Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2024, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85
MSC 37C75, 65K05

OPERATOR EXTRAPOLATION ALGORITHM FOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN HILBERT SPACE

O. Yu. Kovalenko, V. V. Semenov, O. S. Kharkov
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: {alexandra.kovalenko2000, volodya.semenov, olehharek}@gmail.com

АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

О. Ю. Коваленко, В. В. Семенов, О. С. Харьков
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: {alexandra.kovalenko2000, volodya.semenov, olehharek}@gmail.com

Abstract. The article considers variational inequalities with operators acting in a Hilbert space. For these problems, variants of the Operator Extrapolation method have been proposed and studied. A sub-linear efficiency estimate for the gap function is proved. The strong convergence of the Operator Extrapolation method for variational inequalities with uniformly monotone operators is proved. The linear rate of convergence of the Operator Extrapolation method for variational inequalities with operators satisfying the generalized strong monotonicity condition is proved. An adaptive version of the algorithm is proposed. Regularized variants of the algorithm are proposed and theorems on their strong convergence are proved.
Keywords: variational inequality, Hilbert space, Operator Extrapolation method, convergence, linear rate.

Анотація. У статті розглядаються варіаційні нерівності з операторами, що діють в гільбертовому просторі. Для цих задач запропоновано та обгрунтовано варіанти алгоритму операторної екстраполяції. Доведено сублінійну оцінку ефективності для функції зазору. Доведено сильну збіжність алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з рівномірно монотонними операторами. Доведено лінійну швидкість збіжності алгоритму операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності. Розглянуто адаптивний варіант алгоритму. Розглянуто регуляризовані варіанти алгоритму та доведено теореми про їх сильну збіжність.
Ключові слова: варіаційна нерівність, гільбертовий простір, метод операторної екстраполяції, збіжність, лінійна швидкість.

Вступ

Оглядову статтю, що продовжує роботу [1], присвячено результатам дослідження нових ітераційних алгоритмів для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Дані алгоритми є модификаціями відомого «forward-reflected-backward algorithm», що запропонований в [2]. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень алгоритми мають перевагу над екстаградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого. Схеми даного типу ще відомі під назвою «optimistic gradient descent-ascent» [3–5].

Статтю побудовано таким чином. В розділі 1 розглянуто варіаційні нерівності в гільбертовому просторі, наведено основні припущення та необхідний мінімум відомостей, що відіграють важливу роль у доведеннях основних результатів. В розділі 2 розглянуто алгоритм операторної екстраполяції та прокоментовано літературу, що присвячено дослідженню його збіжності. В розділі 3 доведено слабку збіжність алгоритму операторної екстраполяції та отримано сублінійну оцінку ефективності для функції зазору. Сильну збіжність алгоритму операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей з рівномірно монотонними операторами доведено в розділі 4. Лінійну швидкість збіжності алгоритму операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності, доведено в розділі 5. В розділі 6 розглянуто адаптивний варіант алгоритму. В розділі 7 розглянуто регуляризований варіант алгоритму та його сильну збіжність. Для регуляризації використано схему Гальперна.

Для підготовки статті використано результати робіт [6–18].

1. Постановка задачі та допоміжні відомості

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та породженою нормою $\|\cdot\|$. Сильну та слабку збіжність в H послідовності (x_n) до x позначимо $\to$ та $\rightharpoonup$, відповідно.

Нехай C — непорожня опукла і замкнена підмножина простору H та $A : H \to H$ – деякий оператор.

Варіаційною нерівністю називаємо таку задачу:

$$\text{знайти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множину розв'язків варіаційної неравності (1) позначимо через S.

Дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач є напрямом прикладної математики, що активно розвивається. Задача (1) — зручна форма запису різних задач, що виникають в математичній фізиці та дослідженні операцій [19–23]. Зокрема, у вигляді варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги тощо. Наведемо три типові постановки.

1) Нехай f — диференційовна опукла функція, C — опукла замкнена множина. Критерій оптимальності першого порядку для задачі
$$f \to \min_C$$
має вигляд
$$x \in C \quad \text{та} \quad (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

2) Нехай $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ — диференційовна опукло-угнута функція, X, Y — опуклі замкнені множини. Точка $(x^*, y^*) \in X \times Y$ називається сідловою точкою функції F, якщо
$$F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*) \quad \forall x \in X \ \forall y \in Y. \tag{2}$$
Задача пошуку сідлової точки (2) рівносильна варіаційній нерівності:
$$\left(\begin{pmatrix} \nabla_x F(x^*, y^*) \\ -\nabla_y F(x^*, y^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} \right) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

3) Нехай X, Y — опуклі замкнені множини, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ ($g : X \times Y \to \mathbb{R}$) — диференційовна по x (по y) при фіксованому y (при фіксованому x) функція. Точка $(x^*, y^*) \in X \times Y$ називається рівновагою Неша, якщо
$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*) \quad \forall x \in X, \quad g(x^*, y^*) \leq g(x^*, y) \quad \forall y \in Y. \tag{3}$$
Якщо функція $f(\cdot, y)$ опукла на X для всіх $y \in Y$, а функція $g(x, \cdot)$ опукла на Y для всіх $x \in X$, то задача пошуку рівноваги Неша (3) рівносильна варіаційній нерівності:
$$\left(\begin{pmatrix} \nabla_x f(x^*, y^*) \\ \nabla_y g(x^*, y^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} \right) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Нагадаємо основні означення [24–26].

Означення 1. Оператор $A : H \to H$ називаємо псевдомонотонним на множині $C \subseteq H$, якщо для x, $y \in C$
$$(Ax, y - x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (Ay, x - y) \leq 0.$$

Означення 2. Оператор $A : H \to H$ називаємо монотонним, якщо
$$(Ax - Ay, x - y) \geq 0 \quad \forall x,\ y \in H.$$

Означення 3. Оператор $A : H \to H$ називаємо обернено сильно монотонним (ко-коерцитивним) на множині $C \subseteq H$, якщо існує така стала $\alpha > 0$, що
$$(Ax - Ay, x - y) \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x,\ y \in C.$$
У цьому випадку кажуть, що оператор A — α-обернено сильно монотонним (α-ко-коерцитивним).

Означення 4. Оператор $A : H \to H$ називаємо рівномірно монотонним на множині $C \subseteq H$, якщо існує така зростаюча функція $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\phi(0) = 0$ та $\phi(t) > 0$ для $t > 0$, що
$$(Ax - Ay, x - y) \geq \phi\left(\|x - y\|\right) \quad \forall x,\ y \in C.$$

Означення 5. Оператор $A : H \to H$ називаємо сильно монотонним на множині $C \subseteq H$, якщо існує така стала $\mu > 0$, що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \mu \|x - y\|^2 \quad \forall x,\ y \in C.$$

У цьому випадку кажуть, що оператор A — μ-сильно монотонний.

Скрізь у роботі будемо вважати, що оператор $A : H \to H$ — ліпшицевий на множині C (з константою $L > 0$), тобто

$$\|Ax - Ay\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in C,$$

та $S \neq \emptyset$.

Для замкненої опуклої множини C та ліпшицевого сильно монотонного оператора A множина S не порожня та складається з одного елемента [25].

Нагадаємо декілька відомих та потрібних нам фактів.

Нехай P_C — оператор метричного проектування на замкнену опуклу підмножину $C \subseteq H$, тобто $P_C x$ — єдиний елемент C, що володіє властивістю

$$\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|.$$

Елемент $P_C x$ можна охарактеризувати таким чином [25, 26]:

$$y = P_C x \quad \Leftrightarrow \quad y \in C \ \text{ та } \ (y - x, z - y) \geq 0 \ \ \forall z \in C,$$

$$y = P_C x \quad \Leftrightarrow \quad y \in C \ \text{ та } \ \|y - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|y - x\|^2 \ \ \forall z \in C.$$

Оператор метричного проектування P_C є нерозтягуючий, тобто

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H,$$

точніше, обернено сильно монотонним (1-ко-коерцитивним)

$$\|P_C x - P_C y\| \leq (P_C x - P_C y, x - y) \quad \forall x, y \in H.$$

Варіаційну нерівність (1) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [25, 26]:

$$x = P_C (x - \lambda A x), \tag{4}$$

де $\lambda > 0$.

Формулювання (4) корисне, оскільки веде до ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C (x_n - \lambda A x_n), \tag{5}$$

яка сильно збіжна для ліпшицевих сильно монотонних операторів та слабко збіжна для обернено сильно монотонних (ко-коерцитивних) операторів [25, 26]. Але для ліпшицевих монотонних операторів схема (5) в загальному випадку не збігається.

Зауваження 1. Варіаційна нерівність (1) записується у формі операторного включення [25]:

$$\text{знайти } x \in H : \ 0 \in Ax + N_C x,$$

де $N_C x$ — нормальний конус множини C в точці x:

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H : \ (z, y - x) \leq 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \ (Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{6}$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (6) позначимо S^d. Відомо, що множина S^d опукла та замкнена [26]. Нерівність (6) називають слабким або дуальним формулюванням варіаційної нерівності (1) (або нерівністю типу Мінті), а розв'язки нерівності (6) — слабкими розв'язками варіаційної нерівності (1). Для монотонних (псевдомонотонних) операторів A завжди маємо

$$S \subseteq S^d.$$

А коли оператор A монотонний та неперервний маємо (лема Мінті, [26])

$$S^d = S.$$

Однією з основних теоретичних задач є оцінка числа ітерацій алгоритму, що необхідне для отримання наближеного розв'язку заданої якості. Якість наближеного розв'язку $x \in C$ варіаційної нерівності (1) у монотонному випадку будемо оцінювати за допомогою невід'ємної функції зазору [27, 28]

$$\operatorname{gap}(x) = \sup_{y \in C} (Ay, x - y). \tag{7}$$

Очевидно, що для коректності означення функції зазору (7) необхідна обмеженість допустимої множини C.

Лема 1 (Yu. Nesterov, [28])**.** *Нехай оператор $A : C \to H$ — монотонний. Якщо $x \in C$ — розв'язок (1), то*

$$\operatorname{gap}(x) = 0.$$

Навпаки, якщо для $x \in C$ маємо

$$\operatorname{gap}(x) = 0,$$

то x — розв'язок (1).

Нагадаємо відомі леми про числові нерівності.

Лема 2. *Нехай невід'ємні послідовності (α_n), (β_n), такі, що*

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \beta_n, \quad n \geq 1.$$

Тоді існує границя $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$.

Лема 3. *Нехай послідовність невід'ємних чисел (ξ_n) задовольняє рекурентній нерівності*

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\, \xi_n + \alpha_n \beta_n + \gamma_n, \quad n \geq 1,$$

де послідовності (α_n) та (β_n) мають властивості:

1) $\alpha_n \in (0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
3) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$;
4) $\gamma_n \in [0, +\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Лема 4 (P.-E. Mainge, [29]). *Нехай числова послідовність* (α_n) *має підпослідовність* (α_{n_k}) *з властивістю* $\alpha_{n_k} < a_{n_k+1}$ *для всіх* $k \geq 1$*. Тоді існує така неспадна послідовність* (m_k) *натуральних чисел, що*

$$m_k \to +\infty$$

та

$$\alpha_{m_k} \leq \alpha_{m_k+1}, \quad \alpha_k \leq \alpha_{m_k+1}$$

для всіх $k \geq n_1$.

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів гільбертового простору будемо використовувати відому лему Опяла.

Лема 5 (Z. Opial, [30]). *Нехай послідовність* (x_n) *елементів гільбертового простору* H *слабко збігається до точки* $x \in H$*. Тоді для всіх* $y \in H \setminus \{x\}$ *маємо*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

2. Алгоритм операторної екстраполяції

Для розв'язання варіаційної нерівності (1) розглянемо ітераційний

Алгоритм 1.

Обираємо $x_0 = x_1 \in C$, $\lambda_n, \mu_n > 0$*. Покладаємо* $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$m_n = \mu_n \left(Ax_n - Ax_{n-1}\right),$$

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \lambda_n Ax_n - m_n\right).$$

2: *Якщо* $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$*, то СТОП, інакше покласти* $n := n+1$ *та перейти до* ***1****.*

Правило зупинки в алгоритмі обґрунтовується так: при виконанні

$$x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$$

маємо

$$x_n = P_C \left(x_n - \lambda_n Ax_n\right),$$

звідки $x_n \in S$.

Зауваження 2. Даний алгоритм при $\mu_n = \lambda_{n-1}$ запропонований в [2] під назвою «forward-reflected-backward algorithm». За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень він має перевагу над екстаградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого. Схеми даного типу ще відомі під назвою «optimistic gradient descent-ascent» [3–5]. Дослідженню та розробці модифікацій цього методу присвячено роботи [6–13, 31]. Модифікації з брегманівською відстанню досліджено в [6–8], варіанти для задач в просторах Банаха запропоновані в [9–12]. Регуляризований метод досліджено в [13–15]. У статті уточнюються деякі результати вказаних робіт.

Зауваження 3. Якщо $C = H$, то алгоритм 1 з $\mu_n = \lambda_n = \lambda$ можна записати так:

$$x_{n+1} = x_n - 2\lambda A x_n + \lambda A x_{n-1} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_n = z_n - \lambda A x_{n-1}, \\ z_{n+1} = z_n - \lambda A x_n. \end{cases}$$

Тобто, у цій ситуації алгоритм 1 співпадає з агоритмом екстраполяції з минулого.

3. Слабка збіжність та сублінійна оцінка ефективності

Припустимо додатково, що оператор A є псевдомонотонним.

Лема 6. *Для породженої алгоритмом 1 з $\mu_n = \lambda_{n-1}$ послідовності (x_n) виконується нерівність*

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - z\|^2 + 2\lambda_n (Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z) + \lambda_n L \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \\ &\leq \|x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1} (Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z) + \lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\|^2 - \\ &- (1 - \lambda_{n-1} L - \lambda_n L) \|x_{n+1} - x_n\|^2, \end{aligned} \tag{8}$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ + 2 (\lambda_n A x_n + \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), z - x_{n+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

З псевдомонотонності оператора A випливає

$$\begin{aligned} &(\lambda_n A x_n + \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), z - x_{n+1}) = \lambda_n (Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) + \\ &+ \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_{n+1}) + \underbrace{\lambda_n (Ax_{n+1}, z - x_{n+1})}_{\leq 0} \leq \\ &\leq \lambda_n (Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) + \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n) + \\ &+ \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}). \end{aligned} \tag{10}$$

Застосуємо (10) для оцінки правої частини (9) та отримаємо

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n (Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) + 2\lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n) + \\ &+ 2\lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}). \end{aligned} \tag{11}$$

Оцінимо зверху вираз $2\lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1})$ в (11). Маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}) &\leq 2\lambda_{n-1} \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \|x_n - x_{n+1}\| \leq \\ &\leq 2\lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\|^2 + \lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Отримаємо

$$\|x_{n+1}-z\|^2+2\lambda_n\left(Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right)+\lambda_n L\|x_{n+1}-x_n\|^2\leq$$
$$\leq\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2-$$
$$-\left(1-\lambda_{n-1}L-\lambda_n L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2,$$

що і треба було довести. □

Зауваження 4. Для монотонних операторів нерівність леми 6 отримана в $[2,10]$.

Перейдемо до доведення слабкої збіжності алгоритму 1 з $\mu_n=\lambda_{n-1}$. Припустимо, що

$$0<\inf_n\lambda_n\leq\sup_n\lambda_n<\tfrac{1}{2L}.$$

В якості функції Ляпунова оберемо

$$V_n=\|z-x_n\|^2+2\lambda_{n-1}(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z)+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2,$$

де $z\in S$.

Нехай $z'\in S$. Беремо таке $\delta>0$, що $1-\lambda_{n-1}L-\lambda_n L\geq\delta$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. З нерівності (8) випливає

$$V_{n+1}\leq V_n-\delta\|x_{n+1}-x_n\|^2,$$

де $V_n=\|z'-x_n\|^2+2\lambda_{n-1}(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z')+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2$.

Покажемо, що $L_n\geq 0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Маємо

$$V_n=\|z'-x_n\|^2+2\lambda_{n-1}(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z')+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2\geq$$
$$\geq\left\|x_n-z'\right\|^2-2\lambda_{n-1}\left\|Ax_{n-1}-Ax_n\right\|\left\|x_n-z'\right\|+\lambda_{n-1}L\left\|x_{n-1}-x_n\right\|^2\geq$$
$$\geq\left\|x_n-z'\right\|^2-2\lambda_{n-1}L\left\|x_n-x_{n-1}\right\|\left\|x_n-z'\right\|+\lambda_{n-1}L\left\|x_{n-1}-x_n\right\|^2\geq$$
$$\geq\left(1-\lambda_{n-1}L\right)\left\|x_n-z'\right\|^2\geq 0.$$

З леми 2 випливає існування границі

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|z'-x_n\|^2+2\lambda_{n-1}(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z')+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2\right)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|^2<+\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності (x_n) та

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\lambda_{n-1}(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z')+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2\right)=0,$$

то послідовності $\left(\|z'-x_n\|^2\right)$ збігаються для всіх $z'\in S$.

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $z \in E$. Ясно, що $z \in C$. Покажемо, що $z \in S$. Маємо

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n + \lambda_{n-1} (A x_n - A x_{n-1}), y - x_{n+1}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Припустимо, що оператор A монотонний. Виводимо оцінку

$$(Ay, y - x_n) + (Ax_n, x_n - x_{n+1}) \geq (Ax_n, y - x_{n+1}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{\lambda_n} (x_n - x_{n+1}, y - x_{n+1}) - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} (Ax_n - Ax_{n-1}, y - x_{n+1}) \quad \forall y \in C.$$

З

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$$

та ліпшицевості оператора A випливає

$$\lim_{n \to \infty} \|Ax_n - Ax_{n-1}\| = 0.$$

Таким чином,

$$\liminf_{n \to \infty} (Ay, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

З іншого боку

$$(Ay, y - z) = \lim_{k \to \infty} (Ay, y - x_{n_k}) \geq \liminf_{n \to \infty} (Ay, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Отже, $z \in S$.

Покажемо, що послідовність (x_n) слабко збігається до z. Міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}) така, що $x_{m_k} \rightharpoonup z'$ та $z \neq z'$. Ясно, що $z' \in S$. Маємо

$$2\left(x_n, z - z'\right) = \|z' - x_n\|^2 - \|z - x_n\|^2 + \|z\|^2 - \left\|z'\right\|^2.$$

Звідки випливає існування границі

$$\lim_{n \to \infty} \left(x_n, z - z'\right).$$

Отримаємо

$$\left(z, z - z'\right) = \lim_{k \to \infty} \left(x_{n_k}, z - z'\right) = \lim_{k \to \infty} \left(x_{m_k}, z - z'\right) = \left(z', z - z'\right),$$

тобто,

$$\|z - z'\| = 0.$$

Звідки випливає $z = z'$, що і необхідно було довести.

Таким чином, має місце

Теорема 1. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $A : H \to H$ — монотонний та L-ліпшицевий на множині C оператор та $S \neq \emptyset$. Припустимо, що*

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \tfrac{1}{2L}.$$

Тоді породжена алгоритмом 1 з $\mu_n = \lambda_{n-1}$ послідовність (x_n) слабко збігається до розв'язку варіаційної нерівності (1).

У випадку обмеженості допустимої множини C доведемо, що алгоритму 1 з

$$\mu_n = \lambda_n = \frac{1}{2L}$$

необхідно зробити $O\left(\frac{LD^2}{\varepsilon}\right)$ ітерацій для отримання точки $x \in C$ з

$$\operatorname{gap}(x) \le \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$, $D = \sup_{a,b\in C} \|a - b\| < +\infty$.

Нехай $\mu_n = \lambda_{n-1}$. Для послідовності (x_n) має місце нерівність

$$-2\left(\lambda_n A x_n + m_n, y - x_{n+1}\right) \le \\ \le \|y - x_n\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 - \|y - x_{n+1}\|^2 \quad \forall y \in C. \quad (12)$$

Перепишемо (12) таким чином

$$\|y - x_n\|^2 - \|y - x_{n+1}\|^2 \ge \\ \ge 2\lambda_n\left(Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\right) - 2\lambda_n\left(Ax_{n+1} - Ax_n, x_{n+1} - y\right) + \\ + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - y\right) + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n\right) + \\ + \|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (13)$$

Сумуючи (13) по n від 1 до N, отримуємо

$$\|y - x_1\|^2 - \|y - x_{N+1}\|^2 \ge \\ \ge 2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\left(Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\right) - 2\lambda_N\left(Ax_{N+1} - Ax_N, x_{N+1} - y\right) + \\ + \sum_{n=1}^{N}\left(2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n\right) + \|x_{n+1} - x_n\|^2\right). \quad (14)$$

Ліпшицевість оператора A та умова $\lambda_n \in \left(0, \frac{1}{2L}\right]$ дають

$$\sum_{n=1}^{N}\left(2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n\right) + \|x_{n+1} - x_n\|^2\right) \ge \\ \ge \sum_{n=1}^{N}\left(-2\lambda_{n-1}L\|x_n - x_{n-1}\|\|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|^2\right) = \\ = \sum_{n=1}^{N}\Bigg(-2\lambda_{n-1}L\|x_n - x_{n-1}\|\|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2\Bigg) + \\ + \frac{1}{2}\|x_{N+1} - x_N\|^2 \ge \frac{1}{2}\|x_{N+1} - x_N\|^2.$$

Використовуючи останню оцінку в (14), отримуємо

$$\|y-x_1\|^2 - \|y-x_{N+1}\|^2 \geq 2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(Ax_{n+1}, x_{n+1}-y\right) -$$

$$- 2\lambda_N \left(Ax_{N+1} - Ax_N, x_{N+1}-y\right) + \frac{1}{2}\|x_{N+1}-x_N\|^2 \geq$$

$$\geq 2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(Ax_{n+1}, x_{n+1}-y\right) - 2\lambda_N L \|x_{N+1}-x_N\| \|x_{N+1}-y\| +$$

$$+ \frac{1}{2}\|x_{N+1}-x_N\|^2 \geq 2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(Ax_{n+1}, x_{n+1}-y\right) - \lambda_N L \|x_{N+1}-y\|^2 .$$

Приходимо до нерівності

$$2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(Ax_{n+1}, x_{n+1}-y\right) - \lambda_N L \|x_{N+1}-y\|^2 +$$

$$+ \|y-x_{N+1}\|^2 \leq \|y-x_1\|^2 \quad \forall y \in C. \quad (15)$$

Використовуючи монотонність оператора A, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(Ax_{n+1}, x_{n+1}-y\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(Ay, x_{n+1}-y\right) =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\right) \left(Ay, z_{N+1}-y\right), \quad (16)$$

де $z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}$. Враховуючи (16) в (15), приходимо до нерівності

$$2\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\right) \left(Ay, z_{N+1}-y\right) + (1-\lambda_N L)\|x_{N+1}-y\|^2 \leq \|y-x_1\|^2 \quad \forall y \in C,$$

звідки випливає

$$\operatorname{gap}(z_{N+1}) = \sup_{y\in C} \left(Ay, z_{N+1}-y\right) \leq \frac{\sup_{y\in C}\|y-x_1\|^2}{2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}.$$

Таким чином, має місце

Теорема 2. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена обмежена множина, $A : H \to H$ — монотонний та L-ліпшицевий на множині C оператор. Нехай (x_n) — послідовність, що породжена алгоритмом 1 з $\lambda_n = \mu_n = \frac{1}{2L}$, тобто,*

$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \tfrac{1}{2L}\left(2Ax_n - Ax_{n-1}\right)\right).$$

Тоді має місце оцінка

$$\operatorname{gap}(z_{N+1}) \leq \frac{L \sup_{y\in C}\|x_1-y\|^2}{N}, \quad z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_{n+1}}{N}.$$

4. Сильна збіжність

Припустимо, що оператор $A : H \to H$ є рівномірно монотонним на обмежених підмножинах множини $C \subseteq H$. Тоді варіаційна нерівність (1) має єдиний розв'язок $\bar{z} \in C$.

Покажемо, що породжена алгоритмом 1 з $\mu_n = \lambda_{n-1}$ послідовність (x_n) сильно збігається до $\bar{z}$.

Оскільки множина

$$\{x_n\} \cup \{\bar{z}\} \subseteq C$$

обмежена, то якщо існує така зростаюча функція $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\phi(0) = 0$ та $\phi(t) > 0$ для $t > 0$, що

$$(Ax_{n+1}, \bar{z} - x_{n+1}) \leq -\phi\left(\|\bar{z} - x_{n+1}\|\right).$$

Замість нерівності леми 6 запишемо її уточнену версію

$$\begin{aligned} &2\lambda_n \phi\left(\|\bar{z} - x_{n+1}\|\right) + \\ &\quad + \|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_n \left(Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - \bar{z}\right) + \lambda_n L \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \\ &\quad \leq \|x_n - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_{n-1} \left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - \bar{z}\right) + \lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\|^2 - \\ &\qquad\qquad - \left(1 - \lambda_{n-1} L - \lambda_n L\right) \|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Перепишемо (17) у вигляді

$$\begin{aligned} &2\lambda_n \phi\left(\|\bar{z} - x_{n+1}\|\right) \leq \\ &\quad \leq \left(\|x_n - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_{n-1} \left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - \bar{z}\right) + \lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\|^2\right) - \\ &\quad - \left(\|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_n \left(Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - \bar{z}\right) + \lambda_n L \|x_{n+1} - x_n\|^2\right) - \\ &\qquad\qquad - \left(1 - \lambda_{n-1} L - \lambda_n L\right) \|x_{n+1} - x_n\|^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Нерівність (18) та припущення

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \tfrac{1}{2L}$$

дають

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi\left(\|\bar{z} - x_{n+1}\|\right) < +\infty \quad \text{та} \quad \lim_{n \to \infty} \phi\left(\|\bar{z} - x_{n+1}\|\right) = 0.$$

Отже,

$$\|\bar{z} - x_{n+1}\| \to 0 \quad \text{та} \quad \|\bar{z} - x_{n+1}\| \to 0.$$

Таким чином, має місце

Теорема 3. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $A : H \to H$ — рівномірно монотонний на обмежених підмножинах множини $C \subseteq H$ та L-ліпшицевий на множині C оператор, $\bar{z} \in C$ — єдиний розв'язок варіаційної нерівності (1). Припустимо, що*

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \tfrac{1}{2L}.$$

Тоді породжена алгоритмом 1 з $\mu_n = \lambda_{n-1}$ послідовність (x_n) сильно збігається до точки $\bar{z}$.

5. Лінійна швидкість збіжності

Припустимо, що існує єдиний розв'язок $z \in C$ варіаційної нерівності (1), а оператор A задовольняє умову

$$(Ax, x - z) \geq \mu \|x - z\|^2 \quad \forall x \in C \tag{19}$$

для деякого $\mu > 0$.

Розглянемо варіант алгоритму 1 з лінійною швидкістю збіжності для варіаціної нерівності (1), де ліпшицевий оператор A задовольняє (19).

Алгоритм 2.

Для $x_1 = x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \tfrac{1}{2L} Ax_n - \tfrac{1}{2(L+\mu)} \left(Ax_n - Ax_{n-1} \right) \right).$$

Покажемо, що

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = O\left(\left(1 - \frac{\mu}{L+\mu} \right)^n \right).$$

Розглянемо схему

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \alpha Ax_n - \beta \left(Ax_n - Ax_{n-1} \right) \right),$$

де $x_1 = x_0 \in C$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Нехай z — розв'язок варіаційної нерівності (1). Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ + 2 \left(\alpha Ax_n + \beta \left(Ax_n - Ax_{n-1} \right), z - x_{n+1} \right). \end{aligned} \tag{20}$$

З умови (19) випливає

$$\begin{aligned} (\alpha Ax_n + \beta (Ax_n - Ax_{n-1}), z - x_{n+1}) = \alpha (Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) + \\ + \beta (Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_{n+1}) + \alpha (Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) \leq \\ \leq \alpha (Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) + \beta (Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n) + \\ + \beta (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}) - \alpha\mu \|x_{n+1} - z\|^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Застосуємо (21) для оцінки правої частини (20) та отримаємо

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\mu) \|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ + 2\alpha (Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}) + 2\beta (Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n) + \\ + 2\beta (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}). \end{aligned} \tag{22}$$

Оцінимо зверху вираз $2\beta (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1})$ в (22). Маємо

$$\begin{aligned} 2\beta (Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}) \leq 2\beta \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \|x_n - x_{n+1}\| \leq \\ \leq 2\beta L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ \leq \beta L \|x_n - x_{n-1}\|^2 + \beta L \|x_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Отримаємо

$$(1+2\alpha\mu)\|x_{n+1}-z\|^2+2\alpha\left(Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right)+\alpha L\|x_{n+1}-x_n\|^2\le$$
$$\le\|x_n-z\|^2+2\beta\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\beta L\|x_n-x_{n-1}\|^2-$$
$$-\left(1-\alpha L-\beta L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2.$$

Покладемо $\alpha=\frac{1}{2L}$:

$$\left(1+\frac{\mu}{L}\right)\|x_{n+1}-z\|^2+\frac{1}{L}\left(Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right)+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-x_n\|^2=$$
$$=\left(1+\frac{\mu}{L}\right)\left(\|x_{n+1}-z\|^2+\frac{1}{L\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\left(Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|x_{n+1}-x_n\|^2\right)\le$$
$$\le\|x_n-z\|^2+2\beta\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\beta L\|x_n-x_{n-1}\|^2-$$
$$-\left(\frac{1}{2}-\beta L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2.$$

Покладемо $\beta=\frac{1}{2L\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}$. Тоді для

$$W_n=\|x_n-z\|^2+\frac{1}{L\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|x_n-x_{n-1}\|^2$$

маємо

$$\left(1+\frac{\mu}{L}\right)W_{n+1}\le W_n-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2\le W_n.$$

Звідси

$$W_{n+1}\le\left(1+\frac{\mu}{L}\right)^{-1}W_n\le...\le\left(1+\frac{\mu}{L}\right)^{-n}\|x_1-z\|^2. \qquad (23)$$

Оскільки

$$W_n=\|x_n-z\|^2+$$
$$+\frac{1}{L\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|x_n-x_{n-1}\|^2\ge$$
$$\ge\|x_n-z\|^2-$$
$$-\frac{1}{L\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|Ax_{n-1}-Ax_n\|\,\|x_n-z\|+\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|x_{n-1}-x_n\|^2\ge$$
$$\ge\|x_n-z\|^2-$$
$$-\frac{1}{\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|x_n-x_{n-1}\|\,\|x_n-z\|+\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\|x_{n-1}-x_n\|^2\ge$$
$$\ge\left(1-\frac{1}{2\left(1+\frac{\mu}{L}\right)}\right)\|x_n-z\|^2\ge\frac{1}{2}\|x_n-z\|^2,$$

то з (23) випливає

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \left(1 - \frac{\mu}{L+\mu}\right)^n 2\|x_1 - z\|^2.$$

Таким чином, має місце

Теорема 4 (Семенов–Харьков, [16–18])**.** *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $A : H \to H$ — L-ліпшицевий на множині C оператор, існує єдиний розв'язок $z \in C$ варіаційної нерівності (1) та виконується умова (19). Тоді для породженої алгоритмом 2 послідовності (x_n) виконується оцінка*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \left(1 - \frac{\mu}{L+\mu}\right)^n 2\|x_1 - z\|^2, \quad n \ge 1.$$

Зауваження 5. З теореми 4 випливає оцінка

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = O\left(e^{-\frac{\mu}{2L}n}\right), \quad n \ge 1.$$

Зауваження 6. Для задачі пошуку нуля μ-сильно монотонного та L-ліпшицевого оператора A (випадок нерівності (1) без обмежень, $C = H$) в роботі [4] для алгоритму

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{1}{4L} A x_n - \tfrac{1}{4L}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right)$$

отримана оцінка

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = O\left(\left(1 - \frac{\mu}{4L}\right)^n \frac{L^2}{\mu^2}\right), \quad n \ge 1.$$

6. Адаптивний алгоритм операторної екстраполяції

Розглянемо алгоритм операторної екстраполяції з адаптивним вибором параметрів λ_n [7].

Алгоритм 3. Адаптивний алгоритм.

Обираємо $x_0 = x_1 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ та число $\lambda_1 = \lambda_0 > 0$. Покладаємо $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$m_n = \lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right),$$
$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n - m_n\right).$$

2: *Якщо $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$, то СТОП, інакше перейти до 3.*

3: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|}\right\}, & \text{якщо} \quad Ax_{n+1} \ne Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти до 1.

Зауваження 7. Послідовність (λ_n), що задається на третьому етапі ітераційного кроку в алгоритмі 3, незростаюча та обмежена знизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{L}\right\}$. Отже, існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

В якості функції Ляпунова оберемо

$$W_n = \|z - x_n\|^2 + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\right) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

де $z \in S$.

Має місце

Лема 7 (Семенов–Сірик–Харьков, [7])**.** *Для послідовності* (x_n)*, що породжена алгоритмом 3, виконується нерівність*

$$W_{n+1} \le W_n - \left(1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

Доведення. Нехай $z \in S$. Як і в доведенні леми 6 приходимо до нерівності

$$\begin{aligned}\|z - x_{n+1}\|^2 \le \|z - x_n\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ + 2\lambda_n\left(Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}\right) + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n\right) + \\ + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}\right). \quad (24)\end{aligned}$$

Використовуючи правило обчислення λ_{n+1}, оцінимо зверху доданок

$$2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}\right)$$

в нерівності (24). Маємо

$$\begin{aligned}2\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1}\right) \le 2\lambda_{n-1}\|Ax_n - Ax_{n-1}\|\,\|x_n - x_{n+1}\| \le \\ \le 2\tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|\,\|x_{n+1} - x_n\| \le \\ \le \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{-1}\|^2 + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

Приходимо до нерівності

$$\begin{aligned}\|z - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n\left(Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z\right) + \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \\ \le \|z - x_n\|^2 + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\right) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|^2 - \\ - \left(1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2,\end{aligned}$$

що і потрібно було довести. □

Сформулюємо основний результат про збіжність алгоритму 3.

Теорема 5 (Семенов–Сірик–Харьков, [7])**.** *Нехай* C *— непорожня опукла та замкнена підмножина гільбертового простору* H*,* $A : H \to H$ *— монотонний та ліпшицевий оператор,* $S \ne \emptyset$*. Тоді послідовність* (x_n)*, що породжена алгоритмом 3, слабко збігається до деякої точки* $z \in S$*.*

Доведення. Нехай $z' \in S$. Для функції Ляпунова

$$W_n = \|z' - x_n\|^2 + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\right) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

має місце нерівність леми 7

$$W_{n+1} \le W_n - \left(1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

Оскільки існує границя $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - \tau\mu\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 2\tau\mu \in (0,1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Покажемо, що $W_n \ge 0$ для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$. Маємо

$$W_n = \left\|x_n - z'\right\|^2 + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\right) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_{n-1} - x_n\|^2 \ge$$

$$\ge \left\|x_n - z'\right\|^2 - 2\lambda_{n-1}\|Ax_{n-1} - Ax_n\|\left\|x_n - z'\right\| + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_{n-1} - x_n\|^2 \ge$$

$$\ge \left\|x_n - z'\right\|^2 - 2\tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|\left\|x_n - z'\right\| + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_{n-1} - x_n\|^2 \ge$$

$$\ge \left(1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)\left\|x_n - z'\right\|^2.$$

Оскільки існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що $1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} > 0$ для всіх $n \ge n_0$, то $W_n \ge 0$ починаючи з n_0.

Тепер з леми 2 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|z' - x_n\|^2 + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\right) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|^2\right)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності (x_n) та

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\right) + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\|x_n - x_{n-1}\|^2\right) = 0,$$

то збігаються послідовності $(\|z' - x_n\|)$ для всіх $z' \in S$.

Далі, міркуваннями з доведення теореми 1, прийдемо до потрібного результату. □

Зауваження 8. Для операторного рівняння

$$\text{знайти } x \in H : \ Ax = 0$$

алгоритм 3 дає такий ітераційний процес

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right), \\ \lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|}\right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \ne Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases} \end{cases}$$

7. Регуляризований алгоритм операторної екстраполяції

Спираючись на відомий метод Гальперна апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [26,32] у роботі [13] побудовано такий регуляризований варіант алгоритму 1.

Алгоритм 4. Регуляризований алгоритм.

Задаємо елементи $y \in H$, $x_0 = x_1 \in C$, *послідовність додатніх чисел* (λ_n) *та таку послідовність* (α_n), *що*

$$\alpha_n \in (0,1), \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Ітерації: *Генеруємо послідовність* (x_n) *за допомогою схеми*

$$x_{n+1} = P_C\left(\alpha_n y + (1-\alpha_n)\, x_n - \lambda_n A x_n - \right.$$
$$\left. - (1-\alpha_n)\,\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right)\right).$$

Відносно додатніх параметрів λ_n припустимо виконання такої умови:

$$0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \tfrac{1}{2L}. \tag{25}$$

Доведемо, що послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 4, сильно збігається до проєкції точки y на множину S.

Зауваження 9. Для пошуку нормального розв'язку операторного рівняння $Ax = 0$ можна використати схему

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, x_n - \lambda_n A x_n - (1-\alpha_n)\,\lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right).$$

Лема 8 (Семенов–Харьков, [13])**.** *Для послідовності* (x_n)*, що породжена алгоритмом 4, виконується нерівність*

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - z\|^2 + 2\lambda_n\left(Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z\right) + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \\
&\le (1-\alpha_n)\left(\|x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\right) + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2\right) + \\
&\qquad + \alpha_n\|y - z\|^2 - \alpha_n\|y - x_{n+1}\|^2 - \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\,\lambda_{n-1}L\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2 - \\
&\qquad - (1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L\right)\|x_n - x_{n-1}\|^2,
\end{aligned} \tag{26}$$

де $z \in S$.

Лема 9 (Семенов–Харьков, [13])**.** *Для послідовності* (x_n)*, що породжена алгоритмом 4, виконується нерівність*

$$\|x_{n+1}-z\|^2+2\lambda_n\left(Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right)+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-x_n\|^2\le$$
$$\le(1-\alpha_n)\left(\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2\right)+$$
$$+2\alpha_n\left(y-z,x_{n+1}-z\right)-\left(\frac{1}{2}-\alpha_n-(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2-$$
$$-(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L\right)\|x_n-x_{n-1}\|^2,\quad(27)$$

де $z\in S$*.*

Лема 10 (Семенов–Харьков, [13])**.** *Нехай виконана умова* (25)*. Тоді породжена алгоритмом 4 послідовність* (x_n) *є обмеженою.*

Доведення. Оскільки

$$0<\inf_n\lambda_n\le\sup_n\lambda_n<\tfrac{1}{2L},\qquad\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,$$

то існує такий номер $n_0\ge1$, що

$$\frac{1}{2}-\alpha_n-(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L=\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L-\alpha_n\left(1-\lambda_{n-1}L\right)>0\qquad(28)$$

та

$$(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L\right)>0.\qquad(29)$$

З (26) та (28), (29) випливає, що для $n\ge n_0$ виконується нерівність

$$\xi_{n+1}\le(1-\alpha_n)\xi_n+\alpha_n\|y-z\|^2,\qquad(30)$$

де

$$\xi_n=\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2,\quad z\in S.$$

Оцінимо знизу ξ_n. Маємо

$$\xi_n=\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left(Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right)+\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2\ge$$
$$\ge\|x_n-z\|^2-2\lambda_{n-1}\|Ax_{n-1}-Ax_n\|\|x_n-z\|+\frac{1}{2}\|x_{n-1}-x_n\|^2\ge$$
$$\ge\|x_n-z\|^2-2\lambda_{n-1}L\|x_{n-1}-x_n\|\|x_n-z\|+\frac{1}{2}\|x_{n-1}-x_n\|^2\ge$$
$$\ge(1-\lambda_{n-1}L)\|x_n-z\|^2+\left(\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L\right)\|x_n-x_{n-1}\|^2\ge0.\quad(31)$$

З нерівностей (30) та (31) випливає обмеженість послідовностей (ξ_n) та (x_n), що і потрібно було довести. □

Сформулюємо основний результат.

Теорема 6. *Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина гільбертового простору H, $A : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий на множині C оператор, $S \neq \emptyset$, $y \in H$, виконується умова (25). Тоді послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 4, сильно збігається до точки $z = P_S y$.*

Доведення. Нехай $z = P_S y$. З леми 10 випливає існування такого числа $M \geq 0$, що

$$|(y - z, x_{n+1} - z)| \leq M$$

для всіх $n \geq 1$. Тоді з леми 9 випливає нерівність

$$\xi_{n+1} - \xi_n + \alpha_n \xi_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1 - \alpha_n)\lambda_{n-1} L\right) \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1} L\right) \|x_n - x_{n-1}\|^2 \leq 2\alpha_n M, \quad (32)$$

де

$$\xi_n = \|x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1}(Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z) + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 .$$

Розглянемо числову послідовність (ξ_n). Можливі два варіанти:

a) існує номер $\bar{n} \geq 1$ такий, що $\xi_{n+1} \leq \xi_n$ для всіх $n \geq \bar{n}$;
b) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що $\xi_{n_k+1} > \xi_{n_k}$ для всіх $k \geq 1$.

Спочатку розглянемо варіант a). В цьому випадку існує $\lim_{n\to\infty} \xi_n$. Оскільки $\xi_{n+1} - \xi_n \to 0$, $\alpha_n \to 0$ та виконуються нерівності (32), то при $n \to \infty$ маємо

$$\|x_{n+1} - x_n\| \to 0. \quad (33)$$

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $w \in H$. Ясно, що $w \in C$. Покажемо, що $w \in S$. Маємо

$$(x_{n_k+1} - \alpha_{n_k} y - (1 - \alpha_{n_k}) x_{n_k} + \lambda_{n_k} A x_{n_k} + \\ + (1 - \alpha_{n_k}) \lambda_{n_k - 1} (A x_{n_k} - A x_{n_k - 1}), y - x_{n_k+1}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідки, використовуючи монотонність оператора A, виводимо оцінку

$$(Ay, y - x_{n_k}) + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - x_{n_k+1}) \geq (Ax_{n_k}, y - x_{n_k+1}) \geq \\ \geq \frac{1}{\lambda_{n_k}} (\alpha_{n_k}(y - x_{n_k}) + x_{n_k} - x_{n_k+1}, y - x_{n_k+1}) - \\ - (1 - \alpha_{n_k}) \frac{\lambda_{n_k-1}}{\lambda_{n_k}} (Ax_{n_k} - Ax_{n_k-1}, y - x_{n_k+1}) \quad \forall y \in C.$$

З $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, обмеженості послідовності (x_n), (33) та ліпшицевості оператора A випливає

$$\liminf_{k\to\infty} (Ay, y - x_{n_k}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

З іншого боку

$$(Ay, y - w) = \lim_{k\to\infty} (Ay, y - x_{n_k}) = \liminf_{k\to\infty} (Ay, y - x_{n_k}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Отже, $w \in S$.

Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty} (y - z, x_{n+1} - z) \leq 0. \tag{34}$$

Розглянемо таку підпослідовність (x_{n_k}), що

$$\lim_{k\to\infty} (y - z, x_{n_k} - z) = \limsup_{n\to\infty} (y - z, x_{n+1} - z).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightharpoonup w \in S$. Тоді отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} (y - z, x_{n_k} - z) = (y - z, w - z) = (y - P_S y, w - P_S y) \leq 0,$$

чим доводимо (34).

Тепер з (34), нерівності

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\, \xi_n + 2\alpha_n (y - z, x_{n+1} - z),$$

що виконується для достатньо великих n, та леми 3 робимо висновок, що

$$\xi_n = \|x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1} (Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z) + \frac{1}{2} \|x_n - x_{n-1}\|^2 \to 0.$$

З (31) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = 0.$$

Розглянемо варіант b). В цьому випадку існує неспадна послідовність номерів (m_k) з властивостями (лема 4):

i) $m_k \to +\infty$;
ii) $\xi_{m_k+1} \geq \xi_{m_k}$ для всіх $k \geq n_1$;
iii) $\xi_{m_k+1} \geq \xi_k$ для всіх $k \geq n_1$.

З нерівності леми 9, (31) та ii) випливає

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha_{m_k} - (1 - \alpha_{m_k})\, \lambda_{m_k-1} L\right) \|x_{m_k+1} - x_{m_k}\|^2 + \\ + (1 - \alpha_{m_k}) \left(\frac{1}{2} - \lambda_{m_k-1} L\right) \|x_{m_k} - x_{m_k-1}\|^2 \leq 2\alpha_{m_k} M.$$

Звідки

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k+1} - x_{m_k}\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - x_{m_k-1}\| = 0.$$

Міркуваннями, що подібні вищевикладеним, доводимо, що слабкі часткові границі послідовності (x_{m_k}) належать множині S. З тотожності

$$(y - z, x_{m_k+1} - z) = (y - z, x_{m_k} - z) + (y - z, x_{m_k+1} - x_{m_k})$$

отримуємо

$$\limsup_{k\to\infty} (y - z, x_{m_k+1} - z) = \limsup_{k\to\infty} (y - z, x_{m_k} - z).$$

Як і раніше отримуємо нерівність

$$\limsup_{k\to\infty} (y - z, x_{m_k+1} - z) \leq 0.$$

Далі маємо

$$\xi_{m_k+1} \le (1-\alpha_{m_k})\,\xi_{m_k} + 2\alpha_{m_k}\,(y-z, x_{m_k+1}-z) \le$$
$$\le (1-\alpha_{m_k})\,\xi_{m_k+1} + 2\alpha_{m_k}\,(y-z, x_{m_k+1}-z)\,.$$

Звідки, ураховуючи умову iii), отримуємо

$$\xi_k \le \xi_{m_k+1} \le 2\,(y-z, x_{m_k+1}-z)\,.$$

Таким чином,

$$\limsup_{k\to\infty} \xi_k \le 2 \limsup_{k\to\infty}\,(y-z, x_{m_k+1}-z) \le 0.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ та, в свою чергу,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = 0,$$

що і потрібно було довести. □

Зауваження 10. Важливим питанням є дослідження асимптотичної поведінки алгоритму 4 у ситуації $C = H$:

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1-\alpha_n)\,x_n - \lambda_n A x_n - (1-\alpha_n)\,\lambda_{n-1}\,(Ax_n - Ax_{n-1})\,.$$

А саме, питання про поведінку норми $\|Ax_n\|$. На нашу думку повинна виконуватись оцінка

$$\|Ax_n\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Зауважимо, що в роботі [33] для екстраградієнтного методу отримана оцінка

$$\|Ax_n\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

а в роботі [34] отримана оцінка

$$\|Ax_n\| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

для екстраградієнтного методу з регуляризацією Гальперна

$$\begin{cases} y_n = x_n + \frac{1}{n+2}\,(x_0 - x_n) - \frac{1}{8L} A x_n, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+2}\,(x_0 - x_n) - \frac{1}{8L} A y_n. \end{cases}$$

Зауваження 11. Параметри λ_n алгоритму 4 задавалась виходячи з умови (25). Тобто, явно використовувалась інформація про константи ліпшицевості оператора A. Схема з статей [9, 10] дозволяє побудувати модифікацію алгоритму 4 з адаптивним вибором величини λ_n, що не вимагає знання ліпшицевих констант операторів та процедур типу лінійного пошуку.

Зауваження 12. Відштовхуючись від результатів робіт [9–11] можна отримати аналог алгоритму 4 з узагальненою проєкцію Альбера для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах.

Заключні зауваження

У статті розглянуто нові ітераційні алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Дані алгоритми є модифікаціями відомого «forward-reflected-backward algorithm», що запропонований в [2].

А саме, доведено слабку збіжність алгоритму операторної екстраполяції та отримано сублінійну оцінку ефективності для функції зазору. Доведено сильну збіжність алгоритму операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей з рівномірно монотонними операторами. Доведено лінійну швидкість збіжності алгоритму операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності. Розглянуто адаптивний та регуляризований варіанти алгоритму.

Для підготовки статті використано результати робіт [6–18].

Робота виконана за фінансової підритмки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026) та НАН України (проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162).

Література

1. Семенов В.В., Харьков О.С. Алгоритм екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2023. № 2. С. 52–82. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.2.04.
2. Malitsky Y., Tam M.K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. *SIAM J. on Optim.* 2020. Vol. 30. P. 1451–1472.
3. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. *arXiv preprint arXiv:1802.10551.* 2018.
4. Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S. A unified analysis of extra-gradient and optimistic gradient methods for saddle point problems: proximal point approach. *arXiv preprint arXiv:1901.08511.* 2019.
5. Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S. Convergence rate of $O(1/k)$ for optimistic gradient and extra-gradient methods in smooth convex-concave saddle point problems. *arXiv preprint arXiv:1906.01115.* 2020.
6. Семенов В.В., Сірик Д.С., Харьков О.С. Збіжність методу операторної екстраполяції. *Доповіді НАН України.* 2021. № 4. С. 28–35.
7. Семенов В.В., Сирык Д.С., Харьков О.С. Адаптивный метод операторной экстраполяции. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2021. Вип. 33. С. 143–147.
8. Семенов В.В., Денисов С.В., Сирык Д.С., Харьков О.С. Сходимость метода экстраполяции из прошлого и метода операторной экстраполяции. *Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики».* 2021. Том 66. № 3. С. 58–72.
9. Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A Novel Algorithm with Self-adaptive Technique for Solving Variational Inequalities in Banach Spaces. In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) Advances in Optimization

and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science, vol 1514. Springer, Cham, 2021. P. 50–64.

10. Semenov V.V., Denisov S.V., Sandrakov G.V., Kharkov O.S. Convergence of the Operator Extrapolation Method for Variational Inequalities in Banach Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58. Issue 5. P. 740–753.
11. Семенов В., Харьков О. Метод операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей в банахових просторах. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2023. Вип. 37. С. 118–122.
12. Денисов С.В., Семенов В.В., Харьков О.С. Слабка збіжність методу операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих банахових просторах. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2022. № 2. С. 42–49. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2022.2.05.
13. Семенов В.В., Харьков О.С. Регуляризований алгоритм операторної екстраполяції. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2023. № 1. С. 15–27. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.02.
14. Semenov V., Kharkov O. The regularized operator extrapolation algorithm for monotone variational inequalities. Intelligent Solutions–S: Proceedings of the International Symposium, September 28, 2023, Kyiv–Uzhorod, Ukraine. P. 88–90.
15. Kharkov O., Semenov V. The regularized operator extrapolation method. Information Technology and Implementation (Satellite): Conference Proceedings, November 21, 2023, Kyiv, Ukraine. P. 269–270.
16. Харьков О., Семенов В. Швидкість збіжності нових алгоритмів для варіаційних нерівностей. Modeling, control and information technologies: Proceedings of VI International scientific and practical conference. P. 159–160. https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.048.
17. Семенов В.В., Харьков О.С. Швидкість збіжності методу операторної екстраполяції. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», присвяченої 50-річчю кафедри теорії оптимальних процесів, 7–9 листопада 2023, Львів. С. 203–205.
18. Семенов В., Харьков О. Лінійна швидкість збіжності алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей. Математика та інформаційні технології. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. С. 301–302.
19. Patriksson M. Nonlinear programming and variational inequality problems: A unified approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. xiv + 334 p.
20. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
21. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear Ill Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
22. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium Problems and Applications. London: Academic Press, 2019. xx + 419 p.
23. Polyak R. Finding Nonlinear Production–Consumption Equilibrium. *arXiv preprint arXiv:2204.04496.* 2022.
24. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 2001. 181 p.
25. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2011. 408 p.

26. Семенов В. В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. 167 с.
27. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/T)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. on Optim.* 2004. Vol. 15. P. 229–251.
28. Nesterov Y. Dual Extrapolation and Its Applications to Solving Variational Inequalities and Related Problems. *Math. Program.* 2007. V. 109. No. 2-3. P. 319–344.
29. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis.* 2008. Vol. 16. P. 899–912.
30. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 591–597.
31. Csetnek E.R., Malitsky Y., Tam M.K. Shadow Douglas–Rachford Splitting for Monotone Inclusions. *arXiv preprint arXiv: 1903.03393.* 2019.
32. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 957–961.
33. Gorbunov E., Loizou N., Gidel G. Extragradient Method: $O\left(1/k\right)$ Last-Iterate Convergence for Monotone Variational Inequalities and Connections With Cocoercivity. *arXiv preprint arXiv: 2110.04261.* 2021.
34. Yoon T., Ryu E.K. Accelerated algorithms for smooth convex-concave minimax problems with $O\left(1/k^2\right)$ rate on squared gradient norm. Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning. Proceedings of Machine Learning Research. 2021. Vol. 139. P. 12098–12109.

Надійшла: 18.12.2023 / Прийнята: 23.02.2024