Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9: 621.382.233
MSC 35J25

THE CORRECTING FUNCTIONS METHOD FOR SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE AMBIPOLAR DIFFUSION EQUATION IN A DOMAIN WITH A CURVILINEAR BOUNDARIES

I. P. Moroz

Institute of Automatics, Cybernetics and Computer Engineering, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine,
E-mail: igor_moroz@yahoo.com

МЕТОД КОРИГУЮЧИХ ФУНКЦІЙ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ АМБІПОЛЯРНОЇ ДИФУЗІЇ В ОБЛАСТІ З КРИВОЛІНІЙНИМИ МЕЖАМИ

І. П. Мороз

Інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
E-mail: igor_moroz@yahoo.com

Abstract. An approach for the ambipolar diffusion equation boundary value problem solving, which is posed in a two-dimensional domain with oscillating boundaries, is proposed. The construction of the solution of the model problem is based on the corresponding problem for a certain internal canonical majorant domain and the methodology for constructing the so-called corrective corrections based on the use of the perturbation theory elements. A feature of this problem is that it is not the problem equation or boundary conditions that are perturbed, but the region. And this leads to the construction of a fundamentally new solution structure.
Keywords: boundary value problem, perturbation theory, oscillating boundaries, correcting functions.

Анотація. Запропоновано підхід до розв'язання крайової задачі для рівняння амбіполярної дифузії, яка ставиться у двовимірній області із осцилюючимиими межам. В основі конструкції розв'язку відповідної модельної задачі є задача для певної внутрішньої канонічної мажорантної області і методологія побудови так званих коригуючих поправок, що грунтується на використанні елементів теорії збурень. Особливістю даної задачі є те, що збурюється не рівняння задачі чи граничні умови, а область. І це приводить до побудови принципово нової структури розв'язку.
Ключові слова: крайова задача, теорія збурень, осцилюючі межі, коригуючі функції.

Вступ

Оцінку характеристик напівпровідникових структур проводять на основі розв'язання відповідних крайових задач (зокрема, для рівняння амбіполярної дифузії [1]), постановка яких, як правило, здійснюється у канонічних областях.

Однак відомо, що поверхні розділу областей напівпровідникових структур з різними типами провідності (з різними властивостями) через особливості протікання процесів легування кристалів домішками мають складну геометрію.

Для розв'язання задач математичної фізики, що ставляться в областях з криволінійними межами, можна скористатись, наприклад, одним із наступних основних методів: декомпозиції досліджуваної області (зокрема, методом Шварца [2]), конформних і квазіконформних відображень [3, 4], мажорантних областей [5], усереднення [6]. Вибір конкретного методу під час розв'язання практичних задач і його ефективність визначається у першу чергу геометрією досліджуваної області. Зауважимо, що існують такі варіанти геометрії області, для яких застосування відомих методів розв'язання крайових задач, що ставляться на цих областях, супроводжується значними технічними труднощами. Приклад: ділянка межі області задається деякою осцилюючою функцією (рис. 1), при цьому амплітуда осциляцій не виходить за межі деякого тонкого (у порівнянні з розмірами досліджуваної області) шарі товщиною δ.

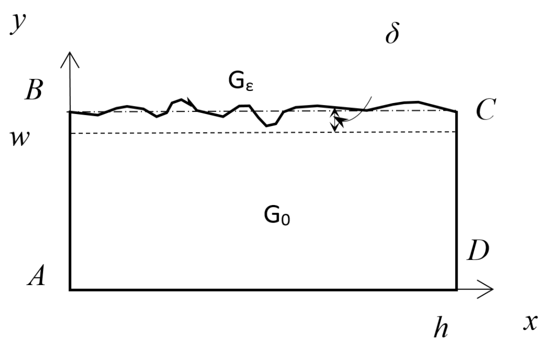

Рис. 1

Метою роботи є розробка методу розв'язання задач математичної фізики в областях з криволінійними ділянками межі, що задаються осцилюючими неперіодичними функціями, на основі застосування елементів теорії збурень.

1. Суть пропонованого підходу

В постановці крайової задачі можна природним чином сформувати малий параметр ε, якщо різниця між максимальним і мінімальним значеннями осцилюючої функції, яка описує поведінку межі деякої досліджуваної області значно менша характерного розміру цієї області. Геометричний зміст малого параметра — це відношення товщини примежового шару δ, в який входить криволінійна ділянка досліджуваної області до її характерного розміру (w, Рис. 1).

Нехай деяка крайова задача ставиться в області $G = \{(x, y) : 0 < x < h, 0 < y < g(x)\}$ (Рис. 1), частина межі якої характеризується суттєвою немонотонністю і задається достатньо гладкою функцією $g(x)$. Проведемо декомпозицію області G так, щоб одна із виділених частин (G_0) набула канонічного вигляду, а інша (G_ε) містила ділянку криволінійної межі. Маємо $G = G_0 U G_\varepsilon U L$, де $G_0 = \{(x, y) : 0 < x < h, 0 < y < w\}$, $G_\varepsilon = (x, y) : 0 < x < h, w < y < g(x)$, L — лінія розділу підобластей. Відмітимо, що G_0 є аналогом мажорантної області [5]. В результаті переходу до нормованих координат — $\tilde{x} = \frac{x}{w}$, $\tilde{y} = \frac{y}{w}$ — отримуємо: $\tilde{G} = \tilde{G}_0 \cup \tilde{G}_\varepsilon \cup \tilde{L}$, де $\tilde{G}_0 = \left\{(\tilde{x}, \tilde{y}) : 0 < \tilde{x} < \frac{h}{w}, 0 < \tilde{y} < 1\right\}$, $\tilde{G}_\varepsilon = \left\{(\tilde{x}, \tilde{y}) : 0 < \tilde{x} < \frac{h}{w}, 1 < \tilde{y} < \frac{g(\tilde{x})}{w}\right\}$. Вводимо у розгляд малий параметр задачі ε ($\varepsilon << 1$) наступним чином: $\frac{g(\tilde{x})}{w} = 1 + \frac{g(\tilde{x})-w}{w} = 1 + \varepsilon \frac{g(\tilde{x})-w}{\langle g(\tilde{x})-w\rangle} = 1 + \varepsilon \tilde{g}(\tilde{x})$, де $\langle g(\tilde{x}) - w\rangle = \frac{w}{h} \int\limits_0^{h/w} (g(\tilde{x}) - w)\, d\tilde{x}$ – усереднене значення функції $g(\tilde{x})$-w на відрізку $[0, h/w]$ (зауважимо, що $g(\tilde{x}) - w \geq 0$ для $\forall \tilde{x} \in \left[0, \frac{h}{w}\right]$). У подальшому розгляді для зручності символ "$\sim$" опускається.

При $\varepsilon = 0$ область розв'язання задачі є канонічною і відповідна крайова задача на даній області стає виродженою. Очевидно, що при $\varepsilon \neq 0$ основний вклад у розв'язок крайової задачі в області з криволінійними межами забезпечує розв'язок виродженої задачі. Вплив криволінійної межі області пропонуємо враховувати по-перше додаванням до розв'язку виродженої задачі коригуючої складової (її пропонуємо визначати терміном "коригуючі функції"), яка визначається сумою ряду за степенями малого параметра задачі деяких функцій, які повинні задовольнити умови задачі в околі точок криволінійної межі; по-друге перенесенням граничної умови з криволінійної ділянки області G на L шляхом розкладу шуканої на лінії розділу L у ряд Тейлора. Далі шляхом виконання стандартної у теорії збурення процедури прирівнювання доданків з однаковими степенями ε формуємо рекурентна послідовність крайових задач для визначення складових коригуючої функції.

2. Застосування методу коригуючих функцій для розв'язання крайової задачі для рівняння амбіполярної дифузії

Крайову задачу для рівняння амбіполярної дифузії (1) розглядають для визначення розподілу концентрації плазми $n(x, y)$ в активній області (області G) p-i-n (плазмових) діодів. Постановка задачі має наступний вигляд:

$$\Delta n - l^2 n = 0, \tag{1}$$

$$\tilde{\gamma}_n n|_{AD} = M_1, \quad n|_{BC} = M_2, \quad \left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{AB,CD} = 0.$$

Виходячи із змісту методу коригуючих функцій отримаємо розв'язок в області $G = G_0$, який буде уточнений коригуючими функціями.

Пропонуємо шукати розв'язок задачі (1) за аналогією із [7, 8] у вигляді суми розв'язку виродженої задачі ($\varepsilon = 0$) і ряду по степенях ε:

$$n(x,y) = N_0(x,y) + \underline{N}\left(x,\underline{\eta},\varepsilon\right) = \\ = N_0(x,y) + \sum_{i=0}^{m} (\varepsilon)^i \underline{N}_i\left(x,\underline{\eta},\varepsilon\right) + R_{\underline{N}(m)}(x,y,\varepsilon), \quad (2)$$

де $\underline{N}_i\left(x,\underline{\eta},\varepsilon\right)$ — коригуючі функції, $\underline{\eta} = \frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}$ — коригуючий розтяг, доданок $R_{\underline{N}(m)}(x,y,\varepsilon)$ — залишковий член.

Підстановка (2) в (1) та відповідні граничні умови і групування доданків з однаковими степенями ε дозволяє провести розчеплення вихідної задачі, зокрема:

$$\Delta(N_0(x,y) + \sum_i (\varepsilon)^i \underline{N}_i\left(x,\underline{\eta}\right)) - l^2(N_0(x,y) + \sum_i (\varepsilon)^i \underline{N}_i\left(x,\underline{\eta}\right)) = 0, \quad (3)$$

$$N_0(x, 1+\varepsilon g(x)) + \sum_i (\varepsilon)^i \underline{N}_i(x, (-\varepsilon g(x))) = M_2, \quad (4)$$

$$N_0(x,0) + \sum_i (\varepsilon)^i \underline{N}_i\left(x, \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) = M_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_0(x,y)\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} N_0(x,y)\bigg|_{x=\frac{h}{w}} = 0.$$

Звідки, матимемо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} N_0(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_0(x,y) - l^2 N_0(x,y) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \underline{\eta}^2} \underline{N}_0\left(x,\underline{\eta}\right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \underline{\eta}^2} \underline{N}_i\left(x,\underline{\eta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{N}_{i-1}\left(x,\underline{\eta}\right) - l^2 \underline{N}_{i-1}\left(x,\underline{\eta}\right) = 0, i = \overline{1,\infty}.$$

За умови $\varepsilon g(x) << 1$ функції $N_0(x, 1+\varepsilon g(x))$, $\underline{N}_i(x, (-\sqrt{\varepsilon} g(x)))$ в граничних умовах (4) розкладаємо у ряд Тейлора в околах точок лінії розділу L ($y = 1$, $\underline{\eta} = 0$):

$$N_0(x,1) + \frac{\partial N_0(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=1} \varepsilon g(x) + \frac{\partial^2 N_0(x,y)}{2\partial y^2}\bigg|_{y=1} (\varepsilon g(x))^2 + ... + \\ + \sum_i (\varepsilon)^i \left(\underline{N}_i(x,0) - \frac{\partial \underline{N}_i\left(x,\underline{\eta}\right)}{\partial \underline{\eta}}\bigg|_{\eta=0} \sqrt{\varepsilon} g(x) + ...\right) = M_2. \quad (7)$$

Групуючи доданки з однаковими степенями ε отримуємо граничні умови, які доповнюють рівняння (5):

$$N_0(x,0) = M_1, \quad N_0(x,1) + \underline{N}_0(x,0) = M_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_0(x,y)\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} N_0(x,y)\bigg|_{x=\frac{h}{w}} = 0. \quad (8)$$

За змістом задача (5), (8) є виродженою, тому доцільно в умовах (8) покласти $\underline{N}_0(x,0)=0$.

Задачі для пошуку i-х складових коригуючої функції має наступний вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial\underline{\eta}^2}\underline{N}_0\left(x,\underline{\eta}\right)=0,\ \ \underline{N}_0\left(x,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=0,\ \ \underline{N}_0(x,0)=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\underline{\eta}^2}\underline{N}_i\left(x,\underline{\eta}\right)=l^2\underline{N}_{i-1}\left(x,\underline{\eta}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{N}_{i-1}\left(x,\underline{\eta}\right), \tag{10}$$

$$\underline{N}_i\left(x,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=0,\underline{N}_i(x,0)=\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(-1)^{i-j-1}}{(i-j)!}\left.\frac{\partial^{i-j}\underline{N}_j\left(x,\underline{\eta}\right)}{\partial\underline{\eta}^{i-j}}\right|_{\underline{\eta}=0}\left(\frac{g(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{i-j}-$$

$$-\left.\frac{\partial^i N_0(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=1}g^i(x),\ \ i=\overline{1,\infty}.$$

Задача (9) має тривіальний розв'язок: $\underline{N}_0\left(x,\underline{\eta}\right)=0$ $(0\le x\le h/w$, $0\le\underline{\eta}\le\infty)$. Розв'язок рівняння (5) з крайовими умовами (8) подається у наступному вигляді:

$$N(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{1k}e^{s_k y}+C_{2k}e^{-s_k y}\right)\cos\alpha_k x,$$

де $s_k^2=\alpha_k^2+l^2$, $\alpha_k=\frac{\pi k w}{h}$, $k=\overline{0,\infty}$, невідомі сталі C_{1k},C_{2k} знаходяться із системи рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(C_{1k}+C_{2k})\cos\alpha_k x=M_1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{1k}e^{s_k}+C_{2k}e^{-s_k}\right)\cos\alpha_k x=M_2.$$

На основі послідовного розв'язання задач (9), (5), (8) та (10) отримуємо рекурентну послідовність задач для уточнення коригуючих функцій. Наприклад, перший та другий члени розкладу коригуючої функції (отримані в результаті розв'язання задачі (10)) мають наступний вигляд:

$$\underline{N}_1\left(x,\underline{\eta}\right)=\left(\underline{\eta}\sqrt{\varepsilon}-1\right)F_1(x),$$

$$F_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k\left(C_1e^{s_k}-C_2e^{-s_k}\right)\cos\alpha_k x\cdot g(x);$$

$$\underline{N}_2\left(x,\underline{\eta}\right)=\left(\frac{\underline{\eta}^3\sqrt{\varepsilon}}{6}-\frac{\underline{\eta}^2}{2}+\left(\frac{1}{3\varepsilon}-\tilde{F}_2(x)\right)\underline{\eta}\sqrt{\varepsilon}+\tilde{F}_2(x)\right)F_2(x),$$

$$F_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k\left(C_1e^{s_k}-C_2e^{-s_k}\right)\left(s_k^2\cos\alpha_k x\cdot g(x)+2\alpha_k\sin\alpha_k x\cdot g'(x)-\right.$$

$$\left.-\cos\alpha_k x\cdot g''(x)\right),$$

$$\tilde{F}_2(x) = g^2(x) \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[s_k \left(C_1 e^{s_k} - C_2 e^{-s_k} \right) - \frac{s_k^2}{2} \left(C_1 e^{s_k} + C_2 e^{-s_k} \right) \right] \cos \alpha_k x}{F_2(x)}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (1) отримуємо із заданою точністю порядку $O(\varepsilon^m)$ у вигляді (2) як збурення розв'язку відповідної виродженої задачі.

Висновки

Аналіз літературних джерел показує, що відомі методи розв'язання крайових задач в областях з криволінійними межами у деяких випадках потребують залучення значних обчислювальних ресурсів. Така ситуація, наприклад, може виникнути при розв'язанні відповідних задач в областях з сильно осцилюючими межами.

Для вирішення такого типу задач запропоновано метод коригуючих функцій. Особливістю даного підходу є те, що збурюється не рівняння чи крайові умови задачі, а область, що приводить до принципово нової конструкції розв'язку, в основу якого покладено розв'язок задачі для певної внутрішньої канонічної мажоруючої області (розв'язок виродженої задачі) і методологія побудови так званих коригуючих поправок. Компоненти коригуючої функції знаходяться в результаті отриманої рекурентної послідовності відповідних крайових задач.

Застосування запропонованого підходу проілюстровано на прикладі розв'язання крайової задачі для рівняння амбіполярної дифузії у двовимірній області із криволінійними межами, що є характерною для техніки пристроїв напівпровідникової електроніки.

У перспективі вважаємо доцільним застосування запропонованої методики для розв'язання відповідних сингулярно збурених модельних задач напівпровідникової електроніки.

Література

1. Sze S., Kwok K. Physics of Semiconductor Devices. New York: Wiley-Interscience, 2006. 815 p.
2. Бомба А. Я., Гладка О. М. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2012. № 2 (108). С. 20–31.
3. Fuchs B. A. Shabat B. V. Functions of a complex variable and some of their applications. Pergamon Press, 1964. 458 p.
4. Bomba A., Moroz I., Boichura M. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated p-i-n-structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2021. № 1. P. 14–27.
5. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. К.: Наукова думка, 1974. 200 с.

6. Kobler W., Papanicolaou G., Varadhan S. Boundary and Interface Problems in Regions with Very Rough Boundaries. In Multiple Scattering and Waves in Random Media. Eds. Chow P. L., Kohier W. E., Papanicolaou G. C. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1981. P. 165–197.
7. Vasil'eva A. B., Butusov V. F. Kalachev L. V. The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. SIAM: Philadelphia, 1995. 257 p.
8. Bomba A., Moroz, I., Boichura M. Development and analysis of a mathematical model of plasma characteristics in the active region of integrated P-I-N-structures by the methods of perturbation theory and conformal mappings. *Eastern European Journal of advanced technologies.* 2021. № 5 (113). P. 51–61.

Надійшла: 20.09.2022 / Прийнята: 28.09.2022