

## ЩОДО РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМАЦІЙ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА УМОВ ДОВАНТАЖЕНЬ І РОЗВАНТАЖЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ХЕВІСАЙДА

*Розглянуто задачу розрахунку деформацій нестационарної повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов довантажень і розвантажень. Програма навантаження реалізується у вигляді чергування елементарних довантажень і розвантажень за варіювання величини навантаження і тривалості її дії, що задаються за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Для опису процесу деформування використовуємо нелінійну модель повзучості з незалежною в часі нелінійністю типу моделі Работнова. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова.*

*У роботі розв'язано й експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій нестационарної повзучості для полівінілхлоридного пластику за умов багаторазового довантаження.*

**Ключові слова:** нестационарна повзучість, нелінійна в'язкопружність, функція Хевісайда, ядро спадковості.

### Вступ

Довговічність, надійність і працездатність відповідальних елементів конструкцій сучасної техніки суттєво залежить від ефективності обраних моделей деформування та методів визначення деформівних властивостей конструкційних матеріалів на стадії їхнього проектування. Особливо актуальним є це завдання для в'язкопружних конструкційних матеріалів, деформування яких залежить як від часу, так і від історії навантаження. Встановлено, що в більшості практичних випадків у процесі експлуатації в'язкопружні матеріали у відповідальних елементах багатьох сучасних конструкцій деформуються і руйнуються в нелінійній області у разі нестационарних режимів навантаження, що вимагає врахування спадкових ефектів. Актуальними лишаються питання вибору й обґрунтування структури нелінійної моделі, вибору структури ядра спадковості та практичної реалізації методики визначення параметрів ядра, а також питання їхньої експериментальної апробації. Фактично нерозв'язаними залишаються задачі розрахунку деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного навантаження.

### 1. Постановка задачі

Визначальне рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності з незалежною від часу нелінійністю задається співвідношенням (Golub, Pavlyuk, & Fernati, 2017)

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де  $\varepsilon(t)$  – повна деформація, що містить пружну компоненту  $\varepsilon^e$  і компоненту повзучості  $\varepsilon^c$  в моменти часу  $t$  і  $\tau$ ;  $\varphi_0(\cdot)$  – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально;  $\lambda$  – реологічний параметр ( $\lambda > 0$ );  $K(t-\tau)$  – ядро повзучості.

Нелінійність процесу повзучості, задана рівнянням (1), визначається видом функції  $\varphi_0(\cdot)$ , яку в роботі задано для всього діапазону зміни деформацій за допомогою згладжувальних кубічних сплайнів виду,

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де  $a_{0,j}; a_{1,j}; a_{2,j}; a_{3,j}$  – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядро спадковості  $K(t-\tau)$  задається дробово-експоненційною функцією так, що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (3)$$

де  $\alpha, \beta$  – параметри ядер, що підлягають визначенню з експерименту ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ ).

Використовуючи процедуру обернення функцій, визначальне рівняння (1) записуємо так:

$$\varepsilon(t) = \psi_0 \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (4)$$

де  $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$  – обернення функції  $\varphi_0(\cdot)$ , що задається співвідношенням

$$\psi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3; \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де  $b_{0,j}; b_{1,j}; b_{2,j}; b_{3,j}$  – коефіцієнти сплайну, які апроксимують обернену функцію  $\varphi_0^{-1}(\cdot)$ .

Довільний закон зміни напружень  $\sigma_\tau$  в момент навантаження  $\tau$  задаємо у вигляді суми множин різних значень сталих напружень  $\sigma_k$

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k, \quad (6)$$

де  $h(\cdot)$  – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови  $t = \tau$ ;  $t$  – момент спостереження ( $t \geq \tau$ ).

У роботі в межах рівняння (4) розв'язано задачу розрахунку деформацій нестационарної повзучості для полівінілхлоридного пластику за умов багаторазового довантаження і розвантаження. Результати розрахунків зіставляємо з експериментальними даними, запозиченими із (Самарин, & Сорокин, 1970, с. 333–336).

Задача містить експериментальне обґрунтування гіпотези існування єдиної ізохронної діаграми, визначення параметрів входять у визначальне рівняння й експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку деформацій стаціонарної та циклічної повзучості.

## 2. Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовано за умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Існування єдиної ізохронної діаграми обґрунтовується експериментально. Єдина ізохронна діаграма деформування відображає подібність ізохронних діаграм повзучості  $\varphi_t(\varepsilon)$  і діаграми миттєвого деформування  $\varphi_0(\varepsilon)$ . Подібність діаграм  $\varphi_t(\varepsilon)$  і  $\varphi_0(\varepsilon)$  встановлено у площині "ф-ε" для кожного із фіксованих рівнів деформацій  $\varepsilon_i$  в інтервалі  $i = \overline{1, q}$  по параметру  $t_j$  в інтервалі  $j = \overline{1, \ell}$ . У цьому випадку умову подібності  $j$ -ої ізохронної діаграми повзучості  $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$  і діаграми миттєвого деформування  $\varphi_0(\varepsilon_i, 0)$  записуємо у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i, 0) = (1 + G(t_j)) \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (7)$$

де  $(1 + G(t_j))$  – функція подібності, що визначається для кожної  $j$ -ї ізохронної діаграми повзучості; функції  $\varphi_0(\cdot)$  і  $\varphi_t(\cdot)$  задають величини напруження  $\sigma_i$  по діаграмі миттєвого деформування й ізохронних діаграмах повзучості відповідно для кожного з моментів часу  $t_j$ .

Величину  $\overline{1 + G(t_j)}$  визначаємо на основі методу найменших квадратів з співвідношення

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \cdot \varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}^2}, \quad (8)$$

що усереднює функції подібності  $(1 + G(t_j))$ , знайдені для кожної  $j$ -ої ізохронної діаграми повзучості, і дає змогу розрахувати дискретні значення функції подібності й відповідно дискретні значення наведених ізохронних діаграм повзучості.

В умові подібності (7) функцію подібності  $(1 + G(t_j))$  замінимо на її усереднене значення  $\overline{1 + G(t_j)}$  і для визначення наведених дискретних значень  $\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)}$  ізохронних діаграм повзучості отримаємо співвідношення

$$\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)} = \overline{(1 + G(t_j))} \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j). \quad (9)$$

Вважається, що єдина ізохронна діаграма обґрунтована з похибкою  $\delta$ , якщо наведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу, обмеженого цією величиною щодо діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина  $\delta$  може бути прийнята як така, що дорівнює  $\pm 5\%$ .

Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для полівінілхлоридного пластикату подано на рис. 1. Видно, що наведені ізохронні діаграми повзучості (точки) не виходять за межі інтервалу  $\pm 5\%$  (штрихові лінії) від діаграми миттєвого деформування (суцільні лінії). Це свідчить, що гіпотеза єдиної ізохронної діаграми деформування обґрунтована з похибкою  $\delta = 10\%$ .

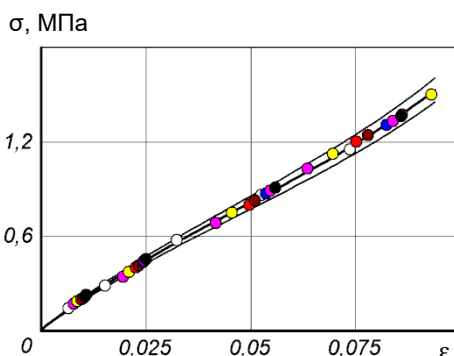


Рис. 1. Обґрунтування гіпотези існування єдиної ізохронної діаграми деформування

## 3. Визначення параметрів моделі

Значення параметрів ядер спадковості визначають за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (3) за методикою, викладеною в (Golub, Pavlyuk, & Fernati, 2017). Значення параметрів ядра  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , наведено в табл. 1.

Таблиця 1

| Значення параметрів ядер спадковості для полівінілхлоридного пластикату |                                    |                                      |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| $\alpha$                                                                | $\beta, \text{ год}^{-(1+\alpha)}$ | $\lambda, \text{ год}^{-(1+\alpha)}$ |
| -0,632                                                                  | 0,038                              | 0,0123                               |

#### 4. Повзучість за умов стаціонарного навантаження

Умова навантаження постійним у часі напруженнями у разі варіювання величини напруження  $\sigma_k$  задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \quad k = \overline{1, m}, \quad (10)$$

що отримується із (6) за умови  $t_{k+1} > t$ .

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови постійних напружень, на основі з (4) з урахуванням (10), запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + b_{2,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^3, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (11)$$

де коефіцієнти  $b_{0,j}$ ,  $b_{1,j}$ ,  $b_{2,j}$ ,  $b_{3,j}$  визначаємо за результатами апроксимації функції  $\psi_0(\cdot)$  згладжувальним кубічним сплайном (5).

У режимі стаціонарного навантаження (10) на підставі рівняння (11) розраховано й експериментально апробовано деформації повзучості полівінілхлоридного пластикату для декількох рівнів постійних напружень  $\sigma_k = 0,125$  (○),  $0,25$  (●),  $0,5$  (⊙),  $0,75$  (⦿),  $1,0$  (●) МПа. Результати розрахунків показано на рис. 2 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками.

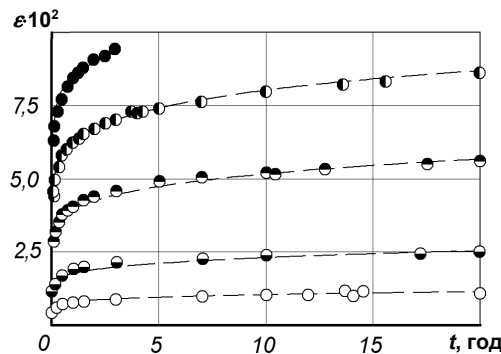


Рис. 2. Значення деформацій стаціонарної повзучості полівінілхлоридного пластикату

#### 5. Повзучість за умов чергування довантажень і розвантажень

Задача полягає в розрахунку деформацій повзучості в режимі чергування довантажень і розвантажень у разі варіювання величини навантажень і тривалості її дії. Умова навантаження (6) у цьому випадку конкретизується у вигляді

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_1 \pm \sum_{k=1}^{m-1} h(t-t_{k+1}) |\Delta\sigma_k|, \quad (12)$$

де  $\sigma_1$  – початкове напруження, що прикладено в момент часу  $\tau = t = 0$ ;  $\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k$  – величина елементарних довантажень і розвантажень у момент часу  $\tau = t_k$ .

Рівняння нестаціонарної повзучості за умов чергування довантажень і розвантажень, зважаючи на (4), запишемо так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \sum_{i=0}^3 b_{i,j} \left\{ h(t)\sigma_1 \left( 1 + \lambda \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} d\tau \right) \pm \right. \\ & \left. \pm \sum_{k=1}^{m-1} h(t-t_{k+1}) |\Delta\sigma_k| \left( 1 + \lambda \int_0^{t-t_{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} d\tau \right) \right\}^i. \end{aligned} \quad (13)$$

У режимі за умов чергування довантажень і розвантажень (12) на підставі рівняння (13) розраховано й експериментально апробовано деформації повзучості полівінілхлоридного пластикату за напружень:  $\sigma_k = 0,125$  (○),  $0,25$  (●),  $0,5$  (⊙),  $0,75$  (⦿),  $1,0$  (●),  $0$  (●) МПа. Результати розрахунків деформацій нестаціонарної повзучості  $\varepsilon(t)$ , що розраховані за рівнянням (2), наведено на рис. 3, які зіставлено з експериментальними даними запозиченими із (Самарин, & Сорокин, 1970, с. 333–336). Отримано задовільне узгодження результатів розрахунку з експериментальними даними.

#### Дискусія і висновки

Як видно з результатів розрахунку, що представлені на рис. 3 б, структура запропонованої моделі дає змогу якісно описати процеси нестаціонарної повзучості для нелінійно-в'язкопружних матеріалів. Варто зауважити, що розрахунки здійснювали з використанням параметрів, які були отримані з базового експерименту на повзучість.

На рис. 3 б показано також зіставлення результатів розрахунку деформацій повзучості з використанням нелінійної спадкової теорії (штрихові лінії) та лінійної теорії Больцмана – Вольтерра (штрихпунктирні лінії) з експериментальними даними. З даних на рисунку видно, що запропонована модель якісно враховує спадкові ефекти, які не можуть бути враховані за допомогою принципу суперпозиції. Це підтверджується результатами розрахунків, нанесеними штрихпунктирною лінією, що виконані із застосуванням цього принципу.

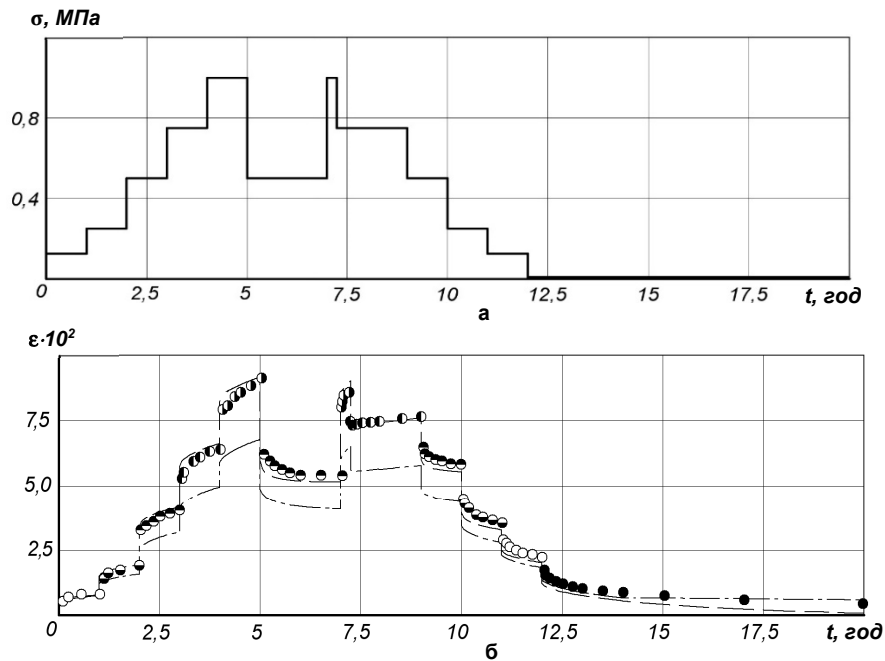


Рис. 3. Програма навантаження (а) та розрахунків (лінії) й експериментальні (точки) значення деформацій повзучості (б) полівінілхлоридного пластику за умов багаторазового довантаження і розвантаження

**Подяка, джерела фінансування.** Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано коштом бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

#### Список використаних джерел

- Самарин, Ю. П., & Сорокин, О. В. (1970). О ползучести поливинилхлоридного пластика при переменных нагрузках. *Доклады АН СССР* (Т. 195 (2)). Наука.  
Golub, V. P., Pavlyuk, Y. V., & Fernati, P. V. (2017). Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials. *International Applied Mechanics*, 53, 419–433. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0826-2>

#### References

- Golub, V. P., Pavlyuk, Y. V., & Fernati, P. V. (2017). Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials. *International Applied Mechanics*, 53, 419–433. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0826-2>  
Samarin, Y. P., & Sorokin, O. V. (1970). On the creep of polyvinyl chloride plastic compound under variable loads. *DAN USSR* (Vol. 195(2)). Science.

Отримано редакцією журналу / Received: 10.01.24

Прорецензовано / Revised: 01.04.24

Схвалено до друку / Accepted: 16.05.24

Yaroslav PAVLYUK, PhD, Senior Researcher

ORCID ID: 0009-0005-1943-1227

e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Sciences of Ukraine, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Kyiv, Ukraine

### CALCULATION OF NON-STATIONARY CREEP DEFORMATIONS OF NONLINEAR VISCOELASTIC MATERIALS UNDER THE CONDITIONS OF LOADING AND UNLOADING USING THE HEAVISIDE FUNCTION

*The problem of calculating non-stationary creep deformations of nonlinear viscoelastic materials under the conditions of loading and unloading is considered. The loading program is realized in the form of alternation of elementary loadings and unloadings while varying the amount of loading and the duration of its action, which are specified with the help of Heaviside's unit functions. A nonlinear creep model with time-independent nonlinearity of the Rabotnov model is used to describe the deformation process. The kernels of heredity are given by Rabotnov's fractional-exponential function. The problem of calculation of non-stationary creep deformations for polyvinyl chloride plastic under the conditions of repeated loading.*

**Keywords:** non-stationary creep, nonlinear viscoelasticity, Heaviside function, heredity kernel.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The author declares no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.