k(\sigma) d\sigma ds - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s)) u_k(\sigma) d\sigma ds \\
& + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s)) u^*(\sigma) d\sigma ds - \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s)) u^*(\sigma) d\sigma ds \\
& = x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s)) u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_k(s)) u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \\
& + \int_0^t (f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))) (u_k(s) - u^*(s)) ds \\
& + \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))) (u_k(\sigma) - u^*(\sigma)) d\sigma ds \\
& + \int_0^t f_2(s, x^*(s)) (u_k(s) - u^*(s)) ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s)) (u_k(\sigma) - u^*(\sigma)) d\sigma ds.
\end{aligned}$$

Для другого інтеграла в останній рівності із застосуванням нерівності Гельдера, матимемо оцінку

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t (f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))) (u_k(s) - u^*(s)) ds \right| \leq \\
& \leq \left(\int_0^t |f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_0^t |u_k(s) - u^*(s)|^p ds \right)^{1/p} \\
& = \|u_k - u^*\|_p \left(\int_0^t |f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))|^q ds \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Аналогічні міркування проведемо і для третього інтеграла, матимемо

$$\left| \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))) (u_k(\sigma) - u^*(\sigma)) d\sigma ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_0^t \int_0^s |f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))|^q d\sigma ds \right)^{1/q} \left(\int_0^t \int_0^s |u_k(\sigma) - u^*(\sigma)|^p d\sigma ds \right)^{1/p} \\ &= \|u_k - u^*\|_p \left(\int_0^t \int_0^s |f_3(s, \sigma, x_k(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))|^q d\sigma ds \right)^{1/q} T^{1/p}. \end{aligned}$$

У випадку обмеженої області використаємо (2.19), маємо $|f_3(t, s, x_k(t))| \leq C_8$, де стала $C_8 > 0$.

Якщо ж область необмежена, використовуємо умови (2.4),(2.5), отримаємо

$$\begin{aligned} |f_2(t, x_k(t))| &\leq C_8(1 + |x_k(t)|) \leq C_8(1 + A), \\ |f_3(t, s, x_k(t))| &\leq C_8(1 + |x_k(t)|) \leq C_8(1 + A). \end{aligned}$$

Отже, функції $f_2(t, x_k(t))$ та $f_3(t, s, x_k(t))$ інтегровні на $[0, \tau_k]$, а тому на $[0, \tau^*]$. З рівномірної збіжності $x_k(t)$ до $x^*(t)$ на $[0, \tau^*]$ випливає аналогічна оцінка і для $x^*(t)$. Тоді в силу теореми Лебега, другий та третій інтеграли прямують до нуля, при $k \rightarrow \infty$.

Четвертий інтеграл $\int_0^t f_2(s, x^*(s))(u_k(s) - u^*(s)) ds$ прямує до нуля в силу слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$, при $k \rightarrow \infty$.

Прямуювання останнього інтегралу до нуля випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність і з використанням означення слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$, при $k \rightarrow \infty$.

Аналогічними міркуваннями отримуємо, що в силу теореми Лебега при $k \rightarrow \infty$ перший інтеграл прямує до виразу

$$\int_0^t (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma) ds.$$

Отже, граничним переходом при $k \rightarrow \infty$ отримуємо

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma) ds, \quad (2.25)$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

2) нехай тепер $\tau^* = \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau^*$. Тоді за теоремою про характеристику нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < t_2\}$ - скінченна, якщо на проміжку (t_2, τ^*) лежить скінченна кількість точок τ_n , то доведення зводиться до попереднього випадку. А якщо на проміжку (t_2, τ^*) лежить нескінченна кількість точок τ_n , то у цьому випадку виберемо підпослідовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_k, k > 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0 : \tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Аналогічно попередньому пункту, маємо виконання (2.25) для будь-якого $t \in [0, t_2]$. Доведемо виконання рівності (2.25) для довільного $t \in [0, \tau^*]$. Оскільки, t_2 - вибрано довільним чином, то для кожного $t \in [0, \tau^*)$ рівність (2.25) виконується.

Залишилось показати виконання рівності (2.25) в точці τ^* , а саме

$$x^*(\tau^*) = x_0 + \int_0^{\tau^*} (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds.$$

Виберемо послідовність $t_n \in [0, \tau^*]$ таку, що $t_n \rightarrow \tau^*$, тоді $x^*(t_n) \rightarrow x^*(\tau^*)$, оскільки $x^*(t)$ є неперервною на $[0, \tau^*]$.

Маємо наступне

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\tau^*} (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{t_n} (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds \right| = \\ & \quad = \left| \int_{t_n}^{\tau^*} (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds \right|. \end{aligned}$$

Оцінимо останній вираз у випадку обмеженої області. Очевидно, що існує стала $C_9 > 0$, така що

$$|f_1(s, x^*(s))| + |f_2(s, x^*(s))| + |f_3(t, s, x^*(s))| \leq C_9.$$

Звідки випливає оцінка при $n \rightarrow \infty$

$$C_9(\tau^* - t_n) + C_9(\tau^* - t_n)^{\frac{1}{q}} \|u^*\|_p + C_9(\tau^* - t_n)T \|u^*\|_p \rightarrow 0.$$

У випадку необмеженої області використовуючи умови (2.3)-(2.5) та (2.22), маємо наступну оцінку

$$C(1+A)|\tau^* - t_n| + C(1+A)|\tau^* - t_n|^{\frac{1}{q}}\|u^*\|_p + C(1+A)|\tau^* - t_n|T\|u^*\|_p \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$. Отже,

$$\begin{aligned} x^*(t_n) &= x_0 + \int_0^{t_n} (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds \rightarrow \\ &\rightarrow x_0 + \int_0^{\tau^*} (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds = x^*(\tau^*). \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

А тому, $x^*(t)$ - розв'язок системи (2.1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним. Знову розглянемо 2 випадки:

1) $y^*(\tau^*) \in \partial D$, тобто $\tau^* < T$.

а) Нехай $\tau^* < \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau_n$. Тоді за теоремою про характеристизацію нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < \tau^*\}$ - скінченна. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\tau_k, k \geq 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n_k \geq 0\}$ таку, що для будь-якого $k > 0$ виконується $\tau_k > \tau^*$. Тоді для кожного $t \in [0, \tau^*]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Покажемо, інтегровність функції $L(t, x^*(t), u_k(t))$ для будь-якого $k > 0$ на відрізку $[0, \tau^*]$.

Використовуючи нерівність

$$|L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0)| \leq \sup_{\lambda \in (0,1)} |L_u(t, x^*(t), u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0))| |u_k(t) - u_0|,$$

де $u_0 = \text{const}, u_0 \in U$, маємо

$$\begin{aligned} |L(t, x^*(t), u_k(t))| &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + |L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0)| \\ &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + \sup_{\lambda \in (0,1)} |L_u(t, x^*(t), u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0))| |u_k(t) - u_0|. \end{aligned}$$

Застосовуючи умову (2.7) отримаємо

$$\begin{aligned}
|L(t, x^*(t), u_k(t))| &\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + K(1 + |x^*(t)|^\alpha \\
&\quad + \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0| \\
&\leq |L(t, x^*(t), u_0)| + K|u_k(t) - u_0| + K|x^*(t)|^\alpha |u_k(t) - u_0| \\
&\quad + K \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0|.
\end{aligned}$$

Перший доданок інтегрований на відрізку $[0, \tau^*]$ відповідно до (2.20). Покажемо інтегровність другого та третього доданків. Застосовуючи нерівність (2.22) отримаємо

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau^*} [K|u_k(t) - u_0| + K|x^*(t)|^\alpha |u_k(t) - u_0|] dt &= K \int_0^{\tau^*} (1 + |x^*(t)|^\alpha) |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq \left(\int_0^{\tau^*} (1 + |x^*(t)|^\alpha)^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^{\tau^*} |u_k(t) - u_0|^p dt \right)^{1/p} \leq K(1 + A^\alpha) (\tau^*)^{1/q} \|u_k - u_0\|_p < \infty.
\end{aligned}$$

Покажемо інтегровність останнього доданку. Маємо, в силу нерівності Гельдера

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau^*} \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt &\leq \int_0^{\tau^*} (|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^{p-1} |u_k(t) - u_0| dt \\
&\leq 2^{\frac{(p-1)^2}{p}} \left(\int_0^{\tau^*} (|u_0|^p + |u_k(t) - u_0|^p) dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_0^{\tau^*} |u_k(t) - u_0|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Отже, функція $L(t, x^*(t), u_k(t))$ інтегровна на відрізку $[0, \tau^*]$ для будь-якого $k > 0$.

Нехай $\chi_R(t)$ - характеристична функція множини $\{t : |u^*(t)| < R\}$. Оскільки $L(t, x, \cdot)$ - опукла, то виконується нерівність

$$L(t, x^*(t), v(t)) \chi_R(t) \geq L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) + (v(t) - u^*(t)) L_v(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t),$$

для будь-якого $v(t) \in W, t \in [0, \tau^*]$.

Покладемо $v(t) = u_k(t)$, тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t)) \chi_R(t) dt &\geq \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt \\ &+ \int_0^{\tau^*} (u_k(t) - u^*(t)) L_u(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Із умови (2.7) маємо

$$|L_u(t, x^*(t), u^*(t))|_{\chi_R(t)} \leq K(1 + |u^*(t)|^{p-1} + |x^*(t)|^\alpha) \leq K(1 + R^{p-1} + A^\alpha).$$

Отже, другий інтеграл в нерівності (2.26) прямує до 0, при $k \rightarrow \infty$. Останнє випливає із слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$. Тому

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t)) \chi_R(t) dt \geq \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt.$$

Оскільки $L(t, x, u) \geq 0$, $\chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \rightarrow 1$, при $R \rightarrow \infty$, то

$$\int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt. \quad (2.27)$$

Розглянемо також величину

$$\left| \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right|.$$

Використавши рівність

$$L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t)) = \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t)) (x_k(t) - x^*(t)) d\lambda,$$

де $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t) - x^*(t))$, а також застосовуючи нерівність (2.7), (2.22) та нерівність Гельдера, отримаємо

$$\left| \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{\tau^*} \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t))(x_k(t) - x^*(t)) d\lambda dt \right| \\
&\leq \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)| K (1 + |u_k(t)|^{p-1} + |x_k(t) + x^*(t)|^\alpha) dt \\
&\leq K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha) dt + K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)| |u_k(t)|^{p-1} dt \\
&\leq K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha) dt + K \|u_k\|_p^{p/q} \left(\int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right| \\
&\leq K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha) dt + K \|u_k\|_p^{p/q} \left(\int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Оскільки $\|u_k\|_p$ - обмежена, то права частина (2.28) прямує до 0, при $k \rightarrow \infty$.

Далі маємо

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt &= \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \\
&+ \int_0^{\tau^*} [L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt + \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt.
\end{aligned}$$

Перейдемо до границі при $k \rightarrow \infty$ в останній рівності

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} [L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt + \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt
\end{aligned}$$

Перша границя в правій частині цієї рівності прямує до 0, при $k \rightarrow \infty$ в силу (2.28). А в силу нерівності (2.27) друга границя невід'ємна. Тоді маємо

$$\begin{aligned} m &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_k} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt \geq \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Звідси $J(u^*) = m$.

Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

б) Нехай тепер $\tau^* = \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Виберемо довільний момент t_2 такий, що $t_2 < \tau^*$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < t_2\}$ - скінченна, а на проміжку (t_2, τ^*) може лежати нескінченна кількість τ_n . У цьому випадку виберемо підпоследовність $\{\tau_k, k > 0\}$ послідовності $\{\tau_n, n > 0\}$ таку, що для довільного $k > 0$ виконується $\tau_k \in (t_2, \tau^*)$. Тоді для кожного $t \in [0, t_2]$ маємо $y_k(t) = x_k(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Нехай знову $\chi_R(t)$ - характеристична функція множини $\{t : |u^*(t)| < R\}$.

Оскільки $L(t, x, \cdot)$ - опукла, то виконується нерівність

$$L(t, x^*(t), v(t))\chi_R(t) \geq L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) + (v(t) - u^*(t))L_v(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t),$$

для кожного $v(t) \in W, t \in [0, \tau^*]$.

Покладемо $v(t) = u_k(t)$, тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t))\chi_R(t)dt &\geq \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t)dt \\ &+ \int_0^{t_2} (u_k(t) - u^*(t))L_u(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t)dt. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Із умови (2.7) маємо

$$|L_u(t, x^*(t), u^*(t))|\chi_R(t) \leq K(1 + |u^*(t)|^{p-1} + |x^*(t)|^\alpha) \leq K(1 + R^{p-1} + A^\alpha).$$

Отже, другий інтеграл в нерівності (2.29) прямує до нуля, при $k \rightarrow \infty$. Останнє випливає із слабкої збіжності $u_k(t)$ до $u^*(t)$. Тому,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) \chi_R(t) dt \geq \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) \chi_R(t) dt.$$

Оскільки $L(t, x, u) \geq 0$, $\chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \rightarrow 1$, при $R \rightarrow \infty$, то

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt \geq \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \quad (2.30)$$

Розглянемо також величину $\left| \int_0^{t_2} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right|$. Користуючись рівністю

$$L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t)) = \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t)) (x_k(t) - x^*(t)) d\lambda,$$

де $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t) - x^*(t))$, а також застосовуючи нерівність (2.7), (2.22) та нерівність Гельдера, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_2} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{t_2} \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t)) (x_k(t) - x^*(t)) d\lambda dt \right| \\ &\leq \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| K(1 + |u_k(t)|^{p-1} + |x_k(t) + x^*(t)|^\alpha) dt \quad (2.31) \\ &\leq K \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| (1 + (2A)^\alpha) dt + K \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| |u_k(t)|^{p-1} dt \\ &\leq K(1 + (2A)^\alpha) \int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)| dt + K \|u_k\|_p^{p/q} \left(\int_0^{t_2} |x_k(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Оскільки $\|u_k\|_p$ - обмежена, то права частина (2.31) прямує до 0, при $k \rightarrow \infty$.

Далі маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} L(t, x_k(t), u_k(t)) dt + \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt - \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u_k(t)) dt \\ & + \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt - \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \\ & = \int_0^{t_2} \left[L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t)) \right] dt \\ & + \int_0^{t_2} \left[L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t)) \right] dt + \int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Перший інтеграл в правій частині останньої нерівності прямує до 0, при $k \rightarrow \infty$ в силу (2.31). А в силу нерівності (2.30) для будь-якого $t_2 \in [0, \tau^*)$ отримаємо

$$\int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \leq m.$$

Звідки граничним переходом при $t_2 \rightarrow \tau^*$ маємо

$$J(u^*) = \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \leq m.$$

А тому $J(u^*) = m$. Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

2) Нехай тепер $y^*(\tau^*) \in D$, тоді $\tau^* = T$. Отже, для достатньо великих n_k : $\tau_{n_k} = T$.

Далі доведення аналогічне першому випадку з заміною τ^* і τ_k на T . Теорему доведено. \square

2.2 Оптимальне керування на півосі

Розглядається задача оптимального керування (2.1) з наступним критерієм якості

$$J(u) = \int_0^{\tau} e^{-\gamma t} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (2.32)$$

де $t \in [0, \infty)$, $x \in D$ - фазовий вектор, D - деяка обмежена область в \mathbb{R}^d , ∂D - межа D , τ - момент виходу розв'язку $x(t)$ на ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина в \mathbb{R}^m і $0 \in U$.

Нехай виконуються наступні умови:

Умова 2.3. вектор-функція $f_1(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$, матриця $f_2(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ та матриця $f_3(t, s, x) : [0, \infty) \times [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ - неперервні за сукупністю змінних.

Умова 2.4. для функцій $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $f_3(t, s, x)$ виконується умова Ліпшиця, тобто існує така константа $H > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in D$, $t \geq 0$ та $u \in U$ виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} |f_1(t, x_1) - f_1(t, x_2)| &\leq H|x_1 - x_2|, \\ \|f_2(t, x_1) - f_2(t, x_2)\| &\leq H|x_1 - x_2|, \\ \|f_3(t, s, x_1) - f_3(t, s, x_2)\| &\leq H|x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ і $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

- 1) $L(t, x, u) \geq 0$ для $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, та $u \in U$;
- 2) існують такі константи $C > 0$ та $p \geq 2$, що для будь-яких $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $u \in U$ виконується нерівність

$$L(t, x, u) \leq C(1 + |u|^p);$$

3) існують такі $K > 0$, $\alpha > 0$, що для будь-яких $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $u \in U$ виконується

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(1 + |u|^{p-1} + |x|^\alpha); \quad (2.34)$$

4) $L(t, x, u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, \infty)$, $x \in D$.

Керування $u(t)$ вважають допустимим, якщо:

a1) $u(t) \in L^p(0, \infty)$;

a2) $u(t) \in U$, при $t \in [0, \infty)$;

a3) існує така стала $C_1 > 0$, яка не залежить від $u(t)$ з виконанням умови

$$\int_0^\infty |u(t)|^p dt \leq C_1;$$

a4) $|J(u)| < \infty$.

Множину допустимих керувань будемо називати допустимою для задачі (2.1), (2.32) позначатимемо її через W .

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.4. *Нехай для системи (2.1) з критерієм якості (2.32) виконуються Умови 2.3, 2.4 та 1)–4) на функцію L . Тоді задача (2.1), (2.32) має розв'язок в класі допустимих керувань W , тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2.32).*

Доведення. З огляду на невід'ємність критерію якості, множина його значень є обмеженою знизу. Тому існує точна нижня межа m значень функціоналу $J(u)$, а отже, їй відповідна послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ таких, що $J(u_n) \rightarrow m$ при $n \rightarrow \infty$ монотонно. Тобто,

$$J(u_n) = \int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt \rightarrow m, \quad n \rightarrow \infty$$

де $x_n(t)$ - розв'язки системи (2.1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, а τ_n - момент виходу розв'язку $x_n(t)$ на межу D .

Множина W допустимих керувань непорожня, оскільки $0 \in W$ та $J[0] < \infty$. Умова а3) гарантує слабку компактність послідовності $u_n(t)$ в $L^p(0, \infty)$. Тобто послідовність $u_n(t)$ слабо збігається до границі $u^*(t) \in L^p(0, \infty)$. З леми Мазура [91, 120] випливає існування опуклої комбінації $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U(\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1)$, що в L^p маємо $b_k \rightarrow u^*, k \rightarrow \infty$. Отже, існує майже всюди збіжна на $[0, \infty)$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l} , що $b_{k_l}(t) \rightarrow u^*(t), l \rightarrow \infty$ для майже всіх t . Оскільки U опукла та замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$ майже для всіх t , отже $u^*(t) \in U$ для майже всіх $t \in [0, T]$.

Для розв'язків $x_n(t)$, маємо інтегральне представлення:

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u_n(\sigma)d\sigma]dt.$$

За функціями x_n побудуємо функції $y_n(t)$, що будуть визначені на всій півосі $[0, \infty)$ наступним чином

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n), & t \geq \tau_n. \end{cases}$$

Виберемо довільний момент часу $T \in [0, \infty)$ і зафіксуємо його. Оскільки D - обмежена, то існує $A > 0$, що при $t \geq 0$ виконується нерівність

$$|y_n(t)| \leq A. \quad (2.35)$$

Покажемо, що сім'я функцій $\{y_n(t)\}$ компактна на $[0, T]$. Для цього в силу (2.35) достатньо довести їх рівнестепеневу неперервність. З нерівності Гельдера та Умови (2.3) для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \tau_n]$ таких, що $s_1 < s_2$ маємо:

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(s_2)| &= |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \\ &= \left| \int_{s_1}^{s_2} \left(f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(s))u_n(s)ds \right) dt \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq M(s_2 - s_1) + M(s_2 - s_1)^{1/q} \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{1/p} + M(s_2 - s_1) T \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

де $1/p + 1/q = 1$,

$$M = \max \left\{ \sup_{x \in D, t \in [0, T]} |f_1(t, x)|, \sup_{x \in D, t \in [0, T]} \|f_2(t, x)\|, \sup_{x \in D, t \in [0, T]} \|f_3(t, s, x)\| \right\}$$

Якщо $s_1 < \tau_n < s_2 < T$, тоді аналогічно попередньому випадку, маємо:

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(s_2)| &= |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| \leq \\ &\leq \int_{s_1}^{\tau_n} \left| f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t) + \int_0^t f_3(t, s, x_n(s))u_n(s) ds \right| dt \leq \\ &\leq M(\tau_n - s_1) + M \int_{s_1}^{\tau_n} |u_n(t)| dt + M(\tau_n - s_1) T \left(\int_0^T |u_n(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq M(s_2 - s_1) + M(s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} \|u_n\|_p + M(s_2 - s_1) T \|u_n\|_p. \end{aligned}$$

Якщо $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, то $|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n)|$.

Таким чином, встановлена рівностепенева неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0, T]$. Отже, можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n^k(t), n \geq 1\}$ таку, що $y_n(t) \rightarrow y^*(t)$, $n \rightarrow \infty$ рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Покажемо, що існує підпослідовність функцій $y_n^n(t)$ яка збігається поточково до функцій $y^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \infty)$.

Застосуємо діагональний метод Кантора для побудови граничної функції на півосі $[0, \infty)$. Для кожного натурального $k \in \mathbb{N}$ на проміжку $[0, k]$ послідовно виділимо підпослідовності $\{y_n^k(t)\}_{n=1}^\infty$ таким чином, щоб кожна наступна була підпослідовністю попередньої: $\{y_n^k\} \subset \{y_n^{k-1}\}$.

Згідно з теоремою Арцела–Асколі, на кожному кроці забезпечується рівномірна збіжність $y_n^k(t) \rightrightarrows y_k^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$, $t \in [0, k]$. Причому в силу вкладеності граничні функції узгоджуються між собою $y_k^*(t) = y_{k-1}^*(t)$ для всіх $t \in [0, k-1]$. Розглянемо діагональну підпослідовність $\{y_n^n(t), n \geq 1\}$:

$$y_1^1(t), y_2^2(t), y_3^3(t), \dots, y_n^n(t), \dots$$

За побудовою, для будь-якого фіксованого $T > 0$ дана послідовність (починаючи з номера $n \geq T$) рівномірно збігається до функції $y^*(t)$, яка визначена як $y^*(t) = y_k^*(t)$ при $t \in [0, k]$. Отже, послідовність $\{y_n^n(t)\}$ збігається до неперервної функції $y^*(t)$ для всіх $t \in [0, \infty)$.

Надалі для зручності позначатимемо послідовності як $\{y_n(t), n \geq 1\}$, а відповідну послідовність керувань як $\{u_n(t), n \geq 1\}$.

Позначимо через τ^* момент першого виходу $y^*(t)$ на границю ∂D , тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : y^*(t) \in \partial D\}, \\ \infty, & \text{якщо } y^*(t) \in D, \forall t \geq 0; \end{cases}$$

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : x_n(t) \in \partial D\}, \\ \infty, & \text{якщо } x_n(t) \in D, \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Покажемо, що $\tau^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Припустимо протилежне, тобто нехай $\tau^* > \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$.

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $\tau^* < \infty$. Виберемо довільне $T_1 \in [0, \infty)$ таке, що $T_1 \geq \tau^*$. На проміжку $[0, T_1]$, $y_n(t) \rightarrow y^*(t)$, $n \rightarrow \infty$.

За теоремою про характеристизацію нижньої границі для довільного $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < \tau + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\tau + \delta < \tau^*$. Тоді існує така підпослідовність $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 1\}$, що $\tau_{n_k} < \tau + \delta$.

Виберемо момент t_0 такий, що $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$, тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k}) \in \partial D$.

Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T_1]$ маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, що для будь-яких $n_k \geq N$ виконується $|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon$.

Проте, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < \inf_{v \in \partial D} |y^*(t_0) - v|$, тоді для фіксованого $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k})| > \varepsilon$$

Ми отримали протиріччя.

2) Нехай $\tau^* = \infty$, а $\liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n < \infty$. Виберемо довільне $T_2 \in [0, \infty)$ таке, що $T_2 > \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Повторюючи міркування попереднього випадку отримаємо протиріччя з рівномірною збіжністю $y_n(t) \rightarrow y^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$ на $[0, T_2]$.

Отже,

$$\tau^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$$

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$, при $t \in [0, \tau^*]$, у випадку скінченного τ^* і $x^*(t) = y^*(t)$, при $t \in [0, \infty)$ у випадку $\tau^* = \infty$.

Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (2.1), при всіх t до моменту його виходу на границю області, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Візьмемо довільне $t \in [0, \tau^*]$, у випадку $\tau^* < \infty$ і $t \in [0, \infty)$ при $\tau^* = \infty$. Виберемо достатньо велике $T \geq 0$, що для будь-якого такого t , $y_n(t) = x_n(t)$ для досить великих n . Оскільки $y_n(t) \rightarrow y^*(t)$, при $n \rightarrow \infty$ рівномірно на $[0, T]$, то і $x_n(t) \rightarrow x^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau^*]$.

Оскільки $x_n(t)$ - розв'язок системи (2.1), то маємо

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u_n(\sigma) d\sigma \right) ds \\ &= x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds \\ &\quad + \int_0^t (f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s)))(u_n(s) - u^*(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x_n(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s)))(u_n(\sigma) - u^*(\sigma)) d\sigma ds \\ &\quad + \int_0^t f_2(s, x^*(s))(u_n(s) - u^*(s)) ds + \int_0^t \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))(u_n(\sigma) - u^*(\sigma)) d\sigma ds. \end{aligned}$$

Покажемо, що другий доданок в останній рівності прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Із застосуванням нерівності Гельдера та нерівностей (2.33), матимемо оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t (f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s)))(u_n(s) - u^*(s)) ds \right| \\ & \leq \left(\int_0^t |f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s))|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_0^t |u_n(s) - u^*(s)|^p ds \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_0^t [H|x_n(s) - x^*(s)|]^q ds \right)^{1/q} \|u_n - u^*\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

при $t \in [0, \tau^*]$. В силу теореми Лебега, оскільки $x_n(t) \rightarrow x^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$ рівномірно для $t \in [0, \tau^*]$, а $[H|x_n(t) - x^*(t)|]^q \leq [H(A + |x^*(t)|)]^q < \infty$.

Аналогічними міркуваннями встановлюємо оцінку і для третього інтеграла

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_0^s (f_3(s, \sigma, x_n(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s)))(u_n(\sigma) - u^*(\sigma)) d\sigma ds \right| \\ & \leq \left(\int_0^t \int_0^s |f_3(s, \sigma, x_n(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))|^q d\sigma ds \right)^{1/q} \left(\int_0^t \int_0^s |u_n(\sigma) - u^*(\sigma)|^p d\sigma ds \right)^{1/p} \\ & = \|u_n - u^*\|_p \left(\int_0^t \int_0^s |f_3(s, \sigma, x_n(s)) - f_3(s, \sigma, x^*(s))|^q d\sigma ds \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\int_0^t \int_0^s [H|x_n(s) - x^*(s)|]^q d\sigma ds \right)^{1/q} \|u_n - u^*\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

при $t \in [0, \tau^*]$.

Четвертий інтеграл $\int_0^t f_2(s, x^*(s))(u_n(s) - u^*(s)) ds$ прямує до нуля в силу слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u^*(t)$, при $n \rightarrow \infty$.

Збіжність останнього інтеграла до нуля впливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність та з означення слабкої збіжності $u_n(t)$ до $u^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Аналогічними міркуваннями отримуємо, що в силу теореми Лебега перший інтеграл прямує до виразу

$$\int_0^t (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma) ds \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, граничним переходом при $n \rightarrow \infty$ отримуємо

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t (f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma)d\sigma)ds,$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

Звідси отримаємо, що $x^*(t)$ - розв'язок системи (2.1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Оскільки момент часу T вибраний довільним чином, то маємо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (2.1), що відповідає керуванню $u^*(t)$, при $t \geq 0$, до моменту виходу розв'язку на межу області.

Так як до цього моменту $x_n(t)$ співпадають з $y_n(t)$, то послідовність $\{x_n(t), n \geq 1\}$ збігається поточково до $x^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \tau_1^*]$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним. Розглянемо два випадки:

А) Нехай $x^*(\tau^*) \in \partial D$.

Оскільки $L(t, x, \cdot)$ - опукла, то для $v \in U, t \in [0, \tau^*]$ виконується нерівність

$$e^{-\gamma t}(L(t, x^*(t), v(t))) \geq (e^{-\gamma t}L(t, x^*(t), u^*(t)) + (v(t) - u^*(t))e^{-\gamma t}L_v(t, x^*(t), u^*(t))),$$

Покладемо $v = u_n(t)$, тоді маємо оцінку

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}(L(t, x^*(t), u_n(t)))dt &\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t, x^*(t), u^*(t))dt \\ &+ \int_0^{\tau^*} (u_n(t) - u^*(t))e^{-\gamma t}L_u(t, x^*(t), u^*(t))dt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Другий інтеграл в останній нерівності прямує до нуля, в силу слабкої збіжності u_n до u^* .

Отже, переходячи до нижньої границі в (2.36) отримаємо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t, x^*(t), u_n(t))dt \geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t}L(t, x^*(t), u^*(t))dt \quad (2.37)$$

Розглянемо також вираз

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} [L(t, x_n(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u_n(t))] dt \right| = \\
& = \left| \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} \int_0^1 L_x(t, (1-\lambda)x^*(t) + \lambda x_n(t), u_n(t)) (x_n(t) - x^*(t)) d\lambda dt \right| \leq \\
& \leq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} K(1 + |u_n(t)|^{p-1} + (|x^*(t)| + |x_n(t)|)^\alpha) |x_n(t) - x^*(t)| dt \leq \tag{2.38} \\
& \leq K \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} |x_n(t) - x^*(t)| |2A|^\alpha dt + K \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} |u_n(t)|^{p-1} |x_n(t) - x^*(t)| dt \leq \\
& \leq K \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} |x_n(t) - x^*(t)| |2A|^\alpha dt + K \left(\int_0^{\tau^*} |u_n(t)|^p dt \right)^{1/q} \left(\int_0^{\tau^*} (e^{-\gamma t})^p |x_n(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Із поточної збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$, при $t \geq 0$ та теореми Лебега про мажоровану збіжність маємо, що дана величина прямує до 0, при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо наступну нижню границю

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt + \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u_n(t)) dt \right. \\
& \left. - \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u_n(t)) dt + \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt - \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \right) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} [L(t, x_n(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u_n(t))] dt \\
& + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} [L(t, x^*(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt + \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt.
\end{aligned}$$

Перший інтеграл в правій частині нерівності прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$, в силу (2.38), а другий інтеграл невід'ємний у силу (2.37). Отже, маємо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt \geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt.$$

Або

$$J(u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt = m,$$

то $J(u^*) = m$.

Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

В) Нехай тепер $\tau^* = \infty$ і $x^*(t) \in D, t \geq 0$. Спочатку покажемо, що функція $e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u_n(t))$ інтегровна на $[0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |L(t, x^*(t), u_n(t))| dt \\ & \leq \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |L(t, x^*(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), 0)| dt + \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |L(t, x^*(t), 0)| dt \\ & \leq \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \int_0^1 |L_u(t, x^*(t), \lambda u_n(t))| |u_n(t)| d\lambda dt + C \\ & \leq K \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (1 + |u_n(t)|^{p-1} + |x^*(t)|^\alpha) |u_n(t)| dt + C \\ & \leq K \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (1 + A^\alpha) |u_n(t)| dt + K \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |u_n(t)|^p dt + C \\ & \leq (A^\alpha + 1)K \left(\int_0^{\infty} (e^{-\gamma t})^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^{\infty} |u_n(t)|^p dt \right)^{1/p} + K \int_0^{\infty} |u_n(t)|^p dt + C < \infty. \end{aligned}$$

Отже, функція $L(t, x^*(t), u_n(t))$ - інтегровна на $[0, \infty)$

Оскільки $L(t, x, \cdot)$ - опукла, то для $v(t) \in W, t \in [0, \infty)$ виконується нерівність $e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), v(t)) \geq e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) + (v(t) - u^*(t)) e^{-\gamma t} L_v(t, x^*(t), u^*(t))$,

Покладемо $v(t) = u_n(t)$, тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u_n(t)) dt & \geq \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt \\ & + \int_0^{\infty} (u_n(t) - u^*(t)) e^{-\gamma t} L_u(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\infty} (e^{-\gamma t})^q L_u^q(t, x^*(t), u^*(t)) dt \right)^{1/q} &\leq \left(K^q \int_0^{\infty} (e^{-\gamma t})^q (1 + A^\alpha + |u^*(t)|^{p-1})^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq 2^{q-1} K \left(\int_0^{\infty} (e^{-\gamma t})^q (1 + A^\alpha)^q dt + \int_0^{\infty} |u^*(t)|^p dt \right)^{1/q} < \infty, \end{aligned}$$

то другий інтеграл в нерівності (2.39) прямує до 0, при $n \rightarrow \infty$, в силу слабкої збіжності $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$. Отже,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u_{n_k}(t)) dt \geq \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt. \quad (2.40)$$

Розглянемо також величину

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} [L(t, x_n(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u_n(t))] dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \int_0^1 L_x(t, (1-\lambda)x^*(t) + \lambda x_n(t), u_n(t)) (x_n(t) - x^*(t)) d\lambda dt \right| \\ &\leq K \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (1 + (2A)^\alpha + |u_n(t)|^{p-1}) |x_n(t) - x^*(t)| dt \quad (2.41) \\ &\leq K \left(\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (1 + (2A)^\alpha) |x_n(t) - x^*(t)| dt + \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |u_n(t)|^{p-1} |x_n(t) - x^*(t)| dt \right) \\ &\leq (1 + (2A)^\alpha) K \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |x_n(t) - x^*(t)| dt + K \|u_n\|_p^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^{\infty} (e^{-\gamma t})^p |x_n(t) - x^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність та врахувавши поточкову збіжність $x_n(t)$ до $x^*(t)$, при $t \geq 0$ маємо, що досліджуваний вираз прямує до 0, при $n \rightarrow \infty$.

$$J(u_n) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} [L(t, x_n(t), u_n(t))$$

$$\begin{aligned}
& -L(t, x^*(t), u_n(t)) \Big] dt + \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} [L(t, x^*(t), u_n(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))] dt \\
& + \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt.
\end{aligned}$$

Використовуючи (2.40) та (2.41) з останньої рівності отримуємо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n(t)) \geq J(u^*).$$

Оскільки

$$\inf_{u \in U} J(u^*) \leq J(u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n(t)) = m,$$

то $J(u^*) = m$. Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

Теорему доведено. □

2.3 Про зв'язок на скінченних та нескінченних часових інтервалах

2.3.1 Постановка задачі й формулювання тверджень

У даному розділі досліджується системами (2.1) з одним із наступних критеріїв якості:

$$J(u) = \int_0^{\tau} (e^{-\gamma t} A(t, x(t)) + B(t, u(t))) dt \rightarrow \inf, \quad (2.42)$$

$$J(u) = \int_0^{\tau} (e^{-\gamma t} A(t, x(t)) + |u(t)|^2) dt \rightarrow \inf. \quad (2.43)$$

де $\gamma > 0$ — фіксована константа, $t \in [0, \infty)$, $x \in D$ — фазовий вектор, D — обмежена область у \mathbb{R}^d , ∂D — межа області D , τ — перший момент, коли розв'язок $x(t)$ досягає межі ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла, замкнена множина в \mathbb{R}^m і $0 \in U$. Нехай виконуються наступні умови.

Керування $u(t)$ називається допустимим якщо виконуються умови а1), а2), а4) з підрозділу 2.2.

Множину допустимих керувань позначимо через W .

Нехай $V(x_0) = \inf_{u \in W} J(u)$ — функція Беллмана для задач (2.1), (2.42) та (2.1), (2.43) на нескінченному часовому інтервалі, а $V_T(x_0)$ — функція Беллмана для відповідної задачі на скінченному інтервалі $[0, T]$.

Для задач (2.1), (2.42) та (2.1), (2.43) припустимо виконання наступних умов:

Умова 2.5. Відображення $f_1(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f_2(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $f_3(t, s, x) : [0, \infty) \times [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ визначені та вимірні відносно множини аргументів у області D , а також задовольняють умови лінійного росту та Ліпшицевості відносно x . Тобто існує така константа $K > 0$, що

$$|f_1(t, x)| + \|f_2(t, x)\| + \|f_3(t, s, x)\| \leq K(1 + |x|),$$

для $t \geq 0$, $x \in D$;

$$|f_1(t, x_1) - f_1(t, x_2)| + \|f_2(t, x_1) - f_2(t, x_2)\| + \|f_3(t, s, x_1) - f_3(t, s, x_2)\| \leq K|x_1 - x_2|$$

для $t \geq 0$, $x_1, x_2 \in D$.

Умова 2.6. 1) Відображення $A : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^1$, $A(t, x) \geq 0$ для $t \geq 0$, $x \in D$

визначене та неперервне відносно своїх змінних, і для $t \geq 0$, $x \in D$ існують сталі α , $K_A > 0$, така, що $A(t, x) \leq K_A(1 + |x|^\alpha)$;

2) відображення $B : [0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}^1$ є вимірним відносно змінних, опуклим по u , та існують сталі $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ такі, що

$$a_1|y|^p \geq B(t, y) \geq a_0|y|^p$$

для $t \geq 0$, $y \in U$;

3) $B(t, y)$ є неперервно диференційованою відносно y для кожного $t \geq 0$, і частинна похідна $\frac{\partial B}{\partial y}$ задовольняє оцінку для $t \geq 0$ та $y \in U$:

$$\left| \frac{\partial B}{\partial y} \right| \leq a_3|y|^{p-1}$$

для деякого $a_3 > 0$, що не залежить від t та y .

Сформулюємо теорему про існування розв'язку задач оптимального керування на нескінченному інтервалі.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються Умови 2.5, 2.6 та умови a1)-a4) для системи (2.1) з критеріями якості (2.32) та (2.33). Тоді задачі (2.1), (2.42) та (2.1), (2.43) мають розв'язки в класі допустимих керувань W .*

Нехай $T > 0$ — фіксоване. Із Теорема 2.3 випливає, що задача (2.1), (2.42) має розв'язок (x_T^*, u_T^*) на інтервалі $[0, T]$. Для задачі на нескінченному горизонті введемо наступне допустиме керування:

$$u_{T, \infty}^*(t) = \begin{cases} u_T^*(t), t \in [0, T] \\ 0, t > T, \end{cases} \quad (2.44)$$

і позначимо відповідну допустиму траєкторію через $x^{T,\infty}$. Нехай пара $(x^*(t), u^*(t))$ є оптимальною парою для задачі (2.1), (2.42), а τ^* — перший момент, коли розв'язок x^* досягає межі ∂D . Тоді справджується наступна теорема.

Теорема 2.6. *Нехай виконуються Умови 2.5, 2.6, тоді маємо:*

1)

$$V_T(x_0) \rightarrow V(x_0), \quad T \rightarrow \infty; \quad (2.45)$$

2) існує послідовність $T_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ така, що послідовність $\{u_{T_n, \infty}^*\}$ є мінімізуючою для задачі (2.1), (2.32), тобто

$$J[u_{T_n, \infty}^*] \rightarrow V(x_0), \quad n \rightarrow \infty; \quad (2.46)$$

3)

$$u_{T_n, \infty}^* \rightharpoonup u^*, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.47)$$

слабко збігається в $L^p((0, \infty); \mathbb{R}^m)$;

4) поточково на $[0, \tau^*)$ та рівномірно на кожному скінченному підінтервалі $[0, \tau^*)$

$$x^{T_n, \infty}(t) \rightarrow x^*(t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.48)$$

Якщо задача (2.1), (2.42) має єдиний розв'язок, тоді збіжності (2.46), (2.47) справджуються для всіх $T \rightarrow \infty$.

2.3.2 Доведення основних результатів

Наведемо доведення Теорема 2.5

З Теорема 2.1 випливає існування, єдиність та неперервність розв'язку задачі Коші (2.1) аж до межі області. Легко бачити, що, в силу умов цієї теорема, виконуються умови Теорема 2.1. Зауважимо, що критерій якості (2.43) є окремим випадком критерію якості (2.42). Тому доведення наведемо для випадку (2.42).

Доведення. Оскільки ідейно дане доведення співпадає із доведенням Теорема 2.4, тому зупинимось лише на відмінних рисах. Множина W допустимих керувань не є порожньою, оскільки $0 \in W$, і $J[0] < \infty$. Оскільки функціонал є невід'ємним, то існує його скінченний інфімум $m = \inf J(u) \geq 0$. Отже, існує послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$ така, що $J(u_n) \rightarrow m$ при $n \rightarrow \infty$ монотонно. Іншими словами,

$$J(u_n) = \int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t} A(t, x_n(t)) + B(t, u_n(t)) dt \rightarrow m, \quad n \rightarrow \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (2.1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, а τ_n — момент, коли розв'язок $x_n(t)$ досягає межі D .

Далі зауважимо, що

$$m + 1 \geq \int_0^{\tau_n} B(t, u_n(t)) dt \geq a_0 \int_0^{\tau_n} |u_n(t)|^p dt \geq a_0 \int_0^{\infty} |u_n(t)|^p dt,$$

виконується для достатньо великих n . Тоді послідовність $u_n(t)$ є слабко компактною в $L^p(0, \infty)$, а отже, містить слабко збіжну підпослідовність. Без втрати загальності вважатимемо, що $u_n(t)$ є слабко збіжною, та u^* її слабка границя. Аналогічно Теорема 2.4, $u^*(t) \in U$, майже при всіх t .

Для розв'язків $x_n(t)$ маємо інтегральне представлення

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x_n(s))u_n(\sigma) d\sigma] ds.$$

Використовуючи функції x_n , побудуємо функції $y_n(t)$, визначені на всій нескінченній області $[0, \infty)$ наступним чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n), & t \geq \tau_n. \end{cases}$$

Нехай вибрано довільний момент часу $T \in [0, \infty)$ і зафіксовано його. Оскільки D є обмеженою, існує $C > 0$, таке що для $t \geq 0$ виконується нерівність:

$$|y_n(t)| \leq C. \quad (2.49)$$

Далі встановлюється, що сім'я функцій $y_n(t)$ компактна на $[0, T]$. Отже, по підпоследовності $y_n \rightarrow y^*$ в $C([0, T])$. Тоді, аналогічно до Теорема 2.4 існує підпоследовність функцій $y_n^n(t)$, яка збігається поточково до деякої функції $y^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \infty)$.

Знову ж таки, для зручності позначимо цю последовність як $\{y_n(t), n \geq 1\}$, а відповідну последовність керувань як $\{u_n(t), n \geq 1\}$.

Позначимо через τ^* момент першого досягнення $y^*(t)$ межі ∂D , тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : y^*(t) \in \partial D\}, \\ \infty, & \text{якщо } y^*(t) \in D, \forall t \geq 0; \end{cases}$$

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : x_n(t) \in \partial D\}, \\ \infty, & \text{якщо } x_n(t) \in D, \forall t \geq 0. \end{cases}$$

При цьому $\tau^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n$.

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ для $t \in [0, \tau^*]$ у випадку скінченного τ^* і $x^*(t) = y^*(t)$ для $t \in [0, \infty)$ у випадку $\tau^* = \infty$.

Далі доводиться, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (2.1) для всіх t до моменту його виходу на межу області відповідним до керуванням $u^*(t)$, тобто

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t \left(f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))u^*(s) + \int_0^s f_3(s, \sigma, x^*(s))u^*(\sigma) d\sigma \right) ds,$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

Враховуючи, що до цього моменту $x_n(t)$ збігається з $y_n(t)$, то последовності $\{x_n(t), n \geq 1\}$ поточково збігаються до $x^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

Для завершення доведення покажемо, що керування $u^*(t)$ є оптимальним. Для цього розглядаємо знову два випадки.

1) Нехай $\tau^* < \tau$. У цьому випадку або існує підпоследовність $\{\tau_{n_k}\}$ последовності $\{\tau_n\}$, така що $\tau_{n_k} \rightarrow \tau$ при $n_k \rightarrow \infty$, або тільки скінченне число значень $\tau_n < \infty$ (у випадку $\tau = \infty$).

Тоді для достатньо великих n_k знову $y_{n_k}(t) = x_{n_k}(t)$ для $t \in [0, \tau^*]$ і $x_{n_k}(t) \rightrightarrows x^*(t)$ при $n_k \rightarrow \infty$ на $[0, \tau^*]$, використовуючи Умову 2.6 та збіжність $A(t, x_{n_k}) \rightarrow A(t, x)$, маємо

$$\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} A(t, x_{n_k}(t)) dt + \int_0^{\tau_{n_k}} B(t, u_{n_k}(t)) dt \geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x_{n_k}(t)) dt + \int_0^{\tau^*} B(t, u_{n_k}(t)) dt. \quad (2.50)$$

Отже, використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо

$$\int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x_{n_k}(t)) dt \rightarrow \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*) dt,$$

при цьому використана неперервність $A(t, x)$ та обмеженість послідовності x_{n_k} . Оскільки $B(t, u)$ є опуклою функцією відносно u , то маємо

$$B(t, v(t)) \geq B(t, u^*(t)) + (v(t) - u^*(t))B_v(t, u^*(t)) \quad (2.51)$$

для будь-якого допустимого керування $v(t) \in U$.

Тоді, з Умови 2.6, маємо

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial B}{\partial u}(t, u^*(t)) \right|^q dt \leq a_3 \int_0^{\infty} |u^*(t)|^p dt < \infty.$$

Підставляючи $v(t) = u_{n_k}(t)$ у (2.51) та використовуючи слабку збіжність $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$, отримаємо нерівність для другого доданку у (2.50)

$$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} B(t, u_{n_k}(t)) dt \geq \int_0^{\tau^*} B(t, u^*(t)) dt. \quad (2.52)$$

Отже, з (2.50), (2.51) та (2.52) отримаємо

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} A(t, x_{n_k}(t)) dt + \int_0^{\tau_{n_k}} B(t, u_{n_k}(t)) dt \right) \\ &\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt + \liminf_{n_k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^*} B(t, u_{n_k}(t)) dt \end{aligned}$$

$$\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt + \int_0^{\tau^*} B(t, u^*(t)) dt.$$

Отже, у цьому випадку керування $u^*(t)$ є оптимальним.

2) Нехай $\tau^* = \tau$.

Візьмемо будь-яке $t_1 < \tau^*$ і розглянемо інтервал $[0, t_1]$. На цьому інтервалі маємо $x_{n_k}(t) \rightrightarrows x^*(t)$ при $n_k \rightarrow \infty$. Згідно з теоремою про характеристику нижньої границі, множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < t_1\}$ є скінченною, і може існувати нескінченна кількість точок τ_n в інтервалі (t_1, τ) .

Розглянемо цю послідовність. Тоді, аналогічно до попереднього випадку, отримаємо

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} A(t, x_{n_k}(t)) dt + \int_0^{\tau_{n_k}} B(t, u_{n_k}(t)) dt \right) \geq \\ &\geq \int_0^{t_1} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt + \liminf_{n_k \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} B(t, u_{n_k}(t)) dt. \end{aligned}$$

Переходячи до границі при $t_1 \rightarrow \tau^*$, отримаємо, що $I[u^*] = m$. Отже, $u^*(t)$ є оптимальним керуванням.

Теорему доведено.

□

Перейдемо до доведення Теорема 2.6

Доведення. Розглянемо довільний фіксований момент часу $T > 0$. У цьому випадку $V_T(x_0)$ є функцією Беллмана для задачі (2.1),(2.42) на $[0, T]$. Слід зазначити, що множина допустимих керувань, визначених на півосі $[0, \infty)$, фактично вкладається у множину допустимих керувань на скінченному проміжку $[0, T]$. У випадку, коли керування $u(t)$ є допустимим на $[0, T]$, але не належить до класу допустимих на півосі $[0, \infty)$, побудуємо його допустиме розширення за

наступним чином:

$$u_{T,\infty}(t) = \begin{cases} u(t), t \in [0, T] \\ 0, t > T. \end{cases} \quad (2.53)$$

Позначимо через W_T об'єднання множини допустимих керувань на півосі $[0, \infty)$ та сукупності функцій, отриманих шляхом продовження (2.53). Побудована таким чином множина допустимих керувань збігається на $[0, \infty)$ з множиною W , а на $[0, T]$ — з множиною всіх допустимих керувань для задачі типу (2.1), (2.42) на скінченному горизонті. Справді, кожне допустиме на $[0, T]$ керування породжує допустимий на півосі процес згідно з правилом (2.53). З іншого боку $L^p(0, \infty) \subset L^p(0, T)$.

Нехай τ_T^* — момент, коли $x^{*,T}$ досягає межі області D . У випадку, коли $\tau_T^* < T$, керування $u_{T,\infty}^*(t)$ є оптимальним для задачі (2.1), (2.42) на $[0, \infty)$. Тоді $V = V_T$.

Розглянемо випадок $\tau_T^* = T$. Позначимо $x(t) = x(t, u_{T,\infty}^*(t))$ — розв'язок задачі Коші (2.1), що відповідає керуванню $u_{T,\infty}^*(t)$. Оскільки для $t \in [0, T]$, $u_{T,\infty}^*(t) = u_T^*(t)$, то в силу єдиності розв'язку задачі Коші (2.1) $x(t) = x^{*,T}(t)$ для $t \in [0, T]$. Із визначення функції Беллмана та Умови 2.6 маємо

$$\begin{aligned} V \leq J(u_{T,\infty}^*(t)) &= \int_0^T (e^{-\gamma t} A(t, x^{*,T}(t)) + B(t, u_T^*)) dt + \int_T^{\tau_T} e^{-\gamma t} A(t, x(t)) dt \\ &= V_T + \int_T^{\tau_T} e^{-\gamma t} A(t, x(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Тут τ_T — момент, коли x досягає межі області D . Другий доданок у (2.54) прямує до нуля при $T \rightarrow \infty$ внаслідок обмеженості області D та теореми Лебега про мажоровану збіжність. Зауважимо, що $x(t) = x(\tau_T)$, $t > \tau_T$.

Нагадаємо, що τ^* — момент, коли оптимальна траєкторія x^* для задачі (2.1), (2.42) на $[0, \infty)$ досягає межі D . Зауважимо, що якщо $\tau^* \leq T$, то пара $(x^*(t), u^*(t))$ є оптимальною для задачі на $[0, T]$, і, у цьому випадку, $V = V_T$ знову.

Нехай $\tau^* > T$. Тоді

$$\begin{aligned} V = J[u^*] &= \int_0^T (e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) + B(t, u^*(t))) dt + \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) + B(t, u^*(t))) dt \\ &\geq V_T + \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} A(t, x(t)) + B(t, u^*(t))) dt. \end{aligned}$$

Зазначимо, що при $t \in [T, \tau^*]$, $|x(t)| \leq C$, для деякого $C > 0$, а тому

$$\begin{aligned} \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) + B(t, u^*(t))) dt &\leq \int_T^{\infty} (e^{-\gamma t} K_A(1 + C^\alpha)) dt + \int_T^{\infty} a_1 |u^*(t)|^p dt = \\ &= \int_T^{\infty} (e^{-\gamma t} K_A(1 + C^\alpha)) dt + \int_T^{\infty} a_1 |u^*(t)|^p dt \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

Тоді, з одного боку, із (2.54) маємо

$$V - V_T \leq \int_T^{\tau_T} (e^{-\gamma t} A(t, x)) dt,$$

а з іншого боку, ми отримали

$$V - V_T \geq \int_T^{\tau^*} (e^{-\gamma t} A(t, x^*) + B(t, u^*)) dt.$$

Отже, враховуючи (2.55), маємо виконання твердження (2.45).

Далі, для зручності, без втрати загальності, припустимо, що $T = n \in \mathbb{N}$ — натуральне число. Нехай u_n^* — оптимальне керування на $[0, n]$, $u_{n,\infty}^*(t)$ — допустиме керування для задачі (2.1), (2.42) на $[0, \infty)$, яке визначається формулою (2.44).

Знову ж таки, якщо для деякого n виконується $\tau_n^* < n$, то отримаємо, що $u_{n,\infty}^*(t)$ є оптимальним для задачі на нескінченному інтервалі. Тут τ_n^* — момент, коли $x^{n,\infty}$ досягає межі області D .

Нехай тепер $\tau_n^* = n$ для всіх n . Оскільки $V_n = J[u_n^*] \rightarrow V$, існує константа H така, що $V_n \leq H$. Однак, із Умови 2.6 та (2.44) маємо:

$$\begin{aligned} H \geq V_n = J[u_n^*] &= \int_0^n (e^{-\gamma t} A(t, x^{*,n}(t)) + B(t, u_n^*(t))) dt \\ &\geq a_0 \int_0^n |u_n^*(t)|^p dt = a_0 \int_0^\infty |u_{n,\infty}^*(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Отже, послідовність допустимих керувань $\{u_{n,\infty}^*\}$ має слабко збіжну підпослідовність, яку, без втрати загальності, позначимо знову як $\{u_{n,\infty}^*\}$. Тоді

$$u_{n,\infty}^*(t) \rightharpoonup u^*, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.56)$$

слабко збігається у $L^p(0, \infty)$.

Використовуючи лему Мазура [91, 120], отримаємо, що майже для кожного t виконується $u^*(t) \in U$. Позначимо $x^{n,\infty}(t)$ — розв'язок задачі Коші (2.1), що відповідає керуванню $u_{n,\infty}^*(t)$. Нехай τ_n — момент, коли $x^{n,\infty}(t)$ досягає межі області D . Очевидно, що $\tau_n > n$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} J[u_{n,\infty}^*] &= \int_0^n (e^{-\gamma t} A(t, x^{*,n}(t)) + B(t, u_n^*(t))) dt + \int_n^{\tau_n} (e^{-\gamma t} A(t, x^{n,\infty}(t)) \\ &\quad + B(t, u_{n,\infty}^*(t))) dt = V_n + \int_n^{\tau_n} (e^{-\gamma t} A(t, x^{n,\infty}(t)) + B(t, u_{n,\infty}^*(t))) dt. \end{aligned}$$

Однак, $B(t, u_{n,\infty}^*(t)) = 0$ для $t \geq n$ через конструкцію $u_{n,\infty}^*$ та Умову 2.4. Тоді

$$J[u_{n,\infty}^*] = V_n + \int_n^{\tau_n} e^{-\gamma t} A(t, x^{n,\infty}(t)) dt, \quad (2.57)$$

$$\int_n^{\tau_n} e^{-\gamma t} A(t, x^{n,\infty}(t)) dt \leq \int_n^{\tau_n} e^{-\gamma t} K_A (1 + |x^{n,\infty}(t)|^\alpha) dt.$$

Враховуючи обмеженість множини D , для відповідних розв'язків при $t \in [0, \tau_n]$, аналогічного до викладеного вище, виконується $|x^{n,\infty}(t)| \leq C$.

Отже,

$$\int_n^{\tau_n} e^{-\gamma t} K_A(1 + C^\alpha) dt \leq \int_n^\infty e^{-\gamma t} K_A(1 + C^\alpha) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

З (2.57) та (2.58) випливає, що

$$J[u_{n,\infty}^*] \rightarrow V, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, послідовність $\{u_{n,\infty}^*\}$ є мінімізуючою для задачі (2.1), (2.42), що доводить твердження (2.46). Нехай $x^*(t)$ буде розв'язком початкової задачі (2.1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ з (2.56). Такий розв'язок існує та єдиний, що є наслідок Теорема 2.2. Твердження (2.47) цієї теореми є очевидними. Доведення твердження (2.48) проводиться подібно до відповідного факту з Теорема 2.5.

Якщо задача (2.1), (2.42) має єдиний розв'язок, то збіжності (2.46) та (2.47) виконуються для всіх $T \rightarrow \infty$. Останнє очевидно випливає з того факту, що з будь-якої підпослідовності $\{u_{n_k,\infty}^*\}$ послідовності $\{u_{n,\infty}^*\}$ з (2.56) можна виділити слабку збіжність до оптимального керування $u^*(t)$, і таке керування єдине.

Теорема доведена. □

Наслідок 2.1. За умовами Теорема 2.6 для функціоналу (2.42) всі твердження Теорема 2.6 виконуються, а слабка збіжність (2.47) оптимальних керувань замінюється сильною збіжністю у $L^2((0, \infty); \mathbb{R}^m)$.

Доведення. Розглянемо задачу оптимального керування (2.1), (2.42). Очевидно, що доведення потребує встановлення сильної збіжності $u_{\tau_n,\infty}^*$ до u^* . Аналогічно до Теорема 2.5, маємо

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t} A(t, x^{n,\infty}(t)) dt + \int_0^{\tau_n} |u_{n,\infty}^*(t)|^2 dt \right) \\ &= \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_n} |u_{n,\infty}^*(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Тому остання границя у (2.59) існує і співпадає з нижньою межею. Однак із побудови $u_{n,\infty}^*$ випливає, що

$$\int_0^{\tau_n} |u_{n,\infty}^*(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |u_{n,\infty}^*(t)|^2 dt.$$

Тоді з (2.59) маємо

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |u_{n,\infty}^*(t)|^2 dt \geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} |u^*(t)|^2 dt \geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A(t, x^*(t)) dt + \int_0^{\tau^*} |u^*(t)|^2 dt = V. \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |u_{n,\infty}^*(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |u^*(t)|^2 dt.$$

З урахуванням (2.56) випливає, що $u_{n,\infty}^*$ сильно збігається до u^* в $L^2((0, \infty))$, що і доводить цю наслідок. \square

2.4 Висновки до Розділу 2

У даному розділі розглянуто задачу оптимального керування процесами, що описуються системами інтегро-диференціальних рівнянь. Основну увагу приділено встановленню умов існування оптимального керування в досліджуваній системі. Задача розглядалась до моменту виходу розв'язку на межу області, при цьому цей момент виходу залежить від керування. У розділі сформульовано та доведено такі результати:

- отримано достатні умови існування оптимальних керувань у термінах правих частин та функції з критерія якості на скінченному інтервалі;
- доведено існування розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, адже для задач оптимального керування наявність у правій частині керування $u(t)$, робить вимогу неперервності правої частини неприродною;
- доведена теорема, що встановлює достатні умови існування оптимальних керувань для систем інтегро-диференціальних рівнянь на півосі;
- встановлено взаємозв'язок між розв'язками задачі на скінченному та нескінченному інтервалі, включаючи слабку збіжність оптимальних керувань на скінченному інтервалі до відповідних керувань на нескінченному і точкову збіжність оптимальних траєкторій.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [98] (переклад англ. - [57]), [42, 43, 45, 46, 48, 94, 95].

Розділ 3

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У даному розділі розглядається застосування методу усереднення до задач оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами та малим параметром. Встановлено зв'язок між оптимальною трійкою розв'язків вихідної нелінійної за керуванням задачі та відповідної усередненої задачі як на скінченному інтервалі, так і на півосі. Аналогічну відповідність отримано й для задачі, лінійної відносно керування.

3.1 Схема усереднення на скінченному інтервалі

Дане дослідження базується на застосуванні схеми усереднення для інтегро-диференціальних рівнянь із керуванням. Встановлені оцінки близькості точних та усереднених траєкторій, що є рівномірними за класом допустимих керувань, це гарантує коректність заміни вихідної задачі оптимального керування її усередненим аналогом. Важливою перевагою такого підходу є можливість переходу до системи звичайних диференціальних рівнянь, аналіз якої є значно простішим.

3.1.1 Нелінійний випадок

Розглядається нелінійна задача керування системою інтегро-диференціальних рівнянь зі швидкоосцилюючими параметрами:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s)) ds, u(t)\right), \\ x_\varepsilon(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T L(t, x_\varepsilon(t), u(t)) dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf, \quad (3.2)$$

на відрізку $[0, T]$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $T > 0$ — задана стала, x — вектор стану в \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, причому $u(t) \in W \subset \mathbb{R}^m$, $d, m = 1, 2, 3, \dots$, $\Phi(x)$ — задана функція.

Функція $x_\varepsilon(t, u)$ позначає розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2), що відповідає керуванню $u(t)$. Для спрощення позначень далі ми опускаємо явну залежність від u та ε і позначаємо цей розв'язок як $x(t)$.

Припустимо, що існує функція $X_0(x, u)$, така що для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in W$ існує наступна рівномірна за $x \in \mathbb{R}^d, u \in W$ границя:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x), u\right) - X_0(x, u) \right] d\tau = 0, \quad (3.3)$$

де

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds, \quad t, s \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Задачі оптимального керування (3.1), (3.2) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами відповідає простіша усереднена задача оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{\xi} = X_0(\xi, u(t)), \\ \xi(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

з критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^T L(t, \xi(t), u(t)) dt + \Phi(\xi(T)) \rightarrow \inf. \quad (3.5)$$

Для задачі (3.1), (3.2) будемо вважати, що виконуються наступні умови.

Умова 3.1. Допустимими керуваннями є m -вимірні вектор-функції $u(\cdot)$, такі що $u(\cdot) \in U$, де U — компакт у $L^2(0, T)$.

Умова 3.2. Функція $X(t, x, y, u)$ визначена й неперервна по всіх своїх змінних у області $Q_0 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n, u \in W\}$ та задовольняє:

3.2.1. умову лінійного росту по x, y в Q_0 , тобто існує стала $M > 0$ така, що

$$|X(t, x, y, u)| \leq M(1 + |x| + |y|)$$

для будь-якого $(t, x, y, u) \in Q_0$;

3.2.2. умову Ліпшиця зі сталою λ в Q_0 , а саме для всіх $(t, x, y, u), (t, x_1, y_1, u_1) \in Q_0$ маємо $|X(t, x, y, u) - X(t, x_1, y_1, u_1)| \leq \lambda(|x - x_1| + |y - y_1| + |u - u_1|)$.

Умова 3.3. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена та неперервна в області $Q_1 = \{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d\}$, набуває значень у \mathbb{R}^n та задовольняє умову лінійного росту та умову Ліпшиця по x , тобто існує $L_\varphi > 0$ таке що

$$|\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi(1 + |x|) \quad \text{та} \quad |\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi|x - x_1|.$$

Умова 3.4. Існує границя (3.3) рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$ та $u \in W$.

Умова 3.5. Функція $L(t, x, u)$ визначена в $Q_2 = \{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d, u \in W\}$, і

3.5.1. $L(t, x, u)$ рівномірно неперервна по $x \in \mathbb{R}^d$ відносно $t \in [0, T]$ та $u \in W$;

3.5.2. $L(t, x, u)$ задовольняє умову Ліпшиця по u в Q_2 з постійною $\lambda > 0$;

3.5.3. Функція $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною по x .

Сформулюємо та доведемо лему, що узагальнює метод усереднення на випадок залежності правих частин інтегро-диференціальних рівнянь від функціональних параметрів.

Лема 3.1. *Нехай виконуються Умови 3.1 - 3.4. Тоді для будь-якого $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$, що для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ розв'язки задачі Коші (3.1) та (3.4) задовольняють оцінку*

$$|x(t, u) - \xi(t, u)| \leq \eta \quad (3.6)$$

для всіх $t \in [0, T]$ і всіх допустимих керувань $u(t)$.

Зауваження 3.1. У цій лемі важливо те, що оцінка (3.6) є рівномірною для всіх допустимих керувань u .

Доведення. Виберемо довільне фіксоване $\eta > 0$. Для довільного $\varepsilon > 0$ та довільного допустимого керування $u(t)$ оцінюємо різницю між $x(t)$ та $\xi(t)$. Оскільки U є компактною множиною в $L^2(0, T)$, для заданого η існує скінченна $\frac{\eta e^{-\lambda}}{4\lambda}$ -сітка $u_1(t), \dots, u_N(t)$, де $N = N(\eta)$. Таким чином, для обраного керування $u(t)$ існує представник $u_j(t)$ із сітки, такий що

$$\|u(\cdot) - u_j(\cdot)\|_{L^2} \leq \frac{\eta}{4\lambda} e^{-\lambda}. \quad (3.7)$$

Знову ж таки, оскільки U є компактною в $L^2(0, T)$, існує $K > 0$ таке, що для всіх допустимих керувань $u(t)$ виконується нерівність

$$\int_0^T |u(t)| dt \leq K. \quad (3.8)$$

Згідно Умови 3.2.1 та Умови 3.3,

$$|x(t)| \leq |x_0| + MT + M \int_0^T (|x(s)| + L_\varphi \int_0^s (1 + |x(\tau)|) d\tau) ds.$$

Звідси, використовуючи аналог нерівності Гронуолла-Беллмана, отримаємо

$$|x(t)| \leq C, \quad (3.9)$$

де $C = C(T)$. Аналогічно отримуємо оцінку $|\xi(t)| \leq C$.

Отже, з Умов 3.2 та 3.3 випливає, що

$$\begin{aligned} |x(t) - \xi(t)| &\leq \left| \int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau)) d\tau, u(s)\right) - X_0(\xi(s), u(s)) \right) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau)) d\tau, u_j(s)\right) - X_0(\xi(s), u_j(s)) \right) ds \right| \\ &\quad + 2\lambda \left(\int_0^T |u(s) - u_j(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Тоді отримаємо

$$|x(t) - \xi(t)| \leq I_1 + \frac{\eta}{2} e^{-\lambda T}. \quad (3.10)$$

Оцінимо тепер I_1 з використанням Умов 3.2–3.4. Зауважимо, що з цих умов випливає виконання умови Ліпшиця для функції X_0 . Маємо:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \left| X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x(s), \int_0^s (\varphi(s, \tau, x(\tau)) d\tau, u_j(s))\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_j(s)\right) \right| ds \\ &\quad + \left| \int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_j(s)\right) - X_0(\xi(s), u_j(s)) \right) ds \right| \\ &\leq \int_0^t (\lambda |x(s) - \xi(s)| + \int_0^s |x(t) - \xi(t)| L_\varphi d\tau) ds \quad (3.11) \\ &\quad + \left| \int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_j(s)\right) - X_0(\xi(s), u_j(s)) \right) ds \right|. \end{aligned}$$

Оскільки кожна функція в $L^2(0, T)$ може бути апроксимована в нормі L^2 неперервною функцією, а кожна неперервна функція на замкненому інтервалі може бути апроксимована кусково-сталю функцією, то виберемо для $u_j(t)$ неперервну функцію $u_c(t)$ та кусково-сталю функцію $u_p(t)$ так, щоб виконувалися наступні нерівності для $t \in [0, T]$

$$\|u_j - u_c\|_{L^2} < \frac{\eta}{16\lambda} e^{-\lambda T}, \quad (3.12)$$

$$\|u_c(t) - u_p(t)\|_{L^2} < \frac{\eta}{16\lambda} e^{-\lambda T}. \quad (3.13)$$

Використовуючи (3.12) та (3.13), оцінюємо останній інтеграл у (3.11), який позначимо I_{11} :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left| \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_j(s)\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_c(s)\right) \right] ds \right. \\ &\quad + \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_c(s)\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_p(s)\right) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_p(s)\right) ds + \int_0^t \left(X_0(\xi(s), u_c(s)) - X_0(\xi(s), u_j(s)) \right) ds \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(X_0(\xi(s), u_p(s)) - X_0(\xi(s), u_c(s)) \right) ds - \int_0^t X_0(\xi(s), u_p(s)) ds \right| \\ &\leq \lambda \left(\int_0^T |u_j(s) - u_c(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \lambda \left(\int_0^T |u_c(s) - u_p(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + \left| \int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_p(s)\right) - X_0(\xi(s), u_p(s)) \right) ds \right| \\ &\quad + \lambda \left(\int_0^T |u_c(s) - u_j(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \lambda \left(\int_0^T |u_p(s) - u_c(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \left| \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_p(s)\right) - X_0(\xi(s), u_p(s)) \right] ds \right| + \frac{\eta}{4} e^{-\lambda T} \leq I_{12} + \frac{\eta}{4} e^{-\lambda T}. \end{aligned}$$

Отримаємо оцінку I_{12}

$$\begin{aligned} I_{12} &\leq \left| \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_p(s)\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(s)) d\tau, u_p(s)\right) \right] ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(s)) d\tau, u_p(s)\right) - X_0(\xi(s), u_p(s)) \right] ds \right| = I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оцінимо інтеграл I_2 , розбивши $[0, T]$ точками $\{t_k\}_0^R$ ($t_0 = 0, t_R = T$) так, що всі компоненти вектор-функції $u_p(t)$ є сталими на кожному підінтервалі $[t_k, t_{k+1})$,

тобто $u_p(t) = u_p(t_k)$ для $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тут натуральне число $R = R(\eta)$ фіксоване для даного вибору η .

Тепер виберемо натуральне n і розіб'ємо інтервал $[0, T]$ на n рівних частин точками $t_i = i/n$ ($i = 0, \dots, n$). Припустимо, що n достатньо велике, щоб кожен підінтервал $[t_k, t_{k+1})$ містив точки t_i . У результаті отримаємо n інтервалів $[t_i, t_{i+1})$. Якщо для деяких k і i маємо $t_i < t_k < t_{i+1}$, інтервал $[t_i, t_{i+1})$ ділиться на два підінтервали: $[t_i, t_k)$ та $[t_k, t_{i+1})$. Таким чином, інтервал $[0, T]$ розбитий не більш ніж на $n+R$ підінтервалів, кожен з довжиною, що не перевищує $\frac{1}{n}$. Точки розбиття знову позначаємо як t_i , а загальну кількість інтервалів $[t_i, t_{i+1})$ позначимо через $K = K(\eta)$. Очевидно, що $K \leq n + R$, і $u_p(t) = u_p(t_i)$ для $t \in [t_i, t_{i+1})$. Позначимо $\xi_i = \xi(t_i)$ та $u_p(t_i) = u_{pi}$. Тоді

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \sum_{i=0}^{K-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau, u_{pi}\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau, u_{pi}\right) \right] ds \right| \\
&\quad + \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau, u_{pi}\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(s)) d\tau, u_{pi}\right) \right| ds \\
&\leq \sum_{i=0}^{K-1} \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\xi(s) - \xi_i| ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^s L_\varphi |\xi(\tau) - \xi_i| d\tau ds \\
&\quad + \sum_{i=0}^{K-1} \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\xi_i - \xi(s)| ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^s L_\varphi |\xi_i - \xi(s)| d\tau ds \\
&\leq 2 \sum_{i=0}^{K-1} \lambda \frac{MT(1+C)}{n^2} \left(1 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_0^s L_\varphi d\tau \right) \leq \lambda MT(1+C) \frac{n+R}{n^2} \left(1 + L_\varphi \frac{T}{n} \right).
\end{aligned}$$

Тепер, для обраного $\eta > 0$, існує число $n = n(\eta)$ таке, що для всіх $\varepsilon > 0$ виконується

$$I_2 \leq \frac{\eta}{8} e^{-\lambda T}.$$

Тепер зафіксуємо вибране n та оцінимо інтеграл I_3 . Для цього розіб'ємо його

на інтервалі $[0, T]$ у вигляді суми інтегралів

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(s)) d\tau, u_p(s)\right) - X_0(\xi(s), u_p(s)) \right] ds \right| \\
& \leq \left| \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(s)) d\tau, u_{pi}\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau, u_{pi}\right) \right] ds \right| \\
& + \left| \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X_0(\xi(s), u_{pi}) - X_0(\xi_i, u_{pi}) \right] ds \right| \\
& + \left| \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau, u_{pi}\right) - X_0(\xi_i, u_{pi}) \right] ds \right| \\
& \leq \sum_{i=0}^{K-1} \left[\lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\xi(s) - \xi_i| ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^s L_\varphi |\xi(s) - \xi_i| d\tau ds \right] + \sum_{i=0}^{K-1} \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\xi(s) - \xi_i| ds + I_4.
\end{aligned}$$

Оцінимо тепер інтеграл I_4 . Маємо

$$I_4 = \left| \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau, u_{pi}\right) - X_0(\xi_i, u_{pi}) \right] ds \right|.$$

У термінах $\varphi_1(t, x)$ маємо:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i), u_{pi}\right) - X_0(\xi_i, u_{pi}) \right] ds \right| &= \left| \int_0^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i), u_{pi}\right) - X_0(\xi_i, u_{pi}) \right] ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_i} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i), u_{pi}\right) - X_0(\xi_i, u_{pi}) \right] ds \right|.
\end{aligned}$$

Згідно з Умовою 3.3, кожен доданок у правій частині останньої рівності прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оскільки K є фіксованим, при досить малому ε можна забезпечити нерівність

$$I_4 \leq \frac{\eta}{16} e^{-\lambda T}.$$

Отже,

$$I_3 \leq \frac{\eta}{8} e^{-\lambda T}.$$

Для I_1 отримаємо таку оцінку

$$I_1 \leq \lambda \left(\int_0^t |x(s) - \xi(s)| ds + \int_0^t \int_0^s L_\varphi |x(\tau) - \xi(\tau)| d\tau ds \right) + \frac{\eta}{4} e^{-\lambda T} \leq \frac{\eta}{2} e^{-\lambda T}.$$

До кожного функції $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ з побудованої сітки застосовуємо зазначені вище міркування. Через її скінченність число ε_0 можна вибрати єдиним для кожної функції з сітки.

Таким чином, з нерівностей (3.7)–(3.10), (3.13) і останніх двох оцінок для інтегралів I_1 та I_2 випливає, що нерівність (3.6) справджується рівномірно для всіх допустимих керувань, що й доводить лему. \square

З Умов 3.2, 3.3 та Теорема 2.1 випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ існує єдиний розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші на всьому відрізку $[0, T]$. Отже, задачі (3.1) та (3.4) задані для всіх допустимих керувань.

Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальним керуванням та критерієм якості точної задачі (3.1), (3.2) і відповідної їй усередненої (3.4), (3.5). Позначимо

$$J_\varepsilon^* = \inf_{u(\cdot) \in U} J_\varepsilon[u], \quad J_0^* = \inf_{u(\cdot) \in U} J_0[u].$$

Теорема 3.1. *Нехай виконуються Умови 3.1–3.5. Тоді задачі (3.1), (3.2) та (3.4), (3.5) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ і $(\xi^*(t), u^*(t))$, відповідно, та виконуються наступні твердження:*

- (i) $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (ii) для будь-якого $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u_\varepsilon^*]| < \eta,$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної задачі;

- (iii) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, така що

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow \xi^*(t) \quad \text{рівномірно на } [0, T], \quad (3.14)$$

та

$$u_{\varepsilon_n}^*(\cdot) \rightarrow u^*(\cdot) \quad \text{в } L^2(0, T). \quad (3.15)$$

Крім того, якщо усереднена задача (3.4), (3.5) має єдиний розв'язок, тоді збіжність (3.14) і (3.15) справджується для всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення Теорема 3.1. Для зручності знову припустимо, що $T = 1$. Спочатку доведемо існування оптимальних розв'язків. Для цього встановимо неперервність функціоналу $J_\varepsilon[u]$ відносно u для кожного $\varepsilon > 0$.

Нехай $u_1(t), u_2(t)$ — довільні допустимі керування для задачі (3.1), (3.2), а $x(t, u_1), x(t, u_2)$ — відповідні траєкторії.

Використовуючи Умову 3.2 та нерівність Гронуолла, отримаємо

$$\sup_{t \in [0, 1]} |x(t, u_1) - x(t, u_2)| \leq \lambda \|u_1 - u_2\|_{L^2} e^\lambda. \quad (3.16)$$

Отже,

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon[u_1] - J_\varepsilon[u_2]| &\leq \int_0^1 \left(|L(t, x(t, u_1), u_1(t)) - L(t, x(t, u_2), u_1(t)) \right. \\ &\quad \left. + L(t, x(t, u_2), u_1(t)) - L(t, x(t, u_2), u_2(t)) \right) dt + |\Phi(x(1, u_1)) - \Phi(x(1, u_2))| \\ &\leq \lambda \|u_1 - u_2\|_{L^2} + \int_0^1 |L(t, x(t, u_1), u_1(t)) - L(t, x(t, u_2), u_1(t))| dt \\ &\quad + |\Phi(x(1, u_1)) - \Phi(x(1, u_2))|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тепер, використовуючи оцінку (3.9), яка є рівномірною для всіх допустимих $u(t)$, робимо висновок, що $x(t, u)$ залишається в кулі B_C радіуса C , з центром у нулі, для всіх $t \in [0, 1]$.

Згідно з Умовою 3.5.1 та теоремою Кантора, функція $L(t, x, u)$ є рівномірно неперервною за $x \in B_C$, рівномірно за $t \in [0, 1]$ та $u \in W$. Аналогічно, Φ є рівномірно неперервною за $x \in B_C$. Отже, з (3.16) та (3.17) випливає, що $J_\varepsilon[u]$ є неперервною у L^2 -нормі.

Аналогічні міркування встановлюють неперервність функціоналу $J_0[u]$ відносно u .

Тепер, зважаючи на компактність множини допустимих керувань, встановлюємо існування оптимальних розв'язків $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ та $(\xi^*(t), u^*(t))$ задач (3.1),(3.2) та (3.4),(3.5) відповідно. Це доводить існування оптимальних розв'язків як для точної, так і для усередненої задачі.

Далі доведемо твердження (i), а саме, що $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Виберемо довільне $\eta > 0$ і зафіксуємо його. Тоді маємо

$$J_\varepsilon^* \leq J_\varepsilon[u^*] = J_0^* + J_\varepsilon[u^*] - J_0[u^*]. \quad (3.18)$$

Однак,

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon[u^*] - J_0[u^*]| &\leq \int_0^1 |L(t, x(t, u^*), u^*(t)) - L(t, \xi(t), u^*(t))| dt \\ &\quad + |\Phi(x(1, u^*)) - \Phi(\xi(1))|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

З Лема 3.1 маємо

$$\max_{t \in [0,1]} |x(t, u^*) - \xi^*(t)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Зважаючи на рівномірну неперервність функції $L(t, x, u)$ за $x \in B_C$, рівномірно за $t \in [0, 1]$ та $u \in W$, з (3.19), (3.20) та Умови 3.5 випливає, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$ маємо

$$|J_\varepsilon[u^*] - J_0| < \eta.$$

Отже, з (3.18) отримуємо

$$J_\varepsilon^* < J_0^* + \eta. \quad (3.21)$$

З іншого боку, для $\varepsilon < \varepsilon_0$ маємо

$$J_0^* \leq J_0[u_\varepsilon^*] = J_\varepsilon^* + (J_0[u_\varepsilon^*] - J_\varepsilon[u_\varepsilon^*]).$$

Однак, аналогічно до (3.21), маємо

$$|J_\varepsilon[u_\varepsilon^*] - J_0[u_\varepsilon^*]| < \eta.$$

Внаслідок цього,

$$J_0^* < J_\varepsilon^* + \eta. \quad (3.22)$$

З рівностей (3.21) та (3.22) випливає, що $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, що доводить твердження (i) Теорема 3.1.

Твердження (ii) Теорема 3.1 безпосередньо випливає з того, що

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| \leq |J_\varepsilon^* - J_0^*| + |J_0[u^*] - J_\varepsilon[u^*]|.$$

Доведення твердження (iii). Оскільки U є компактною множиною в $L^2(0, 1)$, можна виділити підпослідовність $u_{\varepsilon_n}^*$, яка збігається в $L^2(0, 1)$. Нехай

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n}^* = u_0 \quad \text{в } L^2(0, 1). \quad (3.23)$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\begin{cases} \dot{z}_{\varepsilon_n} = X\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, z_{\varepsilon_n}(t), \int_0^t \varphi(t, s, z_{\varepsilon_n}(s)) ds, u_0(t)\right), \\ z_{\varepsilon_n}(0) = x_0, \end{cases}$$

та

$$\dot{\xi} = X_0(\xi, u_0(t)), \quad \xi(0) = x_0. \quad (3.24)$$

З нерівності (3.16) маємо

$$\sup_{t \in [0, 1]} |x_{\varepsilon_n}^*(t) - z_{\varepsilon_n}(t)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

і, згідно з Лемою 3.1,

$$\sup_{t \in [0, 1]} |z_{\varepsilon_n}(t) - \xi(t)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Отже, з (3.24) та (3.25) випливає

$$\sup_{t \in [0, 1]} |x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi(t)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad (3.26)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
 J_{\varepsilon_n}^* = J_{\varepsilon_n}[u_{\varepsilon_n}^*] &= \int_0^1 L(t, x_{\varepsilon_n}^*(t), u_{\varepsilon_n}^*(t)) dt + \Phi(x_{\varepsilon_n}^*(1)) = \int_0^1 L(t, x_{\varepsilon_n}^*(t), u_0(t)) dt \\
 &+ \Phi(x_{\varepsilon_n}^*(1)) + \int_0^1 [L(t, x_{\varepsilon_n}^*(t), u_{\varepsilon_n}^*(t)) - L(t, x_{\varepsilon_n}^*(t), u_0(t))] dt.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

З Умови 3.5 та (3.23) випливає, що останній доданок у (3.27) прямує до нуля при $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Нехай $\varepsilon_n \rightarrow 0$ у (3.27), і використаємо (3.26), тоді отримаємо

$$J_0^* = \int_0^1 L(t, \xi(t), u_0(t)) dt + \Phi(\xi(1)).$$

Отже, $(\xi(t), u_0(t))$ є оптимальним розв'язком усередненої задачі (3.4), (3.5), що доводить твердження (iii).

Якщо задача (3.4), (3.5) має єдиний розв'язок, тоді наведене міркування означає, що будь-яка збіжна послідовність $(u_{\varepsilon_n}^*(t), x_{\varepsilon_n}^*(t))$ прямує до тієї самої границі. Це завершує доведення останнього твердження теореми. \square

3.1.2 Лінійний випадок

Розглядається також задача керування зі швидкоосцилюючими параметрами, що є лінійною за керуванням

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s)) ds\right) + f_1(x_\varepsilon(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \tag{3.28}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf, \tag{3.29}$$

на відрізку $[0, T]$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $T > 0$ — задана стала, $x \in \mathbb{R}^d$ — вектор стану, а $u(t)$ — m -вимірний вектор керування.

Якщо наступна границя існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x)\right) - f_0(x) \right] d\tau = 0, \quad (3.30)$$

де

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds, \quad t, s \in [0, T],$$

тоді задача оптимального керування (3.28), (3.29) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність усереднена задача на відрізку $[0, T]$:

$$\dot{\xi} = f_0(\xi) + f_1(\xi)u(t), \quad \xi(0, u(0)) = x_0, \quad (3.31)$$

з відповідним критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(\xi(T)) \rightarrow \inf. \quad (3.32)$$

Основний результат полягає у доведенні збіжності мінімальних значень функціонала якості, оптимальних керувань та траєкторій точної задачі (3.28), (3.29) до відповідних мінімальних значень, оптимальних керувань і траєкторій усередненої задачі.

Припустимо, що для задачі (3.28), (3.29) виконуються наступні умови.

Умова 3.6. Допустиме керування — це m -вимірний вектор-функція $u(\cdot) \in L^p((0, T); V)$, $p > 1$, яка набуває значень у замкненій опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$;

Умова 3.7. Функція $f(t, x, y)$ визначена та неперервна за сукупністю змінних в області $Q_3 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n\}$; матрична функція $f_1(x)$ розмірності $d \times m$ визначена при $x \in \mathbb{R}^d$, і

3.7.1. $f(t, x, y)$ задовольняє умову лінійного росту з константою M в області Q_3 , тобто $|f(t, x, y)| \leq M(1 + |x| + |y|)$ для всіх $(t, x, y) \in Q_3$;

3.7.2. $f(t, x, y)$ та $f_1(x)$ задовольняють умову Лівшиця по x з константою $\lambda > 0$ в своїх областях визначення;

Умова 3.8. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена та неперервна в області $Q_4 = \{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d\}$, набуває значень у просторі \mathbb{R}^n та задовольняє по x умову лінійного росту та умову Ліпшиця; тобто, існує $L_\varphi > 0$ таке, що

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi |x - x_1| \quad \text{і} \quad |\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi (1 + |x|);$$

Умова 3.9. Границя (3.30) існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$;

Умова 3.10. Скалярні функції $A(t, x)$ та $B(t, u)$ визначені для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in W$ та неперервні за всіма змінними, при цьому:

3.10.1. $A(t, x) \geq 0$, $B(t, u) \geq a|u|^p$ з деякою сталою $a > 0$ для всіх $t \in [0, T]$, а функція $B(t, u)$ опукла по $u \in W$;

3.10.2. Функція $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ невід'ємна та неперервна за x .

Для доведення основної теореми, аналогічно до нелінійного випадку, встановимо наступну лему.

Лема 3.2. *Нехай виконуються Умови 3.6– 3.9. Якщо $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ слабо в $L^p(0, T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то розв'язок $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (3.28) при $u(t) = u_\varepsilon(t)$ збігається рівномірно на $[0, T]$ до розв'язку $\xi(t)$ відповідної задачі Коші (3.31) з керуванням $u(t) = u_0(t)$, тобто*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows \xi(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

рівномірно при $t \in [0, T]$.

Доведення. Перепишемо рівняння (3.28) в інтегральній формі:

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon}, x_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau)) d\tau\right) ds + \int_0^t f_1(x_\varepsilon(s)) u_\varepsilon(s) ds.$$

Не зменшуючи загальності припустимо $T = 1$. Маємо

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + \int_0^t M(1 + |x_\varepsilon(s)|) + \int_0^s L_\varphi(1 + |x_\varepsilon(\tau)|) d\tau ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t (|f_1(x_\varepsilon(s)) - f_1(0)| + |f_1(0)|) |u_\varepsilon(s)| ds \\
& \leq |x_0| + \int_0^t (M + L_\varphi + |f_1(0)| |u_\varepsilon(s)|) ds + \int_0^t (M + \lambda |u_\varepsilon(s)|) |x_\varepsilon(s)| ds \\
& + L_\varphi \int_0^t \int_0^s |x_\varepsilon(\tau)| d\tau ds.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Гронуолла—Беллмана до (3.33), отримаємо

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_0| + M + L_\varphi + |f_1(0)|) \int_0^t |u_\varepsilon(s)| ds e^{M + \lambda \int_0^t |u_\varepsilon(s)| ds + L_\varphi}.$$

Позначимо $M^* = M + L_\varphi$, тоді

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_0| + M^* + |f_1(0)| \|u_\varepsilon\|_{L^p}) e^{M^* + \lambda \|u_\varepsilon\|_{L^p}}. \tag{3.34}$$

Із слабкої збіжності u_ε випливає, що u_ε є сильно обмеженим, тобто $\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p} < \infty$. Це, разом з (3.34), означає існування сталої $C > 0$ такої, що

$$|x_\varepsilon(t)| \leq C, \tag{3.35}$$

для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, 1]$.

Нехай $t_1 < t_2$, де $t_1, t_2 \in [0, 1]$, тоді маємо

$$\begin{aligned}
|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)| & \leq \int_{t_1}^{t_2} M(1 + C + L_\varphi \int_0^s (1 + C) d\tau) ds + \int_{t_1}^{t_2} (|f_1(0)| + \lambda C) |u_\varepsilon(s)| ds \\
& \leq M(1 + C)(t_2 - t_1) + ML_\varphi(1 + C)(t_2 - t_1) \\
& + (|f_1(0)| + \lambda C) \left(\int_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon(s)|^p ds \right)^{1/p} (t_2 - t_1)^{1/q},
\end{aligned}$$

де $1/p + 1/q = 1$.

З останньої нерівності випливає, що сім'я $x_{\varepsilon_n}(t)$ є рівностепенено неперервна на $[0, 1]$, а враховуючи (3.35) вона також є компактною.

Нехай $x_{\varepsilon_n}(t)$ — це підпоследовність, що рівномірно збігається до деякої функції $\xi(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Покажемо, що $\xi(t)$ є розв'язком задачі Коші з керуванням $u(t) = u_0(t)$. Маємо

$$x_{\varepsilon_n}(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_{\varepsilon_n}(\tau)) d\tau\right) ds + \int_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n}(s) ds.$$

Розглянемо наступний вираз

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_{\varepsilon_n}(\tau)) d\tau\right) - f_0(\xi(s)) + f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n}(s) - f_1(\xi(s)) u_0(s) \right] ds \right| \\ & \leq \left| \int_0^t \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_{\varepsilon_n}(\tau)) d\tau\right) - f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau\right) \right] ds \right| \\ & + \left| \int_0^t \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau\right) - f_0(\xi(s)) \right] ds \right| \quad (3.36) \\ & + \left| \int_0^t \left[f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n}(s) - f_1(\xi(s)) u_{\varepsilon_n}(s) + f_1(\xi(s)) u_{\varepsilon_n}(s) - f_1(\xi(s)) u_0(s) \right] ds \right| \end{aligned}$$

Згідно з Умовами 3.7, 3.8, перший доданок у (3.36) задовольняє обмеження

$$\lambda \int_0^t \left(|x_{\varepsilon_n}(s) - \xi(s)| + \int_0^s L_\varphi |x_{\varepsilon_n}(\tau) - \xi(\tau)| d\tau \right) ds \leq \sup_{t \in [0,1]} |x_{\varepsilon_n}(t) - \xi(t)| \lambda (1 + L_\varphi) \rightarrow 0,$$

при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Для останнього доданка в (3.36) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \left[(f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(\xi(s))) u_{\varepsilon_n}(s) + f_1(\xi(s)) (u_{\varepsilon_n}(s) - u_0(s)) \right] ds \right| \quad (3.37) \\ & \leq \left| \int_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(\xi(s))) u_{\varepsilon_n}(s) ds \right| + \left| \int_0^t f_1(\xi(s)) (u_{\varepsilon_n}(s) - u_0(s)) ds \right|. \end{aligned}$$

З (3.35) та неперервності функції f_1 , і в силу слабкої збіжності u_{ε_n} до u_0 в $L^p(0, 1)$, отримаємо, що останній доданок у (3.37) прямує до нуля.

Тепер оцінимо перший доданок у (3.37). З Умови 3.7.2 маємо

$$\left| \int_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(\xi(s))) u_{\varepsilon_n}(s) ds \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} |x_{\varepsilon_n}(s) - \xi(s)| \cdot \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^p}. \quad (3.38)$$

З урахуванням того, що $\sup_{t \in [0,1]} |x_{\varepsilon_n}(s) - \xi(s)| \rightarrow 0$ та рівномірної обмеженості $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L^p}$, з (3.38) випливає, що перший доданок у (3.37) також прямує до нуля.

Оцінимо другий доданок у правій частині (3.36), який позначимо через I_1 . Покажемо, що для будь-якого $\eta > 0$ існує ε_{n_0} таке, що для $\varepsilon_n < \varepsilon_{n_0}$ виконується

$$I_1 = \left| \int_0^t \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau\right) - f_0(\xi(s)) \right] ds \right| < \eta.$$

Для цього виберемо натуральне число k і поділимо відрізок $[0, 1]$ на k рівних частин за допомогою точок $t_i = \frac{i}{k}$ ($i = 0, \dots, k$), тобто $|t_{i+1} - t_i| \leq \frac{1}{k}$. Позначимо загальну кількість інтервалів $[t_i, t_{i+1})$ через $\kappa = \kappa(\eta)$. Завдяки рівномірній неперервності функції $\xi(t)$ на $[0, 1]$, для $\eta > 0$ можна вказати k таке, що буде виконуватись оцінка:

$$|\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)| < \frac{\eta}{2\lambda(2 + L_\varphi)}. \quad (3.39)$$

Зафіксуємо таке k і покладемо $\xi(t_i) = \xi_i$. Маємо:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left| \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)) d\tau\right) - f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau\right) - f_0(\xi_i) + f_0(\xi_i) - f_0(\xi(s)) \right] ds \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\left| f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi(s)) d\tau\right) - f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| f_0(\xi_i) - f_0(\xi(s)) \right| \right] ds + \left| \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau\right) - f_0(\xi_i) \right) ds \right| \\ &\leq \lambda \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(|\xi(s) - \xi_i| + L_\varphi \int_0^t |\xi(\tau) - \xi_i| d\tau + |\xi_i - \xi(s)| \right) ds \\ &\quad + \left| \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau\right) - f_0(\xi_i) \right] ds \right|. \end{aligned}$$

Із (3.39) випливає, що

$$\lambda \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(|\xi(s) - \xi_i| + L_\varphi \int_0^s |\xi(\tau) - \xi_i| d\tau + |\xi_i - \xi(s)| \right) ds \leq \frac{\eta}{2}.$$

Позначимо через I_{11} наступний вираз:

$$I_{11} = \left| \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \int_0^s \varphi(s, \tau, \xi_i) d\tau\right) - f_0(\xi_i) \right] ds \right|.$$

У термінах $\varphi_1(t, x)$ маємо

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i)\right) - f_0(\xi_i) \right] ds \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_0^{t_{i+1}} \left[\left(f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i)\right) - f_0(\xi_i) \right) ds - \int_0^{t_i} \left(f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i)\right) - f_0(\xi_i) \right) ds \right] ds \right|. \end{aligned}$$

Згідно з (3.30), для кожного i існує ε_{n_i} таке, що для $\varepsilon_n < \varepsilon_{n_i}$ виконуються наступні нерівності

$$\int_0^{t_i} \left[f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \xi_i, \varphi_1(s, \xi_i)\right) - f_0(\xi_i) \right] ds \leq \frac{\eta}{4k}.$$

Оскільки k фіксоване, кількість таких інтегралів скінченна. Нехай $\varepsilon_\eta = \min\{\varepsilon_{n_1}, \dots, \varepsilon_{n_k}\}$. Тоді для $\varepsilon_n < \varepsilon_\eta$ маємо

$$I_{11} \leq \frac{\eta}{2}.$$

Отже, $I_1 \leq \eta$.

Останнє означає, що $\xi(t)$ є розв'язком задачі Коші (3.28). Таким чином, рівномірна збіжність $x_{\varepsilon_n} \Rightarrow \xi(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ означає збіжність до розв'язку задачі Коші (3.28). Оскільки $\xi(t)$ — єдиний розв'язок, уся послідовність x_ε збігається до $\xi(t)$, що завершує доведення цієї леми. \square

Основний результат даного підрозділу це наступна теорема, що обґрунтовує зв'язок між оптимальними трійками точної та відповідної їй усередненої задачі.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються Умови 3.6–3.10. Тоді задачі (3.28),(3.29) та (3.31),(3.32) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ та $(\xi^*(t), u^*(t))$, відповідно, і*

$$(i) J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^* \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0;$$

(ii) *для будь-якого $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta$$

виконується при $\varepsilon < \varepsilon_0$;

(iii) *існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, така що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightrightarrows \xi^*(t) \text{ рівномірно на } [0, T], \quad (3.40)$$

та

$$u_{\varepsilon_n}^*(\cdot) \rightharpoonup u^*(\cdot) \text{ слабко в } L^p(0, T). \quad (3.41)$$

Крім того, якщо усереднена задача (3.31), (3.32) має єдиний розв'язок, тоді збіжність (3.40) та (3.41) виконується для всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Знову покладемо $T = 1$ та розглядатимемо задачу на відрізку $[0, 1]$. Існування оптимального розв'язку $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ для кожного $\varepsilon > 0$ встановлюється стандартним способом шляхом виділення слабко збіжної мінімізуючої послідовності $u_\varepsilon^{(n)}(t)$, яка збігається до $u_\varepsilon^*(t)$, з подальшим переходом до границі, при цьому $u_\varepsilon^*(t) \in W$ з урахуванням леми Мазура [91, 120].

Існування оптимальної пари $(\xi^*(t), u^*(t))$ для задачі (3.31),(3.32) доводиться аналогічно. Таким чином,

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon[u_\varepsilon^*] = \int_0^1 [A(t, x_\varepsilon^*(t)) + B(t, u_\varepsilon^*(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon^*(1)).$$

Нехай \bar{u} — довільний сталий вектор з W . Очевидно, керування $u(t) \equiv \bar{u}$ є допустимим для задачі (3.28), (3.29). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ маємо

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon[u_\varepsilon^*] \leq J_\varepsilon[\bar{u}].$$

Подібно до оцінювання (3.9), можна показати існування сталої C_1 , незалежної від ε , такої що

$$|x_\varepsilon(t, \bar{u})| \leq C_1$$

для $t \in [0, 1]$. Тоді, з неперервності A , B та Φ випливає, що існує стала C_2 , незалежна від ε , така що $J_\varepsilon^* \leq C_2$. Отже,

$$J_\varepsilon^* \leq C_2 \quad (3.42)$$

для всіх додатних ε . Із Умови 3.10 та (3.42) отримуємо

$$\int_0^1 |u_\varepsilon^*(t)|^p dt \leq \frac{C_2}{a}.$$

Таким чином, множина u_ε^* є слабко компактною у $L^p(0, 1)$. Нехай $u_{\varepsilon_n}^*(t)$ — послідовність оптимальних керувань, яка слабко збігається до $u_0(t)$. З леми Мазура [91, 120] випливає, що $u_0(t) \in W$ для $t \in [0, 1]$, тобто $u_0(t)$ є допустимим керуванням.

Нехай $\xi(t)$ — розв'язок задачі Коші (3.31) при $u(t) = u_0(t)$. Згідно з Лемою 3.2, розв'язок $x_{\varepsilon_n}(t, u_{\varepsilon_n}^*)$ задачі Коші (3.28) рівномірно збігається до $\xi(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ для $t \in [0, 1]$.

Для будь-якого $\eta > 0$ маємо:

$$J_{\varepsilon_n}^* \leq J_{\varepsilon_n}[u^*] = J_0[u^*] + J_{\varepsilon_n}[u^*] - J_0[u^*] = J_0^* + J_{\varepsilon_n}[u^*] - J_0[u^*]. \quad (3.43)$$

Знову ж таки, згідно з Лемою 3.2, розв'язок $x_{\varepsilon_n}(t, u^*)$ задачі Коші (3.28) рівномірно збігається до $\xi^*(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ для $t \in [0, 1]$. Отже,

$$\begin{aligned} |J_{\varepsilon_n}[u^*] - J_0[u^*]| &\leq \int_0^1 |A(t, x_{\varepsilon_n}(t, u^*) - A(t, \xi^*(t)))| dt \\ &\quad + |\Phi(x_{\varepsilon_n}(1, u^*)) - \Phi(\xi(1))| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким чином, для будь-якого $\eta > 0$ існує $\bar{\varepsilon}$ таке, що при $\varepsilon_n < \bar{\varepsilon}$,

$$|J_{\varepsilon_n}[u^*] - J_0[u^*]| < \eta. \quad (3.44)$$

Враховуючи це та з (3.43) маємо

$$J_{\varepsilon_n}^* \leq J_0^* + \eta. \quad (3.45)$$

З іншого боку, маємо

$$J_0^* \leq J_0[u_{\varepsilon_n}^*] = J_{\varepsilon_n}^* + J_0[u_{\varepsilon_n}^*] - J_{\varepsilon_n}[u_{\varepsilon_n}^*]. \quad (3.46)$$

Розглянемо допоміжну систему

$$\dot{z}_n = f_0(z_n) + f_1(z_n)u_{\varepsilon_n}^* \quad (3.47)$$

та систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(y)u_0. \quad (3.48)$$

Застосовуючи Лему 3.2 до систем (3.47) та (3.48), отримаємо

$$\sup_{t \in [0,1]} |z_n(t) - y(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Враховуючи наведені вище міркування та рівномірну збіжність $x_{\varepsilon_n}^* \rightarrow y$

маємо

$$\sup_{t \in [0,1]} |x_{\varepsilon_n}^*(t) - z_n(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |J_{\varepsilon_n}[u_{\varepsilon_n}^*] - J_0[u_{\varepsilon_n}^*]| &\leq \int_0^1 |A(t, x_{\varepsilon_n}^*(t)) - A(t, z_n(t))| + |A(t, z_n(t)) - A(t, y(t))| dt \\ &+ |\Phi(x_{\varepsilon_n}^*(1)) - \Phi(y(1))| + |\Phi(x_{\varepsilon_n}^*(1)) - \Phi(y(1))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу рівномірної неперервності $A(t, x)$ на компактті та очевидних оцінок

$$\sup_{t \in [0,1]} |x_{\varepsilon_n}^*(t)| \leq C_3, \quad \sup_{t \in [0,1]} |z_n(t)| \leq C_3$$

для деякої сталої $C_3 > 0$, незалежної від n .

Таким чином, для довільного $\eta > 0$ існує $\bar{\varepsilon}$ таке, що

$$|J_{\varepsilon_n}[u_{\varepsilon_n}^*] - J_0[u_{\varepsilon_n}^*]| < \eta.$$

Отже, з (3.46), при $\varepsilon_n < \bar{\varepsilon}_1$, маємо

$$J_0^* \leq J_{\varepsilon_n}^* + \eta, \quad (3.49)$$

Тоді, якщо $\varepsilon_n < \min\{\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_1\}$, із (3.45) та (3.49) одержуємо $|J_0^* - J_{\varepsilon_n}^*| < \eta$, що означає

$$J_{\varepsilon_n}^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad (3.50)$$

Оскільки з будь-якої послідовності керувань $\{u_\varepsilon^*\}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\{u_{\varepsilon_n}^*\}$, для якої співвідношення (3.50) виконується аналогічно до вищенаведеного, отримаємо

$$J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.51)$$

що завершує доведення твердження (i) теореми.

Тепер доведемо твердження (ii). Оскільки $x_\varepsilon(t, u^*)$ збігається до $\zeta^*(t)$ рівномірно за $t \in [0, 1]$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, подібними міркуваннями до виведення оцінки (3.44) отримуємо нерівність

$$|J_\varepsilon[u^*] - J_0[u^*]| < \eta, \quad (3.52)$$

яка виконується для будь-якого $\eta > 0$ при достатньо малих ε . Тоді

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| \leq |J_\varepsilon^* - J_0^*| + |J_\varepsilon[u^*] - J_0[u^*]|.$$

Із (3.51) та (3.52) випливає твердження (ii).

Тепер доведемо твердження (iii). Для цього покажемо, що $(y(t), u_0(t))$ дійсно є оптимальним розв'язком задачі (3.28), (3.29). Маємо

$$J_{\varepsilon_n}^* = \int_0^1 [A(t, x_{\varepsilon_n}^*(t)) + B(t, u_{\varepsilon_n}^*(t))] dt + \Phi(x_{\varepsilon_n}^*(1)).$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ та враховуючи (3.51) і Умову 3.10, отримуємо

$$J_0^* = \int_0^1 A(t, y(t)) dt + \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^1 B(t, u_{\varepsilon_n}^*(t)) dt + \Phi(y(1))$$

$$\geq \int_0^1 [A(t, y(t)) + B(t, u_0(t))] dt + \Phi(y(1)).$$

Звідси випливає, що пара $(y(t), u_0(t))$ є оптимальною.

Останнє твердження Теорема доводиться аналогічно до відповідного твердження Теорема 3.1. \square

3.1.3 Приклади

Приклад 1 (СЛАБОНЕЛІНІЙНИЙ РЕГУЛЯТОР). Розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x + f_1\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right) + f_2(t)u(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

де $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^m$, з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [(C(t)x_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t)) + (F(t)u(t), u(t))] dt + (Dx_\varepsilon(T), x(T)) \rightarrow \inf, \quad (3.54)$$

де $C(t)$ та D — симетричні невід'ємно визначені матриці розміру $d \times d$, $F(t)$ — додатно визначена матриця розміру $m \times m$, $f(t)$ — матриця розміру $d \times d$, $f_1(t, x, y)$ — d -вимірна вектор-функція, визначена для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^n$, а $f_2(t)$ — матриця розміру $n \times m$.

Оскільки доданки у функціоналі (3.54) є квадратичними формами, дана задача називається задачею оптимального керування для слабонелінійного осцилятора. Класичний лінійний випадок розглянуто, наприклад, у [23].

Припустимо, що функції f_1 і φ задовольняють Умови 3.7 та 3.8, а функції f і f_2 є неперервними.

Присутність малого параметра, дає підстави назвати цю задачу задачею оптимального керування для слабонелінійного осцилятора. Функції $f_1(t, x)$ та φ вважаються вимірними функціями, які задовольняють Умови 3.7 та 3.8.

Нехай $\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds$. Припустимо, що існують наступні границі:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - A_0 \right] d\tau = 0,$$

та

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t f_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x)\right) d\tau = 0.$$

рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$.

Ми асоціюємо задачу оптимального керування (3.53), (3.54) з відповідною усередненою задачею:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_0 \xi + f_2(t)u, \\ J_0[u] &= \int_0^T [(C(t)\xi(t), \xi(t)) + (F(t)u(t), u(t))] dt + (D\xi(T), \xi(T)) \rightarrow \inf. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Задача (3.55) є класичною лінійно-квадратичною задачею. Добре відомо, що її розв'язання зводиться до матричного рівняння Ріккати. Зокрема, коли f_2 , C та F є сталими, це рівняння є автономним, і в одномірному випадку воно може бути розв'язане точно. Отже, усереднена задача (3.55) є розв'язною. Доведена теорема тоді стверджує, що оптимальне керування, знайдене для усередненої задачі, є «майже» оптимальним для початкової задачі.

Наступний приклад є ілюстративним і демонструє збіжність оптимальних керувань та траєкторій початкової задачі до відповідних усередненої задачі.

Приклад 2. Розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \int_0^t (x_\varepsilon(s) \cos s) ds + u, \\ x_\varepsilon(0) = 1, \quad t \in [0, 1], \\ J_\varepsilon[u] = \int_0^1 (x_\varepsilon(t) - u(t))^2 dt \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.56)$$

Тут $\varphi_1(t, x) = \int_0^t x \cos s ds = x \sin t$. Тоді, згідно з (3.30), маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t x \sin\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \sin s ds = \frac{1}{2}x \left[\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sin\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)t\right) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \sin\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)t\right) \right] = 0$$

Отже, усереднена задача має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = u, \\ \xi(0) = 1, \\ J[u] = \int_0^1 (\xi(t) - u(t))^2 dt \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.57)$$

Оптимальне керування для задачі (3.57) очевидно має вигляд $u^*(t) = \xi^*(t)$, де $\xi^*(t)$ — це розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{d\xi^*}{dt} = \xi^*, \\ \xi^*(0) = 1. \end{cases}$$

Звідси $u^*(t) = e^t$.

Для початкової задачі (3.56) також очевидно, що $x_\varepsilon^*(t) = u_\varepsilon^*(t)$, де $x_\varepsilon^*(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \int_0^t x_\varepsilon(s) \cos s ds + x_\varepsilon, \\ x_\varepsilon(0) = 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Графіки та чисельні ілюстрації нижче демонструють збіжність розв'язку задачі (3.58) до функції e^t при $\varepsilon \rightarrow 0$.

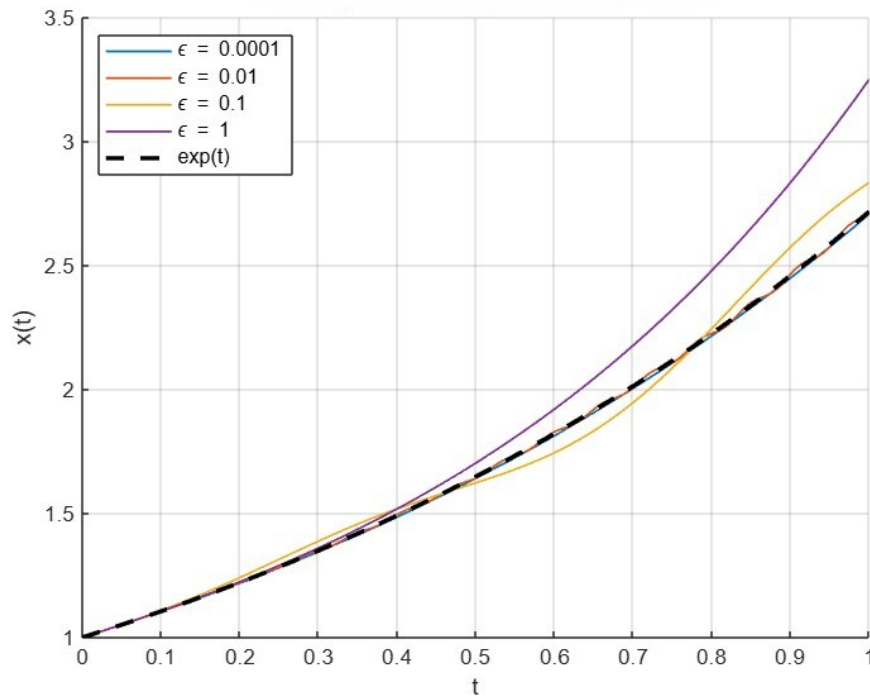


Табл. 3.1. Чисельне порівняння розв'язків початкової задачі (3.58) та усередненої задачі (3.57): значення $x_\epsilon(t)$, e^t та $|x_\epsilon(t) - e^t|$ у вибраних точках

ϵ	t	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
	e^t	1.221403	1.491825	1.822119	2.225541	2.718282
$\epsilon = 10^{-2}$	$x_\epsilon(t)$	1.220604	1.495096	1.829428	2.226669	2.706371
$\epsilon = 10^{-4}$	$x_\epsilon(t)$	1.218997	1.485621	1.813555	2.217434	2.707980
$\epsilon = 10^{-2}$	$ x_\epsilon - e^t $	7.985e-04	3.272e-03	7.309e-03	1.128e-03	1.191e-02
$\epsilon = 10^{-4}$	$ x_\epsilon - e^t $	2.405e-03	6.203e-03	8.564e-03	8.107e-03	1.030e-02

3.2 Усереднення на півосі

3.2.1 Нелінійна задача оптимального керування для інтегро-диференціальних рівнянь зі швидкоосцилюючим коефіцієнтом на півосі

Розглянемо нелінійну задачу оптимального керування (3.1) на півосі з критерієм якості

$$J_\epsilon[u] = \int_0^\infty e^{-\gamma t} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (3.59)$$

тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\gamma > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $W \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$.

Позначимо

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds.$$

Нехай існує рівномірна за $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in \mathbb{R}^m$ границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x), u\right) - X_0(x, u) \right] d\tau = 0, \quad (3.60)$$

при $t \geq 0$.

Задачі оптимального керування на півосі (3.1), (3.59) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами поставимо у відповідність більш просту (згладжену) усереднену задачу керування (3.4) з критерієм якості

$$J[u] = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, \xi(t), u(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (3.61)$$

Для задачі (3.1), (3.59) та її усередненої задачі (3.4), (3.61) будемо вважати виконаними наступні умови.

Умова 3.11. Допустимими керуваннями є m -вимірні вектор-функції $u(t)$, що майже для всіх $t \geq 0$ приймають значення в деякому компактi $W \subset \mathbb{R}^m$ і $u(\cdot)$ для кожного $T > 0$ належить компактi U_T в $L^p(0, T)$ для деякого $p \geq 1$.

Умова 3.12. Функція $X(t, x, y, u)$ визначена й неперервна за сукупності змінних в області $Q_0 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n, u \in W \subset \mathbb{R}^m\}$ та виконуються умови:

3.12.1. $X(t, x, y, u)$ обмежена в Q_0 , тобто існує константа $M > 0$, така що

$$|X(t, x, y, u)| \leq M, \quad \text{для довільних } (t, x, y, u) \in Q_0.$$

3.12.2. $X(t, x, y, u)$ задовольняє умову Ліпшиця у Q_0 відносно $x \in \mathbb{R}^d$ та $u \in \mathbb{R}^m$, з константою λ :

$$|X(t, x, y, u) - X(t, x_1, y_1, u_1)| \leq \lambda(|x - x_1| + |y - y_1| + |u - u_1|),$$

для довільних $(t, x, y, u), (t, x_1, y_1, u_1) \in Q_0$.

Умова 3.13. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена та неперервна в області $Q_1 = \{t \geq 0, s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ та задовольняє умови лінійного росту та Ліпшиця відносно x , тобто існує L_φ , така що

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi |x - x_1|,$$

$$|\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi (1 + |x|).$$

Умова 3.14. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in W$ існує границя (3.60).

Умова 3.15. Скалярна функція $L(t, x, u)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q_2 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, u \in W\}$ і задовольняє в області Q_2 за змінними x та u умову лінійного росту зі сталою M , тобто

$$|L(t, x, u)| \leq M(1 + |x| + |u|).$$

Спочатку зазначимо, що з Умов 3.11, 3.12 і Теорема 2.1 випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (3.1) існує, єдиний на $[0, \infty)$ та є абсолютно неперервною функцією. При цьому для розв'язку задачі (3.1) справедлива оцінка

$$|x(t)| \leq |x_0| + Mt. \quad (3.62)$$

А тому для критерію якості (3.59) з урахуванням (3.62) і Умови 3.15 отримуємо

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon[u]| &\leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} M(1 + |x(t)| + |u(t)|) dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} M(1 + |x_0| + Mt) dt + C \int_0^\infty e^{-\gamma t} |u(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

для деякої сталої $C > 0$. Таким чином, критерій (3.59) має сенс для всіх допустимих керувань.

Із Умови 3.14 випливає, що аналогічні висновки справедливі й для усередненої задачі.

У подальшому нам знадобиться наступна лема, що гарантує збіжність розв'язків точної системи (3.1) до відповідних розв'язків усередненої системи (3.4). Нехай $T > 0$ — фіксоване.

Лема 3.3. *Нехай виконано Умови 3.12 – 3.14. Тоді якщо $u_\varepsilon \rightarrow u_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ за нормою простору $L^p(0, T)$, то розв'язок задачі Коші (3.1)*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows \xi_0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

на $[0, T]$, де $\xi_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (3.4) при $u = u_0$.

Доведення. Окрім систем (3.1) і (3.4) розглянемо допоміжну систему

$$\dot{z}_\varepsilon = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, z_\varepsilon(s)) ds, u_0\right) \quad z_\varepsilon(0, u_0(0)) = x_0. \quad (3.63)$$

Тоді

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| &\leq \left| \int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(\tau)) d\tau, u_0(s)\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau)) d\tau, u_\varepsilon(s)\right) \right] ds \right| \leq \\ &\leq \lambda \int_0^t \left(|z_\varepsilon(s) - x_\varepsilon(s)| + L_\varphi \int_0^s |z_\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(\tau)| d\tau \right) ds + \lambda \int_0^T |u_\varepsilon(s) - u_0(s)| ds = \\ &= \lambda \int_0^t |z_\varepsilon(s) - x_\varepsilon(s)| ds + \lambda L_\varphi \int_0^t \int_0^s |z_\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(\tau)| d\tau ds + \lambda \int_0^T |u_\varepsilon(s) - u_0(s)| ds. \end{aligned}$$

З узагальненої леми Гронуолла–Беллімана маємо

$$|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| \leq \lambda T^{\frac{1}{q}} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^p} e^{\lambda T(1+L_\varphi T)}.$$

Далі із Леми 3.1 випливає збіжність $z_\varepsilon(t)$ до $\xi_0(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ на $[0, T]$ рівномірно по u_ε .

Зауважимо, що заміна класу $L^2(0, T)$ на клас $L^p(0, T)$ не призводить до змін у доведенні, оскільки довільну функцію з $L^p(0, T)$, $p \geq 1$ можна щільно апроксимувати кусково-сталими функціями. Це і доводить теорему. \square

Зауваження 1. Із даної теореми та єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що якщо $u_\varepsilon \rightarrow u_0(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ за нормою $L^p(0, T)$ для кожного $T > 0$, то $x_\varepsilon(t)$ збігається до $\xi_0(t)$ рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$, а тому $x_\varepsilon(t) \rightarrow \xi_0(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ для будь-якого $t \geq 0$. Отже, в цьому випадку маємо поточкову збіжність розв'язків вихідної задачі до відповідних розв'язків усередненої.

Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями та критеріями якості точної (3.1), (3.59) та усередненої (3.4), (3.61) задач.

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_u J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_u J_0[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керуваннях.

Теорема 3.3. *Нехай виконано Умови 3.11 – 3.15 та існує $\varepsilon_0 > 0$, що при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ задачі (3.1), (3.59) та (3.4), (3.61) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$, $(\xi^*(t), u^*(t))$ відповідно. Тоді виконуються такі варіаційні співвідношення:*

- 1) $J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 2) для кожного $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta,$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної;

- 3) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ така, що

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow \xi^*(t), \tag{3.64}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$, $T > 0$, а

$$u_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow u^*(t), \tag{3.65}$$

майже скрізь на $[0, \infty)$, і $u_{\varepsilon_n}^*(\cdot)$ збігається до $u^*(\cdot)$ за нормою $L^p(0, T)$ для кожного $T > 0$.

Якщо при цьому усереднена задача (3.4), (3.61) має єдиний розв'язок, то збіжності у (3.64), (3.65) мають місце при всіх $\varepsilon > 0$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ — довільна послідовність така, що $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. За припущеннями теореми існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для $n \geq n_0$ задача (3.1), (3.59) має розв'язок $(x_{\varepsilon_n}^*(t), u_{\varepsilon_n}^*(t))$.

З Умови 3.11 випливає, що на $[0, 1]$ існує підпослідовність $u_{\varepsilon_{n_1}}^*(\cdot)$ послідовності $u_{\varepsilon_n}^*(\cdot)$, яка збігається в $L^p(0, 1)$. Нехай $u_1(\cdot)$ — її L^p -границя. Тоді існує підпослідовність $u_{\varepsilon_{n_1}}^*(t)$ (яку знову позначимо як $u_{\varepsilon_{n_1}}^*(t)$), що збігається поточково до $u_1(t)$ всюди на $[0, 1]$, за винятком множини A_1 міри Лебега нуль.

Аналогічними міркуваннями з послідовності $u_{\varepsilon_{n_1}}^*(\cdot)$ можна виділити на $[0, 2]$ підпослідовність $u_{\varepsilon_{n_2}}^*(\cdot)$, яка збігається в $L^p(0, 2)$. Нехай $u_2(\cdot)$ — її L^p -границя. Тоді існує підпослідовність $u_{\varepsilon_{n_2}}^*(t)$ (знову позначена як $u_{\varepsilon_{n_2}}^*(t)$), яка збігається поточково до $u_2(t)$ всюди на $[0, 2]$, за винятком множини A_2 міри Лебега нуль.

Очевидно, що $u_1(t) = u_2(t)$ на множині $[0, 1] \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Продовжуючи цю процедуру на $[0, k]$, $k \in \mathbb{N}$, можна побудувати підпослідовність $u_{\varepsilon_{n_k}}^*(\cdot)$ послідовності $u_{\varepsilon_{n_{k-1}}}^*(\cdot)$, яка збігається до деякої функції $u_k(\cdot) \in U_{T_k}$ в нормі $L^p(0, k)$.

З неї також можна виділити підпослідовність, позначену як $u_{\varepsilon_{n_k}}^*$, яка збігається поточково на $[0, k]$, за винятком множини $A_k \subset [0, k]$ міри нуль. Очевидно, що $u_k(t) = u_{k-1}(t)$ на множині $[0, k-1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)$.

Позначимо $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Очевидно, що множина B має міру Лебега нуль. Побудуємо функцію $u_0(t)$ так, щоб $u_0(t) = u_k(t)$ для $t \in [0, k]$. За побудовою вона має такі властивості:

- $u_0(t)$ визначена на $[0, \infty) \setminus B$, тобто майже всюди;
- $u_0(t) \in W$ для всіх $t \in [0, \infty) \setminus B$;
- $u_0(\cdot) \in U_T$ для будь-якого $T > 0$.

Отже, $u_0(t)$ є допустимим керуванням для задачі (3.1), (3.59).

За допомогою діагонального методу Кантора можна побудувати підпоследовність $u_{\varepsilon_{nn}}^*(\cdot)$ початкової послідовності $u_{\varepsilon_n}^*(\cdot)$, яка має такі властивості:

- а) $u_{\varepsilon_{nn}}^*(\cdot)$ збігається в нормі $L^p(0, T)$ для будь-якого $T > 0$ до $u_0(\cdot)$ при $n \rightarrow \infty$;
- б) $u_{\varepsilon_{nn}}^*$ збігається до $u_0(t)$ для всіх $t \in [0, \infty) \setminus B$.

Позначимо далі $u_{\varepsilon_{nn}}^*(\cdot)$ як $u_{\varepsilon_m}^*$.

Тоді $x_{\varepsilon_m}^*(t)$ є оптимальною траєкторією задачі (3.1), (3.59). Нехай $\xi_0(t)$ позначає розв'язок усередненої задачі (3.4), що відповідає керуванню $u_0(t)$.

З Лемми 3.3 випливає, що $x_{\varepsilon_m}^*(t)$ збігається рівномірно на кожному інтервалі $[0, T]$ та поточково на $[0, \infty)$ до $\xi_0(t)$ при $m \rightarrow \infty$.

Оскільки $u_{\varepsilon_m}^*(t)$ є оптимальним керуванням, а $x_{\varepsilon_m}^*(t)$ — оптимальними траєкторіями для задачі (3.1), (3.59), отримуємо

$$J_{\varepsilon_m}^* \leq J_{\varepsilon_m}^*(u^*) = J_0^* + J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*). \quad (3.66)$$

Але

$$|J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*)| \leq \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |L(t, x_{\varepsilon_m}(t), u^*(t)) - L(t, \xi^*(t), u^*(t))| dt, \quad (3.67)$$

тут $x_{\varepsilon_{nn}}(t) = x_{\varepsilon_m}(t, u^*)$. Застосовуючи Зауваження 1 до Лемми 3.3 отримуємо поточкову збіжність $x_{\varepsilon_m}(t)$ до $\xi^*(t)$ для кожного $t > 0$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Використовуючи умову лінійного росту для L , (3.62) та Умову 3.11 для підінтегрального виразу у (3.67), знаходимо інтегральну мажоранту

$$e^{-\gamma t} M (1 + |x_0| + Mt + C),$$

де C — стала, визначає обмеженість компактної множини W за Умовою 3.11.

З неперервності функції L та теореми Лебега про мажоровану збіжність, у (3.67) можливий граничний перехід. Тоді маємо

$$J_{\varepsilon_m}(u^*) \rightarrow J_0(u^*), \quad \varepsilon_m \rightarrow 0. \quad (3.68)$$

З іншого боку, так як $u_{\varepsilon_m}^*$ є допустимим керуванням для усередненої задачі, маємо

$$J_0^* \leq J_0(u_{\varepsilon_m}^*) = J_{\varepsilon_m}^* + J_0(u_{\varepsilon_m}^*) - J_{\varepsilon_m}(u_{\varepsilon_m}^*). \quad (3.69)$$

Але

$$\begin{aligned} |J_0(u_{\varepsilon_m}^*) - J_{\varepsilon_m}(u_{\varepsilon_m}^*)| &\leq |J_0(u_{\varepsilon_m}^*) - J_0(u_0)| \\ &+ |J_{\varepsilon_m}(u_{\varepsilon_m}^*) - J_{\varepsilon_m}(u_0)| + |J_{\varepsilon_m}(u_0) - J_0(u_0)|. \end{aligned}$$

Оскільки

$$|J_0(u_{\varepsilon_m}^*) - J_0(u_0)| = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |L(t, \xi_{\varepsilon_m}(t), u_{\varepsilon_m}^*(t)) - L(t, \xi_0(t), u_0(t))| dt,$$

де $\xi_{\varepsilon_m}(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\dot{\xi}_{\varepsilon_m} = X_0(\xi_{\varepsilon_m}, u_{\varepsilon_m}^*), \quad \xi_{\varepsilon_m}(0, u_{\varepsilon_m}(0)) = x_0,$$

аналогічно до (3.68), отримуємо

$$J_0(u_{\varepsilon_m}^*) \rightarrow J_0(u_0), \quad \varepsilon_m \rightarrow 0.$$

Покажемо, що

$$J_{\varepsilon_m}(u_{\varepsilon_m}^*) - J_{\varepsilon_m}(u_0) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0. \quad (3.70)$$

Дійсно,

$$|J_{\varepsilon_m}(u_{\varepsilon_m}^*) - J_{\varepsilon_m}(u_0)| \leq \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} |L(t, x_{\varepsilon_m}^*(t), u_{\varepsilon_m}^*(t)) - L(t, z_{\varepsilon_m}(t), u_0(t))| dt,$$

де z_{ε_m} — розв'язок задачі Коші (3.63) при $\varepsilon = \varepsilon_m$ та $u = u_0$.

Беручи до уваги збіжність майже всюди $u_{\varepsilon_m}^*$ до $u_0(t)$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ і повторюючи міркування, аналогічні до (3.68), отримуємо (3.70). Також очевидно, що

$$J_{\varepsilon_m}(u_0) - J_0(u_0) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0. \quad (3.71)$$

З (3.66) та (3.69) отримуємо що

$$J_{\varepsilon_m}^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0. \quad (3.72)$$

Таким чином, з будь-якої послідовності $\{J_{\varepsilon_n}^*\}$ можна виділити підпослідовність, що збігається до J_0^* . Цим доведено перше твердження теореми.

Залишається перевірити, що u_0 є оптимальним керуванням для усередненої задачі, а $\xi_0(t)$ — відповідною оптимальною траєкторією.

Аналогічно попереднім міркуванням, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо

$$J_{\varepsilon_m}^* = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, x_{\varepsilon_m}^*(t), u_{\varepsilon_m}^*(t)) dt \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t, \xi_0(t), u_0(t)) dt, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0,$$

і з (3.72) випливає, що пара $(u_0(t), \xi_0(t))$ є оптимальною, що завершує доведення пункту 3) теореми.

Для доведення пункту 2) зазначимо, що

$$|J_{\varepsilon}^* - J_{\varepsilon}(u_0)| \leq |J_{\varepsilon}^* - J_0^*| + |J_0(u_0) - J_{\varepsilon}(u_0)|.$$

Очевидно, що

$$J_0(u_0) - J_{\varepsilon}(u_0) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Разом із першим твердженням теореми це доводить твердження 2).

Якщо усереднена задача (3.1), (3.59) має єдиний розв'язок, тоді з наведеного випливає, що з будь-якої послідовності $(x_{\varepsilon_m}^*, u_{\varepsilon_m}^*)$ можна виділити збіжну підпослідовність, і всі такі підпослідовності збігаються до однієї і тієї ж границі. Це доводить останнє твердження теореми. Теорема доведена.

□

В подальшому апроксимізуємо розв'язки задачі оптимального керування (3.1) з критерієм якості вигляду

$$I_{\varepsilon}[u] = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (A(t, x(t)) + B(t, u(t))) dt \rightarrow \inf, \quad (3.73)$$

на півосі розв'язками усереднених задач керування на відрізку $[0, T]$, при $T \rightarrow \infty$.

Тут A і B задовольняють наступні умови:

Умова 3.16. Скалярні функції $A(t, x)$, $B(t, u)$ і $\frac{\partial B}{\partial u}(t, u)$ визначені при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in W$, і неперервні за сукупністю змінних, причому:

3.16.1. $A(t, x) \geq 0$ і задовольняє за $x \in \mathbb{R}^d$ умову лінійного росту зі сталою M , тобто $|A(t, x)| \leq M(1 + |x|)$, для кожного $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$;

3.16.2. $a_1|u|^2 \geq B(t, u) \geq a|u|^2$ для деяких сталих $a > 0$, $a_1 > 0$ та для кожного $t \geq 0$, $B(t, u)$ опукла за $u \in W$ та існує $a_2 > 0$ така, що

$$\left| \frac{\partial B}{\partial u}(t, u) \right| \leq a_2|u|.$$

Нехай $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ розв'язок задачі (3.1), (3.59) на півосі. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо усереднену задачу (3.4) із критерієм якості

$$I_{0T}[u] = \int_0^T e^{-\gamma t} (A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))) dt \rightarrow \inf, \quad (3.74)$$

на відрізку $[0, T]$. Тоді з Теорема 3.1 випливає, що дана задача має розв'язок (ξ_T^*, u_T^*) на $[0, T]$.

Для задачі (3.4) визначимо допустиме керування на $[0, \infty)$, наступним чином

$$\bar{u}_{T, \infty}(t) = \begin{cases} u_T^*(t), & t \in [0, T] \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

а через $\xi_{T, \infty}$ позначимо відповідну даному керуванню допустиму траєкторію. Позначимо $I_\varepsilon^* = \inf_u I_\varepsilon[u]$, $I_{0T}^* = \inf_u I_{0T}[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керувань.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються Умови 3.11–3.14 та 3.16. Тоді*

1)

$$|I_\varepsilon^* - I_{0T}^*| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty;$$

2) існують послідовності $T_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, такі що для будь-якого $t > 0$ виконується

$$|x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi_{T_n, \infty}(t)| \rightarrow 0, \quad T_n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0; \quad (3.75)$$

Якщо при цьому усереднена задача (3.4), (3.74) має єдиний розв'язок, то збіжність у (3.75) має місце при всіх $T \rightarrow \infty$ та $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Покажемо, що $\forall \eta > 0$ існують T_0 та $\varepsilon_0 > 0$, такі що $\forall T > T_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$|I_{0T}^* - I_\varepsilon^*| < \eta.$$

Дійсно, маємо $|I_{0T}^* - I_\varepsilon^*| \leq |I_{0T}^* - I_0^*| + |I_0^* - I_\varepsilon^*|$.

Перший доданок не залежить від ε та прямує до 0 при $T \rightarrow \infty$ за Теоремою 2.6. Збіжність другого доданка до нуля, при $\varepsilon \rightarrow 0$ випливає з пункту 1) Теорема 3.3.

2) Доведення даного пункту випливає з наступної нерівності

$$|x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi_{T_n, \infty}(t)| \leq |x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi^*(t)| + |\xi^*(t) - \xi_{T_n, \infty}(t)|.$$

Збіжність першого доданку до нуля при $\varepsilon_n \rightarrow 0$, для кожного фіксованого $t > 0$ випливає з Теорема 3.3. Збіжність $|\xi^*(t) - \xi_{T_n, \infty}(t)| \rightarrow 0$ при $T_n \rightarrow \infty$, випливає з пункту (iv) Теорема 2.6. \square

3.2.2 Лінійний випадок

Розглянемо лінійну за керуванням задачу оптимального керування (3.28) на півосі з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^\infty [e^{-\gamma t} A(t, x(t)) + B(t, u(t))] dt \rightarrow \inf, \quad (3.76)$$

тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\gamma > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $W \subset \mathbb{R}^m$.

Для даної задачі також застосовано метод усереднення, аналогічно до нелінійного випадку. Позначимо

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds.$$

Нехай існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ границя, для кожного $t \geq 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left[f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(\tau, x)\right) - f_0(x) \right] d\tau = 0. \quad (3.77)$$

Тоді задачі оптимального керування (3.28), (3.76) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами на півосі ставиться у відповідність більш проста усереднена задача керування (3.31) з критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^\infty [e^{-\gamma t} A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))] dt \rightarrow \inf. \quad (3.78)$$

Для задачі (3.28), (3.76) та її усередненої задачі (3.31), (3.78) вважатимемо виконаними такі умови.

Умова 3.17. Допустимими керуваннями будемо вважати m -вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L^2(0, \infty)$, що приймають значення у замкнутій, опуклій множині $W \subset \mathbb{R}^m$, вважаємо також, що $0 \in W$.

Умова 3.18. Функція $f(t, x, y)$ визначена й неперервна за сукупністю змінних в області $Q_3 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n\}$, а $n \times m$ -вимірна матриця $f_1(x)$ визначена для $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані умови:

- 1) $f(t, x, y)$ і $f_1(x)$ обмежені в областях визначення сталою $M > 0$;
- 2) $f(t, x, y)$ і $f_1(x)$ задовольняють в областях визначення умову Ліпшиця за змінною x зі сталою Ліпшиця $\lambda > 0$.

Умова 3.19. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена й неперервна в області $Q_4 = \{t \geq 0, s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ та задовольняє умови лінійного росту та Ліпшиця відносно x , тобто існує L_φ така, що

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x_1)| \leq L_\varphi |x - x_1|,$$

$$|\varphi(t, s, x)| \leq L_\varphi (1 + |x|).$$

Умова 3.20. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя (3.77).

Зазначимо, що в силу Умов 3.18, 3.19 і Теорема 2.1 впливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (3.28) існує та єдиний на $[0, \infty)$ та є абсолютно неперервною функцією.

При цьому для розв'язку задачі (3.28), аналогічно до нелінійного випадку, маємо оцінку для кожного $t > 0$

$$|x(t)| \leq |x_0| + Mt + Mt^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2[0, \infty)}.$$

Тому для критерію якості (3.76), врахувавши (3.78) та Умову 3.16.2 маємо

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon[u]| &\leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} M(1 + |x(t)|) dt + \int_0^\infty B(t, u(t)) dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} M(1 + |x_0| + Mt + Mt^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2}) dt + a_1 \|u\|_{L_2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Таким чином, критерій якості (3.76) має сенс для всіх допустимих керувань.

З Умови 3.16 випливає, що аналогічні висновки справедливі і для усереднених задач.

Для задач (3.28), (3.31) можна довести теорему про збіжність розв'язків точної системи (3.28) до відповідних розв'язків усередненої системи (3.31) на півосі, аналогічну до Теорема 3.2.

Наступна теорема описує зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями і критеріями якості точної (3.28), (3.76) та усередненої задачі (3.29), (3.78).

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_u J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_u J_0[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керуваннях. Має місце наступна теорема.

Теорема 3.5. *Нехай виконано Умови 3.16, 3.18–3.20. Тоді задачі (3.28), (3.76) та (3.31), (3.78) мають відповідно розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ і $(\xi^*(t), u^*(t))$. При цьому справедливі такі варіаційні співвідношення:*

$$1) J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

2) для кожного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ маємо

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta;$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ така, що

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow \xi^*(t), \tag{3.79}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$ для довільного $T > 0$, а

$$u_{\varepsilon_n}^* \rightharpoonup u^*, \tag{3.80}$$

слабко в $L^2(0, \infty)$.

Якщо при цьому усереднена задача (3.28), (3.76) має єдиний розв'язок, то збіжності (3.79) і (3.80) мають місце при всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Доведення даної теореми проводиться цілком аналогічно до доведення Теорема 2.3 [32], тому ми його опускаємо. □

Надалі розв'язки вихідної задачі (3.28), (3.76) на півосі розв'язками усереднених задач керування на відрізку $[0, T]$, при $T \rightarrow \infty$.

Аналогічно до нелінійного випадку, нехай $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ розв'язок задачі (3.28), (3.76) на півосі. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо задачу (3.31) з критерієм якості

$$I_{0T}[u] = \int_0^T (e^{-\gamma t} A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))) dt \rightarrow \inf, \quad (3.81)$$

на відрізку $[0, T]$. Тоді з Теорема 3.2 випливає, що дана задача має розв'язок (ξ_T^*, u_T^*) на $[0, T]$.

Для задачі (3.31) визначимо допустиме керування на $[0, \infty)$, наступним чином

$$\bar{u}_{T,\infty}(t) = \begin{cases} u_T^*(t), & t \in [0, T] \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

через $\xi_{T,\infty}$ позначимо допустиму траєкторію. Нехай $I_\varepsilon^* = \inf_u I_\varepsilon[u]$, $I_{0T}^* = \inf_u I_{0T}[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керувань.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються Умови 3.16, 3.18–3.20. Тоді*

1)

$$|I_\varepsilon^* - I_{0T}^*| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty;$$

2) існують послідовності $T_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, такі що для будь-якого $t > 0$ виконується

$$|x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi_{T_n,\infty}(t)| \rightarrow 0, \quad T_n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0; \quad (3.82)$$

3)

$$u_{\varepsilon_n}^* - \bar{u}_{T_n,\infty} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad T_n \rightarrow \infty, \quad (3.83)$$

слабко в $L^p(0, \infty)$.

Якщо при цьому усереднена задача (3.31), (3.81) має єдиний розв'язок, то збіжності у (3.82), (3.83) мають місце при всіх $T \rightarrow \infty$.

Доведення. Доведення перших двох тверджень аналогічне до доведення тверджень 1), 2) із Теорема 3.4.

Доведемо твердження 3), а саме покажемо, що для кожного $\eta > 0$, існують такі $\varepsilon_0 > 0$ та T_0 , що для кожного $\varepsilon_n < \varepsilon_0$, $T_n > T_0$ виконується нерівність

$$\left| \int_0^{\infty} u_{\varepsilon_n}^* \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} \bar{u}_{T_n, \infty} \varphi(t) dt \right| < \eta,$$

для довільної $\varphi \in L^2(0, \infty)$.

Нехай u^* — оптимальне керування усередненої задачі на півосі. Маємо

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\infty} u_{\varepsilon_n}^* \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} \bar{u}_{T_n, \infty} \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^{\infty} u_{\varepsilon_n}^* \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} u^* \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} u^* \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} \bar{u}_{T_n, \infty} \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^{\infty} (u_{\varepsilon_n}^* - u^*) \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} (u^* - \bar{u}_{T_n, \infty}) \varphi(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Слабка збіжність першого доданку до 0 при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ випливає з Теорема 3.5. Слабка збіжність другого доданку до 0 з останньої нерівності випливає з Теорема 2.6 при $T_n \rightarrow \infty$. При цьому зазначимо, що даний доданок не залежить від ε_n . □

3.3 Висновки до Розділу 3

У розділі досліджено застосування методу усереднення до задач оптимального керування для інтегро-диференціальних систем типу Вольтерри на скінченному та нескінченному інтервалах. Отримано такі результати:

- доведено леми про збіжність розв'язків задачі Коші для вихідної системи до відповідних розв'язків усередненої системи у нелінійному та лінійному за керуванням випадках;
- досліджено збіжність оптимальних траєкторій та керувань вихідної задачі до відповідних розв'язків усередненої задачі, причому ця збіжність є рівномірною щодо множини допустимих керувань;
- встановлено зв'язок між задачею на півосі та відповідною усередненою задачею на скінченному інтервалі.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [41, 44, 47, 82, 96, 97].

Висновки

У дисертаційній роботі проведено дослідження задач оптимального керування інтегро-диференціальними системами, зокрема системами типу Вольтерри, на скінченних та нескінченних інтервалах.

Отримано наступні основні результати:

- для таких систем одержано достатні умови існування оптимальних керувань у термінах правих частин рівнянь та функцію критерію якості на скінченному інтервалі;
- доведено існування розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь за умов, аналогічних теоремі Каратеодорі;
- встановлено достатні умови існування оптимальних керувань для систем інтегро-диференціальних рівнянь на півосі;
- обґрунтовано зв'язок між досліджуваними задачами керування на скінченному та нескінченному інтервалах, включаючи слабку збіжність оптимальних керувань на скінченному інтервалі до відповідних керувань на нескінченному і точкову збіжність оптимальних траєкторій;
- доведено збіжність розв'язків задачі Коші для вихідної та усередненої систем у нелінійному та лінійному за керуванням випадках;
- обґрунтовано застосування методу усереднення для нелінійної задачі оптимального керування системою інтегро-диференціальних рівнянь зі швидкоосцилюючими параметрами на скінченному інтервалі та півосі; доведено, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним для точної;
- досліджено зв'язок між точною задачею оптимального керування на півосі та відповідною усередненою задачею на скінченному інтервалі.

Список використаних джерел

1. Ahmed H. M. On some fractional stochastic integrodifferential equations in Hilbert space. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2009. Art. ID 568078. DOI: 10.1155/2009/568078
2. Ahmed H. M. Sobolev-Type Fractional Stochastic Integrodifferential Equations with Nonlocal Conditions in Hilbert Space. *Journal of Theoretical Probability*. 2017. Vol. 30, No. 3. P. 771–783. DOI: 10.1007/s10959-016-0665-9
3. Alownel A., Al-Khaled K., Al-Towiq M. Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications. *International Journal of Computer Mathematics*. 2010. Vol. 87, No. 7. P. 1538–1554. DOI: 10.1080/00207160802385818
4. Al-Omari J. F. M., Gourley S. A. A nonlocal reaction-diffusion model for a single species with stage structure and distributed maturation delay. *European Journal of Applied Mathematics*. 2005. Vol. 16, No. 1. P. 37–51. DOI: 10.1017/S0956792504005716
5. Ali N., Jung I. H., Zaman G. Stability analysis of delay integro-differential equations of HIV-1 infection model. *Georgian Mathematical Journal*. 2020. Vol. 27, No. 3. P. 331–340. DOI: 10.1515/gmj-2018-0011
6. Anikushyn A. V., Hranishak Kh. M., Lyashko V. S., Samosonok O. S. Optimal Control of Hyperbolic Integro-Differential Systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2025. Vol. 61, No. 1. P. 66–76. DOI: 10.1007/s10559-025-00744-4
7. Bainov D. D., Simeonov P. S. *Integral Inequalities and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. 264 p. DOI: 10.1007/978-94-015-8034-2

8. Belbas S. A. An approximation scheme for optimal control of Volterra integral equations. arXiv preprint arXiv:math/0611485. 2006. arXiv:math/0611485
9. Belbas S. A. A new method for optimal control of Volterra integral equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2007. Vol. 331, No. 1. P. 589–606. DOI: 110.1016/j.amc.2006.12.077
10. Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957. 342 p.
11. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
12. Bliss G. A. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago: University of Chicago Press, 1946. 296 p.
13. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*. New York: Gordon and Breach, 1961. 537 p.
14. Boichuk O. A., Holovats'ka I. A. Boundary-Value Problems for Systems of Integrodifferential Equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 203, No. 3. P. 306–321. DOI: 10.1007/s10958-014-2135-1
15. Camacho C., Desbordes R., La Torre D. A time-space integro-differential economic model of epidemic control. *Economic Theory*. 2024. Vol. 77. P. 307–348. DOI: 10.1007/s00199-023-01506-z
16. Carathéodory C. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. San Francisco: Holden-Day, 1967. 398 p.
17. Dieye M., Ezzinbi K., Diop M. Controllability for some integrodifferential equations driven by vector measures. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2017. Vol. 40, No. 5. P. 1629–1644. DOI: 10.1002/mma.4125

18. Diop A., Ezzinbi K. Existence and controllability results for integrodifferential equations with state-dependent delay and random effects. *Filomat*. 2022. Vol. 36, No. 4. P. 1363–1379. DOI: 10.2298/FIL2204363D
19. Donchev T. Functional differential inclusions involving dissipative and compact multifunctions. *Glasnik Matematički*. 1998. Vol. 33, No. 1. P. 51–60.
20. Donchev T., Grammel G. Averaging of functional differential inclusions in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005. Vol. 311, No. 2. P. 402–416. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.02.050
21. Donchev T., Slavov I. Averaging method for one-sided Lipschitz differential inclusions with generalized solutions. *SIAM J. Control and Optimization*. 1999. Vol. 37, No. 5. P. 1600–1613.
22. Dzhumabaev D. S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015. Vol. 294. P. 342–357. DOI: 10.1016/j.cam.2015.08.023
23. Fleming W. H., Soner H. M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. 2nd ed. New York: Springer, 2006. 428 p. DOI: 10.1007/0-387-31071-1
24. Hamarashid H. A., Hama M. F., Sabir P. O., El-Deeb S. M., Catas A. Solutions of nonlinear integro-differential equations of fractional order defined using fractional boundary conditions. *Journal of Inequalities and Applications*. 2024. Vol. 2024. Art. 153. DOI: 10.1186/s13660-024-03235-w
25. Hamoud A. A., Ghadle K. P. Modified Laplace Adomian decomposition method for nonlinear Volterra–Fredholm integrodifferential equations. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2017. Vol. 3, No. 4. P. 266–273.
26. Hamoud A. A., Ghadle K. P. Numerical methods for Volterra–Fredholm integro-differential equations: analysis and comparison. *SN Applied Sciences*. 2020. Vol. 2. Art. 2034.

27. Helmes K., Stockbridge R. H. Determining the Optimal Control of Singular Stochastic Processes using Linear Programming. *The Annals of Applied Probability*. 2006. Vol. 16, No. 1. P. 85–112.
28. Hoppensteadt F. C., Schiaffino A. Stable oscillations of weakly nonlinear Volterra integro-differential equations. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1984. Vol. 353. P. 1–13. DOI: 10.1515/crll.1984.353.1
29. Ikhlef N., Rezoug N., Salim A., Benchohra M., Litimein S. Asymptotically Almost Automorphic Mild Solutions for Semilinear Integro-differential Evolution Equations. *Journal of Mathematical Extension*. 2023. Vol. 17, No. 10. P. 1–30. DOI: 10.30495/JME.2023.2823
30. Janiak T., Luczak-Kumorek E. The theorem of middling for functional-differential equations of neutral type. *Discussiones Mathematicae*. 1991. Vol. 11. P. 63–73.
31. Kean J. M., Barlow N. D. A spatial model for the successful biological control of *Sitona discoideus* by *Microctonus aethiopoides*. *Journal of Applied Ecology*. 2001. Vol. 38, No. 1. P. 162–169. DOI: 10.1046/j.1365-2664.2001.00579.x
32. Kichmarenko O. D. Application of the Method of Averaging to the Problems of Optimal Control for Ordinary Differential Equations on the Semiaxis. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 70, No. 5. P. 738–752.
33. Kichmarenko O., Stanzhytskyi O. Optimal control problems for some classes of functional-differential equations on the semi-axis. *Miskolc Mathematical Notes*. 2019. Vol. 20, No. 2. P. 1021–1037. DOI: 10.18514/MMN.2019.2739
34. Kichmarenko O., Stanzhytskyi O. M. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2018. Vol. 18, No. 2. P. 196–211.
35. Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V. The averaging of fuzzy integro-differential equations on a finite interval. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*. 2014. Vol. 6. P. 47–59. DOI: 10.5373/jaram.1873.110513

36. Koval'chuk T. V., Mohyl'ova V. V., Shovkoplyas T. V. Averaging method in problems of optimal control over impulsive systems. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, No. 2. P. 314–327. DOI: 10.1007/s10958-020-04804-2
37. Koval'chuk T. V., Mogylova V. V., Stanzhytskyi O. M., Shovkoplyas T. V. Application of the averaging method to the problems of optimal control of the impulse systems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2020. Vol. 12, No. 2. P. 504–521. DOI: 10.15330/cmp.12.2.504-521
38. Kravets V. I., Kovalchuk T. V., Mohylova V. V., Stanzhytskyi O. M. Application of the Method of Averaging to the Problems of Optimal Control Over Functional-Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 70, No. 2. P. 232–242. DOI: 10.1007/s11253-018-1497-9
39. Krylov N. M., Bogoliubov N. N. *Introduction to Non-Linear Mechanics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1947. 106 p.
40. Kythe P. K., Puri P. *Computational Methods for Linear Integral Equations*. Boston: Birkhäuser, 2002. 508 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0101-4
41. Lakhva R., Uteshova R., Stanzhytskyi O., Mogylova V. The averaging method in optimal control problems for integro-differential equations. *Open Mathematics*. 2024. DOI: 10.1515/math-2025-0167
42. Lakhva R., Khaletska Z., Mogylova V. The optimal control problem for systems of integro-differential equations with finite and infinite horizon. *Georgian Mathematical Journal*. 2024. DOI: 10.1515/gmj-2024-2065
43. Lakhva R., Mogylova V., Koval'chuk T. The optimal control of a system of integro-differential equations on infinite horizon. In: *International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023*. Tbilisi, Georgia, 2023. P. 172–177.
44. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. Averaging in an Optimal Control Problem for a Nonlinear-in-Control Integro-Differential System on the Infinite Interval.

In: International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2025. Tbilisi, Georgia, 2025. P. 103–108.

45. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. The averaging method for optimal control problems of systems of integro-differential equations. In: International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024. Tbilisi, Georgia, 2024. P. 167–174.
46. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. The optimal control problem for systems of integro-differential equations with finite and infinite horizon. In: XIII International Scientific and Practical Conference “Mathematics. Information Technologies. Education”. Lutsk–Svityaz, Ukraine, 2024. P. 24–25.
47. Lakhva R., Mogylova V., Perestyuk Y. The averaging method in optimal control problems, linear with respect to the control, for a system of integro-differential equations. In: XIV International Scientific and Practical Conference “Mathematics. Information Technologies. Education”. Lutsk–Svityaz, Ukraine, 2025. P. 19–22.
48. Lakhva R., Perestyuk Y. Existence of Optimal Control for a System of Integro-Differential Equations // Ukraine Mathematics Conference At the of the Year 2025, Kyiv, Ukraine, December 18 – 19, 2025. C. 109
49. Lakrib M. The method of averaging and functional-differential equations with delay. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2001. Vol. 26, No. 8. P. 497–511.
50. Lakrib M. Time averaging for functional-differential equations. Journal of Applied Mathematics. 2003. Vol. 2003, No. 1. P. 1–16.
51. Lakshmikantham V., Rao M. R. M. Theory of Integro-Differential Equations. London: CRC Press, 1995. 384 p.
52. Lee E. B., Markus L. Foundations of Optimal Control Theory. New York: John Wiley & Sons, 1967. 576 p.

53. Leszczyński M., Ledzewicz U., Schättler H. Optimal control for a mathematical model for chemotherapy with pharmacometrics. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2020. Vol. 15. Art. 24. DOI: 10.1051/mmnp/2020008
54. Lions J.-L. *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*. Beijing: Science Press, 1981. 542 p.
55. Mitropolsky Yu. A., Khoma G. P. *Mathematical Justification of Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
56. Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M. On the question of asymptotic expansions in nonlinear mechanics. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1979. Vol. 31, No. 1. P. 31–40.
57. Mogylova V., Lakhva R., Kravets V. Optimal control problem for systems of integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. Vol. 282, No. 6. P. 983–1007. DOI: 10.1007/s10958-024-07229-3
58. Nosenko T. V., Stanzhytskyi O. M. Averaging method in some problems of optimal control. *Nonlinear Oscillations*. 2008. Vol. 11, No. 4. P. 539–547. DOI: 10.1007/s11072-009-0049-5
59. Panda A., Mohapatra J., Amirali I., Durmaz M. E., Amiraliyev G. M. A numerical technique for solving nonlinear singularly perturbed Fredholm integro-differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2024. Vol. 220. P. 276–292. DOI: 10.1016/j.matcom.2024.02.011
60. Pankov A. *G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 249 p.
61. Petryshyn R. I., Danyliuk I. M. Error estimates for the averaging method in multifrequency systems with constant delay. *Nonlinear Oscillations*. 2006. Vol. 9, No. 2. P. 233–243. [in Ukrainian]

62. Petryshyn R. I., Dudnytskyi P. M. Justification of the averaging method for multifrequency systems with impulse action. *Nonlinear Oscillations*. 2005. Vol. 8, No. 1. P. 61–79. [in Ukrainian]
63. Petryshyn R. I., Danyliuk I. M. Error estimate of the averaging method on the semi-axis for the initial value problem of a multifrequency oscillatory system of higher approximation with delay. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Mathematics*. 2008. Vol. 421. P. 30–36. [in Ukrainian]
64. Petryshyn R. I., Soproniuk T. M. Averaging of initial and boundary-value problems for a class of oscillatory impulse systems. *Nonlinear Oscillations*. 2006. Vol. 9, No. 1. P. 68–84. [in Ukrainian]
65. Plotnikov V. A. Averaging of differential inclusions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1979. Vol. 31, No. 5. P. 454–457.
66. Plotnikov V. A., Ivanov R. P., Kitanov N. M. Method of averaging for impulsive differential inclusions. *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*. 1998. Vol. 12. P. 43–55.
67. Plotnikov A. V., Komleva T. A. Full averaging of control fuzzy integrodifferential inclusions with terminal criterion of quality. *International Journal of Control Science and Engineering*. 2013. Vol. 3, No. 2. P. 68–72.
68. Plotnikov A. V., Komleva T. A. Averaging of the fuzzy differential equations. *Journal of Uncertain Systems*. 2012. Vol. 6. P. 30–37.
69. Plotnikov V. A., Plotnikova L. I. Averaging of differential inclusions with multi-valued impulses. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 47, No. 11. P. 1747–1754.
70. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Interscience, 1962. 360 p.

71. Pouchol C., Clairambault J., Lorz A., Trélat E. Asymptotic analysis and optimal control of an integro-differential system modelling healthy and cancer cells exposed to chemotherapy. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 2018. Vol. 116. P. 268–308. DOI: 10.1016/j.matpur.2017.10.007
72. Sabermahani S., Ordokhani Y., Rabiei L., Razzaghi M. Solution of optimal control problems governed by Volterra integral and fractional integro-differential equations. *Journal of Vibration and Control*. 2023. Vol. 29, No. 16. P. 3796–3808. DOI: 10.1177/10775463221105923
73. Samoilenko A. M., Boichuk O. A., Krivosheya S. A. Boundary value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1996. Vol. 48, No. 11. P. 1785–1789.
74. Samoilenko A. M., Stanzhitskii A. N. On the averaging of differential equations on an infinite interval. *Differential Equations*. 2006. Vol. 42, No. 4. P. 505–511. DOI: 10.1134/S0012266106040070
75. Samoilenko A. M., Stanzhytskyi A. N., Mahmudov N. I. The averaging method and two-sided bounded solutions of stochastic Itô systems. *Differential Equations*. 2007. Vol. 43, No. 1. P. 56–68.
76. Sansone G. *Equazioni differenziali non lineari*. Bologna: Nicola Zanichelli, 1948. 346 p.
77. Schäfer M., Götz T., Niedzielewski K., Krüger T. An integro-differential model for the spread of diseases. In: *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2021*. Cham: Springer, 2022. P. 241–247. DOI: 10.48550/arXiv.2307.10087
78. Skorokhod A. V. *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1989. 339 p.
79. Skrypnik I. V. *Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994. 372 p.

80. Stanzhitskii A. N., Dobrodzii T. V. Study of optimal control problems on the half-line by the averaging method. *Differential Equations*. 2011. Vol. 47, No. 2. P. 264–277. DOI: 10.1134/S0012266111020121
81. Stanzhytskyi O. M., Karakenova S. G., Uteshova R. E. Averaging method and boundary value problems for systems of Fredholm integro-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2021. Vol. 21, No. 1. P. 100–113.
82. Stanzhytskyi O., Lakhva R., Mogylova V. The averaging method for optimal control problems of integro-differential systems on the half-axis. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2026. Vol. 97. P. 169-182
83. Stanzhitskii A., Mynbayeva S., Marchuk N. Averaging in Boundary-Value Problems for Systems of Differential and Integrodifferential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2020. Vol. 72, No. 3. P. 325–349. DOI: 10.1007/s11253-020-01781-2
84. Stanzhytskyi O. M., Samoilenko O. O. Coefficient Conditions for the Existence of Optimal Control for Systems of Differential Equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 197, No. 1. P. 129–137. DOI: 10.1007/s10958-014-1709-2
85. Stanzhytskyi O. M., Samoilenko E. A., Mogilova V. V. On the Existence of an Optimal Feedback Control for Stochastic Systems. *Differential Equations*. 2013. Vol. 49, No. 11. P. 1456–1464. DOI: 10.1134/S0012266113110128
86. Thieme H. R. A model for the spatial spread of an epidemic. *Journal of Mathematical Biology*. 1977. Vol. 4, No. 4. P. 337–351 DOI: 10.1007/BF00275082
87. Tonelli L. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Bologna: Nicola Zanichelli, 1921.
88. Tsarkov Y. F. *Random Perturbations of Functional Differential Equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. 392 p.
89. Vityuk A. N. On the R-solution generated by a differential inclusion of hyperbolic type. *Differential Equations*. 1994. Vol. 30, No. 10. P. 1581–1588.

90. Vityuk A. N. On solutions of hyperbolic differential inclusions with nonconvex right-hand side. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 47, No. 4. P. 636–640.
91. Yosida K. *Functional Analysis*. 6th ed. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 501 p.
92. Добродзій Т. В. Метод усереднення в задачах керування періодичними системами // *Нелінійні коливання*. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 150–172.
93. Добродзій Т. В. Метод усереднення в задачах оптимального керування періодичними системами, що лінійні за керуванням // *Науковий вісник Чернівецького університету. Математика*. – 2010. – Вип. 501. – С. 20–23.
94. Лахва Р. Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь на півосі. *Буковинський математичний журнал*. 2023. Т. 11, № 2. С. 141–152. DOI: 10.31861/bmj2023.02.14
95. Лахва Р., Халецька З. Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь. *Математика та інформаційні технології: матеріали міжнар. наук. конф. (Чернівці, 28–30 вересня 2023 р.)*. Чернівці, 2023. С. 237–238.
96. Лахва Р., Могильова В. Застосування методу усереднення до інтегро-диференціальної задачі оптимального керування. *V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана: матеріали конф. (Чернівці, 23–27 вересня 2024 р.)*. Чернівці, 2024. С. 57–59.
97. Лахва Р., Могильова В. Метод усереднення для інтегро-диференціальних задач оптимального керування на півосі. *V Міжнародна конференція, присвячена 75-ій річниці від дня народження Володимира Маслюченка: матеріали конф. (Чернівці, 25–27 вересня 2025 р.)*. Чернівці, 2025. С. 56–59.
98. Могильова В., Лахва Р., Кравець В. Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2023. Т. 26, № 3. С. 386–407. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1437

Додаток

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Могильова В., Лахва Р., Кравець В. Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2023 Випуск 26 (3), С. 386–407. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1437 Переклад англійською: Mogylova, V., Lakhva R., Kravets V. Optimal Control Problem for Systems of Integro-differential Equations. *Journal of Mathematical Sciences* (2024). DOI: 10.1007/s10958-024-07229-3 (**Scopus, Q3**).
2. Лахва Р., Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь на півосі. *Буковинський математичний журнал*. 2023. Т.11, №2. С. 141-152. DOI: 10.31861/bmj2023.02.14 (**Фахове видання, категорія Б**).
3. Lakhva R., Khaletska Z., Mogylova V. The optimal control problem for systems of integro-differential equations with finite and infinite horizon. *Georgian Mathematical Journal*. 2024. Vol. 32 (3). P. 465–476. DOI: 10.1515/gmj-2024-2065 (**Scopus, Q2**).
4. Lakhva R., Uteshova R., Stanzhytskyi O., Mogylova V. Averaging method in optimal control problems for integro-differential equations. *Open Mathematics*. 2025. Vol. 23(1). 20250167. DOI: 10.1515/math-2025-0167? (**Scopus, Q2**).

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Лахва Р., Халецька З., Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Міжнародна наукова конференція «Математика

та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 28–30 вересня 2023. С. 237–238.

2. Lakhva R., Mogylova V., Koval'chuk T. The optimal control of a system of integro-differential equations on infinite horizon // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023. Tbilisi, Georgia. December 9–11, 2023. P. 172–177.
3. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. The averaging method for optimal control problems of systems of integro-differential equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024. Tbilisi, Georgia. December 21–23, 2024. P. 167–174.
4. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. The optimal control problem for systems of integro-differential equations with finite and infinite horizon //XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 31 травня – 2 червня, 2024 С. 24–25.
5. Лахва Р., Могильова В. Застосування методу усереднення до інтегро-диференціальної задачі оптимального керування // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 23 – 27 вересня, 2024. С. 57–59.
6. Lakhva R., Mogylova V., Perestyuk Y. The averaging method in optimal control problems, linear with respect to the control, for a system of integro-differential equations //XIV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 13 червня – 15 червня, 2025 С. 19–22.
7. Лахва Р., Могильова В. Метод усереднення для інтегро-диференціальних задач оптимального керування на півосі // V Міжнародна конференція, присвячена 75-ій річниці від дня народження Володимира Маслюченка. Чернівці, Україна. 25 – 27 вересня, 2025. С. 56–59.
8. Lakhva R., Mogylova V., Kravets V. Averaging in an Optimal Control Problem

for a Nonlinear-in-Control Integro-Differential System on the Infinite Interval // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2025. Tbilisi, Georgia. December 6–8, 2025. P. 103-108.

9. Lakhva R., Perestyuk Y. Existence of Optimal Control for a System of Integro-Differential Equations // Ukraine Mathematics Conference At the of the Year 2025, Kyiv, Ukraine, December 18 – 19, 2025. С. 109.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023, Чернівці, Україна.
2. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023, December 9–11, 2023, Tbilisi, Georgia.
3. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 31 травня – 2 червня 2024, Луцьк – Світязь, Україна.
4. V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана, 23 – 27 вересня, 2024, Чернівці, Україна.
5. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024, December 21–23, 2024, Tbilisi, Georgia.
6. XIV Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 13–15 червня 2025, Луцьк – Світязь, Україна.
7. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю з дня народження Володимира Маслюченка, 25–27 вересня 2025, Чернівці, Україна.
8. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2025, December 6–8, 2025, Tbilisi, Georgia.

9. Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2025, December 18 – 19, 2025, Kyiv, Ukraine.