

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Сідей Марія Іванівна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ
Оцінки функціоналів від стаціонарних процесів
за спостереженнями з пропусками

01.01.05 – Теорія ймовірностей і математична статистика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

М. І. Сідей

Науковий керівник

Моклячук Михайло Павлович

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Сідей М. І. Оцінки функціоналів від стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – Теорія ймовірностей і математична статистика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі досліджено задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками.

Задачі оцінювання невідомих значень випадкових послідовностей та процесів є актуальними і важливими в теорії випадкових процесів, оскільки отримані результати можна застосувати при розв'язанні проблем, що постають в різних галузях наук, зокрема, економіці, радіофізиці, метеорології, океанографії, статистичній оптиці тощо. Чимало досліджуваних явищ можна описати за допомогою моделей стаціонарних випадкових процесів чи послідовностей. Проте, на практиці, переважно неможливо отримати спостереження процесу у всі моменти часу. Таким чином, виникають проблеми оцінювання впливу пропущених значень на прогнозування майбутніх значень процесу чи відновлення невідомих значень процесу.

У роботі розглянуто задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками. Задачі середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання сформульовано та розв'язано для стаціонарної послідовності з стаціонарно зв'язаним шумом у випадку спостережень з пропусками. У випадку спектральної визначеності, тобто коли відомий вигляд спектральних щільностей, застосовано метод ортогональних проєкцій, що був запропонований А. М. Колмогоровим, та знайдено формули для обчислення середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оцінок ліній-

них функціоналів у задачах інтерполяції, екстраполяції та фільтрації. У випадку, коли досліджувана стаціонарна послідовність некорельована з стаціонарною послідовністю, що описує шум, та у випадку, коли спостереження не забруднені шумом, наведено формули для знаходження спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оцінок лінійних функціоналів. Отриману теорію застосовано до розв'язання задач прогнозування майбутніх значень, відновлення невідомих значень та відокремлення даних від спостережень з шумом для таких моделей стаціонарних послідовностей: послідовності авторегресії, послідовності рухомого середнього та змішана модель авторегресії та рухомого середнього.

У випадку спектральної невизначеності, коли повна інформація щодо вигляду спектральних щільностей стаціонарних послідовностей неможлива, але вказано клас їх допустимих значень, наведено означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних характеристик оцінок функціоналів, з яких впливає метод розв'язання поставлених задач. Суть цього методу, що має назву мінімаксного (робастного), полягає у відшуканні такої оцінки, яка б мінімувала величину середньоквадратичної похибки одразу для всіх щільностей з заданого класу допустимих щільностей. У випадку некорельованих стаціонарних послідовностей для деяких класів допустимих щільностей розглянуто мінімаксні задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей з пропусками та наведено співвідношення та формули, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні характеристики.

Досліджено задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації досліджуються для некорельованих між собою процесів у випадку спектральної визначеності, коли відома спектральна структура процесів, та у випадку спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих спектральних щільностей. В першому випадку отримано формули для обчислення середньоквадратичних похибок та спектральних ха-

рактистик оцінок функціоналів. Для розв'язання задач оцінювання у другому випадку застосовано мінімаксний (робастний) підхід. Для деяких класів допустимих спектральних щільностей знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі щільності та мінімаксні характеристики оцінок.

Ключові слова: стаціонарна стохастична послідовність, стаціонарний стохастичний процес, оптимальна оцінка, спектральна характеристика, середньоквадратична похибка, мінімаксна (робастна) оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

ABSTRACT

Sidei M. I. Estimates of functionals from stationary processes with missing observations. – Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.05 – Probability theory and mathematical statistics.– Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The work is devoted to the investigation of problems of the mean-square optimal linear estimation of functionals of unknown values of stationary sequences and processes with missing values.

The development of the theory of estimating the unknown values of stationary processes is an important problem in the theory of random processes, since the obtained results can be used to solve the problems that arise in various branches of science, in particular, economics, radiophysics, meteorology, oceanography, statistical optics, etc. The objects that are investigated in these branches of science can be represented in the form of the stationary stochastic processes or sequences. In practice it is impossible to get observations at all points of time. So the problems of estimation of the influence of missing values on the prediction of the future values of the process or data retrieval arise.

The problems of interpolation, extrapolation and filtering of the linear functionals which depend on the unknown values of stationary sequences and processes with missing values are considered in two cases: in the case of spectral certai-

nty, when spectral densities of the observed sequences and processes are exactly known, and in the case of spectral uncertainty, when full information on densities is unavailable but the sets of admissible spectral densities are given.

In the case of discrete time we consider sequences which are stationary correlated with the noise. When the spectral structure of the observed stationary sequences is exactly known we use the orthogonal projection method of estimation which was proposed by A. N. Kolmogorov and we obtain formulas that determine the spectral characteristics and values of mean-square errors of estimates of the linear functionals. As corollaries we get the analogous formulas for the case when the stationary sequence is uncorrelated with the noise and the case when sequence is observed without noise.

In the case of continuous time we consider processes which are uncorrelated with the noise and processes which are observed without noise. For both cases formulas for calculating spectral characteristics and values of mean-square errors of the optimal estimates of the linear functionals are obtained. These results can be used in the theory of random processes and optimization theory, but in most cases in practice the information on spectral densities (spectral structure) is not complete and this method is not effective. If it is possible to describe sets of admissible values of densities, one can use the minimax-robust method of estimating. This method is to find the estimate that minimizes the maximum value of the mean-square error for all densities from the certain class of admissible densities. For given classes of admissible spectral densities formulas and relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax characteristics of optimal estimates of the linear functionals are found.

The main results obtained in the work are the following:

- formulas for calculating spectral characteristics and values of mean-square errors of the optimal estimates of the linear functionals which depend on unknown values of the stochastic stationary sequences with missing values are obtained under condition of spectral certainty, when the spectral structure of the sequence is exactly known;

- problems of minimax interpolation, extrapolation and filtering of the functionals of unknown values of the stochastic stationary sequences with missing values are solved under the condition of spectral uncertainty, formulas and relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax characteristics of optimal estimates of the linear functionals are proposed;
- formulas which allow to calculate spectral characteristics and values of the mean-square errors of the optimal estimates of the linear functionals which depend on unknown values of the stochastic stationary processes with missing values are obtained under the condition of spectral certainty;
- problems of minimax interpolation, extrapolation and filtering of functionals of the stationary processes with missing values are stated and solved in the case of spectral uncertainty, formulas and relations for finding the least favorable spectral densities and the minimax characteristics of optimal estimates of functionals are derived.

Results can be used in the theory of stochastic processes and applied to solving problems in the theory of time series, econometrics, in signal processing and predicting. The work contains examples of the application of obtained theory. In particular, we solve the problem of prediction of the future values and interpolation for the autoregressive sequences and show the influence of one missing value on the mean-square error of the linear estimate of the functional in the case of discrete time.

Keywords: stationary sequence with missing observations, stationary process with missing observations, optimal estimate, spectral characteristic, mean-square error, minimax (robust) estimate, least favorable spectral density, minimax spectral characteristic.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях

1. Моклячук М. П. Інтерполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Теорія ймовір-

- ностей та математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 142–155. (english translation in Theory Probability and Mathematical Statistics — 2016. — Vol. 93. — P. 153–167.)
2. *Moklyachuk M.* Interpolation problem for stationary sequences with missing observations/ М. Moklyachuk, М. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 3. — P. 259–275.
 3. *Moklyachuk M.* Filtering problem for stationary sequences with missing observations/ М. Moklyachuk, М. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. — 2016. — Vol. 4, No. 4. — P. 308–325.
 4. *Moklyachuk M. P.* Extrapolation problem for functionals of stationary processes with missing observations/ М. P. Moklyachuk, М. I. Sidei// БУКОВИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ. — 2016. — Vol. 4, No. 1-2. — P. 122 – 129.
 5. *Moklyachuk M. P.* Interpolation of functionals of stationary processes with missing observations/ М. P. Moklyachuk, М. I. Sidei// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки — 2016. — No. 1. — P. 24–30.
 6. *Moklyachuk M.* Filtering problem for functionals of stationary processes with missing observations/ М. Moklyachuk, М. Sidei// Communication in Optimization Theory. — 2016. — Article ID 21. — 18 p. URL: <http://cot.mathres.org/issues/COT201621.pdf>

Тези наукових доповідей

1. *Moklyachuk M. P.* Interpolation problem for stationary sequences with missing observations/ М. P. Moklyachuk, М. I. Sidei// International conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces”, October 14-16, 2015, Kyiv, Ukraine (program and abstracts) — 2015. — P. 39.
2. *Моклячук М. П.* Задача інтерполяції стаціонарних послідовностей/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано-Франківськ 24-27 лютого 2016 р.(тези доповідей) — 2016. — С. 40–41.

3. *Моклячук М. П.* Оцінювання невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності за спостереженнями із пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19-20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ “КПІ”, 2016. — С. 113–117.
4. *Сідей М. І.* Екстраполяція стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками/ М. І. Сідей// XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців “Шевченківська весна”, 6-8 квітня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. — 2016. — С. 68–72.
5. *Моклячук М. П.* Задача фільтрації стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано - Франківськ, 22-25 лютого 2017 р.(тези доповідей) — 2017. — С. 41–42.

ЗМІСТ

ВСТУП	12
Розділ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	32
Розділ 2. ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПРОПУСКАМИ	39
2.1. Стационарні послідовності. Спектральний розклад	39
2.2. Задача інтерполяції стаціонарної послідовності з пропусками . .	42
2.2.1. Класичний метод інтерполяції	42
2.2.2. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції	52
2.2.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D = D_0^-$	54
2.2.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D = D_W$	56
2.2.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D = D_v^u$	59
2.3. Задача інтерполяції стаціонарної послідовності, що спостерігається з шумом	60
2.3.1. Класичний метод інтерполяції	60
2.3.2. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції	70
2.3.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$	74
2.3.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$	76
2.3.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$	77
2.4. Задача екстраполяції стаціонарної послідовності з пропусками .	79

2.4.1.	Класичний метод екстраполяції	80
2.4.2.	Мінімакський (робастний) метод екстраполяції	95
2.4.3.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_W \times$ D_0	98
2.4.4.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$	102
2.4.5.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times$ D_{ε_2}	103
2.5.	Задача фільтрації стаціонарної послідовності з пропусками . . .	105
2.5.1.	Класичний метод фільтрації	106
2.5.2.	Мінімакський (робастний) метод фільтрації	120
2.5.3.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times$ D_{ε_2}	122
2.5.4.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_\varepsilon^1 \times$ D_v^u	124
2.5.5.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_\varepsilon^2 \times$ D_v^u	125
	Висновки до розділу 2	126

Розділ 3. ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПРОПУ- СКАМИ 129

3.1.	Стаціонарні процеси. Спектральний розклад	129
3.2.	Задача інтерполяції стаціонарного процесу з пропусками	131
3.2.1.	Класичний метод інтерполяції	131
3.2.2.	Мінімакський (робастний) метод інтерполяції	136
3.2.3.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_0 \times D_\varepsilon$	138
3.2.4.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times$ $D_{\varepsilon_2}^2$	141
3.3.	Задача екстраполяції стаціонарного процесу з пропусками . . .	143
3.3.1.	Класичний метод екстраполяції	143

3.3.2.	Мінімаксний (робастний) метод екстраполяції	149
3.3.3.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_0 \times D_\varepsilon^1$	152
3.3.4.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times$ D_0	155
3.4.	Задача фільтрації стаціонарного процесу з пропусками	156
3.4.1.	Класичний метод фільтрації	157
3.4.2.	Мінімаксний (робастний) метод фільтрації	162
3.4.3.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times$ $D_{\varepsilon_2}^2$	164
3.4.4.	Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times$ $D_{\varepsilon_2}^1$	166
	Висновки до розділу 3	168
	ВИСНОВКИ	170
	Список використаних джерел	172
	ДОДАТОК	182
	Список опублікованих праць	182
	Апробація результатів дисертації	183

ВСТУП

Актуальність теми. В епоху інформаційного суспільства однією з важливих задач є обробка зібраних даних та прогнозування майбутніх значень на їх основі. Такі задачі виникають у різних галузях науки, зокрема теорії автоматичного регулювання, статистичній оптиці і радіофізиці, метеорології, астрономії, океанографії, статистичній гідромеханіці тощо. Чимало явищ, що досліджуються, можна описати за допомогою моделей стаціонарних процесів та послідовностей. Тому й виникають питання про оцінювання невідомих значень стаціонарних випадкових процесів.

Постановка задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації і методів їх розв'язання належить А. М. Колмогорову. Задача екстраполяції стаціонарних процесів досліджується у роботах А. М. Яглома, Н. Вінера, М. Г. Крейна, О. Ханнера, К. Карунена. Ґрунтовний виклад теорії стаціонарних процесів можна знайти в книгах Ю. Розанова, П. Броквела та Р. Девіса. Серед робіт, в яких досліджуються задачі оцінювання невідомих значень процесів, можна виділити роботи, які присвячені оцінкам значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками досліджувались у роботах М. Поурахмаді, А.Г. Міямі, Ю.Касахара, П. Бондона, М. Пелагатті.

Запропонований А. М. Колмогоровим метод розв'язання задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів базується на припущенні, що відомі точні значення спектральних щільностей процесів чи послідовностей. В умовах спектральної невизначеності, коли задано лише множини допустимих значень спектральних щільностей, доцільно шукати оцінку, яка б мінімізувала величину середньоквадратичної похибки одразу для всіх можливих щільностей із заданого класу. Такий підхід має назву мінімаксного і вперше запропоновано У. Гренандером у 1957 році для задачі екстраполяції стаціо-

нарного процесу. У 1985 році опубліковано статтю С. А. Кассама та Г. В. Пура, яка містить огляд робастних методів обробки сигналів для деяких моделей спектральної невизначеності. Задачі мінімаксної екстраполяції, інтерполяції та фільтрації функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів та послідовностей досліджено у роботах М. П. Моклячука. Задачі оптимального оцінювання для векторних стаціонарних послідовностей та процесів досліджено М. П. Моклячуком та його учнем О. Ю. Масюткою. Для періодичного корельованих стаціонарних процесів відповідні задачі розв'язано М. П. Моклячуком та його ученицею І. І. Голіченко. Результати досліджень задач оцінювання функціоналів від процесів та послідовностей з стаціонарними приростами викладено в працях М. П. Моклячука та його учня М. М. Луза.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі середньоквадратично оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі досліджено в умовах спектральної визначеності, коли відомі спектральні щільності процесів та послідовностей, та в умовах спектральної невизначеності, коли точні значення спектральних щільностей невідомі, а задано лише класи допустимих значень спектральних щільностей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках державної бюджетної науково-дослідної теми №11БФ038-02 “Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей” (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт “Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів”.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розв'язання задач середньоквадратично оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Вивчаються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Завданням дослідження є виведення формул для обчислення середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів за умов спектральної визначеності, коли відома спектральна структура процесів і послідовностей, та встановлення співвідношень для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів в умовах спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих значень спектральних щільностей.

Об'єктом дослідження є стаціонарні послідовності та процеси з пропусками спостережень.

Предметом дослідження є задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками.

Методи дослідження. У роботі використано основні положення спектральної теорії стаціонарних послідовностей та процесів для знаходження оптимальних оцінок лінійних функціоналів. Формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок в умовах спектральної визначеності знаходяться за допомогою методу ортогональних проєкцій в гільбертових просторах запропонованого А.М. Колмогоровим. В умовах спектральної невизначеності для розв'язання екстремальних задач застосовуються методи опуклої оптимізації.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, отримані в дисертації, є новими. Основні з них наступні:

— розв'язано задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі оці-

- нювання лінійних функціоналів від стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками (задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації);
- виведено формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок лінійних функціоналів у випадку спектральної визначеності, коли задано явний вигляд спектральних щільностей стаціонарних послідовностей та процесів;
 - встановлено співвідношення та формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімакських спектральних характеристик оптимальних оцінок лінійних функціоналів у випадку спектральної невизначеності для заданих класів допустимих спектральних щільностей, застосовуючи мінімакський підхід.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в роботі результати мають теоретичне значення при вивченні теорії випадкових процесів, а саме теорії стаціонарних послідовностей та процесів, та практичне застосування у задачах теорії часових рядів, теорії передачі інформації, фінансової математики. Результати дослідження можуть бути використані при розв'язанні задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів і послідовностей, що спостерігаються з пропусками за їх спостереженнями з шумом чи без.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації опубліковано п'ять наукових робіт у фахових виданнях та одна стаття в електронному виданні. Всі роботи опубліковані у співавторстві з науковим керівником, професором Моклячуком М. П. В роботах співавтору належать постановка задач, загальне керівництво роботою та обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

1. International Conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces” (Kyiv, 2015)
2. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ, 2016);
3. XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців “Шевченківська весна” (Київ, 2016)
4. XVII міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 2016);
5. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ, 2017);
6. Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Ю. С. Мішури та проф. Ю. В. Козаченка (м. Київ, 2017);
7. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, 2017);
8. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я. І. (м. Львів, 2017);

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових публікацій. З них

- 6 статей [19], [77]–[81] у фахових виданнях, серед яких 3 статті [19], [79], [80] у наукових фахових виданнях України, одна стаття [19] з яких надрукована у журналі, англomовна версія якого включена до наукометричної бази Scopus, 2 статті [77], [78] у іноземному журналі,

що включений до наукометричної бази Scopus та 1 стаття в електронному журналі [81];

— 5 тез доповідей на наукових конференціях [20] - [22], [29], [82].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, 3 розділів, які містять підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який містить 101 найменувань та додатку. Повний обсяг роботи – 184 сторінок, в тому числі 160 сторінок основного тексту.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача та короткий зміст роботи.

Перший розділ містить огляд літератури, пов'язаної з темою дисертації, та стислий опис праць, де досліджувались проблеми схожі з розглянутими в дисертаційній роботі.

У першому підрозділі **другого розділу** наведено означення та основні твердження спектральної теорії стаціонарних послідовностей.

У другому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу інтерполяції, тобто середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$,

$S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, M_{l+1}, \dots, M_l + N_{l+1}\}$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_s \xi$ функціонала $A_s \xi$ має вигляд

$$\hat{A}_s \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) Z(d\lambda),$$

де $h(e^{i\lambda})$ – спектральна характеристика оцінки. У випадку спектральної ви-

значеності, коли спектральна щільність стаціонарної послідовності відома, знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Теорема 0.1. *Нехай $\xi(j)$ – стаціонарна стохастична послідовність з спектральною щільністю $f(\lambda)$ такою, що $\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty$. Середньоквадратичну похибку $\Delta(h, f)$ та спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_s \xi$ функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$ можна обчислити за формулами*

$$h(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) e^{ij\lambda} - \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (B_s^{-1} \vec{a}_s)_j e^{ij\lambda} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{im\lambda}, \quad (1)$$

$$\Delta(h; f) = \langle B_s^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle,$$

де \vec{a}_s – вектор побудований з коефіцієнтів, що визначають функціонал $A_s \xi$, $\vec{a}_s = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s)$, $\vec{a}_k = (a(M_{k-1}), \dots, a(M_{k-1} + N_k))$, $k = 1, \dots, s$, B_s – матриця розмірності $q \times q$, $q = N_1 + N_2 + \dots + N_s + s$,

$$B_s = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

де B_{mn} – матриці розмірності $(N_m + 1) \times (N_n + 1)$, які утворені коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$

$$B_{mn}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda} d\lambda = r_{k-j}, \quad m, n = 1, \dots, s,$$

$$k = M_{m-1}, \dots, M_{m-1} + N_m, \quad j = M_{n-1}, \dots, M_{n-1} + N_n.$$

Вказаними результатами можна користуватись лише у випадку, коли відомо точний вигляд спектральної щільності. У випадку, коли задано лише клас допустимих спектральних щільностей застосовується мінімаксий метод оцінювання функціоналів.

Означення 0.1. Для заданого класу спектральних щільностей D спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D$ називається найменш сприятливою в D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо

$$\Delta(f_0) = \Delta(h(f_0); f_0) = \max_{f \in D} \Delta(h(f); f).$$

Означення 0.2. Для заданого класу спектральних щільностей D спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{f \in D} L_2^s(f), \quad \min_{h \in H_D} \max_{f \in D} \Delta(h; f) = \sup_{f \in D} \Delta(h^0; f).$$

Лема 0.1. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D$ найменш сприятлива в класі D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $f_0^{-1}(\lambda)$ задають матрицю B_s^0 , що визначає розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{f \in D} \langle B_s^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle = \langle (B_s^0)^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за формулою (1) за умови, що $h(f_0) \in H_D$.

У підрозділах 2.2.3, 2.2.4 та 2.2.5 розглянуто задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A_s \xi$, коли спектральна щільність $f(\lambda)$ належить до одного з класів допустимих спектральних щільностей

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda \geq P \right. \right\},$$

$$D_W = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) \cos(w\lambda) d\lambda = r_w, w = 0, 1, \dots, W \right. \right\},$$

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| 0 \leq v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda = P \right. \right\}.$$

У третьому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу інтерполяції, тобто оптимального в середньоквадратичному сенсі оцінювання лінійного функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$,

$S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$. Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_s \xi$ має вигляд

$$\hat{A}_s \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) Z_{\xi+\eta}(d\lambda).$$

Теорема 0.2. Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda) \\ f_{\eta\xi}(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix}$ такою, що виконується умова мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty. \quad (2)$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{A_s(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda))}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (3)$$

$$\Delta(h; F) = \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle,$$

де \mathbf{B}_s , \mathbf{R}_s , \mathbf{Q}_s – матриці з елементами, що задаються наступними формулами, $j, k \in S$,

$$B_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$R_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$Q_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.$$

Наслідок 0.1. Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty. \quad (4)$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (5)$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle,$$

де матриці \mathbf{R}_s , \mathbf{B}_s , \mathbf{Q}_s визначаються наступними елементами відповідно, $k, j \in S$,

$$R_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$B_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$Q_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.$$

У пункті 2.3.2 розглянуто мінімаксий підхід до задачі інтерполяції стаціонарної послідовності з шумом, що спостерігається з пропусками.

Лема 0.2. Спектральні щільності $f^0(\lambda), f_{\xi\eta}^0(\lambda), f_{\eta\xi}^0(\lambda), g^0(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності (2), формують матрицю спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D$, яка є найменш сприятливою в класі D для лінійної оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій

$$\frac{1}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)}, \quad \frac{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda)}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)},$$

$$\frac{f^0(\lambda)g^0(\lambda) - f_{\xi\eta}^0(\lambda)f_{\eta\xi}^0(\lambda)}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)}$$

задають матриці $\mathbf{B}_s^0, \mathbf{R}_s^0, \mathbf{Q}_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{F \in D} \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(F^0)$ може бути обчислена за формулою (3), якщо $h(F^0) \in H_D$.

Лема 0.3. Нехай стаціонарні послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ некорельовані. Спектральні щільності $f_0(\lambda), g_0(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності (4), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

задають матриці $\mathbf{B}_s^0, \mathbf{R}_s^0, \mathbf{Q}_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (5) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

У пунктах 2.3.3, 2.3.4 та 2.3.5 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A_s \xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей $D_f^0 \times D_g^0, D_v^u \times D_\varepsilon$ та

$D_{\varepsilon_1}^2 \times D_{\varepsilon_2}^1$, де

$$D_f^0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\}, \quad D_g^0 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_1}^2 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^1 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\}.$$

У четвертому пункті **другого розділу** досліджено задачу екстраполяції, тобто оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S = \{\dots, -2, -1\} \setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $S = \bigcup_{l=1}^s \{-M_l -$

$N_l, -M_l - N_l + 1, \dots, -M_l\}$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. Позначимо $T = S \cup \{0, 1, \dots\}$.

Теорема 0.3. *Нехай $\xi(j)$ і $\eta(j)$ – стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda)$ такою, що виконана умова мінімальності (2). Припустимо, що коефіцієнти $\{a(j), j = 0, 1, \dots\}$, які визначають функціонал $A\xi$, задовольняють умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a(k)| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |a(k)|^2 < \infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$\Delta(h; F) = \langle \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q} \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle,$$

де вектор $\vec{\mathbf{a}} = (\vec{a}_s, \vec{a}_{s-1}, \dots, \vec{a}_1, \vec{a})$ складається з компонент

$$\vec{a}_k = (a(-M_k - N_k), a(-M_k - N_k + 1), \dots, a(-M_k)), k = 1, 2, \dots, s,$$

та вектора $\vec{a} = (a(0), a(1) \dots)$ побудованого з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$. \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що визначаються матрицями з елементами $k, j \in T$,

$$b_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$r_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$q_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.$$

Зауважимо, що якщо потрібно знайти лише прогноз стаціонарної послідовності за даними спостережень з пропусками, то вектор $\vec{\mathbf{a}}$ має вигляд $\vec{\mathbf{a}} = (0, 0, \dots, 0, \vec{a})$, де перші $|S| = \sum_{k=1}^s (N_k + 1)$ елементів рівні нулю, а останній елемент $\vec{a} = (a(0), a(1) \dots)$ побудований з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$.

У пунктах 2.4.3, 2.4.4 та 2.4.5 для множин допустимих спектральних щільностей $D_W \times D_0$, $D_v^u \times D_\varepsilon$ та $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}$ знайдено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності.

У п'ятому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу фільтрації, тобто оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j \in Z^S} a(j)\xi(-j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $S = \bigcup_{l=1}^s \{-(M_l + N_l), \dots, -M_l\}$, $Z^S = \{1, 2, \dots\} \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s \{M_l, \dots, M_l + N_l\}$, $M_0 = 0$, $N_0 = 0$.

Теорема 0.4. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – корельовані між собою стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda)$ такою, що виконується умова мінімальності (2). Припускаємо, що коефіцієнти $\{a(j), j \in Z^S\}$, які визначають функціонал $A\xi$, задовольняють наступні умови*

$$\sum_{k \in Z^S} |a(k)| < \infty, \quad \sum_{k \in Z^S} (k+1) |a(k)|^2 < \infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$\Delta(h; F) = \langle \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q} \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle,$$

де вектор $\vec{\mathbf{a}}$ має вигляд $\vec{\mathbf{a}} = (\vec{0}_0, \vec{a}_1, \vec{0}_1, \vec{a}_2, \vec{0}_2, \dots, \vec{a}_i, \vec{0}_i, \dots, \vec{a}_s, \vec{0}_s, \vec{a}_{s+1})$, де $\vec{0}_0$ складається з $|S| + 1$ нулів, $|S| = \sum_{k=1}^s (N_k + 1)$ – кількість пропусків, вектори $\vec{0}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, складаються з $N_i + 1$ нулів, інші вектори побудовані з коефіцієнтів, що визначають функціонал $A\xi$, і мають вигляд

$$\vec{a}_1 = (a(1), \dots, a(M_1 - 1)),$$

$$\vec{a}_i = (a(M_{i-1} + N_{i-1} + 1), \dots, a(M_i - 1)), \quad i = 2, \dots, s,$$

$$\vec{a}_{s+1} = (a(M_s + N_s + 1), a(M_s + N_s + 2), \dots).$$

$\mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що визначаються матрицями з елементами, $k, j \in T$,

$$b_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$r_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+j)\lambda} \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$q_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.$$

У підрозділах 2.5.3, 2.5.4 та 2.4.5 розв'язано задачі мінімаксного (робастного) оцінювання лінійного функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих щільностей $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$, $D_{\varepsilon}^1 \times D_v^u$, $D_{\varepsilon}^2 \times D_v^u$.

У першому підрозділі **третього розділу** наведено означення стаціонарного процесу та основні твердження спектральної теорії стаціонарних процесів.

У другому підрозділі **третього розділу** досліджено задачу інтерполяції, тобто оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} a(t) \xi(t) dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_s \xi$ має вигляд

$$\hat{A}_s \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{i\lambda}) (Z_{\xi}(d\lambda) + Z_{\eta}(d\lambda)).$$

Теорема 0.5. Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad \gamma(\lambda) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \alpha(t) e^{it\lambda} dt, \quad (6)$$

де $\gamma(\lambda)$ – деяка ненульова функція експоненціального типу. Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оцінки функціонала $A_s \xi$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_s(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \quad t \in S, \quad (7)$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle,$$

де \mathbf{B}_s , \mathbf{R}_s , \mathbf{Q}_s – лінійні оператори в просторі $L_2(S)$, що задаються рівностями

$$(\mathbf{B}_s \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$(\mathbf{R}_s \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$(\mathbf{Q}_s \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$\mathbf{x}(t) \in L_2(S), \quad t \in S.$$

У пункті 3.2.2 розглянуто мінімаксий (робастний) метод оцінювання функціоналів у випадку спектральної невизначеності за умови, що задано клас допустимих спектральних щільностей.

Лема 0.4. Спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$, що задовольняють умову мінімальності (6), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій $(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$ задають оператори $\mathbf{B}_s^0, \mathbf{R}_s^0, \mathbf{Q}_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}_s \vec{a}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{a}, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{a}, \vec{a} \rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (7) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

У пунктах 3.2.3 та 3.2.4 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціоналів $A_s \xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класу допустимих спектральних щільностей $D_0 \times D_\varepsilon$ та $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^2$, де

$$D_0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \left| f(\lambda) = (1 - \varepsilon_1)f_1(\lambda) + \varepsilon_1 w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^2 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\}.$$

У третьому підрозділі **третього розділу** розв'язано задачу екстраполяції, тобто задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_0^{\infty} a(t)\xi(t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. Процес $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$.

Теорема 0.6. Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (6), де

$$\gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} \alpha(t) e^{it\lambda} dt.$$

Припустимо, що функція $a(t)$, яка визначає функціонал $A\xi$ задовольняє умови

$$\int_0^{\infty} |a(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} t |a(t)|^2 dt < \infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оцінки функціонала $A\xi$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle \mathbf{R} \vec{a}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q} \vec{a}, \vec{a} \rangle,$$

де функція $\mathbf{a}(t)$ має вигляд $\mathbf{a}(t) = 0$, $t \in S$, $\mathbf{a}(t) = a(t)$, $t \geq 0$, а \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – лінійні оператори в просторі $L_2(T)$, що задаються рівностями

$$(\mathbf{B} \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u-t)}}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u-t)}}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \quad (8)$$

$$(\mathbf{R} \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u-t)} f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u-t)} f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Q}\mathbf{x})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u-t)} f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u-t)} f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,
\end{aligned} \tag{9}$$

$\mathbf{x}(t) \in L_2(T)$, $t \in T$.

У пунктах 3.3.3 та 3.3.4 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей $D_0 \times D_\varepsilon^1$ та $D_v^u \times D_0$, де

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon^1 &= \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon \right. \right\}, \\
D_v^u &= \left\{ f(\lambda) \left| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\}.
\end{aligned}$$

У четвертому підрозділі **третього розділу** розв'язано задачу фільтрації, а саме задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_{R^s} a(t)\xi(-t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $R^s = [0, \infty) \setminus S^+$,

$$S^+ = \bigcup_{l=1}^s [M_l, \dots, M_l + N_l], M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k), N_0 = 0, K_0 = 0.$$

Теорема 0.7. *Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (6), де*

$$\gamma(\lambda) = \int_{R^s} \alpha(t) e^{it\lambda} dt.$$

Нехай функція $a(t)$, яка визначає функціонал $A\xi$ задовольняє умови

$$\int_{R^s} |a(t)| dt < \infty, \quad \int_{R^s} t |a(t)|^2 dt < \infty. \tag{10}$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оцінки функціонала $A\xi$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q} \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle,$$

де $\mathbf{a}(t)$ функція виду $\mathbf{a}(t) = 0, t \in S, \quad \mathbf{a}(t) = a(t), t \in R^s \quad \mathbf{a}(t) = 0, t \in S^+.$
 $\mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ – лінійні оператори в просторі $L_2(T)$, що визначаються формулами (8), (9) та рівністю

$$(\mathbf{R} \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda(u+t)} f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u+t)} f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \quad \mathbf{x}(t) \in L_2(T), \quad t \in T.$$

У пунктах 2.3.3 та 2.3.4 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ у випадку, коли спектральні щільності некорельованих стаціонарних процесів належать до класів допустимих щільностей $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^2$ та $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^1$.

Подяка. Автор дисертації висловлює щирю подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Моклячуку Михайлу Павловичу за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

У зв'язку з швидким розвитком інформаційних технологій задачі оцінювання невідомих значень стохастичних процесів набувають все більшої актуальності. Проблеми кодування та відновлення інформації, очищення сигналу від різного роду шумів, прогнозування майбутніх значень процесів виникають у різних сферах прикладних науки. Зокрема ці задачі постають при розв'язанні проблем теорії автоматичного керування, метеорології, астрономії, статистичної фізики, гідромеханіки, при аналізі даних в економіці, медицині, біології. Тому розвиток теорії оцінювання є одним з важливих завдань теорії стохастичних процесів.

Для правильної роботи із спостереженнями процесу необхідно визначити теоретичну модель, яка може його описати, та проаналізувати наявну інформацію про його структуру. Метод оцінювання обирають в залежності від відомих даних про характеристики процесу (кореляційна функція, спектральна щільність чи розклад). На практиці часто досліднику недоступна повна інформація про процес, він може лише оцінити певні його характеристики та визначити множини їх можливих значень.

Процеси, що не змінюють своїх ймовірнісних характеристик з часом, отримали назву стаціонарних. Для таких процесів добре розвинута теорія оцінювання невідомих значень у припущенні, що відома повна інформація про їх спектральні характеристики. Класичними вважаються результати, що отримані А. М. Колмогоровим. У роботі [5] розглядаються стаціонарні та стаціонарно пов'язані послідовності. Основні властивості виведені на основі результатів Х. Крамера [37] та Х. Волда [98]. Стаціонарна послідовність розглядається як функція $x(t)$ дискретного аргументу $t \in \mathbb{Z}$ із значеннями у гільбертовому просторі і описується як результат дії унітарного оператора

$U(x) = x(t + 1)$ на цьому ж гільбертовому просторі. Використовуючи теорію унітарних операторів А.М. Колмогоров отримав спектральне представлення коваріаційної функції та самої стаціонарної послідовності, характеристику стаціонарних підпорядкованих послідовностей, розклад стаціонарних послідовностей на ортогональні доданки, зображення у вигляді рухомого середнього. Завдяки результатам Х. Вольда автор наводить розклад Вольда для стаціонарної послідовності, вводить поняття та критерій регулярності, поняття мінімальної послідовності та наводить умову мінімальності для спектральної щільності. В роботі [6] описані результати застосовуються до задач екстраполяції та інтерполяції центрованої квадратично інтегрованої стаціонарної послідовності $x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Задача екстраполяції полягає у відшуканні при заданих $n > 0$ та $m \geq 0$ таких дійсних коефіцієнтів a_k , при яких лінійна комбінація

$$L = a_1x(t - 1) + a_2x(t - 2) + \dots + a_nx(t - n)$$

випадкових величин $\{x(t - 1), x(t - 2), \dots, x(t - n)\}$ задає найбільш точне наближення до випадкової величини $x(t + m)$. За міру точності наближення автор обирає математичне сподівання квадрату відхилення отриманого значення від невідомого $\sigma_E^2(m, n) = E|x(t + m) - L|^2$ і знаходить розв'язок задачі $\sigma_E^2(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_E^2(m, n)$. Оцінка пропущеного значення $x(t)$ шукається у вигляді лінійної комбінації

$$Q = a_1x(t+1) + a_2x(t+2) + \dots + a_nx(t+n) + a_{-1}x(t-1) + a_{-2}x(t-2) + \dots + a_{-n}x(t-n).$$

Для цієї задачі величина $\sigma_I^2(n) = E|x(t) - Q|^2$ розглядається як міра точності та знаходиться границя $\sigma_I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_I^2(n)$. Кожна з задач розглядається в припущенні, що щільності задовольняють умову мінімальності.

Явний вигляд оцінок невідомих значень у задачах інтерполяції, екстраполяції та фільтрації отримано А. М. Ягломом [27], [100], [101] та Н. Вінером [95] для випадку процесів з раціональними щільностями. Свій внесок в розвиток задач прогнозування та інтерполяції стаціонарних процесів зробили Т. Наказі [83], Х. Салех [90], Х. Волд [99].

Одночасно з розвитком теорії одновимірних стаціонарних процесів, відбувся розвиток і векторних стаціонарних процесів. Задачу екстраполяції для векторного стаціонарного процесу розв'язано в роботі В.М. Засухіна [4]. Автор вперше сформулював критерій регулярності стаціонарного процесу максимального рангу. В роботах Ю.А. Розанова [24], [25] вивчаються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для векторних стаціонарних процесів та показано приклади застосування отриманих результатів. Результати дослідження задач прогнозу векторних стаціонарних процесів викладені в роботі Н. Вінера та П. Масані [96], [97]. В монографії Е. Хеннана [49] можна знайти детальний опис аналізу часових рядів, зокрема прогнозування багатовимірних стаціонарних процесів. А. М. Яглом [28] вивчав задачі лінійного оцінювання векторних процесів з матрицею спектральних щільностей складеної з раціональних функцій.

На практиці при аналізі експериментальних даних часто відбуваються ситуації, коли за якихось причин є пропуски в спостережуваних даних. Такі випадки досліджувались у роботах С. Р. Брубакера та Т. Вілсона, Е. Дамслета, Б. Абрахама, А.П. Мірабель і Л.І. Пітербарга, П. Бондона, Р. Ченга, М. Поурахмаді, М. Пелагатті.

У роботі С. Р. Брубакера та Т. Вілсона [34] розглядається задача інтерполяції часових рядів та її застосування в оцінюванні впливу вихідних днів на використання електроенергії. Автори розглядають дискретний випадок, коли пропущено лише одне або декілька послідовних значень, а до та після розриву послідовність спостережень неперервна, та застосовують метод найменших квадратів, який дає змогу отримати систему лінійних рівнянь для відшукування невідомих значень. Інший підхід до розв'язання задачі інтерполяції запропоновано у роботі Е. Дамслета [38]. Автор поєднує методи прогнозування вперед і прогнозування назад у метод проміжного прогнозу з мінімальною величиною похибки прогнозу. У роботі Б. Абрахама [30] розглядається задача інтерполяції часових рядів, коли пропуски розташовані послідовно, а всі спостереження до і після відомі. Оцінку невідомих значень автор шукає у

вигляді середнього арифметичного прогнозу вперед і прогнозу назад. Метод прогнозування вперед і назад також використовується до задачі інтерполяції у роботі А.П. Мірабеля і Л.І. Пітербарга [9], оцінку невідомих значень автори представляють як лінійну комбінацію скінченної кількості відомих спостережень.

У роботі М. Поурахмаді [88] автор запропонував розв'язок задачі інтерполяції пропусків стаціонарного часового ряду за допомогою розбиття її на задачі прогнозу і регресії. Це дозволяє використати багатокроковий прогноз для оцінки невідомих значень і застосувати існуючі пакети комп'ютерних програм для часових рядів. Методи прогнозування та інтерполяції часових рядів з пропусками розроблені Р. Ченгом та М. Поурахмаді [36], які ефективні у випадку декількох довільних пропусків.

У статті Р. Ченга, А.Г. Міамі та М. Поурахмаді [35] наведено формули для обчислення відстанні $\inf_f \int_0^{2\pi} |1 - f|^p w d\lambda$, коли f пробігає тригонометричні поліноми з частотами в множинах $S_1 = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $S_2 = \{\dots, -3, -2, -1\} \setminus \{-n\}$, $S_3 = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{n\}$.

У роботі М. Поурахмаді, А. Інойє та Ю. Касахара [87] для невідомої інтегровної функції w на одиничному колі T виведено співвідношення для відстанні $\inf_f \int_T |1 - f|^2 w d\mu$, коли f пробігає тригонометричні поліноми з частотами в $S_1 = \{\dots, -3, -2, -1\} \setminus \{-n\} \cup \{m\}$, $m \geq 0, n \geq 2$.

Задача прогнозування стаціонарного процесу за спостереженнями з пропусками досліджується у роботі П. Бондона [32]. Для випадку, коли пропуски не розташовані послідовно, за допомогою розкладу Вольда автором наведено точний вигляд похибки прогнозу та представлення самого прогнозу у вигляді послідовності авторегресії. Крім того, автор охарактеризував процеси прогнозування яких не залежить від пропусків. У роботі П. Бондона [31] досліджено вплив пропущених значень на лінійний прогноз стаціонарних часових рядів та отримано асимптотичну поведінку похибки прогнозу для процесів з короткотривалою да довготривалою пам'яттю.

Випадок векторних стаціонарних процесів з пропусками досліджений у статті Ю. Касахара, М. Поурахмаді та А. Інойе [55]. Запропонований авторами підхід для розв'язання складних задач прогнозування базується на властивостях дуальності та біортогональності випадкових векторів. Цей підхід залежить від явного представлення похибки прогнозу в термінах даних, а не самого прогнозу як в традиційних методах.

У роботі С. Вірасінгі [94] досліджується задача відновлення пропущених значень стаціонарного часового ряду на прикладі вивчення впливу двоокису сірки на здоров'я людини. Оптимальний спосіб отримано шляхом включення помилок прогнозу у метод проміжного прогнозування. Книга М. Пеллагатті [84] присвячена моделям часових рядів з пропусками. В роботі наведено стратегії вибору моделі в залежності від потреби дослідника та розглянуто їх прикладне застосування.

Розглянуті вище роботи використовували явний вигляд спектральних щільностей. Але на практиці частіше постають задачі оцінювання за спостереженнями процесу з шумом, тобто точний вигляд щільності невідомий. У такому випадку можна спробувати знайти оцінку невідомих щільностей і до неї застосувати результати класичної теорії оцінювання. Проте в роботі [92] К. С. Вастола та Г.В. Пур на прикладах деяких класів спектральних щільностей показали, що такий спосіб може призвести до значного збільшення величини середньоквадратичної похибки. Автори показали, що фільтр Вінера є більш чутливим до змін моделі, ніж робастний фільтр Вінера, який найменш чутливий до найгіршого випадку спектральної невизначеності. Це означає, що за умов спектральної невизначеності доцільно шукати оцінку, яка була б оптимальною одночасно для всіх щільностей із заданого класу допустимих спектральних щільностей. Цей метод називається мінімаксним (робастним). Оцінки знайдені за допомогою цього методу мінімізують максимальне значення величини середньоквадратичної похибки. Звідси й сама назва методу.

Описаний метод вперше запропонував У. Гренандер у роботі [48], в якій автор розглядав задачу екстраполяції стаціонарного процесу. Задача сфор-

мультівана як гра двох гравців X та P , де перший гравець обирає процес $\{x(t), t \in \mathbb{Z}\}$, а другий за спостереженнями процесу $x(t)$ при $t \leq 0$ буде прогнозувати лінійного функціоналу $Ax = \int_0^1 a(t)x(t)dt$. Невизначеність задана з ймовірнісними характеристиками $Ex(t) = 0$, $Ex^2(t) = 1$. Гравець X прагне максимізувати значення виграшу $E(Ax - px)^2$, а гравець P – мінімізувати його. Автор показав, що задача

$$\max_x \min_p E(Ax - px)^2 = \min_p \max_x E(Ax - px)^2 = \nu$$

має сідлову точку. Ціна гри та значення px визначаються заданою функцією $a(t)$, $t \in (0, 1)$. Аналогічні задачі розглянуто в роботах М. П. Моклячука [10], [70].

В умовах спектральної невизначеності у розподілах, коли присутні ε -забруднення нормального розподілу, П. Д. Хубер [51] побудував M -оціночну функцію та з її допомогою розв'язав сформульовану задачу. У роботі [52] П.Д. Хубер навів умови, за яких цензурований тест відношення вірогідностей є робастним, тобто нечутливим до малих відхилень від теоретичної моделі. Показав як з його допомогою визначити чи є спектральні щільності найменш сприятливими. Пізніше його результати розвинули Г. Пур та С. А. Кассам [58]. Л. Брейман [33] розглянув процедуру мінімаксної фільтрації сигналу стаціонарної послідовності від шуму, коли спектральний розподіл сигналу належить опуклій множині.

Задачі мінімаксного оцінювання комплекснозначної стаціонарної послідовності для випадку моделі ε -забруднення досліджено у роботах Ю. Хосоя [50] та М. Танігуші [91]. Узагальнити результати для задачі мінімаксної інтерполяції вдалось С. А. Кассаму [56], [57] використавши метод М. Танігуші до “смугової” моделі часових рядів, яка включає в себе моделі Ю. Хосоя та М. Танігуші. За допомогою перевірки статистичних гіпотез автор отримав вигляд найменш сприятливих спектральних щільностей.

У роботах Ю. Франке [44], [45] автору вдалось довести існування розв'язків задач мінімаксної екстрполяції на один крок вперед та інтерполяції одного

пропущеного значення. За допомогою теорії опуклої оптимізації автор вивів співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних опуклих множин.

Задачу мінімаксної фільтрації розглянуто в роботах Г. Пура [85], Ю. Франке та Г. Пура [46]. Авторами запропоновано формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей. У роботі [86] Г. Пур розглядає застосування побудованого робастного узгодженого фільтра до обробки сигналу із невизначеними нелінійними забрудненнями каналу. С. Верду та Г. В. Пур [93] використовували теорію ігор до задачі робастного оцінювання.

У роботах Голубева Г. В. та М. С. Пінскера [2], [3] розглядаються задачі мінімаксної інтерполяції, фільтрації та інтерполяції послідовності для випадку сигналів з обмеженою середньою енергією. Стаття С.А. Кассама та Г.В. Пура [58] містить огляд робастних методів обробки сигналів розроблених до 1985 року. Можна відмітити також книгу О.М. Куркіна, Ю.Б. Коробочкина, С.Д. Шаталова [8], в якій викладені результати мінімаксної обробки інформації.

Формулювання та дослідження задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів належать М. П. Моклячуку [10]-[14], [70]-[72]. Оцінювання проводиться в умовах спектральної визначеності та спектральної невизначеності за спостереженнями з шумом та без нього. Для розглянутих задач побудовано класичні та мінімаксні оцінки функціоналів. Аналогічні задачі оптимального оцінювання для векторних стаціонарних послідовностей та процесів були вивчені М. П. Моклячуком та його учнем О. Ю. Масюткою [15], [16], [73], [74]. Для періодично корельованих процесів та послідовностей результати дослідження аналогічних задач викладено в роботах М.П. Моклячука та його учениці І.І. Голіченко [39]-[43], [76]. Процеси з стаціонарними приростами та задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень таких процесів і послідовностей розглянуті в роботах М.П. Моклячука та його учня М. М. Луза [18], [60]-[69], [75].

РОЗДІЛ 2

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПРОПУСКАМИ

У цьому розділі розв'язано задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками. Задачі досліджено для двох випадків, коли спектральні щільності послідовностей відомі (випадок спектральної визначеності) та коли вигляд щільностей невідомий, але задано класи їх допустимих значень (випадок спектральної невизначеності).

У випадку спектральної визначеності у задачах інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками знайдено формули для обчислення середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних лінійних оцінок функціоналів. За умов спектральної невизначеності встановлено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності у заданих класах допустимих щільностей та відповідні мінімаксні спектральні характеристики оцінок.

Отримані результати дослідження задач оцінювання стаціонарних послідовностей з пропусками опубліковано в роботах [19], [77], [78].

2.1. Стаціонарні послідовності. Спектральний розклад

В даному підрозділі наведено основні означення та твердження теорії стаціонарних послідовностей, що викладено у роботах [26], [47], [54].

Означення 2.1. Послідовність комплексних випадкових величин $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$ із скінченним другим моментом $E |\xi(j)|^2 < \infty$, $j \in \mathbb{Z}$, називається стаціонарною (в широкому розумінні), якщо для всіх $j \in \mathbb{Z}$

$$E\xi(j) = E\xi(0) = 0, \quad E(\xi(j+k)\overline{\xi(j)}) = E(\xi(k)\overline{\xi(0)}) = R(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Будемо далі вважати, що $m = 0$.

Теорема 2.1. (Герглотц) *Нехай $R(k)$ – коваріаційна функція стаціонарної послідовності з нульовим середнім. Тоді на $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ знайдеться така скінченна міра $F = F(B)$, $B \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$, що для будь-якого $k \in \mathbb{Z}$*

$$R(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} F(d\lambda). \quad (2.1)$$

Таке представлення коваріаційної функції називається спектральним. Скінченну міру $F = F(B)$ називають спектральною мірою, а функцію $F(\lambda) = F([-\pi, \lambda])$ – спектральною функцією стаціонарної послідовності з коваріаційною функцією $R(k)$. Якщо коваріаційна функція абсолютно неперервна, то спектральна функція $F(\lambda)$ має щільність $f(\lambda)$, яка визначається формулою $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k} R(k)$. У такому випадку коваріаційну функцію можна записати у вигляді

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda. \quad (2.2)$$

Теорема 2.2. [26] *Існує така ортогональна стохастична міра $Z = Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$, що для будь-якого $j \in \mathbb{Z}$, стаціонарна послідовність допускає розклад (спектральний)*

$$\xi(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} Z(d\lambda), \quad (2.3)$$

При цьому $E |Z(\Delta)|^2 = F(\Delta)$.

Нехай $H(\xi)$ замкнутий лінійний підпростір гільбертового простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, який породжений комплекснозначними випадковими величинами $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$, що мають нульове математичне сподівання, $E\xi = 0$, скінченний другий момент $E|\xi|^2 < \infty$, та скалярний добуток $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$, а $L_2(f)$ – гільбертів простір комплекснозначних функцій на $[-\pi, \pi]$, інтегрованих в квадраті за мірою, що має щільність $f(\lambda)$.

Теорема 2.3. [26] *Нехай ξ – стаціонарна послідовність, і нехай $\eta \in H(\xi)$. Тоді знайдеться така функція $\varphi \in L_2(f)$, що*

$$\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) Z(d\lambda).$$

Далі також будемо розглядати стаціонарно зв'язані між собою стаціонарні послідовності $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta(j), j \in \mathbb{Z}\}$ з коваріаційними функціями, що допускають спектральний розклад

$$\begin{aligned} R_{\xi}(k) &= E\xi(j+k)\overline{\xi(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda, \\ R_{\xi\eta}(k) &= E\xi(j+k)\overline{\eta(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_{\xi\eta}(\lambda) d\lambda, \\ R_{\eta\xi}(k) &= E\eta(j+k)\overline{\xi(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_{\eta\xi}(\lambda) d\lambda, \\ R_{\eta}(k) &= E\eta(j+k)\overline{\eta(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} g(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ортогональні спектральні міри таких стаціонарних послідовностей задовольняють наступні співвідношення

$$\begin{aligned} EZ_{\xi}(\Delta_1)\overline{Z_{\xi}(\Delta_2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f(\lambda) d\lambda, \\ EZ_{\xi}(\Delta_1)\overline{Z_{\eta}(\Delta_2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f_{\xi\eta}(\lambda) d\lambda, \\ EZ_{\eta}(\Delta_1)\overline{Z_{\xi}(\Delta_2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f_{\eta\xi}(\lambda) d\lambda, \\ EZ_{\eta}(\Delta_1)\overline{Z_{\eta}(\Delta_2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} g(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2. Задача інтерполяції стаціонарної послідовності з пропусками

У цьому підрозділі досліджується задача оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, M_{l+1}, \dots, M_l + N_{l+1}\}$. Розглядаються випадки спектральної визначеності, коли спектральна щільність стаціонарної послідовності відома, та спектральної невизначеності, коли задано лише множину допустимих спектральних щільностей.

2.2.1. Класичний метод інтерполяції. Нехай $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ – стаціонарна (у широкому розумінні) стохастична послідовність. Будемо розглядати $\xi(j)$ як елементи гільбертового простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Коваріаційна функція стаціонарної послідовності визначається рівністю $R(k) = (\xi(j+k), \xi(j)) = E\xi(j+k)\overline{\xi(j)}$ і допускає спектральний розклад (2.1) з спектральною мірою $F(\lambda)$. Розглядатимемо стаціонарні стохастичні послідовності з абсолютно неперервними спектральними мірами і коваріаційними функціями вигляду $R(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$, де $f(\lambda)$ спектральна щільність послідовності $\xi(j)$, яка задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.6)$$

Така умова необхідна і достатня для того, щоб була неможлива безпомилкова інтерполяція невідомих значень послідовності [25].

Стаціонарна стохастична послідовність $\xi(j)$ допускає спектральний розклад (2.3) із спектральною мірою $Z(d\lambda)$ такою, що виконується перша рівність з співвідношень (2.5).

Розглянемо задачу середньоквадратичного оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j)$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ за даними спостережень послідовності в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, а $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, M_{l+1}, \dots, M_l + N_{l+1}\}$ – множина пропусків.

Із спектрального представлення (2.3) стохастичної послідовності $\xi(j)$ випливає, що функціонал $A_s(\xi)$ можна представити у вигляді

$$A_s \xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_s(e^{i\lambda}) Z(d\lambda), \quad A_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) e^{ij\lambda}. \quad (2.7)$$

Позначимо через $H^s(\xi)$ замкнутий лінійний підпростір простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, породжений величинами $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z} \setminus S\}$. Через $L_2^s(f)$ позначимо підпростір в $L_2(f)$, породжений функціями $\{e^{ij\lambda}, j \in \mathbb{Z} \setminus S\}$. Середньоквадратична оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_s \xi$ функціонала $A_s \xi$ за спостереженнями послідовності $\xi(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$ належить простору $H^s(\xi)$, і її можна представити у вигляді

$$\hat{A}_s \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) Z(d\lambda), \quad (2.8)$$

де $h(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f)$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_s \xi$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h; f)$ оцінки $\hat{A}_s \xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h; f) = E \left| A_s \xi - \hat{A}_s \xi \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) d\lambda.$$

Класичний метод запропонований А. М. Колмогоровим [59] дозволяє знайти спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(h; f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ в тому випадку, коли відома спектральна щільність $f(\lambda)$ та виконується умова мінімальності (2.6). Спектральну характеристику оцінки знаходять з наступних умов:

- 1) $h(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f)$,
- 2) $A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}) \perp L_2^s(f)$.

З 2-ї умови випливає, що для всіх $\eta \in H^s(\xi)$ повинна виконуватись рівність

$$\left(A_s \xi - \hat{A}_s \xi, \eta \right) = E(A_s \xi - \hat{A}_s \xi) \bar{\eta} = 0.$$

Остання рівність еквівалентна рівнянням

$$E(A_s \xi - \hat{A}_s \xi) \bar{\xi}_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus S.$$

З (2.7), (2.8) і означення скалярного добутку в $H^s(\xi)$ отримуємо наступне співвідношення

$$E \left(\int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) Z(d\lambda) \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} \overline{Z(d\lambda)} \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus S.$$

Із цього співвідношення випливає, що коефіцієнти Фур'є функції $(A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}))f(\lambda)$ дорівнюють нулю при $k \in \mathbb{Z} \setminus S$, а сама функція має вигляд

$$(A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}))f(\lambda) = C_s(e^{i\lambda}), \quad C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(j) e^{ij\lambda},$$

де $c(j), j \in S$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

Із останнього співвідношення знаходимо, що спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки \hat{A}_s має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) - C_s(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda). \quad (2.9)$$

Для того, щоб знайти рівняння для відшукування невідомих коефіцієнтів $c(j), j \in S$, використаємо розклад функції $f^{-1}(\lambda)$ в ряд Фур'є

$$f^{-1}(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{im\lambda}, \quad (2.10)$$

де r_m – коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$.

Підставляючи (2.10) у (2.9) отримуємо наступну формулу для обчислення спектральної характеристики оцінки $\hat{A}_s \xi$

$$h(e^{i\lambda}) = \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)e^{ij\lambda} \right) - \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(j)e^{ij\lambda} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{im\lambda} \right). \quad (2.11)$$

З 1-ї умови випливає, що коефіцієнти Фур'є функції $h(e^{i\lambda})$ дорівнюють нулю при $j \in S$, тобто $\int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0$, $j \in S$.

Скориставшись останніми відношеннями і рівністю (2.11) отримуємо наступну систему рівнянь для відшукування невідомих коефіцієнтів $c(j)$, $j \in S$,

$$\begin{aligned} a(M_{k-1}) - \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(j) r_{M_{k-1}-j} &= 0; \\ a(M_{k-1} + 1) - \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(j) r_{M_{k-1}+1-j} &= 0; \\ &\dots \\ a(M_{k-1} + N_k) - \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(j) r_{M_{k-1}+N_k-j} &= 0, \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Нехай $\vec{a}_s = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s)$, $\vec{a}_k = (a(M_{k-1}), \dots, a(M_{k-1} + N_k))$, $k = 1, \dots, s$, $q = N_1 + N_2 + \dots + N_s + s$. Позначимо через B_s – матрицю розмірності $q \times q$

$$B_s = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

де B_{mn} – матриці розмірності $(N_m + 1) \times (N_n + 1)$, які утворені коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$

$$B_{mn}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda} d\lambda = r_{k-j}, \quad m, n = 1, \dots, s,$$

$$k = M_{m-1}, \dots, M_{m-1} + N_m, \quad j = M_{n-1}, \dots, M_{n-1} + N_n.$$

Тоді систему рівнянь (2.12) можна записати у вигляді

$$\vec{\mathbf{a}}_s = B_s \vec{\mathbf{c}}_s, \quad (2.13)$$

де $\vec{\mathbf{c}}_s = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_s)$, $\vec{c}_k = (c(M_{k-1}), \dots, c(M_{k-1} + N_k))$, $k = 1, \dots, s$, – вектор побудований з шуканих коефіцієнтів $c(j)$, $j \in S$. Оскільки матриця B_s оборотня [87], то $\vec{\mathbf{c}}_s = B_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s$, а невідомі коефіцієнти $c(j)$, $j \in S$, обчислюються за формулою

$$c(j) = (B_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s)_j,$$

де $(B_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s)_j$ – j -ий елемент вектора $B_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s$. Таким чином, спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_s \xi$ обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) e^{ij\lambda} \right) - \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (B_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s)_j e^{ij\lambda} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{im\lambda} \right), \quad (2.14)$$

а середньоквадратична похибка оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(h; f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C_s(e^{i\lambda})|^2 f^{-1}(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k) e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \overline{c(j)} e^{-ij\lambda} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{im\lambda} \right) d\lambda \\ &= \langle c_s, c_s B_s \rangle = \langle B_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в просторі C^q .

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 2.4. *Нехай $\xi(j)$ – стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності (2.6). Середньоквадратичну похибку $\Delta(h, f)$ та спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_s \xi$ функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$ можна обчислити за формулами (2.14), (2.15).*

Приклад 2.1. Дослідимо задачу лінійного оцінювання функціонала $A_2\xi = a(0)\xi(0) + a(1)\xi(1) + a(5)\xi(5)$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $S = \{0, 1\} \cup \{5\}$. У цьому випадку спектральна характеристика лінійної оцінки $\hat{A}_2\xi$ обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = (a(0) + a(1)e^{i\lambda} + a(5)e^{5i\lambda}) - (c(0) + c(1)e^{i\lambda} + c(5)e^{5i\lambda}) \cdot f^{-1}(\lambda), \quad (2.16)$$

де $f(\lambda)$ – відома спектральна щільність послідовності $\xi(j)$, функція $f^{-1}(\lambda)$ розкладається у ряд Фур'є $f^{-1}(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{i\lambda m}$, а коефіцієнти $c(0), c(1), c(5)$ визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} a(0) &= c(0)r_0 + c(1)r_{-1} + c(5)r_{-5}, \\ a(1) &= c(0)r_1 + c(1)r_0 + c(5)r_{-4}, \\ a(5) &= c(0)r_5 + c(1)r_4 + c(5)r_0. \end{aligned}$$

Матриця B_2 має вигляд

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} \\ r_1 & r_0 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} r_{-5} \\ r_{-4} \end{pmatrix}, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} r_5 & r_4 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} r_0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\vec{\mathbf{a}}_2 = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, де $\vec{a}_1 = (a(0), a(1))$, $\vec{a}_2 = (a(5))$, $\vec{\mathbf{c}}_2 = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$, де $\vec{c}_1 = (c(0), c(1))$, $\vec{c}_2 = (c(5))$. Рівняння (2.13) в цьому випадку має вигляд $\vec{\mathbf{a}}_2 = B_2 \vec{\mathbf{c}}_2$, звідки $\vec{\mathbf{c}}_2 = B_2^{-1} \vec{\mathbf{a}}_2$.

Позначимо $D = \det(B_2) = r_0^3 - r_0 r_{-4} r_4 - r_1 r_{-1} r_0 + r_1 r_{-5} r_4 + r_5 r_{-1} r_{-4} - r_5 r_{-5} r_0$. Тоді невідомі коефіцієнти в формулі (2.16) обчислюються за формулами

$$c(0) = [(r_0^2 - r_{-4} r_4) a(0) - (r_{-1} r_0 - r_{-5} r_4) a(1) + (r_{-1} r_4 - r_{-5} r_0) a(5)] \cdot D^{-1},$$

$$c(1) = [(-r_1 r_0 + r_{-4} r_5) a(0) + (r_0^2 - r_5 r_{-5}) a(1) - (r_0 r_{-4} - r_{-5} r_1) a(5)] \cdot D^{-1},$$

$$c(5) = [(r_1 r_4 - r_0 r_5) a(0) - (r_0 r_4 - r_5 r_{-1}) a(1) + (r_0^2 - r_{-1} r_1) a(5)] \cdot D^{-1}.$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(f) = & \langle B_2^{-1} \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_2 \rangle = D^{-1} [(a(0))^2 r_0^2 - (a(0))^2 r_{-4} r_4 - a(0) a(1) r_{-1} r_0 \\ & + a(0) a(1) r_{-5} r_4 + a(0) a(5) r_{-1} r_{-4} - a(0) a(5) r_{-5} r_0 - a(0) a(1) r_0 r_1 + a(0) a(1) r_{-4} r_5 \\ & + (a(1))^2 r_0^2 - (a(1))^2 r_5 r_{-5} - a(1) a(5) r_0 r_{-4} + a(1) a(5) r_{-5} r_1 + a(0) a(5) r_1 r_4 \\ & - a(0) a(5) r_0 r_5 - a(1) a(5) r_0 r_4 + a(1) a(5) r_{-1} r_5 + (a(5))^2 r_0^2 - (a(5))^2 r_1 r_{-1}]. \end{aligned}$$

Розглянемо дану задачу для спектральної щільності

$$f(\lambda) = \frac{1}{|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}, \quad |\alpha| < 1.$$

Тоді $f^{-1}(\lambda) = |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2 = (1 + |\alpha|^2 - \bar{\alpha} e^{i\lambda} - \alpha e^{-i\lambda})$. Таким чином, в формулах для обчислення спектральної характеристики та похибки оцінки функціонала $A_2 \xi$ коефіцієнти $r_4 = r_5 = r_{-4} = r_{-5} = 0$, $r_0 = (1 + |\alpha|^2)$, $r_1 = -\bar{\alpha}$, $r_{-1} = -\alpha$. Спектральна характеристика оцінки обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = (a(0) + a(1)e^{i\lambda} + a(5)e^{5i\lambda}) - (c(0) + c(1)e^{i\lambda} + c(5)e^{5i\lambda}) \times (1 + |\alpha|^2 - \bar{\alpha} e^{i\lambda} - \alpha e^{-i\lambda}),$$

а коефіцієнти $c(0), c(1), c(5)$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} c(0) &= \left[(1 + |\alpha|^2)^2 a(0) + (\alpha(1 + |\alpha|^2)) a(1) \right] \cdot D^{-1}, \\ c(1) &= \left[(\bar{\alpha}(1 + |\alpha|^2)) a(0) + (1 + |\alpha|^2)^2 a(1) \right] \cdot D^{-1}, \\ c(5) &= \left[((1 + |\alpha|^2)^2 - |\alpha|^2) a(5) \right] \cdot D^{-1}, \end{aligned}$$

де $D = (1 + |\alpha|^2) (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4)$.

Підставивши значення $c(0), c(1), c(5)$ в формулу для обчислення спектральної характеристики оцінки, отримаємо

$$\begin{aligned} h(e^{i\lambda}) &= \left[\left(a(0) \alpha (1 + |\alpha|^2)^2 + a(1) \alpha^2 (1 + |\alpha|^2) \right) e^{-i\lambda} + \right. \\ &+ \left(a(0) (\bar{\alpha})^2 (1 + |\alpha|^2) + a(1) \bar{\alpha} (1 + |\alpha|^2)^2 \right) e^{2i\lambda} + \\ &+ a(5) \alpha (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) e^{4i\lambda} + a(5) \bar{\alpha} (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) e^{6i\lambda} \left. \right] \times \\ &\left((1 + |\alpha|^2) (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Похибка оцінки має вигляд

$$\Delta(f) = D^{-1} \left[(a(0))^2(1 + |\alpha|^2)^2 + a(0)a(1)\alpha(1 + |\alpha|^2) + a(0)a(1)(1 + |\alpha|^2)\bar{\alpha} + (a(1))^2(1 + |\alpha|^2)^2 + (a(5))^2(1 + |\alpha|^2)^2 - (a(5))^2|\alpha|^2 \right].$$

а) Покладемо $a(0) = 1$, $a(1) = 0$, $a(5) = 1$. Отримаємо наступний вигляд спектральної щільності

$$h(e^{i\lambda}) = (1 + e^{5i\lambda}) - (c(0) + c(1)e^{i\lambda} + c(5)e^{5i\lambda}) \left(1 + |\alpha|^2 - \bar{\alpha}e^{i\lambda} - \alpha e^{-i\lambda} \right),$$

а коефіцієнти $c(0)$, $c(1)$, $c(5)$ обчислюються за формулами

$$c(0) = \left(1 + |\alpha|^2 \right) / \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right), \quad c(1) = \bar{\alpha} / \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right),$$

$c(5) = 1 / \left(1 + |\alpha|^2 \right)$. Отже, спектральна характеристика оцінки має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = \left[\alpha \left(1 + |\alpha|^2 \right)^2 e^{-i\lambda} + (\bar{\alpha})^2 \left(1 + |\alpha|^2 \right) e^{2i\lambda} + \alpha \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right) e^{4i\lambda} + \bar{\alpha} \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right) e^{6i\lambda} \right] \times \left(\left(1 + |\alpha|^2 \right) \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right) \right)^{-1}.$$

Похибка оцінки має такий вигляд

$$\Delta_1 = \Delta(f) = \left(2(1 + |\alpha|^2)^2 - |\alpha|^2 \right) / \left(1 + |\alpha|^2 \right) \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right).$$

б) Покладемо тепер $a(0) = 1$, $a(1) = 0$, $a(5) = 0$. Отримаємо такий вигляд спектральної щільності

$$h(e^{i\lambda}) = 1 + (c(0) + c(1)e^{i\lambda}) \left(1 + |\alpha|^2 - \bar{\alpha}e^{i\lambda} - \alpha e^{-i\lambda} \right),$$

де коефіцієнти $c(0)$, $c(1)$ обчислюються за формулами

$$c(0) = \left(1 + |\alpha|^2 \right) / \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right), \quad c(1) = \bar{\alpha} / \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right).$$

Коефіцієнт $c(5) = 0$. Спектральна характеристика оцінки має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = \left(\alpha \left(1 + |\alpha|^2 \right)^2 e^{-i\lambda} + (\bar{\alpha})^2 \left(1 + |\alpha|^2 \right) e^{2i\lambda} \right) \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right)^{-1}.$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\Delta_2 = \Delta(f) = \left(1 + |\alpha|^2 \right) / \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right).$$

Можна легко перевірити, що $\Delta_1 > \Delta_2$.

Приклад 2.2. Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$A_3\xi = a(-n)\xi(-n) + a(0)\xi(0) + a(m)\xi(m)$ від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $S = \{-n\} \cup \{0\} \cup \{m\}$. Функція $f^{-1}(\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є $f^{-1}(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{i\lambda m}$. Спектральна характеристика лінійної оцінки $\hat{A}_3\xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = (a(-n)e^{-ni\lambda} + a(0) + a(m)e^{mi\lambda}) - (c(-n)e^{-ni\lambda} + c(0) + c(m)e^{mi\lambda}) \cdot f^{-1}(\lambda),$$

де коефіцієнти $c(-n), c(0), c(m)$ визначаються з рівнянь

$$a(-n) = c(-n)r_0 + c(0)r_{-n} + c(m)r_{-n-m},$$

$$a(0) = c(-n)r_n + c(0)r_0 + c(m)r_{-m},$$

$$a(m) = c(-n)r_{n+m} + c(0)r_m + c(m)r_0.$$

Матриця B_3 , побудована з коефіцієнтів Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$, має вигляд

$$B_3 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} r_0 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} r_{-n} \end{pmatrix}, B_{13} = \begin{pmatrix} r_{-n-m} \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} r_n \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} r_0 \end{pmatrix}, B_{23} = \begin{pmatrix} r_{-m} \end{pmatrix},$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} r_{n+m} \end{pmatrix}, B_{32} = \begin{pmatrix} r_m \end{pmatrix}, B_{33} = \begin{pmatrix} r_0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\vec{a}_3 = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, де $\vec{a}_1 = (a(-n))$, $\vec{a}_2 = (a(0))$, $\vec{a}_3 = (a(m))$, $\vec{c}_3 = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, де $\vec{c}_1 = (c(-n))$, $\vec{c}_2 = (c(0))$, $\vec{c}_3 = (c(m))$. Рівняння (2.13) в цьому випадку має вигляд $\vec{a}_3 = B_3\vec{c}_3$, звідки $\vec{c}_3 = B_3^{-1}\vec{a}_3$. Позначимо

$$D = \det(B_3) = r_0^3 - r_0r_{-m}r_m - r_n r_{-n} r_0 + r_n r_{-n-m} r_m + r_{n+m} r_{-n} r_{-m} - r_{n+m} r_{-n-m} r_0.$$

Тоді шукані коефіцієнти обчислюються за формулами

$$c(-n) = [(r_0^2 - r_{-m}r_m)a(-n) - (r_{-n}r_0 - r_{-n-m}r_m)a(0) + (r_{-n}r_m - r_{-n-m}r_0)a(m)] \cdot D^{-1},$$

$$\begin{aligned}
c(0) &= [(-r_n r_0 + r_{-m} r_{n+m})a(-n) + (r_0^2 - r_{n+m} r_{-n-m})a(0) - \\
&\quad (r_0 r_{-m} - r_{-n-m} r_n)a(m)] \cdot D^{-1}, \\
c(m) &= [(r_n r_m - r_0 r_{n+m})a(-n) - (r_0 r_m - r_{n+m} r_{-n})a(0) + \\
&\quad (r_0^2 - r_{-n} r_n)a(m)] \cdot D^{-1}.
\end{aligned}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
\Delta(f) = \langle B_3^{-1} \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle = D^{-1} & \left[(a(-n))^2 r_0^2 - (a(-n))^2 r_{-m} r_m - a(-n)a(0)r_{-n} r_0 \right. \\
& + a(-n)a(0)r_{-n-m} r_m + a(-n)a(m)r_{-n} r_{-m} - a(-n)a(m)r_{-n-m} r_0 - \\
& a(-n)a(0)r_0 r_n + a(-n)a(0)r_{-m} r_{n+m} + (a(0))^2 r_0^2 - (a(0))^2 r_{n+m} r_{-n-m} - \\
& a(0)a(m)r_0 r_{-m} + a(0)a(m)r_{-n-m} r_n + a(-n)a(m)r_n r_m - a(-n)a(m)r_0 r_{n+m} - \\
& \left. a(0)a(m)r_0 r_m + a(0)a(m)r_{-n} r_{n+m} + (a(m))^2 r_0^2 - (a(m))^2 r_n r_{-n} \right].
\end{aligned}$$

Знайдемо спектральну характеристику та величину середньоквадратичної похибки оцінки функціонала

$$A_3(\xi) = \xi(-n) + \xi(0) + \xi(m)$$

для спектральної щільності

$$f(\lambda) = \frac{1}{|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}, \quad |\alpha| < 1.$$

З прикладу 1 маємо $f^{-1}(\lambda) = \left(1 + |\alpha|^2 - \bar{\alpha} e^{i\lambda} - \alpha e^{-i\lambda}\right)$. Всі коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$, крім r_0, r_1, r_{-1} , рівні 0.

Розглянемо наступні 4 випадки: 1) $n \neq 1, m \neq 1$; 2) $n \neq 1, m = 1$; 3) $n = 1, m \neq 1$; 4) $n = 1, m = 1$.

Спектральна характеристика та похибка оцінки $\hat{A}_3 \xi$ функціонала $A_3 \xi$ у цих випадках обчислюються за наступними формулами.

У першому випадку

$$\begin{aligned}
h(e^{i\lambda}) &= \left(\alpha e^{(-n-1)i\lambda} + \bar{\alpha} e^{(-n+1)i\lambda} + \alpha e^{-i\lambda} + \bar{\alpha} e^{i\lambda} + \alpha e^{(m-1)i\lambda} + \bar{\alpha} e^{(m+1)i\lambda} \right) \\
&\quad (1 + |\alpha|^2)^{-2}, \\
\Delta(f) &= 3/(1 + |\alpha|^2).
\end{aligned}$$

У другому випадку

$$h(e^{i\lambda}) = \left[(\alpha + \alpha |\alpha|^2 + \alpha^2)(1 + |\alpha|^2)e^{-i\lambda} + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha} |\alpha|^2)(1 + |\alpha|^2)e^{2i\lambda} + \bar{\alpha}(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4)e^{(-n+1)i\lambda} + \alpha(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4)e^{(-n-1)i\lambda} \right] \times \left((1 + |\alpha|^2)(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right)^{-1},$$

$$\Delta(f) = \left(3 + 2|\alpha|^2 + (1 + |\alpha|^2)(\alpha + \bar{\alpha}) \right) \left((1 + |\alpha|^2)(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right)^{-1}.$$

У третьому випадку

$$h(e^{i\lambda}) = \left[(\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}(1 + |\alpha|^2))(1 + |\alpha|^2)e^{i\lambda} + (\alpha^2 + \alpha(1 + |\alpha|^2))(1 + |\alpha|^2)e^{-2i\lambda} + \bar{\alpha}(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4)e^{(m+1)i\lambda} + \alpha(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4)e^{(m-1)i\lambda} \right] \times \left((1 + |\alpha|^2)(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right)^{-1},$$

$$\Delta(f) = \left(3 + 2|\alpha|^2 + (1 + |\alpha|^2)(\alpha + \bar{\alpha}) \right) \left((1 + |\alpha|^2)(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right)^{-1}.$$

У четвертому випадку

$$h(e^{i\lambda}) = \left[(\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}(1 + |\alpha|^2) + 1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4)\bar{\alpha}e^{2i\lambda} + (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \alpha(1 + |\alpha|^2) + |\alpha|^2)\alpha e^{-2i\lambda} \right] \times \left(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + |\alpha|^6 \right)^{-1},$$

$$\Delta(f) = \left(3 + 2|\alpha|^2 + (1 + |\alpha|^2)(\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 \right) \cdot \left((1 + |\alpha|^2)(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right)^{-1}.$$

2.2.2. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції. Класичний метод інтерполяції застосовується у випадку, коли точно відома спектральна щільність $f(\lambda)$ послідовності. У більшості випадків на практиці повна інформація про спектральну щільність неможлива. Однак, якщо відомо, що щільність $f(\lambda)$ належить певному класу спектральних щільностей D , то доцільно до задач оцінювання застосовувати мінімаксний підхід. При такому підході замість відшукування оцінки, яка була б оптимальною для деякої спектральної щільності, шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одразу для всіх спектральних щільностей з даного класу D .

Означення 2.2. Для заданого класу спектральних щільностей D спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D$ називається найменш сприятливою в D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо

$$\Delta(f_0) = \Delta(h(f_0); f_0) = \max_{f \in D} \Delta(h(f); f).$$

Означення 2.3. Для заданого класу спектральних щільностей D спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{f \in D} L_2^s(f), \quad \min_{h \in H_D} \max_{f \in D} \Delta(h; f) = \sup_{f \in D} \Delta(h^0; f).$$

Лема 2.1. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D$ найменш сприятлива в класі D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $f_0^{-1}(\lambda)$ задають матрицю B_s^0 , що визначає розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{f \in D} \langle B_s^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle = \langle (B_s^0)^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle. \quad (2.17)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за формулою (2.14) за умови, що $h(f_0) \in H_D$.

Найменш сприятлива спектральна щільність $f_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика h^0 утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0) \geq \Delta(h^0; f_0) \geq \Delta(h^0; f) \quad \forall f \in D, \forall h \in H_D$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0)$ та $h(f_0) \in H_D$, де f_0 – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\Delta}(f) = -\Delta(h^0; f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{f_0^2(\lambda)} f(\lambda) d\lambda \rightarrow \inf, \quad f(\lambda) \in D, \quad (2.18)$$

$$C_s^0(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} ((B_s^0)^{-1} \vec{a}_s)_j e^{ij\lambda}.$$

Задача на умовний екстремум (2.18) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]:

$$\Delta_D(f) = \tilde{\Delta}(f) + \delta(f|D) \rightarrow \inf,$$

де $\delta(f|D)$ – індикаторна функція множини D . Розв’язок f_0 цієї задачі характеризується умовою: $0 \in \partial\Delta_D(f_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f)$. Ця умова дозволяє знайти найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів D .

Зауважимо, що вигляд функціонала $\Delta(h^0; f)$ зручний для застосування методу невизначених множників Лагранжа до визначення розв’язку задачі (2.18). Використовуючи метод множників Лагранжа і вигляд субдиференціала індикаторної функції ми можемо описати відношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких класах спектральних щільностей.

2.2.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D = D_0^-$. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, що має спектральну щільність з класу

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda \geq P \right. \right\}$$

за умови, що послідовність $a(k)$, $k \in S$, яка визначає функціонал $A_s\xi$ строго позитивна. Щоб знайти розв’язок задачі (2.18) використаємо метод невизначених множників Лагранжа. Отримаємо наступне рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{|C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{f_0^2(\lambda)} - p_0^2 \frac{1}{f_0^2(\lambda)} \right] \rho(f(\lambda)) d\lambda = 0,$$

де p_0^2 – невідома константа (множник Лагранжа), $\rho(f(\lambda))$ – приріст функції $f(\lambda)$. Звідси знаходимо, що коефіцієнти Фур’є функції f_0^{-1} задовольняють рівняння

$$\left| \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k) e^{ik\lambda} \right|^2 = p_0^2, \quad (2.19)$$

де $c(k), k \in S$ – координати вектора \vec{c}_s , що задовольняє рівняння $B_s^0 \vec{c}_s = \vec{a}_s$, а матриця B_s^0 складається з матриць $B_{mn}^0(k, j)$, кожна з яких утворена з коефіцієнтів Фур'є функції $f_0^{-1}(\lambda)$

$$B_{mn}^0(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0^{-1}(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda} d\lambda = r_{k-j}^0, \quad m, n = 1, \dots, s.$$

$$k = M_{m-1}, \dots, M_{m-1} + N_m, \quad j = M_{n-1}, \dots, M_{n-1} + N_n.$$

Рівняння (2.19) та рівняння $B_s^0 c_s = a_s$ задовольняють коефіцієнти Фур'є $r_k = r_{-k}, k \in S$, які можна знайти з рівняння $B_s \vec{p}_s^0 = \vec{a}_s$, де $\vec{p}_s^0 = (p_0, 0, \dots, 0)$. Останню рівність можна подати у вигляді системи рівнянь

$$r_k p_0 = a(k), \quad k \in S.$$

З першого рівняння системи (при $k = 0$) знаходимо невідому величину $p_0 = a(0)(r_0)^{-1}$. Внаслідок екстремальної умови (2.17) і обмеження на спектральні щільності в класі D_0^- коефіцієнт Фур'є $r_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0^{-1}(\lambda) d\lambda = P$. Таким чином, $r_k = Pa(k)a^{-1}(0)$. Побудуємо наступну послідовність коефіцієнтів

$$r_k = r_{-k} = \begin{cases} Pa(k)a^{-1}(0) & \text{якщо } k \in S; \\ 0 & \text{якщо } k \in \{0, \dots, M_{s-1} + N_s\} \setminus S. \end{cases}$$

Функцію $f^{-1}(\lambda)$ можна записати у вигляді $f_0^{-1}(\lambda) = \sum_{k=-(M_{s-1}+N_s)}^{M_{s-1}+N_s} r_k e^{ik\lambda}$.

В силу того, що послідовність $a(k), k \in S$ строго позитивна, то послідовність $r_k, k = 0, 1, \dots, M_{s-1} + N_s$, теж строго позитивна, і функція $f_0^{-1}(\lambda)$ додатня, тому її можна зобразити у вигляді [7]

$$f_0^{-1}(\lambda) = \left| \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} \gamma_k e^{-ik\lambda} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

де $\gamma_k = 0, k \in \{0, \dots, M_{s-1} + N_s\} \setminus S$. Отже, $f_0(\lambda)$ – спектральна щільність стохастичної послідовності авторегресії порядку $M_{s-1} + N_s$, що задається рівнянням

$$\sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} \gamma_k \xi(n-k) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \gamma_k \xi(n-k) = \varepsilon_n, \quad (2.20)$$

де ε_n – білий шум.

Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$ обчислюється за формулою (2.9), де

$$\begin{aligned}
 C_N(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k)e^{ik\lambda} = p_0 = P^{-1}a(0), \\
 h(f_0) &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(k)e^{ik\lambda} - P^{-1}a(0) \sum_{k=-(M_{s-1}+N_s)}^{M_{s-1}+N_s} r_k e^{ik\lambda} \\
 &= \sum_{k=1}^{N_1} a(k)e^{-ik\lambda} + \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(k)e^{-ik\lambda}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Таким чином показано, що справедлива наступна теорема.

Теорема 2.5. *Найменш сприятливою спектральною щільністю в класі D_0^- для оптимально лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, що задається строго позитивною послідовністю $a(k)$, $k \in S$ є щільність стохастичної послідовності авторегресії (2.20) порядку $M_{s-1} + N_s$ з коефіцієнтами Фур'є $r_k = r_{-k} = Pa(k)a^{-1}(0)$, $k \in S$. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ обчислюється за формулою (2.21).*

Приклад 2.3. Знайдемо мінімаксну оцінку функціонала $A_2 \xi = 2\xi(0) + \xi(2)$ від випадкової стаціонарної послідовності $\{\xi(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями у моменти часу $\mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}$. Запишемо систему для відшукування коефіцієнтів Фур'є найменш сприятливої спектральної щільності в класі D_0^- :

$$r_0 p_0 = 2;$$

$$r_2 p_0 = 1.$$

Звідси $r_0 = P$, $r_2 = r_{-2} = \frac{1}{2}P$. Найменш сприятливою щільністю буде щільність $f_0 = 1/|x + ye^{2i\lambda}|$, де $x = \pm\sqrt{\frac{P}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{P}{2}}$. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою $h(f_0) = -\sqrt{\frac{P}{2}}e^{-2i\lambda}$.

2.2.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D = D_W$. Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей з момен-

тними обмеженнями функції $f^{-1}(\lambda)$. Нехай

$$D_W = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) \cos(w\lambda) d\lambda = r_w, w = 0, 1, \dots, W \right. \right\},$$

де $r_w, w = 0, 1, \dots, W$ – строго позитивна послідовність. В класі D_W існує нескінченна кількість функцій [7] і функція

$$f^{-1}(\lambda) = \sum_{w=-W}^W r_{|w|} e^{iw\lambda} > 0, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Для того, щоб відшукати розв'язок задачі оптимізації (2.18) для класу D_W , застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. Отримаємо наступне рівняння

$$\left| \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k) e^{ik\lambda} \right|^2 = \sum_{w=0}^W \alpha_w \cos(w\lambda) = \left| \sum_{w=0}^W p(w) e^{iw\lambda} \right|^2, \quad (2.22)$$

де $\alpha_w, w = 0, 1, \dots, W$ – невизначені множники Лагранжа, а $c(k), k = 0, \dots, W$ – розв'язки рівняння $B_s^0 \vec{c}_s = \vec{a}_s$.

Розглянемо два випадки: $W \geq M_{s-1} + N_s$ та $W < M_{s-1} + N_s$. Нехай $W \geq M_{s-1} + N_s$. Тоді задані коефіцієнти Фур'є r_w визначають матрицю B_s^0 і екстремальна задача (2.17) вироджена. Покладемо $p(M_{s-1} + N_s + 1) = \dots = p(W) = 0$ і $p(t) = 0, t \notin S$, а коефіцієнти $p(j), j \in S$ вектора p_s знайдемо з рівняння $B_s^0 p_s = a_s$. Таким чином буде виконуватись співвідношення (2.22). Тому найменш сприятливою буде кожна щільність $f(\lambda) \in D_W$ і, як наслідок, щільність

$$f_0(\lambda) = 1 / \sum_{w=-W}^W r_{|w|} e^{iw\lambda} = 1 / \left| \sum_{k=0}^W \gamma_k e^{ik\lambda} \right| \quad (2.23)$$

стохастичної послідовності авторегресії.

Нехай $W < M_{s-1} + N_s$. Тоді матрицю B_s визначають відомі $r_w, w \in S \cap \{0, \dots, W\}$ та невідомі $r_w, w \in S \setminus \{0, \dots, W\}$ коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$. Невідомі $p(k), k \in S \cap \{0, \dots, W\}$ та $r_w, w \in S \setminus \{0, \dots, W\}$ знаходимо з рівняння $B_s p_s^0 = a_s$, де $p_s^0 = (p(0), \dots, p(W_1), 0, \dots, 0)$, де W_1 визнаємо з

відношення $\{0, \dots, W_1\} = \{0, \dots, W\} \cap S$. Розпишемо останнє рівняння через систему наступних рівнянь

$$\begin{aligned} r_0 p_0 + r_1 p_1 + \dots + r_{-W_1} p_{W_1} &= a(0); \\ r_1 p_0 + r_0 p_0 + \dots + r_{-W_1+1} p_{W_1} &= a(1); \\ &\dots \\ r_{W_1} p_0 + r_{W_1-1} p_0 + \dots + r_0 p_{W_1} &= a(W_1); \\ &\dots \\ r_{M_{s-1}+N_s} p_0 + r_1 p_1 + \dots + r_0 p_{W_1} &= a(M_{s-1} + N_s). \end{aligned}$$

З перших W_1 рівнянь знайдемо невідомі компоненти $p(k)$ вектора p_s^0 , а з інших рівнянь відшукаємо невідомі коефіцієнти Фур'є $r_w, w \in S \setminus \{0, \dots, W\}$.

Якщо послідовність $r_w, w \in S$, що утворилась із строго позитивної послідовності $r_w, w \in S \cap \{0, \dots, W\}$ та обчислених $r_w, w \in S \setminus \{0, \dots, W\}$ теж строго позитивна, то найменш сприятлива спектральна щільність $f_0(\lambda)$ визначається коефіцієнтами Фур'є $r_w, w \in S$ функції $f_0^{-1}(\lambda)$

$$f_0(\lambda) = 1 / \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} (r_k e^{ik\lambda} + r_{-k} e^{-ik\lambda}) = 1 / \left| \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} \gamma_k e^{ik\lambda} \right|^2. \quad (2.24)$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2.6. *Найменш сприятливою щільністю в класі D_W для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ при $W \geq M_{s-1} + N_s$ є щільність (2.23) стохастичної послідовності авторегресії порядку W , що визначається коефіцієнтами $r_w, w = 0, 1, \dots, W$. Якщо $W < M_{s-1} + N_s$ і розв'язки $r_w, w \in S \setminus \{0, \dots, W\}$ рівняння $B_s p_s^0 = a_s$ разом з коефіцієнтами $r_w, w \in S \cap \{0, \dots, W\}$ утворюють строго позитивну послідовність, то найменш сприятливою щільністю в D_W є щільність (2.24) стохастичної послідовності авторегресії порядку $M_{s-1} + N_s$. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою (2.14).*

2.2.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D = D_v^u$. Розглянемо множину спектральних щільностей

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| 0 \leq v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda = P \right. \right\},$$

де $v(\lambda), u(\lambda)$ – задані обмежені спектральні щільності, а послідовність $a(j), j \in S$, яка визначає функціонал $A_s \xi$ строго позитивна. Для відшукування розв'язку оптимізаційної задачі (2.18) використаємо умову $0 \in \partial \Delta_D(f_0)$. З умови $0 \in \partial \Delta_D(f_0)$ для $D = D_v^u$ знаходимо, що коефіцієнти Фур'є функції f_0^{-1} задовольняють рівняння $B_s^0 \vec{c}_s = \vec{a}_s$ та рівняння

$$\left| \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \left((B_s^0)^{-1} a_s \right)_k e^{ik\lambda} \right|^2 = \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda) + p_0^{-2},$$

де $\psi_1(\lambda) \geq 0$ та $\psi_1(\lambda) = 0$ при $f_0(\lambda) \geq v(\lambda)$; $\psi_2(\lambda) \leq 0$ та $\psi_2(\lambda) = 0$ при $f_0(\lambda) \leq u(\lambda)$. Тому при $v(\lambda) \leq f_0(\lambda) \leq u(\lambda)$ функція $f_0^{-1}(\lambda)$ має вигляд

$$f_0^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} (r_k e^{ik\lambda} + r_{-k} e^{-ik\lambda}) = \left| \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} \gamma_k e^{ik\lambda} \right|^2,$$

де $r_k = r_{-k} = Pa(k)a^{-1}(0)$. Найменш сприятливою в класі D_v^u буде щільність стохастичної послідовності авторегресії порядку $M_{s-1}+N_s$, якщо виконується нерівність

$$v^{-1}(\lambda) \geq \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} (r_k e^{ik\lambda} + r_{-k} e^{-ik\lambda}) = \left| \sum_{k=0}^{M_{s-1}+N_s} \gamma_k e^{ik\lambda} \right|^2 \geq u^{-1}(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (2.25)$$

В загальному випадку найменш сприятлива щільність має вигляд

$$f_0(\lambda) = \max \left\{ v(\lambda), \min \left\{ u(\lambda), \left| p_0 \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \left((B_s^0)^{-1} a_s \right)_k e^{ik\lambda} \right|^2 \right\} \right\}. \quad (2.26)$$

Теорема 2.7. Якщо послідовність $a(j), j \in S$, строго позитивна і коефіцієнти $r_k = r_{-k} = Pa(k)a^{-1}(0), k \in S$ задовільняють нерівність (2.25), то

найменш сприятливою в класі D_v^u для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ є щільність послідовності авторегресії (2.20) порядку $M_{s-1} + N_s$. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ обчислюється за формулою (2.21). Якщо нерівність (2.25) не виконується, то найменш сприятлива в D_v^u спектральна щільність визначається співвідношенням (2.26) та екстремальною умовою (2.17). Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою (2.14).

2.3. Задача інтерполяції стаціонарної послідовності, що спостерігається з шумом

У цьому підрозділі досліджується задача оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$.

2.3.1. Класичний метод інтерполяції. Нехай $\xi(j)$ та $\eta(j)$ – стаціонарні послідовності з нульовими математичними сподіваннями $E\xi(j) = 0$, $E\eta(j) = 0$. Коваріаційні функції стаціонарних послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ допускають спектральний розклад (2.4) з такими спектральними щільностями $f(\lambda)$, $f_{\xi\eta}(\lambda)$, $f_{\eta\xi}(\lambda)$ та $g(\lambda)$, що виконується умова мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty. \quad (2.27)$$

Ця умова необхідна і достатня для того, щоб безпомилкова інтерполяція невідомих значень послідовностей була неможливою [25].

Послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ допускають спектральний розклад (2.3) із ортогональними випадковими мірами $Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(\lambda)$, що підпорядковані спектральним мірам $F(d\lambda)$ та $G(d\lambda)$ послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ такими, що виконуються співвідношення (2.5).

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, M_l + 1, \dots, M_l + N_{l+1}\}$.

Функціонал $A_s \xi$ можна записати у такому вигляді

$$A_s \xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_s(e^{i\lambda}) Z_\xi(d\lambda), \quad A_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) e^{ij\lambda}.$$

Позначимо через $\hat{A}_s \xi$ оптимальну лінійну оцінку функціонала $A_s \xi$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$. Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_s \xi$ обчислюється за формулою $\Delta(f, g) = E \left| A_s \xi - \hat{A}_s \xi \right|^2$. Для відшукування оцінки $\hat{A}_s \xi$ використаємо метод ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі А. М. Колмогорова.

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір, породжений величинами $\{\xi(j) + \eta(j) : j \in \mathbb{Z} \setminus S\}$ у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Через $L_2(f + g)$ позначимо гільбертовий простір комплекснозначних функцій на $[-\pi, \pi]$, інтегровних в квадраті за мірою, що має щільність $f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)$. Розглянемо підпростір $L_2^s(f + g)$ простору $L_2(f + g)$, що породжений функціями $\{e^{ij\lambda}, j \in \mathbb{Z} \setminus S\}$.

Лінійну оцінку $\hat{A}_s \xi$ функціонала $A_s \xi$ шукатимемо у вигляді

$$\hat{A}_s \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) Z_{\xi+\eta}(d\lambda),$$

де $h(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f + g)$ – спектральна характеристика оцінки.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h; f)$ оцінки $\hat{A}_s\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
\Delta(h; F) &= E \left| A_s\xi - \hat{A}_s\xi \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) d\lambda \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\lambda})|^2 g(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) \overline{h(e^{i\lambda})} f_{\xi\eta}(\lambda) d\lambda \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{(A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}))} h(e^{i\lambda}) f_{\eta\xi}(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}), -h(e^{i\lambda})) F(\lambda) \left(\overline{A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})}, \overline{-h(e^{i\lambda})} \right)^{\top} d\lambda,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

де $F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda) \\ f_{\eta\xi}(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix}$ – матриця спектральних щільностей.

За методом ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі А. М. Колмогорова оптимальною оцінкою функціонала $A_s\xi$ буде проєкція елемента $A_s\xi$ на підпростір $H^s(\xi + \eta)$. Така проєкція визначається з наступних умов:

- 1) $\hat{A}_s\xi \in H^s(\xi + \eta)$,
- 2) $A_s\xi - \hat{A}_s\xi \perp H^s(\xi + \eta)$.

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(\lambda)$ для всіх $j \in \mathbb{Z} \setminus S$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned}
E \left[\left(A_s\xi - \hat{A}_s\xi \right) \left(\overline{\xi(j)} + \overline{\eta(j)} \right) \right] &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) e^{-ij\lambda} f(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) e^{-ij\lambda} f_{\eta\xi}(\lambda) d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) e^{-ij\lambda} f_{\xi\eta}(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) e^{-ij\lambda} g(\lambda) d\lambda = 0.
\end{aligned}$$

Останнє співвідношення можна записати у такому вигляді, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [A_s(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda))] e^{-ij\lambda} d\lambda = 0.$$

Звідси можемо зробити висновок, що коефіцієнти Фур'є функції $[A_s(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda))]$ дорівнюють нулю при $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, а сама функція має вигляд

$$A_s(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)) = C_s(e^{i\lambda}),$$

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k) e^{ik\lambda},$$

де $c(k)$, $k \in S$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти.

З останнього співвідношення отримаємо наступний вигляд спектральної характеристики оцінки $\hat{A}_s \xi$

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - C_s(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)},$$

де $f_{\zeta}(\lambda) = f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)$.

З 1-ї умови, $\hat{A}_s \xi \in H^s(\xi + \eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A_s \xi$, випливає, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in S,$$

тобто

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - C_s(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in S.$$

Скористаємося останньою рівністю, щоб знайти невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k \in S$. Розкриємо дужки і отримаємо таке співвідношення

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-j)\lambda} (f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda))}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda - \\ & \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-j)\lambda}}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda = 0, \quad j \in S. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned}
R_{j,k}^s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda; \\
B_{j,k}^s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda; \\
Q_{j,k}^s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Скориставшись введеними позначеннями можемо записати співвідношення (2.29) у вигляді системи рівнянь

$$\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} R_{j,k}^s a(k) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} B_{j,k}^s c(k), \quad j \in S.$$

Вказані рівняння можна подати у наступному вигляді

$$\mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s = \mathbf{B}_s \vec{\mathbf{c}}_s,$$

де $\vec{\mathbf{a}}_s$ – вектор, що побудований з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A_s \xi$, $\vec{\mathbf{c}}_s$ – вектор, що складається з невідомих коефіцієнтів $c(k)$, $k \in S$, \mathbf{B}_s , \mathbf{R}_s – матриці розмірності $q \times q$, $q = N_1 + N_2 + \dots + N_s + s$, з елементами $\mathbf{B}_s(j, k) = B_{j,k}^s$, $\mathbf{R}_s(j, k) = R_{j,k}^s$, $j, k \in S$, виду

$$\mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

де B_{mn} – матриці розмірності $(N_m + 1) \times (N_n + 1)$

$$\begin{aligned}
B_{mn}(k, j) &= B_{j,k}^s, \quad m, n = 1, \dots, s, \\
k &= M_{m-1}, \dots, M_{m-1} + N_m, \quad j = M_{n-1}, \dots, M_{n-1} + N_n.
\end{aligned}$$

Таким чином, невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k \in S$ обчислюються за формулою

$$c(k) = (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s)_k,$$

де $(\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s)_k$ – k -ий елемент вектора $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s$. Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}_s\xi$ обчислюється за наступною формулою

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{A_s(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda))}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (2.32)$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_s\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(h; F) &= \Delta(h; f, g, f_{\xi\eta}, f_{\eta\xi}) = E \left| A_s\xi - \hat{A}_s\xi \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| A_s(e^{i\lambda}) \frac{f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} + C_s(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right|^2 f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - C_s(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right|^2 g(\lambda) d\lambda \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_s(e^{i\lambda}) \frac{f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} + C_s(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right) \\ &\quad \times \left(\overline{A_s(e^{i\lambda})} \frac{f(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - \overline{C_s(e^{i\lambda})} \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right) f_{\xi\eta}(\lambda) d\lambda \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{A_s(e^{i\lambda})} \frac{f_{\xi\eta}(\lambda) + g(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} + \overline{C_s(e^{i\lambda})} \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right) \\ &\quad \times \left(A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - C_s(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right) f_{\eta\xi}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A_s(e^{i\lambda})|^2 \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C_s(e^{i\lambda})|^2 \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)e^{ij\lambda} \right|^2 \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda} \right|^2 \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Використовуючи позначення (2.30) можна записати середньоквадратичну похибку оцінки у вигляді

$$\Delta(h; F) = \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle, \quad (2.34)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в просторі C^q , а \mathbf{Q}_s – матриця розмірності $q \times q$ з елементами $\mathbf{Q}_s(j, k) = Q_{j,k}^s$, $j, k \in S$, виду (2.31).

Таким чином, можемо стверджувати, що справедлива наступна теорема.

Теорема 2.8. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda) \\ f_{\eta\xi}(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix}$ такою, що виконується умова мінімальності (2.27). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$ можна обчислити за формулами (2.32), (2.34).*

Розглянемо випадок, коли спостережувані послідовності некорельовані. Це означає, що спектральні щільності $f_{\xi\eta} = f_{\eta\xi} = 0$. У такому випадку можемо сформулювати наслідок.

Наслідок 2.1. *Нехай $\xi(j)$ та $\eta(j)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty. \quad (2.35)$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$ можна обчислити за формулами (2.36), (2.37)

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(h; f, g) &= E \left| A_s \xi - \hat{A}_s \xi \right|^2 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A_s(e^{i\lambda})g(\lambda) + \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} \right|^2 f(\lambda) d\lambda \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A_s(e^{i\lambda})f(\lambda) - \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} \right|^2 g(\lambda) d\lambda \\
&= \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

де матриці \mathbf{R}_s , \mathbf{B}_s , \mathbf{Q}_s визначаються наступними елементами відповідно

$$\begin{aligned}
R_{j,k}^s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \\
B_{j,k}^s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \\
Q_{j,k}^s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.
\end{aligned}$$

Звідси можемо отримати наслідок для випадку спостережень без шуму.

Наслідок 2.2. *Нехай $\xi(j)$ – стаціонарна послідовність, яка має спектральну щільність $f(\lambda)$ таку, що функція $f^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$, можна обчислити за формулами*

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) - C_s(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda), \tag{2.38}$$

$$\Delta(h; f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C_s(e^{i\lambda})|^2 f^{-1}(\lambda) d\lambda = \langle \mathbf{B}_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle, \tag{2.39}$$

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (\mathbf{B}_s^{-1} \vec{\mathbf{a}}_s)_j e^{ij\lambda},$$

\mathbf{B}_s – матриця розмірності $q \times q$ виду (2.31) елементи якої є коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$,

$$\mathbf{B}_s(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda} d\lambda, \quad k, j \in S.$$

Приклад 2.4. Розглянемо дві некорельовані послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ із спектральними щільностями

$$f(\lambda) = |1 - ae^{-i\lambda}|^2, \quad |a| < 1,$$

$$g(\lambda) = |1 - be^{-i\lambda}|^2, \quad |b| < 1,$$

відповідно.

Знайдемо оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку функціонала $A_2\xi = \xi(0) + \xi(3)$ від невідомих значень $\xi(0), \xi(3)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 3\}$. Спектральна щільність послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ має вигляд

$$f(\lambda) + g(\lambda) = |1 - ae^{-i\lambda}|^2 + |1 - be^{-i\lambda}|^2 = |x - ye^{-i\lambda}|^2,$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{(1+a)^2 + (1+b)^2} \pm \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \right), \quad y = \frac{a+b}{x}.$$

Оскільки $|a| < 1, |b| < 1$, то $\left| \frac{y}{x} \right| < 1$. Використаємо розклад функції $\frac{1}{1-t}$ в степеневий ряд, щоб факторизувати функції $(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}, f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$ та $f(\lambda)g(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$

$$\frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} = \frac{1}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^{k+1}} e^{-ik\lambda} \right|^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} &= \frac{|1 - ae^{-i\lambda}|^2}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^{k+1}} e^{-ik\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ay^k}{x^{k+1}} e^{-i(k+1)\lambda} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}} \right) e^{-i(k+1)\lambda} \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} &= \frac{|1 - ae^{-i\lambda}|^2 \cdot |1 - be^{-i\lambda}|^2}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \frac{|1 - (a+b)e^{-i\lambda} + abe^{-i2\lambda}|^2}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^{k+1}} e^{-ik\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+b)y^k}{x^{k+1}} e^{-i(k+1)\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{aby^k}{x^{k+1}} e^{-i(k+2)\lambda} \right|^2 = \\
&= \left| \frac{1}{x} + \frac{y - ax - bx}{x^2} e^{-i\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}} \right) e^{-i(k+2)\lambda} \right|^2.
\end{aligned}$$

Використаємо формулу (2.36) для знаходження спектральної характеристики $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}_2\xi$. У даному випадку вона матиме вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = (1 + e^{i3\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2)_0 + (\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2)_3 \cdot e^{i3\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

матриці \mathbf{B}_2 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{Q}_2 мають вигляд

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} \\ b_3 & b_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} r_0 & r_{-3} \\ r_3 & r_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} q_0 & q_{-3} \\ q_3 & q_0 \end{pmatrix},$$

де b_j, r_j, q_j , $j \in \{-3, 0, 3\}$ коефіцієнти Фур'є функцій $\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}$, $\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$ та $\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$ відповідно. Вектор, який визначає функціонал $A_2\xi$, має вигляд $\mathbf{a}_2 = (a(0), a(3)) = (1, 1)$. Тоді невідомі коефіцієнти в формулі (2.36) обчислюються за наступними формулами

$$(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2)_0 = \frac{b_0r_0 - b_{-3}r_3 + b_0r_{-3} - b_{-3}r_0}{b_0^2 - b_{-3}b_3},$$

$$(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2)_3 = \frac{-b_3r_0 + b_0r_3 - b_3r_{-3} + b_0r_0}{b_0^2 - b_{-3}b_3},$$

$$b_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y^k}{x^{k+1}} \right|^2, \quad b_3 = \overline{b_{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^k}{x^{k+1}} \right) \overline{\left(\frac{y^{k+3}}{x^{k+4}} \right)},$$

$$r_0 = \frac{1}{|x|^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}} \right|^2,$$

$$r_3 = \overline{r_{-3}} = \frac{1}{x} \overline{\left(\frac{y^3}{x^4} - \frac{ay^2}{x^3} \right)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}} \right) \overline{\left(\frac{y^{k+4}}{x^{k+5}} - \frac{ay^{k+3}}{x^{k+4}} \right)}.$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_2\xi$ обчислюється за формулою (2.37)

$$\begin{aligned} \Delta(h; f) &= E \left| A_2\xi - \hat{A}_2\xi \right|^2 = \langle \mathbf{R}_2\vec{a}_2, \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{a}_2 \rangle + \langle \mathbf{Q}_2\vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{b_0^2 - b_{-3}b_3} (2b_0r_0^2 - b_{-3}r_0r_3 + 2b_0r_0r_{-3} - b_{-3}r_0^2 - b_{-3}r_{-3}r_3 + b_0r_{-3}^2 \\ &\quad - b_{-3}r_0r_{-3} - b_3r_0r_3 + b_0r_3^2 - b_3r_3r_{-3} + 2b_0r_0r_3 - b_3r_0^2 - b_3r_0r_{-3}) \\ &\quad + 2q_0 + q_3 + q_{-3}, \\ q_0 &= \left| \frac{1}{x} \right|^2 + \left| \frac{y - ax - bx}{x^2} \right|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}} \right|^2, \\ q_3 &= \overline{q_{-3}} = \frac{1}{x} \overline{\left(\frac{y^3}{x^4} - \frac{(a+b)y^2}{x^3} + \frac{aby}{x^2} \right)} + \frac{y - ax - bx}{x^2} \overline{\left(\frac{y^4}{x^5} - \frac{(a+b)y^3}{x^4} + \frac{aby^2}{x^3} \right)} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}} \right)} \left(\frac{y^{k+5}}{x^{k+6}} - \frac{(a+b)y^{k+4}}{x^{k+5}} + \frac{aby^{k+3}}{x^{k+4}} \right). \end{aligned}$$

2.3.2. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції. Метод проєкцій у гільбертових просторах, що описаний у попередньому розділі застосовується до задач оцінювання у тому випадку, коли точно відомі спектральні щільності $f(\lambda)$, $f_{\xi\eta}(\lambda)$, $f_{\eta\xi}(\lambda)$, $g(\lambda)$ які формують матрицю спектральних щільностей $F(\lambda)$. На практиці, однак, повної інформації про спектральні щільності отримати неможливо. Проте у тому випадку, коли відома множина допустимих матриць спектральних щільностей $D = \{F(\lambda)\}$, ми можемо застосувати мінімаксний підхід до задач оцінювання. При такому підході шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одразу для всіх матриць спектральних щільностей з даного класу D .

Означення 2.4. Для заданого класу матриць спектральних щільностей $D = \{F(\lambda)\}$ матриця спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D$ називається найменш сприятливою в класі D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A\xi$, якщо виконується наступне співвідношення

$$\Delta(F^0) = \Delta(h(F^0); F^0) = \max_{F \in D} \Delta(h(F); F).$$

Означення 2.5. Для заданого класу матриць спектральних щільностей $D = \{F(\lambda)\}$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо наступні умови виконані

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{F \in D} L_2^s(f + g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{F \in D} \Delta(h; F) = \max_{F \in D} \Delta(h^0; F).$$

З введених означень і формул отримуємо наступне твердження.

Лема 2.2. Спектральні щільності $f^0(\lambda)$, $f_{\xi\eta}^0(\lambda)$, $f_{\eta\xi}^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності (2.27), формують найменш сприятливу матрицю спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D$ в класі D для лінійної оптимальної інтерполяції функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є (2.30) функцій

$$\frac{1}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)}, \quad \frac{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda)}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)},$$

$$\frac{f^0(\lambda)g^0(\lambda) - f_{\xi\eta}^0(\lambda)f_{\eta\xi}^0(\lambda)}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)}$$

визначають матриці \mathbf{B}_s^0 , \mathbf{R}_s^0 , \mathbf{Q}_s^0 , які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{F \in D} \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \rangle. \quad (2.40)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(F^0)$ може бути обчислена за формулою (2.32), якщо $h(F^0) \in H_D$.

Для некорельованих послідовностей введемо наступні означення та лему.

Означення 2.6. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими в D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 2.7. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D} L_2^s(f+g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \sup_{(f,g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Лема 2.3. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності (2.35), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

задають матриці $\mathbf{B}_s^0, \mathbf{R}_s^0, \mathbf{Q}_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g) \in D} \langle \mathbf{R}_s \vec{a}_s, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{a}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{a}_s, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{a}_s \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle. \quad (2.41)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (2.36) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Сформульована лема є наслідком означень найменш сприятливих спектральних щільностей і мінімаксної спектральної характеристики та отриманих у попередньому розділі результатів. Для випадку спостережень без шуму отримано лему.

Лема 2.4. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ така, що функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ є найменш сприятливою в класі D_f для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $f_0^{-1}(\lambda)$ задають матрицю \mathbf{B}^0 , яка визначає розв'язок задачі

$$\max_{f \in D_f} \langle \mathbf{B}^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle = \langle (\mathbf{B}^0)^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle. \quad (2.42)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за формулою (2.38) за умови, що $h(f_0) \in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f, g) \quad \forall h \in H_D, \quad \forall f \in D_f, \quad \forall g \in D_g,$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) – розв’язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A_s(e^{i\lambda})g(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A_s(e^{i\lambda})f(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda, \\ C_s^0(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} ((\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{\mathbf{a}}_s)_j e^{ij\lambda}. \end{aligned}$$

Задача на умовний екстремум (2.43) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (2.44)$$

де $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв’язок задачі (2.44) визначається умовою $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$. Ця умова є необхідною і достатньою умовою того, що пара (f^0, g^0) належить до множини мінімумів опуклого функціонала $\Delta(h(f^0, g^0); f, g)$. Зауважимо, що $\partial \Delta_D(f_0, g_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0) , тобто множина усіх лінійних обмежених функціоналів Λ в $L_1 \times L_1$, що задовольняються нерівність [89]

$$\Delta_D(f, g) - \Delta_D(f^0, g^0) \geq \Lambda((f, g) - (f_0, g_0)), \quad \forall (f, g) \in D_f \times D_g.$$

Вигляд (форма) функціоналу $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ дозволяє знаходити похідні та диференціали функціоналу у просторі $L_1 \times L_1$. Тому складність оптимізаційних задач (2.44) визначається складністю обчислення субдиференціалів індикаторних функцій $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ множин $D_f \times D_g$.

Лема 2.5. Нехай (f_0, g_0) – розв’язок екстремальної задачі (2.44). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A_s \xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.

2.3.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, за умови, що стаціонарні послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ – некорельовані, а спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать множині допустимих спектральних щільностей $D = D_f^0 \times D_g^0$, де

$$D_f^0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\}, \quad D_g^0 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\}.$$

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ і функції, що визначені за формулами

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (2.45)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (2.46)$$

обмежені. У цьому випадку

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda$$

буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$ і ми можемо застосувати метод невизначених множників Лагранжа, щоб розв’язати задачу на умовний екстремум (2.44) [23]. Отримаємо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $f^0 \in D_f^0$, $g^0 \in D_g^0$.

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_f(f_0, g_0) \rho(f(\lambda)) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_g(f_0, g_0) \rho(g(\lambda)) d\lambda \\ & + \alpha_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(f(\lambda)) d\lambda + \alpha_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(g(\lambda)) d\lambda = 0, \end{aligned}$$

де $\rho(f(\lambda))$ та $\rho(g(\lambda))$ – варіації функцій $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, константи $\alpha_1 \geq 0$ та $\alpha_2 \geq 0$. Звідси знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (2.47)$$

$$|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})| = \alpha_2(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)). \quad (2.48)$$

Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\lambda)d\lambda = P_1$, і $\alpha_2 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda)d\lambda = P_2$. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2.9. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності (2.35) і функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які обчислюються за формулами (2.45), (2.46), обмежені. Функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, які є розв'язком системи рівнянь (2.47), (2.48) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D = D_f^0 \times D_g^0$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (2.41). Функція, що обчислена за формулою (2.36), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 2.10. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_g^0$. Нехай функції $f(\lambda)$ та $g_0(\lambda)$ такі, що функція $(f(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$ інтегровна, а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.46), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_g^0 для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо вона має вигляд*

$$g_0(\lambda) = \max \{0, \alpha_2^{-1} |A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda)\}$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.41). Функція, обчислена за формулою (2.36), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.

Теорема 2.11. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f^0$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, а функція $h(f_0)$, що визначена за формулою (2.38), обмежена. Тоді для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ у моменти $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, найменш спри-*

ятливою щільністю в класі D_f^0 буде спектральна щільність $f_0(\lambda)$, якщо $f_0(\lambda) = \alpha_1 |C_s^0(e^{i\lambda})|$ і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.42). Функція $h^0 = h(f_0)$, обчислена за формулою (2.38), буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

2.3.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень некорельованих послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать множині допустимих спектральних щільностей $D = D_v^u \times D_\varepsilon$, де

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

де спектральні щільності $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, і, крім того, щільності $u(\lambda)$ та $v(\lambda)$ обмежені.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_v^u$, $g^0(\lambda) \in D_\varepsilon$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$ за формулами (2.45), (2.46). Тоді з умови $0 \in \partial \Delta_{D_{f,g}}(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_1^{-1}), \quad (2.49)$$

$$|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (2.50)$$

де $\gamma_1 \leq 0$ і $\gamma_1 = 0$, коли $f_0(\lambda) \geq v(\lambda)$; $\gamma_2 \geq 0$ і $\gamma_2 = 0$, коли $f_0(\lambda) \leq u(\lambda)$, $\varphi(\lambda) \leq 0$ і $\varphi(\lambda) = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon)g_1(\lambda)$.

Теорема 2.12. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_v^u$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$, виконується умова мінімальності (2.35), а функції, що визначені формулами (2.45), (2.46), обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, визначені з рівнянь (2.49), (2.50) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (2.41). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена*

за формулою (2.36), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Теорема 2.13. Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.46), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_ε для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \left\{ (1 - \varepsilon)g_1(\lambda), \alpha_2 \left| A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda}) \right| - f(\lambda) \right\}$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.41). Функція, обчислена за формулою (2.36), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Теорема 2.14. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_v^u$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, функція $h(f_0)$, визначена за формулою (2.38), обмежена. Тоді спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою щільністю в класі D_v^u для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, якщо вона має вигляд

$$f_0(\lambda) = \max \left\{ v(\lambda), \min \left\{ u(\lambda), \alpha_1 \left| C_s^0(e^{i\lambda}) \right| \right\} \right\}$$

і функція $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.42). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$ обчислюється за формулою (2.38).

2.3.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s \xi$ для випадку некорельованих послідовностей, коли задана множина спектральних щільностей

$$D_{\varepsilon_1}^2 \times D_{\varepsilon_2}^1 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^1 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\}.$$

Спектральні щільності $f_1(\lambda)$ та $g_1(\lambda)$ – фіксовані і обмежені. Дана множина описує модель “ ε -околу” стохастичних послідовностей у просторі $L_2 \times L_1$. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^2$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^1$ такі, що функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, визначені за формулами (2.45), (2.46), обмежені. З умови $0 \in \partial\Delta_{D_{f,g}}(f^0, g^0)$, коли $D = D_{\varepsilon_1}^2 \times D_{\varepsilon_2}^1$, знаходимо рівняння

$$|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1, \quad (2.51)$$

$$|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_2, \quad (2.52)$$

де $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$, коли $g_0(\lambda) \neq g_1(\lambda)$, α_1, α_2 – сталі величини. Рівняння (2.51), (2.52) разом з екстремальною умовою (2.41) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \varepsilon_1, \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon_2, \quad (2.54)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 2.15. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^2$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$ такі, що виконується умова мінімальності (2.35) і функції, що обчислені за формулами (2.45), (2.46), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1}^2 \times D_{\varepsilon_2}^1$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (2.51)–(2.54), і визначають розв’язок екстремальної задачі (2.41). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.36), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 2.16. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^1$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ інтегровна, а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.46), обмежена. Спектральна*

щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{\varepsilon_2}^1$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо вона має вигляд

$$g_0(\lambda) = \max \{g_1(\lambda), \alpha_2 |A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda)\}$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.41). Функція, обчислена за формулою (2.36), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Теорема 2.17. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^2$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, функція $h(f_0)$, що визначена в формулі (2.38), обмежена. Тоді спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою щільністю в класі $D_{\varepsilon_1}^2$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, якщо виконуються співвідношення

$$|C_s^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1$$

і функція $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.42). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$ обчислюється за формулою (2.38).

2.4. Задача екстраполяції стаціонарної послідовності з пропусками

Цей підрозділ присвячений дослідженню задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\xi(j)$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S = \{\dots, -2, -1\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s \{-M_l - N_l, -M_l - N_l + 1, \dots, -M_l\}$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. Задачу досліджено для двох випадків: коли спектральні щільності стаціонарних послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі та коли вигляд спектральних

щільностей невідомий, але задані класи допустимих спектральних щільностей.

2.4.1. Класичний метод екстраполяції. Нехай $\xi(j)$ та $\eta(j)$ стаціонарно зв'язані між собою стаціонарні стохастичні послідовності з нульовими математичними сподіваннями $E\xi(j) = 0$, $E\eta(j) = 0$ і коваріаційними функціями $R_\xi(k)$, $R_{\xi\eta}(k)$, $R_{\eta\xi}(k)$, $R_\eta(k)$, які допускають спектральний розклад (2.4) з такими спектральними щільностями $f(\lambda)$, $f_{\xi\eta}(\lambda)$, $f_{\eta\xi}(\lambda)$, $g(\lambda)$, що виконується умова мінімальності (2.27).

Послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ допускають спектральний розклад (2.3) з ортогональними випадковими мірами $Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(d\lambda)$ для яких виконуються співвідношення (2.5).

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s \{-M_l - N_l, \dots, -M_l\}$.

Використавши спектральний розклад стаціонарної послідовності $\xi(j)$, можемо записати функціонал $A\xi$ у вигляді

$$A\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\lambda})Z_\xi(d\lambda), \quad A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda}.$$

Нехай коефіцієнти $\{a(j), j = 0, 1, \dots\}$, які визначають функціонал $A\xi$ задовольняють умови

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a(k)| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |a(k)|^2 < \infty. \quad (2.55)$$

За першої умови функціонал $A\xi$ має скінченний другий момент, оскільки $E|A\xi|^2 \leq R_\xi(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a(k)| \right)^2$. Друга умова забезпечує компактність в просторі ℓ_2 операторів, які будуть пізніше визначені. Позначимо через $\hat{A}\xi$ опти-

мальну лінійну оцінку функціонала $A\xi$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, яку шукатимемо у вигляді

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda})(Z_{\xi}(d\lambda) + Z_{\eta}(d\lambda)). \quad (2.56)$$

Нехай $\Delta(f, g) = E \left| A\xi - \hat{A}\xi \right|^2$ – середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}\xi$. Вважаємо, що спектральні щільності стаціонарних послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі, тому для відшукування оцінки $\hat{A}\xi$ використаємо метод ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі [59].

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір, породжений величинами $\{\xi(j) + \eta(j) : j \in \mathbb{Z}_- \setminus S\}$ у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а через $L_2^s(f + g)$ підпростір простору $L_2(f + g)$, визначеного в попередньому підрозділі, що породжений функціями $\{e^{ij\lambda}, j \in \mathbb{Z}_- \setminus S\}$.

За методом ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі оптимальною оцінкою функціонала $A\xi$ буде проєкція елемента $A\xi$ простору H на підпростір $H^s(\xi + \eta)$, яка визначається з умов:

- 1) $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$,
- 2) $A\xi - \hat{A}\xi \perp H^s(\xi + \eta)$.

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - C(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)}, \quad C(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in T} c(j) e^{ij\lambda}, \quad (2.57)$$

де $f_{\zeta}(\lambda) = f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)$, $T = S \cup \{0, 1, \dots\}$, а $c(j), j \in T$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти.

З 1-ї умови, $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A\xi$, випливає, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in T,$$

тобто

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} - C(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} \right) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in T.$$

Розкриємо дужки та запишемо останню рівність у вигляді, $j \in T$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-j)\lambda} (f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda))}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda - \sum_{l \in T} c(l) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(l-j)\lambda}}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda = 0. \quad (2.58)$$

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} b_{k-j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \\ r_{k-j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \\ q_{k-j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Позначимо вектор $\vec{\mathbf{a}} = (\vec{a}_s, \vec{a}_{s-1}, \dots, \vec{a}_1, \vec{a})$, що складається з компонент

$$\vec{a}_k = (a(-M_k - N_k), a(-M_k - N_k + 1), \dots, a(-M_k)), \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (2.60)$$

та вектора $\vec{a} = (a(0), a(1) \dots)$ побудованого з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$. Скориставшись введеними позначеннями, запишемо співвідношення (2.58) у вигляді системи рівнянь

$$\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}}, \quad (2.61)$$

де $\vec{\mathbf{c}}$ – вектор, що складається з невідомих коефіцієнтів $c(k)$, $k \in T$, а \mathbf{B} , \mathbf{R} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що визначаються матрицями B , R з елементами $B(k, j) = b_{k-j}$ та $R(k, j) = r_{k-j}$, $k, j \in T$, та мають вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n} \\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n} \\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

де елементи в останньому стовпчику та останньому рядку представляють собою матриці з елементами

$$B_{l,n}(k, j) = b_{k-j}, \quad l = 1, 2, \dots, s; \quad k = -M_l - N_l, \dots, -M_l; \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_{n,m}(k, j) = b_{k-j}, \quad m = 1, 2, \dots, s; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad j = -M_m - N_m, \dots, -M_m,$$

$$B_{n,n}(k, j) = b_{k-j}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots,$$

а всі інші елементи матриці B – це матриці з елементами виду

$$B_{l,m}(j, k) = b_{k-j}, \quad l, m = 1, 2, \dots, s;$$

$$k = -M_l - N_l, \dots, -M_l; \quad j = -M_m - N_m, \dots, -M_m.$$

Крім того, позначимо через \mathbf{Q} – лінійний оператор у просторі ℓ_2 , що визначається матрицею Q з елементами $Q(k, j) = q_{k-j}$, $k, j \in T$, виду (2.62).

Невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k \in T$, що обчислюються за формулою (2.61), можна записати у вигляді $c(k) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k$, де $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k$ – k -ий елемент вектора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}$. Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{A(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)) - \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (2.63)$$

Аналогічно до (2.28), (2.33) середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}\xi$ буде обчислюватись за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(h; F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} a(j) e^{ij\lambda} \right|^2 \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda} \right|^2 \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

Використавши введені позначення (2.59) та операторів \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} , середньоквадратичну похибку можемо записати у вигляді

$$\Delta(h; F) = \langle \mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle, \quad (2.64)$$

де $\langle a, c \rangle = \sum_k a_k \bar{c}_k$ – скалярний добуток в просторі ℓ_2 .

Таким чином, можемо стверджувати, що справедлива теорема.

Теорема 2.18. *Нехай $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ і $\{\eta(j), j \in \mathbb{Z}\}$ – стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей*

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda) \\ f_{\eta\xi}(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix}$$

такою, що умова мінімальності (2.27) виконується. Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, можна обчислити за формулами (2.63), (2.64).

Відповідні результати можна сформулювати для некорельованих послідовностей. В цьому випадку спектральні щільності $f_{\xi\eta}(\lambda) = 0$, $f_{\eta\xi}(\lambda) = 0$ і має місце наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Нехай $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ і $\{\eta(j), j \in \mathbb{Z}\}$ – некорельовані стаціонарні послідовності з спектральними щільностями $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, які задовольняють умову мінімальності (2.35). Спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ і середньоквадратична похибка $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можуть бути обчислені за формулами*

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h; f, g) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A(e^{i\lambda})g(\lambda) + \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda} \right|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda + \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A(e^{i\lambda})f(\lambda) - \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda} \right|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda = \\ & \langle \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q} \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle, \end{aligned} \quad (2.66)$$

де $\mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що задаються матрицями з елементами $b_{k-j}, r_{k-j}, q_{k-j}$, $k, j \in T$, що є коефіцієнтами Фур'є функцій $(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$,

$$b_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$r_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$q_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda.$$

Розглянемо випадок, коли стаціонарна послідовність $\xi(j)$ спостерігається без шуму. Оскільки у цьому випадку $g(\lambda) = 0$, то спектральна характеристика лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ буде мати вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda), \quad C(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in T} c(j)e^{ij\lambda},$$

а система рівнянь (2.61) запишеться у вигляді

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}}, \quad (2.67)$$

де лінійний оператор \mathbf{B} у просторі ℓ_2 задається матрицею, елементи якої є коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$, і має вигляд аналогічний до (2.62). Звідси невідомі коефіцієнти $c(j)$, $j \in T$, обчислюються за формулою $c(j) = (\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}})_j$, де $(\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}})_j$ – j -ий елемент вектора $\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}$, а формула за якою обчислюється спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda} \right) - \left(\sum_{j \in T} (\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}})_j e^{ij\lambda} \right) f^{-1}(\lambda). \quad (2.68)$$

Середньоквадратична похибка оцінки функціонала має вигляд

$$\Delta(h; f) = \langle \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle. \quad (2.69)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді наслідку.

Наслідок 2.4. Нехай $\xi(j)$ – стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.70)$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(h, f)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s \{-M_l - N_l, \dots, -M_l\}$, можна обчислити за формулами (2.68), (2.69).

Нехай стаціонарні послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ некорельовані. Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального оцінювання функціонала

$$A_N \xi = \sum_{j=0}^N a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s \{-M_l - N_l, -M_l - N_l + 1, \dots, -M_l\}$.

Для знаходження спектральної характеристики $h_N(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичної похибки $\Delta(h_N; f)$ оцінки $\hat{A}_N \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h_N(e^{i\lambda})(Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda))$ визначимо вектор

$$\vec{\mathbf{a}}_N = (\vec{a}_s, \vec{a}_{s-1}, \dots, \vec{a}_1, \vec{a}_N),$$

елементи \vec{a}_k , $k = 1, \dots, s$ задаються формулою (2.60), а останній елемент $\vec{a}_N = (a(0), a(1), \dots, a(N), 0, 0, \dots)$.

Нехай \mathbf{R}_N – лінійний у просторі ℓ_2 оператор, $\mathbf{R}_N(k, j) = \mathbf{R}(k, j)$, $j \leq N$, $\mathbf{R}_N(k, j) = 0$, $j > N$. Спектральну характеристику оптимальної оцінки $\hat{A}_N \xi$ можна обчислити за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = A_N(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_N \vec{\mathbf{a}}_N)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (2.71)$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_N \xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
\Delta(h_N; f, g) &= E \left| A_N \xi - \hat{A}_N \xi \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A_N(e^{i\lambda})g(\lambda) + \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_N \vec{\mathbf{a}}_N)_k e^{ik\lambda}}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} \right|^2 f(\lambda) d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A_N(e^{i\lambda})f(\lambda) - \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_N \vec{\mathbf{a}}_N)_k e^{ik\lambda}}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} \right|^2 g(\lambda) d\lambda \\
&= \langle \mathbf{R}_N \vec{\mathbf{a}}_N, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_N \vec{\mathbf{a}}_N \rangle + \langle \mathbf{Q}_N \vec{\mathbf{a}}_N, \vec{\mathbf{a}}_N \rangle,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

де \mathbf{Q}_N – лінійний оператор у просторі ℓ_2 , $\mathbf{Q}_N(k, j) = \mathbf{Q}(k, j)$, $k, j \leq N$, $\mathbf{Q}_N(k, j) = 0$, $k, j > N$. Зауважимо, що лінійні оператори \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} визначені в Наслідку 2.3.

Наслідок 2.5. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (2.35). Спектральну характеристику $h_N(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h_N; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за формулами (2.71), (2.72).*

У випадку спостережень без шуму маємо наступний наслідок.

Наслідок 2.6. *Нехай $\xi(j)$ – стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності (2.70). Спектральну характеристику $h_N(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(h_N, f)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N \xi$ функціонала $A_N \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за формулами*

$$h_N(e^{i\lambda}) = \left(\sum_{j=0}^N a(j) e^{ij\lambda} \right) - \left(\sum_{j \in T} (\mathbf{B}^{-1} \vec{\mathbf{a}}_N)_j e^{ij\lambda} \right) f^{-1}(\lambda), \tag{2.73}$$

$$\Delta(h_N; f) = \langle \mathbf{B}^{-1} \vec{\mathbf{a}}_N, \vec{\mathbf{a}}_N \rangle, \tag{2.74}$$

лінійний оператор \mathbf{B} визначений в Наслідку 2.4.

Зауважимо, що якщо потрібно знайти лише прогноз стаціонарної послідовності за даними спостережень з пропусками, то вектор $\vec{\mathbf{a}}$ матиме вигляд $\vec{\mathbf{a}} = (0, 0, \dots, 0, \vec{a})$, де перші $|S| = \sum_{k=1}^s (N_k + 1)$ елементів рівні нулю, а останній елемент $\vec{a} = (a(0), a(1) \dots)$ побудований з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$.

Приклад 2.5. Розглянемо задачу лінійної екстраполяції функціонала

$$A_1\xi = a(0)\xi(0) + a(1)\xi(1)$$

від невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними послідовності $\xi(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $S = \{-3, -2\}$. Нехай щільність послідовності $\xi(j)$ має вигляд $f(\lambda) = |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^{-2}$, $|\alpha| < 1$. Тоді функцію $f^{-1}(\lambda)$ можна записати у вигляді $f^{-1}(\lambda) = |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2 = b_{-1}e^{-i\lambda} + b_0 + b_1e^{i\lambda}$, де $b_0 = 1 + |\alpha|^2$, $b_{-1} = -\alpha$, $b_1 = -\bar{\alpha}$, $b_p = 0$, $|p| > 1$ – коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$. За наслідком 2.6 спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_1\xi$ функціонала $A_1\xi$ обчислюється за формулою

$$h_1(e^{i\lambda}) = (a(0) + a(1)e^{i\lambda}) - \left(\sum_{j \in T} (\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}_1)_j e^{ij\lambda} \right) (b_{-1}e^{-i\lambda} + b_0 + b_1e^{i\lambda}),$$

де вектор $\vec{\mathbf{a}}_1 = (0, 0, 1, 2, 0, 0, \dots)$.

Знайдемо невідомі коефіцієнти $c(j) = (\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}_1)_j$, $j \in T = S \cup \{0, 1, 2, \dots\}$. Використаємо рівняння (2.67). Вектор $\vec{\mathbf{c}}$, який фігурує в рівнянні, має вигляд $\vec{\mathbf{c}} = (c(-3), c(-2), c(0), c(1), c(2), c(3), \dots)$. Оператор \mathbf{B} задається матрицею

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & b_{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Необхідно знайти матрицю B^{-1} , яка визначає оператор \mathbf{B}^{-1} . Будемо шу-

кати її наступним чином. Матрицю B запишемо у вигляді

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

де

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & 0 & \dots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots \\ 0 & b_1 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матрицю B^{-1} будемо шукати у вигляді

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} B_0^{-1} & 0 \\ 0 & B_1^{-1} \end{pmatrix},$$

де B_0^{-1} , B_1^{-1} – обернені до матриць B_0 , B_1 відповідно.

Матриця B_0^{-1} знаходиться легко

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{b_0^2 - b_1 b_{-1}} & \frac{-b_{-1}}{b_0^2 - b_1 b_{-1}} \\ \frac{-b_1}{b_0^2 - b_1 b_{-1}} & \frac{b_0}{b_0^2 - b_1 b_{-1}} \end{pmatrix}.$$

Для відшукування матриці $(B_1)^{-1}$ використаємо наступний спосіб. Матриця B_1 побудована з коефіцієнтів Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$

$$B_1(k, j) = b_{k-j}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Щільність $f^{-1}(\lambda) = |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2$ допускає факторизацію

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{ip\lambda} = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-ij\lambda} \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j e^{-ij\lambda} \right|^{-2},$$

$$b_0 = 1 + |\alpha|^2, b_{-1} = -\alpha, b_1 = -\bar{\alpha}, b_p = 0, |p| > 1,$$

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = -\alpha, \psi_j = 0, j > 1,$$

$$\theta_j = \alpha^j, j \geq 0.$$

Використовуючи останнє співвідношення коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$ можемо представити у вигляді $b_p = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \bar{\psi}_{k+p}$, $p \geq 0$, та $b_{-p} = \bar{b}_p$, $p \geq 0$.

Тобто $b_{i-j} = \sum_{l=\max(i,j)}^{\infty} \psi_{l-i} \bar{\psi}_{l-j}$.

Позначимо Ψ та Θ лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що задаються матрицями з елементами $\Psi_{i,j} = \psi_{i-j}$, $\Theta_{i,j} = \theta_{i-j}$, при $0 \leq j \leq i$, $\Psi_{i,j} = 0$, $\Theta_{i,j} = 0$, при $0 \leq i < j$. Тоді елементи матриці B_1 можна записати у вигляді $B_1(i,j) = (\Psi' \bar{\Psi})_{i,j}$. Можна показати, що $\Psi\Theta = \Theta\Psi = I$. Звідси елементи матриці B_1^{-1} обчислюються за формулою $B_1^{-1}(i,j) = (\bar{\Theta}\Theta')_{i,j} = \sum_{l=0}^{\min(i,j)} \bar{\theta}_{i-l}\theta_{j-l}$, а матриця $(B_1)^{-1}$ має вигляд

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\alpha + 1 & \bar{\alpha}\alpha^2 + \alpha & \bar{\alpha}\alpha^3 + \alpha^2 & \dots \\ \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^2\alpha + \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2\alpha^2 + \bar{\alpha}\alpha + 1 & \bar{\alpha}^2\alpha^3 + \bar{\alpha}\alpha^2 + \alpha & \dots \\ \dots & & & & \dots \end{pmatrix}.$$

З рівняння (2.67) знаходимо невідомі коефіцієнти $c(j)$, $j \in T$,

$$\begin{aligned} c(-3) &= 0, & c(-2) &= 0, \\ c(0) &= a(0) + a(1)\alpha, \\ c(1) &= a(0)\bar{\alpha} + a(1)(\bar{\alpha}\alpha + 1), \\ c(2) &= a(0)\bar{\alpha}^2 + a(1)(\bar{\alpha}^2\alpha + \bar{\alpha}), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$c(i) = a(0)\bar{\alpha}^i + a(1)(\bar{\alpha}^i\alpha + \bar{\alpha}^{i-1}), \quad i > 2.$$

Спектральна характеристика обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} h_1(e^{i\lambda}) &= (a(0) + a(1)e^{i\lambda}) - (c(-3)e^{-i3\lambda} + c(-2)e^{-i2\lambda} + c(0) + c(1)e^{i\lambda} + c(2)e^{i2\lambda}) \\ &\quad + \sum_{j>2} c(j)e^{ij\lambda} (b_{-1}e^{-i\lambda} + b_0 + b_1e^{i\lambda}) = -c(0)b_{-1}e^{-i\lambda} - c(1)b_1e^{i2\lambda} \\ &\quad - c(2)b_0e^{i2\lambda} - c(2)b_1e^{i3\lambda} - \sum_{j>2} c(j)e^{ij\lambda} (b_{-1}e^{-i\lambda} + b_0 + b_1e^{i\lambda}). \end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнти $b_1c(j-1) + b_0c(j) + b_{-1}c(j+1)$ при $e^{ij\lambda}$, $j \geq 2$, дорівнюють нулю, то спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_1\xi$ має вигляд

$$h_1(e^{i\lambda}) = -c(0)b_{-1}e^{-i\lambda} = (a(0) + a(1)\alpha)\alpha e^{-i\lambda}.$$

Середньоквадратична похибка оцінки функціонала $A_1\xi$ обчислюється за формулою $\Delta(h_1; f) = \langle B^{-1}\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_1 \rangle$, і дорівнює

$$\Delta(h_1; f) = (a(0))^2 + a(0)a(1)\alpha + a(0)a(1)\bar{\alpha} + (a(1))^2|\alpha|^2 + (a(1))^2.$$

Для заданої спектральної щільності середньоквадратична похибка оцінки функціонала $A_1\xi$ за спостереженнями стаціонарної послідовності $\xi(j)$ без пропусків буде такою самою як і у випадку спостережень з пропусками.

Приклад 2.6. Знайдемо середньоквадратичну похибку лінійної екстраполяції функціонала $A\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)\xi(k)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j)$ у двох випадках:

1. в моменти часу $j \in Z_-$ та
2. в моменти часу $j \in Z_- \setminus S$, тобто коли є пропущені дані.

Таким чином, зможемо побачити, як впливають пропущені значення на середньоквадратичну похибку. Для простоти обчислень розглянемо випадок, коли пропущене лише одне значення, $S = \{-n\}$.

Припустимо, що спектральна щільність $f^{-1}(\lambda)$ допускає факторизацію

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{ip\lambda} = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-ij\lambda} \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j e^{-ij\lambda} \right|^{-2}.$$

Знайдемо спочатку середньоквадратичну похибку екстраполяції функціонала $A\xi$ у першому випадку за формулою [17]

$$\Delta_1(h; f) = \langle \mathbf{B}_1^{-1}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{A}\vec{\theta}, \mathbf{A}\vec{\theta} \rangle,$$

де \mathbf{B}_1 – лінійний оператор в просторі ℓ_2 , що задається матрицею B_1 з елементами, що є коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \dots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix},$$

\mathbf{A} – лінійний оператор в просторі ℓ_2 визначений рівністю

$$(\mathbf{A}\vec{\theta})_k = \sum_{l=0}^{\infty} a(k+l)\theta_l,$$

вектори $\vec{a} = (a(0), a(1), a(2), \dots)$ та $\vec{\theta} = (\theta(0), \theta(1), \theta(2), \dots)$. Зауважимо, що за умови (2.55) оператор \mathbf{A} компактний.

Використавши введені позначення Ψ та Θ лінійних операторів у просторі ℓ_2 зможемо обчислити елементи матриці B_1 за формулою

$$B_1(i, j) = (\Psi' \bar{\Psi})_{i,j} = \sum_{l=\max(i,j)}^{\infty} \psi_{l-i} \bar{\psi}_{l-j},$$

та елементи матриці B_1^{-1} , яка задає обернений оператор \mathbf{B}_1^{-1} ,

$$B_1^{-1}(i, j) = (\bar{\Theta} \Theta')_{i,j} = \sum_{l=0}^{\min(i,j)} \bar{\theta}_{i-l} \theta_{j-l} = \omega_{i,j}.$$

Отже, середньоквадратична похибка оцінки функціонала $A\xi$ за спостереженнями без пропусків обчислюється за формулою

$$\Delta_1(h; f) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \omega_{k,j} a(j) \right) a(k) = \langle \mathbf{B}_1^{-1} \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \Theta' \vec{a}, \Theta' \vec{a} \rangle.$$

Знайдемо середньоквадратичну похибку у випадку спостережень з пропуском за формулою $\Delta_2(\tilde{h}; f) = \langle \mathbf{B}_2^{-1} \vec{a}, \vec{a} \rangle$, де \mathbf{B}_2 – лінійний оператор в просторі ℓ_2 , що задається матрицею B_2 елементи якої є коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-n} & b_{-n-1} & b_{-n-2} & \dots \\ b_n & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \dots \\ b_{n+1} & b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

вектор $\vec{a} = (0, a(0), a(1), a(2), \dots)$.

Для знаходження оберненої матриці B_2^{-1} скористаємось формулою Фробеніуса [1]. Матрицю B_2 представимо у вигляді

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{pmatrix},$$

$$B_{00} = \begin{pmatrix} b_0 \end{pmatrix}, \quad B_{01} = \begin{pmatrix} b_{-n} & b_{-n-1} & b_{-n-2} & \dots \end{pmatrix} = \vec{b}'_n,$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \\ \dots \end{pmatrix} = \vec{b}_n, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \dots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця B_2^{-1} буде мати вигляд

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}B_{01}B_{11}^{-1} \\ -B_{11}^{-1}B_{10}V^{-1} & B_{11}^{-1} + B_{11}^{-1}B_{10}V^{-1}B_{01}B_{11}^{-1} \end{pmatrix},$$

де $V = B_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}B_{10}$.

Матриця B_{11} збігається з матрицею B_1 з цього прикладу. Використовуючи співвідношення

$$\Psi' \vec{\psi}_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \\ \dots \end{pmatrix} = \vec{b}_n, \quad \vec{\psi}_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \\ \dots \end{pmatrix},$$

можемо представити значення V в термінах операторів Ψ та Θ

$$\begin{aligned} V &= b_0 - (\vec{b}_n)' \overline{\Theta} \Theta' \vec{b}_n = b_0 - \langle \Theta' \Psi' \vec{\psi}_n, \Theta' \Psi' \vec{\psi}_n \rangle = b_0 - \langle \vec{\psi}_n, \vec{\psi}_n \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|^2 - \sum_{k=n}^{\infty} |\psi_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\psi_k|^2. \end{aligned}$$

Позначимо $\tilde{\omega}_{k,j} = (B_{11}^{-1} + B_{11}^{-1}B_{10}V^{-1}B_{01}B_{11}^{-1})_{k,j}$. Тоді для $k, j > 0$,

$$\tilde{\omega}_{k,j} = \omega_{k,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_{k,i} b_{i,-n} \tau_{-n,-n} \sum_{l=0}^{\infty} b_{-n,l} \omega_{l,j} = \omega_{k,j} + \gamma_{k,j}. \quad (2.75)$$

Використовуючи введені позначення залишемо $B_{11}^{-1}B_{10}V^{-1}B_{01}B_{11}^{-1}$ і як наслідок $\gamma_{k,j}$ наступним чином

$$\begin{aligned} B_{11}^{-1}B_{10}V^{-1}B_{01}B_{11}^{-1} &= V^{-1} \left(\overline{\Theta} \Theta' \vec{b}_n \right) \left(\overline{\Theta} \Theta' \vec{b}_n \right)^{\top} = \\ &= V^{-1} \left(\overline{\Theta} \Theta' \Psi' \vec{\psi}_n \right) \left(\overline{\Theta} \Theta' \Psi' \vec{\psi}_n \right)^{\top} = V^{-1} \left(\overline{\Theta} \vec{\psi}_n \right) \left(\overline{\Theta} \vec{\psi}_n \right)^{\top}, \\ \gamma_{k,j} &= \left(V^{-1} \left(\overline{\Theta} \vec{\psi}_n \right) \left(\overline{\Theta} \vec{\psi}_n \right)^{\top} \right)_{k,j}. \end{aligned}$$

Обчислимо середньоквадратичну похибку екстраполяції функціонала $A\xi$ за спостереженнями з пропусками, $T = \{-n\} \cup \{0, 1, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \Delta_2(\tilde{h}; f) &= \sum_{k \in T} \left(\sum_{j \in T} \tilde{\omega}_{k,j} a(j) \right) a(k) = \sum_{k \in S} \left(\sum_{j \in T} \tilde{\omega}_{k,j} a(j) \right) a(k) + \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in T} \tilde{\omega}_{k,j} a(j) \right) a(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in S} \tilde{\omega}_{k,j} a(j) + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\omega}_{k,j} a(j) \right) a(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\omega}_{k,j} a(j) \right) a(k). \end{aligned}$$

З формули (2.75) і останнього співвідношення випливає, що

$$\begin{aligned} \Delta_2(\tilde{h}; f) &= \Delta_1(h; f) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{k,j} a(j) \right) a(k) = \\ &\langle \Theta' \vec{a}, \Theta' \vec{a} \rangle + V^{-1} \left| \langle \vec{\psi}_n, \Theta' \vec{a} \rangle \right|^2 = \|\Theta' \vec{a}\|^2 + V^{-1} \|(\vec{\psi}_n)' \Theta' \vec{a}\|^2. \end{aligned}$$

Таким чином, можна оцінити вплив пропущених значень на величину середньоквадратичної похибки.

Зокрема, у випадку оцінювання значення $\xi(0)$ за спостереженнями $\xi(k)$, $k = -1, -2, \dots$ з одним пропуском $\xi(-n)$ вектор $\vec{a} = (1, 0, 0, \dots)$, а середньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$\Delta_2(\tilde{h}; f) = |\theta_0|^2 + V^{-1} |\theta_0|^2 |\psi_n|^2 = |\theta_0|^2 \left(1 + \frac{|\psi_n|^2}{\sum_{k=0}^{n-1} |\psi_k|^2} \right).$$

Зауважимо, що відповідна формула для аналогічної задачі отримана на основі представлення стаціонарної послідовності у вигляді авторегресії у статті П. Бондона [32], [35]

$$E|\xi(0) - \hat{\xi}(0)|^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{\psi_n^2}{\sum_{i=0}^{n-1} \psi_i^2} \right), \quad \sigma^2 = \exp \left[\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right],$$

де ψ_k – коефіцієнти авторегресії послідовності.

2.4.2. Мінімаксний (робастний) метод екстраполяції. Теорему 2.18 та її наслідки можна застосувати до розв'язання задачі екстраполяції стаціонарних послідовностей з пропусками лише у випадку спектральної визначеності, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$, $f_{\xi\eta}(\lambda)$, $f_{\eta\xi}(\lambda)$, $g(\lambda)$, які формують матрицю спектральних щільностей $F(\lambda)$. Якщо точний вигляд спектральних щільностей не відомий, але задана множина допустимих матриць спектральних щільностей $D = \{F(\lambda)\}$, то ефективно застосувати мінімаксний підхід екстраполяції. Він полягає у відшуканні такої оцінки, яка б мінімізувала величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх матриць спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 2.8. Для заданого класу матриць спектральних щільностей $D = \{F(\lambda)\}$ матриця спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D$ називається найменш сприятливою в класі D для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо виконується наступне співвідношення

$$\Delta(F^0) = \Delta(h(F^0); F^0) = \max_{F \in D} \Delta(h(F); F).$$

Означення 2.9. Для заданого класу матриць спектральних щільностей $D = \{F(\lambda)\}$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо наступні умови виконані

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{F \in D} L_2^s(f + g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{F \in D} \Delta(h; F) = \max_{F \in D} \Delta(h^0; F).$$

З введених означень і формул отримуємо наступне твердження.

Лема 2.6. Спектральні щільності $f^0(\lambda)$, $f_{\xi\eta}^0(\lambda)$, $f_{\eta\xi}^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності (2.27), формують матрицю спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D$, яка є найменш сприятливою в класі D для лінійної оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є (2.59) функцій

$$\frac{1}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)}, \quad \frac{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda)}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)},$$

$$\frac{f^0(\lambda)g^0(\lambda) - f_{\xi\eta}^0(\lambda)f_{\eta\xi}^0(\lambda)}{f^0(\lambda) + f_{\xi\eta}^0(\lambda) + f_{\eta\xi}^0(\lambda) + g^0(\lambda)}$$

визначають оператори $\mathbf{B}^0, \mathbf{R}^0, \mathbf{Q}^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{F \in D} \langle \mathbf{R}\vec{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}^0\vec{a}, (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}^0\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (2.76)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(F^0)$ може бути обчислена за формулою (2.63), якщо $h(F^0) \in H_D$.

У випадку некорельованих стаціонарних послідовностей введено наступні означення та леми.

Означення 2.10. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ щільності $f_0(\lambda) \in D_f, g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 2.11. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f, g) \in D} L_2^s(f + g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{(f, g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f, g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Користуючись отриманими результатами та означеннями можна переко-
нати у справедливості леми.

Лема 2.7. Спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f, g_0(\lambda) \in D_g$, що задовольняють умову мінімальності (2.35), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної екстраполяції лінійного функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

здають оператори $\mathbf{B}^0, \mathbf{R}^0, \mathbf{Q}^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}\vec{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}^0\vec{a}, (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}^0\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (2.77)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (2.65) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Наслідок 2.7. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ така, що функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ є найменш сприятливою в класі D_f для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $f_0^{-1}(\lambda)$ задають оператор \mathbf{B}^0 , який визначає розв'язок задачі

$$\max_{f \in D_f} \langle \mathbf{B}^{-1}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle (\mathbf{B}^0)^{-1}\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (2.78)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за формулою (2.68) за умови, що $h(f_0) \in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f, g) \quad \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda, \\ C^0(e^{i\lambda}) &= \sum_{j \in T} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{a})_j e^{ij\lambda}. \end{aligned}$$

Задача на умовний екстремум (2.79) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (2.80)$$

де $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв’язок задачі (2.80) визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0, g_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0) [89].

Вигляд (форма) функціоналу $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ дозволяє знаходити похідні та диференціали функціоналу у просторі $L_1 \times L_1$. Тому складність оптимізаційних задач (2.80) визначається складністю обчислення субдиференціалів індикаторних функцій $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ множин $D_f \times D_g$ [53].

Лема 2.8. *Нехай (f_0, g_0) – розв’язок екстремальної задачі (2.80). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A\xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.*

2.4.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_W \times D_0$. Розглянемо задачу екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спостережень некорельованих послідовностей у випадку, коли спектральні щільності спостережуваних послідовностей належать множині спектральних щільностей $D = D_W \times D_0$, де

$$D_W = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \cos(w\lambda) d\lambda = r_w, w = 0, 1, \dots, W \right. \right\},$$

$$D_0 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\}.$$

Нехай послідовність $\{r_w, w = 0, 1, \dots, W\}$ – строго позитивна. Проблема моментів в такому разі розв’язується неоднозначно, і множина D_W містить нескінченно багато щільностей [7]. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_W$, $g_0(\lambda) \in D_0$ і функції, що визначені за формулами

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (2.81)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (2.82)$$

обмежені. У цьому випадку

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda$$

буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тоді за методом невизначених множників Лагранжа можна знайти рівняння, яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = \left(\sum_{w=0}^W \psi_w \cos(w\lambda) \right) (f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (2.83)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = \alpha(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (2.84)$$

де константи $\psi_w \geq 0, \alpha \geq 0$.

Теорема 2.19. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_W, g_0(\lambda) \in D_0$ і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функції, що визначені формулами (2.81), (2.82), обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda), g_0(\lambda)$, визначені з рівнянь (2.83), (2.84) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_W \times D_0$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Теорема 2.20. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_0, g_0(\lambda) \in D_0$ і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функції, що визначені формулами (2.81), (2.82), обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda), g_0(\lambda)$, визначені з наступних рівнянь*

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (2.85)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = \alpha_2(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (2.86)$$

$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_0 \times D_0$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (2.77). Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\lambda) d\lambda = P_1$, і $\alpha_2 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda) d\lambda = P_1$. Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.8. Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_0$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.82), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_0 для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \{0, \alpha^{-1} |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda)\},$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.9. Нехай відома спектральна щільність $g(\lambda)$, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_W$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (2.81), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_W для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$f_0(\lambda) = \frac{|A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|}{\sum_{w=0}^W \psi_w \cos(w\lambda)} - g(\lambda),$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.10. Нехай відома спектральна щільність $g(\lambda)$, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_0$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (2.81), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_0 для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$f_0(\lambda) = \max \{0, \alpha^{-1} |A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda)\},$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.11. *Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_W$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.82), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_W для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо*

$$g_0(\lambda) = \frac{|A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|}{\sum_{w=0}^W \psi_w \cos(w\lambda)} - f(\lambda),$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Розглянемо випадок екстраполяції функціонала $A\xi$ від невідомих значень випадкової стаціонарної послідовності, що спостерігається без шуму. В цьому випадку $g(\lambda) = 0$. Таким чином, отримаємо наслідки.

Наслідок 2.12. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_0$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.70). Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_0 для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо $f_0(\lambda) = \alpha^{-1} |C^0(e^{i\lambda})|$, і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.78). Функція, обчислена за формулою (2.68), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 2.13. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_W$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.70). Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_W для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо*

$$f_0(\lambda) = \frac{|C^0(e^{i\lambda})|}{\sum_{w=0}^W \psi_w \cos(w\lambda)},$$

і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.78). Функція, обчислена

за формулою (2.68), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

2.4.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$. Розглянемо задачу екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спостережень некорельованих послідовностей у випадку, коли їх спектральні щільності належать класу $D = D_v^u \times D_\varepsilon$,

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

де спектральні щільності $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, і, крім того, щільності $u(\lambda)$ та $v(\lambda)$ обмежені. Клас D_ε описує модель “ ε - забруднення” стохастичних послідовностей. Клас D_v^u описує “смугову” модель стохастичних послідовностей.

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_v^u$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$ за формулами (2.81), (2.82). Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_1^{-1}), \quad (2.87)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (2.88)$$

де $\gamma_1 \leq 0$ і $\gamma_1 = 0$, коли $f_0(\lambda) \geq v(\lambda)$; $\gamma_2 \geq 0$ і $\gamma_2 = 0$, коли $f_0(\lambda) \leq u(\lambda)$; $\varphi(\lambda) \leq 0$ і $\varphi(\lambda) = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon)g_1(\lambda)$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2.21. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_v^u$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$ і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функції, що визначені формулами (2.81), (2.82), є обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, визначені з рівнянь (2.87), (2.88) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$, якщо вони*

визначають розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.14. Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.82), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_ε для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \{ (1 - \varepsilon)g_1(\lambda), f_1(\lambda) \},$$

$$f_1(\lambda) = \alpha_2 |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda),$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція $h(f, g_0)$, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.15. Нехай відома спектральна щільність $g(\lambda)$, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_v^u$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (2.81), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_v^u для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$f_0(\lambda) = \min \{ \max \{ \alpha_1 |A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda), v(\lambda) \}, u(\lambda) \},$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція $h(f_0, g)$, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

2.4.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}$. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ за даними спостережень некорельованих послідовностей, коли спектральні щільності належать множині спектральних щільностей $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}$

$$D_{\varepsilon_1}^1 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon_2)g_1(\lambda) + \varepsilon_2 w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

де спектральні щільності $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані. Клас $D_{\varepsilon_1}^1$ – це “ ε -окіл” у просторі L_1 заданої обмеженої спектральної щільності $f_1(\lambda)$, D_{ε} описує модель “ ε -забруднення” стохастичних послідовностей.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$, $g^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$ за формулами (2.81), (2.82). Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_1, \quad (2.89)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (2.90)$$

де $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))$, коли $f_0(\lambda) \neq f_1(\lambda)$, α_1, α_2 – сталі величини, $\varphi(\lambda) \leq 0$, і $\varphi(\lambda) = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon_2)g_1(\lambda)$. Рівняння (2.89), (2.90) разом з екстремальною умовою (2.77) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon_1 \quad (2.91)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі D .

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.22. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}$ такі, що виконується умова мінімальності (2.35) і функції, що обчислені за формулами (2.81), (2.82), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}$ для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (2.89)–(2.91), і визначають розв’язок екстремальної задачі (2.77). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 2.16. *Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (2.81),*

обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{\varepsilon_1}^1$ для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вона має вигляд

$$f_0(\lambda) = \max \{f_1(\lambda), \alpha_1 |A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda)\},$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.17. Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.82), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_{ε_2} для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \{(1 - \varepsilon_2)g_1(\lambda), \alpha_2 |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda)\},$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.77). Функція, обчислена за формулою (2.65), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

2.5. Задача фільтрації стаціонарної послідовності з пропусками

У цьому підрозділі розв'язується задача середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j \in \mathbb{Z}^S} a(j)\xi(-j)$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $\{\eta(j), j \in \mathbb{Z}\}$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $S = \bigcup_{l=1}^s \{-(M_l + N_l), \dots, -M_l\}$, $\mathbb{Z}^S = \{1, 2, \dots\} \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s \{M_l, \dots, M_l + N_l\}$, $M_0 = 0$, $N_0 = 0$. Задача оптимальної лінійної фільтрації для стаціонарних

послідовностей досліджена у випадку спектральної визначеності, тобто коли спектральні щільності послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі, та у випадку спектральної невизначеності, коли невідомий точний вигляд щільностей.

2.5.1. Класичний метод фільтрації. Нехай $\xi(j)$ та $\eta(j)$ – стаціонарні послідовності з нульовими математичними сподіваннями $E\xi(j) = 0$, $E\eta(j) = 0$, кореляційними функціями $R_\xi(k)$, $R_{\xi\eta}(k)$, $R_\eta(k)$, що допускають спектральне представлення (2.4) та спектральними щільностями $f(\lambda)$, $f_{\xi\eta}(\lambda)$, $f_\eta(\lambda)$, $g(\lambda)$, які задовольняють умову мінімальності (2.27).

Стаціонарні послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ допускають спектральний розклад (2.3) із ортогональними випадковими мірами $Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(d\lambda)$, що підпорядковані спектральним мірам $F(d\lambda)$ та $G(d\lambda)$ послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$, і задовольняють співвідношення (2.5).

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j \in Z^S} a(j)\xi(-j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s \{-(M_l + N_l), \dots, -M_l\}$, $Z^S = \{1, 2, \dots\} \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s \{M_l, \dots, M_l + N_l\}$.

Припускаємо, що коефіцієнти $\{a(j), j \in Z^S\}$, які визначають функціонал $A\xi$ задовольняють умови

$$\sum_{k \in Z^S} |a(k)| < \infty, \quad \sum_{k \in Z^S} (k+1) |a(k)|^2 < \infty. \quad (2.92)$$

За першої умови функціонал $A\xi$ має скінченний другий момент. Друга умова забезпечує компактність в просторі ℓ_2 операторів, які будуть пізніше визначені.

Використовуючи спектральний розклад стаціонарної послідовності $\xi(j)$ функціонал $A\xi$ можна записати у вигляді

$$A\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\lambda}) Z_\xi(d\lambda), \quad A(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in Z^S} a(j) e^{-ij\lambda}.$$

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір, породжений величинами $\{\xi(j) + \eta(j) : j \in \mathbb{Z}_- \setminus S\}$ у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Розглянемо підпростір $L_2^s(f + g)$ простору $L_2(f + g)$, що породжений функціями $\{e^{ij\lambda}, j \in \mathbb{Z}_- \setminus S\}$.

Нехай $\hat{A}\xi$ – оптимальна лінійна оцінка функціонала $A\xi$ побудована за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, що має вигляд (2.56) Для відшукування оцінки $\hat{A}\xi$ використаємо метод ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі [59]. Згідно цього методу оптимальною оцінкою функціонала $A\xi$ буде проєкція елемента $A\xi$ на підпростір $H^s(\xi + \eta)$. Така проєкція визначається з умов:

- 1) $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$,
- 2) $A\xi - \hat{A}\xi \perp H^s(\xi + \eta)$.

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{A(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)) - C(e^{i\lambda})}{f_\zeta(\lambda)}, \quad C(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in S} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda},$$

де $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)$, $T = S \cup \{0, 1, \dots\}$, $\{c(j), j \in T\}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти.

З 1-ї умови, $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A\xi$, випливає, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}) e^{-ik\lambda} d\lambda = 0, \quad k \in T,$$

тобто

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f_\zeta(\lambda)} - C(e^{i\lambda}) \frac{1}{f_\zeta(\lambda)} \right) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in T.$$

Остання рівність дозволить знайти рівняння для визначення шуканих невідомих коефіцієнтів $c(j)$, $j \in T$. Розкриємо дужки і отримаємо співвідноше-

ння

$$\sum_{j \in Z^s} a(j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(k+j)\lambda} (f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda))}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda -$$

$$\left(\sum_{j \in S} c(j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(k-j)\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda + \sum_{j=0}^{\infty} c(j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(k-j)\lambda}}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda \right) = 0, \quad k \in T. \quad (2.93)$$

Введемо позначення

$$b_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

$$r_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+j)\lambda} \frac{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \quad (2.94)$$

$$q_{k-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda,$$

та запишемо співвідношення (2.93) у вигляді системи рівнянь

$$\sum_{j \in Z^s} r_{k,j} a(j) = \sum_{j \in S} b_{k,j} c(j) + \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j} c(j), \quad k \in T.$$

Позначимо $a(j) = 0, j \in S, a(0) = 0$ і $a(j) = 0, j \in S^+$. Тоді отримаємо

$$\sum_{j \in T} r_{k,j} a(j) = \sum_{j \in S} b_{k,j} c(j) + \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j} c(j), \quad k \in T.$$

Вказані рівняння можна подати у вигляді

$$\mathbf{R}\vec{a} = \mathbf{B}\vec{c}, \quad (2.95)$$

де вектор \vec{c} складається з невідомих коефіцієнтів $c(j), j \in T$, вектор \vec{a} має однакову з вектором \vec{c} розмірність, і має вигляд

$$\vec{a} = (\vec{0}_0, \vec{a}_1, \vec{0}_1, \vec{a}_2, \vec{0}_2, \dots, \vec{a}_i, \vec{0}_i, \dots, \vec{a}_s, \vec{0}_s, \vec{a}_{s+1}),$$

де $\vec{0}_0$ – вектор, який складається з $|S| + 1$ нулів, де $|S| = \sum_{k=1}^s (N_k + 1)$ – кількість пропусків, вектори $\vec{0}_i, i = 1, 2, \dots, s$, складаються з $N_i + 1$ нулів, вектори

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= (a(1), \dots, a(M_1 - 1)), \\ \vec{a}_i &= (a(M_{i-1} + N_{i-1} + 1), \dots, a(M_i - 1)), \quad i = 2, \dots, s, \\ \vec{a}_{s+1} &= (a(M_s + N_s + 1), a(M_s + N_s + 2), \dots),\end{aligned}$$

побудовані з коефіцієнтів, що визначають функціонал $A\xi$.

\mathbf{B} , \mathbf{R} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що визначаються матрицями B , R з елементами (2.94), $B(k, j) = b_{k,j}$, $k, j \in T$, $R(k, j) = r_{k,j}$, $k, j \in T$, та мають

вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n} \\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n} \\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

де елементи в останньому стовпчику та останньому рядку представляють собою матриці з елементами

$$\begin{aligned}B_{l,n}(k, j) &= b_{k,j}, \quad l = 1, 2, \dots, s, \\ k &= -M_l - N_l, \dots, -M_l, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ B_{n,m}(k, j) &= b_{k,j}, \quad m = 1, 2, \dots, s, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \quad j = -M_m - N_m, \dots, -M_m, \\ B_{n,n}(k, j) &= b_{k,j}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

а всі інші елементи матриці B – матриці з елементами

$$\begin{aligned}B_{l,m}(j, k) &= b_{k,j}, \quad l, m = 1, 2, \dots, s \\ k &= -M_l - N_l, \dots, -M_l, \quad j = -M_m - N_m, \dots, -M_m.\end{aligned}$$

Невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k \in T$, що знаходяться з рівняння (2.95), обчислюються за формулою $c(k) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k$, де $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k$ – k -ий елемент вектора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}$. Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за наступною формулою

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{A(e^{i\lambda})(f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda))}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + f_{\xi\eta}(\lambda) + f_{\eta\xi}(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (2.97)$$

Нехай \mathbf{Q} – лінійний оператор у просторі ℓ_2 , який задається матрицею Q виду (2.96) з елементами (2.94), $Q(k, j) = q_{k,j}$, $k, j \in T$.

Аналогічно (2.28) та (2.33) середньоквадратичну похибку оцінки $\hat{A}\xi$ у випадку задачі фільтрації можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(h; F) &= \Delta(h; f, g, f_{\xi\eta}, f_{\eta\xi}) = E \left| A\xi - \hat{A}\xi \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j \in Z^S} a(j) e^{ij\lambda} \right|^2 \frac{f(\lambda)g(\lambda) - f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a})_k e^{ik\lambda} \right|^2 \frac{1}{f_{\zeta}(\lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

Використовуючи введені позначення операторів \mathbf{B} , \mathbf{R} та \mathbf{Q} , останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$\langle \mathbf{R}\vec{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (2.98)$$

Таким чином, можемо стверджувати, що справедлива наступна теорема.

Теорема 2.23. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язані між собою стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda) \\ f_{\eta\xi}(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix}$ такою, що виконується умова мінімальності (2.27). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за формулами (2.97), (2.98).*

Розглянемо випадок, коли спостережувані послідовності некорельовані між собою. Тоді $f_{\xi\eta}(\lambda) = f_{\eta\xi}(\lambda) = 0$. Враховуючи це можемо сформулювати наслідок.

Наслідок 2.18. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (2.35). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$*

та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за наступними формулами

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{A(e^{i\lambda})f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h; f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A(e^{i\lambda})g(\lambda) + \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} \right|^2 f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A(e^{i\lambda})f(\lambda) - \sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} \right|^2 g(\lambda) d\lambda \\ &= \langle \mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle, \end{aligned} \quad (2.100)$$

де \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , які задаються матрицями виду (2.96) з елементами $b_{k,j}$, $r_{k,j}$, $q_{k,j}$, $k, j \in T$, визначеними співвідношеннями

$$\begin{aligned} b_{k,j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \\ r_{k,j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+j)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda, \\ q_{k,j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-j)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi = \sum_{j \in Z^S} a(j)\xi(-j)$, від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $S = \{-(M+N), \dots, -M\}$, $S^+ = \{M, \dots, M+N\}$, $Z^S = \{1, 2, \dots\} \setminus S^+$.

З теореми 2.23 для такої задачі отримаємо наслідок.

Наслідок 2.19. Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (2.35). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (2.102)$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q} \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle, \quad (2.103)$$

\mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , які визначаються матрицями B , R , Q з елементами (2.101) наступного вигляду

$$B = \begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,n} \\ B_{n,s} & B_{n,n} \end{pmatrix},$$

де її компоненти представляють собою матриці з елементами

$$B_{s,n}(k, j) = b_{k,j}, \quad k = -M - N, \dots, -M, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_{n,s}(k, j) = b_{k,j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = -M - N, \dots, -M,$$

$$B_{n,n}(k, j) = b_{k,j}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_{s,s}(j, k) = b_{k,j}, \quad k = -M - N, \dots, -M, \quad j = -M - N, \dots, -M.$$

Розглянемо задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала $A\xi = \sum_{j \in Z^S} a(j)\xi(-j)$, від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, у випадку, коли відсутнє одне спостереження, тобто в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-s\}$, $Z^S = \{1, 2, \dots\} \setminus \{s\}$.

У цьому випадку справедливий наслідок.

Наслідок 2.20. Розглянемо некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності $\xi(j)$, $\eta(j)$ із спектральними щільностями $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$ такими,

що виконується умова мінімальності (2.35). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-s\}$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (2.104)$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q} \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle, \quad (2.105)$$

де \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , визначаються матрицями B , R , Q з елементами (2.101) виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{-s, -s} & B_{-s, n} \\ B_{n, -s} & B_{n, n} \end{pmatrix},$$

де елементи в останньому стовпчику та останньому рядку представляють собою матриці з елементами

$$B_{-s, n}(k, j) = b_{k, j}, \quad k = -s, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_{n, -s}(k, j) = b_{k, j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = -s,$$

$$B_{n, n}(k, j) = b_{k, j}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N \xi = \sum_{j \in \mathbb{Z}^S \cap \{0, \dots, N\}} a(j) \xi(-j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\{\xi(j)\}$, за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, S визначена як раніше в параграфі. Лінійну оцінку функціонала $A_N \xi$ будемо шукати у вигляді

$$\hat{A}_N \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h_N(e^{i\lambda}) (Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)).$$

Визначимо вектор $\vec{\mathbf{a}}_N$ таким чином: компоненти з індексами $T \cap (S \cup \{0, \dots, N\})$ збігаються з елементами вектора $\vec{\mathbf{a}}$ з відповідними індексами, а компоненти з індексами $T \setminus (S \cup \{0, \dots, N\})$ дорівнюють нулю. \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – лінійні оператори у просторі ℓ_2 , які визначені в теоремі 2.23.

Спектральну характеристику $h_N(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h_N; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N \xi$ можна обчислити за формулами

$$h_N(e^{i\lambda}) = A_N(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}_N)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (2.106)$$

$$\Delta(h_N; f, g) = \langle \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}_N, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{\mathbf{a}}_N \rangle + \langle \mathbf{Q} \vec{\mathbf{a}}_N, \vec{\mathbf{a}}_N \rangle, \quad (2.107)$$

де $A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^S \cap \{0, \dots, N\}} a(j) e^{-ij\lambda}$.

Наслідок 2.21. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (2.35). Спектральну характеристику $h_N(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h_N; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N \xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$ можна обчислити за формулами (2.106), (2.107).*

Приклад 2.7. Нехай $\xi(j)$ та $\eta(j)$ – дві некорельовані стаціонарні послідовності зі спектральними щільностями

$$f(\lambda) = |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2, \quad g(\lambda) = |1 - \beta e^{-i\lambda}|^2$$

відповідно, де $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Розглянемо задачу середньоквадратично оптимально лінійного оцінювання функціонала

$$A_2 \xi = a(1) \xi(-1) + a(2) \xi(-2)$$

від невідомих значень $\xi(-1)$, $\xi(-2)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-n, -n + 1\}$, де $S = \{-n, -n + 1\}$ – множина пропусків.

Спектральна щільність стаціонарної послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ має вигляд

$$f(\lambda) + g(\lambda) = |1 - ae^{-i\lambda}|^2 + |1 - be^{-i\lambda}|^2 = |x - ye^{-i\lambda}|^2,$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{(1+a)^2 + (1+b)^2} \pm \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \right), \quad y = \frac{a+b}{x}.$$

Оскільки $|a| < 1$, $|b| < 1$, то $\left| \frac{y}{x} \right| < 1$. Використаємо розклад функції $\frac{1}{1-t}$ в степеневий ряд, щоб факторизувати функції $\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}$, $\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$ та $\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$

$$\frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} = \frac{1}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^{k+1}} e^{-ik\lambda} \right|^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} &= \frac{|1 - ae^{-i\lambda}|^2}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^{k+1}} e^{-ik\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ay^k}{x^{k+1}} e^{-i(k+1)\lambda} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}} \right) e^{-i(k+1)\lambda} \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} &= \frac{|1 - ae^{-i\lambda}|^2 \cdot |1 - be^{-i\lambda}|^2}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \frac{|1 - (a+b)e^{-i\lambda} + abe^{-i2\lambda}|^2}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^{k+1}} e^{-ik\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+b)y^k}{x^{k+1}} e^{-i(k+1)\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{aby^k}{x^{k+1}} e^{-i(k+2)\lambda} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{x} + \frac{y - ax - bx}{x^2} e^{-i\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}} \right) e^{-i(k+2)\lambda} \right|^2. \end{aligned}$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки $\hat{A}_2\xi$ обчислюється за формулою

$$h_2(e^{i\lambda}) = (a(1)e^{-i\lambda} + a(2)e^{-2i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a}_2)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

де $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a}_2)_k$, $k \in T = \{-n, -n+1\} \cup \{0, 1, \dots\}$ потрібно обчислити.

Вектор $\vec{a}_N = (0, 0, 0, a(1), a(2), 0, \dots)$, оператори \mathbf{B} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} задаються матрицями B , R , Q з елементами (2.101) та мають вигляд

$$B = \begin{pmatrix} b_{-n,-n} & b_{-n,-n+1} & b_{-n,0} & b_{-n,1} & b_{-n,2} & \dots \\ b_{-n+1,-n} & b_{-n+1,-n+1} & b_{-n+1,0} & b_{-n+1,1} & b_{-n+1,2} & \dots \\ b_{0,-n} & b_{1,-n+1} & b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots \\ b_{1,-n} & b_{1,-n+1} & b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots \\ b_{2,-n} & b_{2,-n+1} & b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots \\ \dots & & & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Необхідно знайти матрицю B^{-1} , яка визначає оператор \mathbf{B}^{-1} . Будемо шукати її наступним чином. Матрицю B запишемо у вигляді

$$B = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} b_{-n,-n} & b_{-n,-n+1} \\ b_{-n+1,-n} & b_{-n+1,-n+1} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} b_{-n,0} & b_{-n,1} & b_{-n,2} & \dots \\ b_{-n+1,0} & b_{-n+1,1} & b_{-n+1,2} & \dots \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} b_{0,-n} & b_{1,-n+1} \\ b_{1,-n} & b_{1,-n+1} \\ b_{2,-n} & b_{2,-n+1} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

За формулою Фробеніуса [1] матриця B^{-1} має вигляд

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}LN^{-1} \\ -N^{-1}MV^{-1} & N^{-1} + N^{-1}MV^{-1}LN^{-1} \end{pmatrix},$$

де $V = K - LN^{-1}M$.

Знайдемо матрицю N^{-1} використовуючи наступний спосіб. Матриця N це матриця $B_{n,n}$ в теоремі 2.23, вона побудована з коефіцієнтів Фур'є функції $\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}$.

Щільність $\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)} = |x - ye^{-i\lambda}|^{-2}$ допускає факторизацію (z_p - коефіцієнти Фур'є функції $\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}$)

$$\frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} = \frac{1}{|x - ye^{-i\lambda}|^2} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} z_p e^{ip\lambda} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{-ik\lambda} \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j e^{-ij\lambda} \right|^{-2},$$

$$\psi_k = \frac{y^k}{x^{k+1}}, \quad k \geq 0, \quad \theta_0 = x, \quad \theta_1 = -y, \quad \theta_j = 0, \quad j > 1.$$

Звідси $z_p = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \bar{\psi}_{k+p}$, $p \geq 0$, та $z_{-p} = \bar{z}_p$, $p \geq 0$. У випадку $i \geq j$ маємо $b_{i,j} = z_{i-j} = \sum_{l=i}^{\infty} \psi_{l-i} \bar{\psi}_{l-j}$, а у випадку $i < j$ маємо $b_{i,j} = z_{i-j} = \bar{z}_{j-i} = \sum_{l=j}^{\infty} \psi_{l-j} \bar{\psi}_{l-i}$.

Позначимо Ψ та Θ лінійні оператори у просторі ℓ_2 , що задаються матрицями з елементами $\Psi_{i,j} = \psi_{i-j}$, $\Theta_{i,j} = \theta_{i-j}$, при $0 \leq j \leq i$, $\Psi_{i,j} = 0$, $\Theta_{i,j} = 0$, при $0 \leq i < j$. Тоді елементи матриці N можна записати у вигляді $N(i,j) = (\Psi' \bar{\Psi})_{i,j}$. Можна показати, що $\Psi \Theta = \Theta \Psi = I$. Тоді елементи матриці N^{-1} обчислюються за формулою $N^{-1}(i,j) = (\bar{\Theta} \Theta')_{i,j}$. Позначимо

$$N^{-1}(i,j) = \gamma_{i,j} = \sum_{l=0}^{\min(i,j)} \bar{\theta}_{i-l} \theta_{j-l}. \quad (2.108)$$

Матриця N^{-1} має вигляд

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,2} & \cdots \\ \gamma_{1,0} & \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots \\ \gamma_{2,0} & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}.$$

Позначимо $(LN^{-1}M)_{k,j} = \beta_{k,j}$, $(V^{-1})_{k,j} = \tau_{k,j}$, $(N^{-1}MV^{-1})_{k,j} = -\rho_{k,j}$, $(V^{-1}LN^{-1})_{k,j} = -\sigma_{k,j}$, $(N^{-1} + N^{-1}MV^{-1}LN^{-1})_{k,j} = \omega_{k,j}$.

Матриця B^{-1} має вигляд

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \tau_{-n,-n} & \tau_{-n,-n+1} & \sigma_{-n,0} & \sigma_{-n,1} & \sigma_{-n,2} & \cdots \\ \tau_{-n+1,-n} & \tau_{-n+1,-n+1} & \sigma_{-n+1,0} & \sigma_{-n+1,1} & \sigma_{-n+1,2} & \cdots \\ \rho_{0,-n} & \rho_{0,-n+1} & \omega_{0,0} & \omega_{0,1} & \omega_{0,2} & \cdots \\ \rho_{1,-n} & \rho_{1,-n+1} & \omega_{1,0} & \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdots \\ \rho_{2,-n} & \rho_{2,-n+1} & \omega_{2,0} & \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \cdots \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix},$$

де елементи матриці задаються наступними рівностями

$$\tau_{-n,-n} = (b_{-n+1,-n+1} - \beta_{-n+1,-n+1})/d,$$

$$\tau_{-n,-n+1} = -(b_{-n,-n+1} - \beta_{-n,-n+1})/d,$$

$$\begin{aligned}
\tau_{-n+1,-n} &= -(b_{-n+1,-n} - \beta_{-n+1,-n})/d, \\
\tau_{-n+1,-n+1} &= (b_{-n,-n} - \beta_{-n,-n})/d, \\
d &= (b_{-n,-n} - \beta_{-n,-n})(b_{-n+1,-n+1} - \beta_{-n+1,-n+1}) - \\
&\quad (b_{-n,-n+1} - \beta_{-n,-n+1})(b_{-n+1,-n} - \beta_{-n+1,-n}), \\
\beta_{k,j} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} b_{k,r} \gamma_{r,i} \right) b_{i,j}, \\
\rho_{k,j} &= - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{k,i} \sum_{r=-n}^{-n+1} b_{i,r} \tau_{r,j}, \\
\sigma_{k,j} &= - \sum_{i=-n}^{-n+1} \tau_{k,i} \sum_{r=0}^{\infty} b_{i,r} \gamma_{r,j}, \\
\omega_{k,j} &= \gamma_{k,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{k,i} \sum_{m=-n}^{-n+1} \sum_{r=-n}^{-n+1} b_{i,r} \tau_{r,m} \sum_{l=0}^{\infty} b_{m,l} \gamma_{l,j} = \gamma_{k,j} + \nu_{k,j}. \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k \in T$ мають вигляд

$$c(k) = \sum_{j \in T} (B^{-1}R)_{k,j} a(j) = a(1)(B^{-1}R)_{k,1} + a(2)(B^{-1}R)_{k,2}, \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
(B^{-1}R)_{k,j} &= \sum_{i=-n}^{-n+1} \tau_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{k,i} r_{i,j}, \quad k = -n, -n+1, \quad j = 1, 2; \\
(B^{-1}R)_{k,j} &= \sum_{i=-n}^{-n+1} \rho_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_{k,i} r_{i,j}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2. \tag{2.111}
\end{aligned}$$

Спектральна характеристика обчислюється за формулою

$$h_2(e^{i\lambda}) = (a(1)e^{-i\lambda} + a(2)e^{-2i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{\sum_{k \in T} c(k) e^{ik\lambda}}{f(\lambda) + g(\lambda)}.$$

Середньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
\Delta(h_2; f, g) &= \langle \mathbf{R}\vec{a}_2, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a}_2 \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle \\
&= \sum_{k \in T} (a(1)r_{k,1} + a(2)r_{k,2}) c(k) + a(1)q_{1,1} + a(2)q_{1,2} + a(1)q_{2,1} + a(2)q_{2,2}.
\end{aligned}$$

Знайти коефіцієнти $r_{k,j}$ можна з факторизації функції $\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$

$$\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{-i(k+1)\lambda} \right|^2, \quad \phi_0 = \frac{1}{x}, \quad \phi_k = \frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}}, \quad k > 0.$$

$$\text{Звідки } r_{i,j} = \sum_{l=\max(i,j)}^{\infty} \phi_{l-i} \bar{\phi}_{l-j}.$$

Коефіцієнти $q_{k,j}$ знаходимо з факторизації функції $\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$

$$\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-i(k+2)\lambda} \right|^2, \quad \varphi_0 = \frac{1}{x}, \quad \varphi_1 = \frac{y-ax-bx}{x^2},$$

$$\varphi_k = \frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}}, \quad k > 1.$$

$$\text{Звідки } q_{i,j} = \sum_{l=\max(i,j)}^{\infty} \varphi_{l-i} \bar{\varphi}_{l-j}.$$

Приклад 2.8. Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_2\xi = a(1)\xi(-1) + a(2)\xi(-2)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в усі моменти часу $j \in \mathbb{Z}_-$ без пропусків.

Порівняємо значення середньоквадратичних похибок отримані у випадку спостережень з пропусками та випадку відсутності пропусків.

Середньоквадратична похибка визначається за формулою [17]

$$\Delta_1(\tilde{h}; f, g) = \langle \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle,$$

де вектор $\tilde{\mathbf{a}} = (0, a(1), a(2), 0, 0, \dots)$, $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{Q}}$ – лінійні оператори в просторі ℓ_2 , які задаються таким чином $(\tilde{\mathbf{B}})_{k,j} = b_{k,j}$, $k, j \geq 0$, $(\tilde{\mathbf{R}})_{k,j} = r_{k,j}$, $k, j \geq 0$, $(\tilde{\mathbf{Q}})_{k,j} = q_{k,j}$, $k, j \geq 0$, де елементи $b_{k,j}, r_{k,j}, q_{k,j}$ визначені формулами (2.101), \tilde{h} – спектральна характеристика оцінки функціонала від невідомих значень послідовності, що спостерігається без пропусків. Звідси

$$\Delta_1(\tilde{h}; f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} (a(1)r_{k,1} + a(2)r_{k,2}) \tilde{c}(k) + a(1)q_{1,1} + a(2)q_{1,2} + a(1)q_{2,1} + a(2)q_{2,2},$$

де $\tilde{c}(k) = (\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}})_k$, $k \geq 0$. Оскільки матриця, яка задає оператор $\tilde{\mathbf{B}}$, збігається з матрицею N з попереднього прикладу, то елементи матриці, що задає

обернений оператор $\tilde{\mathbf{B}}^{-1}$ обчислюються за формулою (2.108). Таким чином,

$$\tilde{c}(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{k,i} r_{i,j} a(j), k \geq 0.$$

Розглянемо вираз (2.111). Використовуючи (2.109), можемо записати його у вигляді

$$(B^{-1}R)_{k,j} = \sum_{i=-n}^{-n+1} \rho_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \nu_{k,i} r_{i,j}, \quad k, j \geq 0.$$

Розглянемо формулу (2.110) для $k \geq 0$

$$\begin{aligned} c(k) &= \sum_{j \in T} (B^{-1}R)_{k,j} a(j) = \sum_{j \in S} (B^{-1}R)_{k,j} a(j) + \sum_{j=0}^{\infty} (B^{-1}R)_{k,j} a(j) = \\ &= \sum_{j \in S} (B^{-1}R)_{k,j} a(j) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=-n}^{-n+1} \rho_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \nu_{k,i} r_{i,j} \right) a(j) = \\ &= \tilde{c}(k) + \sum_{j \in S} (B^{-1}R)_{k,j} a(j) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=-n}^{-n+1} \rho_{k,i} r_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \nu_{k,i} r_{i,j} \right) a(j) = \tilde{c}(k) + c_T(k). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Delta(h_2; f, g) &= \Delta_1(\tilde{h}; f, g) + \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a(1)r_{k,1} + a(2)r_{k,2}) c_T(k) + \sum_{k \in S} (a(1)r_{k,1} + a(2)r_{k,2}) c(k). \end{aligned}$$

2.5.2. Мінімаксний (робастний) метод фільтрації. Теоремою 2.23 та її наслідками можна скористатись для оцінювання введеного функціонала лише для випадків, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$. Якщо їх вигляд точно не відомий, але задані класи допустимих щільностей, то до задачі оцінювання функціонала застосовують мінімаксний підхід. В цьому разі шукають оцінку, яка б мінімізувала величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 2.12. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими для оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 2.13. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D} L_2^s(f+g),$$

$$\min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Проаналізувавши останні два означення можна сформулювати наступну лему.

Лема 2.9. Спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$, що задовольняють умову мінімальності (2.35), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

задають оператори B^0, R^0, Q^0 , які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}\vec{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}^0\vec{a}, (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}^0\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (2.112)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (2.99) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f, g) \quad \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda, \\ C^0(e^{i\lambda}) &= \sum_{j \in T} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})_j e^{ij\lambda}, \end{aligned}$$

Задача на умовний екстремум (2.113) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (2.114)$$

де $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв’язок задачі (2.114) визначається умовою $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial \Delta_D(f_0, g_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0) [89].

Лема 2.10. *Нехай (f_0, g_0) – розв’язок екстремальної задачі (2.114). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A\xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.*

2.5.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$. Розглянемо задачу оцінювання для множини щільностей $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$,

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon_1} &= \left\{ f(\lambda) | f(\lambda) = (1 - \varepsilon_1)u_1(\lambda) + \varepsilon_1 u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda = P_1 \right\}, \\ D_{\varepsilon_2} &= \left\{ g(\lambda) | g(\lambda) = (1 - \varepsilon_2)v_1(\lambda) + \varepsilon_2 v(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda = P_2 \right\}, \end{aligned}$$

де $u_1(\lambda)$, $v_1(\lambda)$ – фіксовані, а $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ невідомі спектральні щільності. Такі множини описують моделі “ ε -забруднення” стаціонарних послідовностей.

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ і функції, що визначені за формулами

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (2.115)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}. \quad (2.116)$$

обмежені. У цьому випадку

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda$$

буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$ і ми можемо застосувати метод невизначених множників Лагранжа, щоб розв'язати задачу на умовний екстремум (2.113) [23].

З умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ одержимо співвідношення

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi_1(\lambda) + \alpha_1^{-1}), \quad (2.117)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi_2(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (2.118)$$

де $\varphi_1(\lambda) \leq 0$ і $\varphi_1(\lambda) = 0$, коли $f_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon_1)u_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda) \leq 0$ і $\varphi_2(\lambda) = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon_2)v_1(\lambda)$.

Справедлива теорема.

Теорема 2.24. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}$, і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функції, що визначені формулами (2.115), (2.116), є обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, визначені з рівнянь (2.117), (2.118) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (2.112). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.99), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 2.22. *Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (2.35), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (2.116), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_{ε_2} для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо*

$$g_0(\lambda) = \max \{ (1 - \varepsilon_2)g_1(\lambda), \alpha_2 |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda) \},$$

і пара $f(\lambda), g_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.112). Функція $h(f, g_0)$, обчислена за формулою (2.99), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

2.5.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_\varepsilon^1 \times D_v^u$. Розглянемо задачу оцінювання в класі спектральних щільностей $D = D_\varepsilon^1 \times D_v^u$, де

$$D_\varepsilon^1 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon \right. \right\},$$

$$D_v^u = \left\{ g(\lambda) \left| v(\lambda) \leq g(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P \right. \right\},$$

де спектральні щільності $u(\lambda), v(\lambda), f_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, і, крім того, щільності $u(\lambda)$ та $v(\lambda)$ обмежені. Клас D_ε^1 описує модель “ ε -околу” у просторі L_1 заданої обмеженої спектральної щільності $f_1(\lambda)$. Клас D_v^u описує “смугову” модель стохастичних послідовностей.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_\varepsilon^1, g^0(\lambda) \in D_v^u$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0), h_g(f_0, g_0)$ за формулами (2.115), (2.116). Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_1, \quad (2.119)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (2.120)$$

де $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))$, коли $f_0(\lambda) \neq f_1(\lambda)$, α_1, α_2 – сталі величини, $\gamma_1 \leq 0$ і $\gamma_1 = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq v(\lambda)$, $\gamma_2 \geq 0$ і $\gamma_2 = 0$, коли $g_0(\lambda) \leq u(\lambda)$.

Рівняння (2.119), (2.120) разом з екстремальною умовою (2.112) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon, \quad (2.121)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі D .

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2.25. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_\varepsilon^1$, $g_0(\lambda) \in D_v^u$, і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функції, що визначені формулами (2.115), (2.116), є обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, визначені з рівнянь (2.119)–(2.121) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_\varepsilon^1 \times D_v^u$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вони визначають розв'язок екстремальної задачі (2.112). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.99), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 2.23. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_\varepsilon^1$, $g(\lambda)$ – відома і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функція $h_f(f_0, g)$, що визначена формулою (2.115), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_ε^1 для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вона має вигляд $f_0(\lambda) = \max \{ f_1(\lambda), \alpha_1 | A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda}) | - g(\lambda) \}$, і пара $f_0(\lambda), g(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.112). Функція $h(f_0, g)$, обчислена за формулою (2.99), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

2.5.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_\varepsilon^2 \times D_v^u$. Розглянемо задачу оцінювання в класі спектральних щільностей $D = D_\varepsilon^2 \times D_v^u$,

$$D_\varepsilon^2 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon \right. \right\},$$

$$D_v^u = \left\{ g(\lambda) \left| v(\lambda) \leq g(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P \right. \right\},$$

де спектральні щільності $u(\lambda), v(\lambda), f_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, щільності $u(\lambda)$ та $v(\lambda)$ обмежені. Клас D_ε^2 – “ ε -окіл” у просторі L_2 заданої обмеженої спектральної щільності $f_1(\lambda)$. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_\varepsilon^2$, $g_0(\lambda) \in D_v^u$ такі, що функції $h_f(f_0, g_0), h_g(f_0, g_0)$, визначені за формулами (2.115), (2.116), обмежені.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(f^0, g^0)$, коли $D = D_\varepsilon^2 \times D_v^u$, знаходимо рівняння

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1, \quad (2.122)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (2.123)$$

де α_1, α_2 – сталі величини, $\gamma_1 \leq 0$, і $\gamma_1 = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq v(\lambda)$; $\gamma_2 \geq 0$ і $\gamma_2 = 0$, коли $g_0(\lambda) \leq u(\lambda)$.

Рівняння (2.122), (2.123) разом з екстремальною умовою (2.112) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \varepsilon, \quad (2.124)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі D .

Теорема 2.26. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_\varepsilon^2$, $g_0(\lambda) \in D_v^u$ такі, що виконується умова мінімальності (2.35), і функції, що обчислені за формулами (2.115), (2.116), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_\varepsilon^2 \times D_v^u$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (2.122)–(2.124), і визначають розв’язок екстремальної задачі (2.112). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.99), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 2.24. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_\varepsilon^2$, $g(\lambda)$ – відома і виконується умова мінімальності (2.35). Нехай функція $h_f(f_0, g)$, що визначена формулою (2.115), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_ε^2 для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо виконується співвідношення*

$$|A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda)),$$

і пара $f_0(\lambda), g(\lambda)$ визначає розв’язок екстремальної задачі (2.112). Функція $h(f_0, g)$, обчислена за формулою (2.99), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 розглянуто задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей з

пропусками. Задачі розв'язано за умов спектральної визначеності, коли вигляд спектральних щільностей послідовностей заданий, та у випадку спектральної невизначеності, коли задано лише множину допустимих щільностей.

У випадку задачі інтерполяції знайдено формули для обчислення значень середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оцінок функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j) \xi(j), \quad M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k), \quad N_0 = K_0 = 0,$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де стаціонарна послідовність $\eta(j)$ стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$, а $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$ – множина пропусків. Застосовано мінімаксий метод оцінювання для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксий спектральних характеристик оцінки функціонала.

У задачі екстраполяції вивидено формули для обчислення значень середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оцінок функціонала

$$A \xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) \xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$, за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S = \{\dots, -2, -1\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s \{-M_l - N_l, -M_l - N_l + 1, \dots, -M_l\}$. При цьому стаціонарна послідовність $\eta(j)$ стаціонарно зв'язана з послідовністю $\xi(j)$. Для заданих множин допустимих щільностей виведно формули для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксий спектральних характеристик.

При дослідженні задачі фільтрації встановлено формули для обчислення значень середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик

оцінок функціонала

$$A\xi = \sum_{j \in Z^S} a(j)\xi(-j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $S = \bigcup_{l=1}^s \{-(M_l + N_l), \dots, -M_l\}$, $Z^S = \{1, 2, \dots\} \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s \{M_l, \dots, M_l + N_l\}$. У випадку, коли точний вигляд спектральних щільностей невідомий, але задано множину допустимих щільностей, визначено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в заданих класах та мінімаксні спектральні характеристики.

РОЗДІЛ 3

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПРОПУСКАМИ

У даному розділі розв'язані задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі досліджені для випадку спектральної визначеності, коли спектральні щільності процесів відомі та для випадку спектральної невизначеності, коли відомі лише класи допустимих значень спектральних щільностей.

Знайдено формули для обчислення середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних лінійних оцінок функціоналів у випадку спектральної визначеності. Для випадку спектральної невизначеності встановлено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності у заданих класах допустимих щільностей та відповідні мінімаксні спектральні характеристики оцінок.

Отримані результати дослідження задач оцінювання стаціонарних процесів з пропусками опубліковані в роботах [79], [80], [81].

3.1. Стаціонарні процеси. Спектральний розклад

В цьому підрозділі наводяться декілька означень та тверджень теорії стаціонарних послідовностей викладених у роботах [25], [47], [54].

Означення 3.1. Комплекснозначний випадковий процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ називається стаціонарним (в широкому розумінні), якщо

$$E\xi(t) = m, \quad E(\xi(t)\overline{\xi(s)}) = R(t-s), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

для деяких комплексних m , $R(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. Функция $R(t), t \in \mathbb{R}$, є коваріаційною функцією середньо-квадратично неперервного стаціонарного процесу у широкому розумінні, якщо знайдеться така скінченна міра Лебега-Стілтєса $F = F(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, що має місце спектральне зображення

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} F(d\lambda), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Скінченну міру $F = F(B)$ називають спектральною мірою, а відповідну функцію розподілу $F(\lambda) = F([-\infty, \lambda])$ її спектральною функцією. Якщо коваріаційна функція абсолютно неперервна, то спектральна функція $F(\lambda)$ має щільність $f(\lambda)$, а сама коваріаційна функція має вигляд

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda. \quad (3.2)$$

Теорема 3.2. Існує така ортогональна стохастична міра $Z = Z(\Delta), \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, що стаціонарний процес допускає представлення

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

При цьому $E |Z(\Delta)|^2 = F(\Delta)$.

Нехай $\xi(t)$ та $\eta(t)$ – некорельовані між собою стаціонарні випадкові процеси з спектральними функціями $F(\lambda)$ та $G(\lambda)$, що мають щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ відповідно. Для ортогональних стохастичних мір Z_ξ та Z_η , що відповідають спектральним функціям $F(\lambda)$ та $G(\lambda)$, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} EZ_\xi(\Delta_1) \overline{Z_\xi(\Delta_2)} &= F(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f(\lambda) d\lambda, \\ EZ_\eta(\Delta_1) \overline{Z_\eta(\Delta_2)} &= G(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} g(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ми будемо розглядати гільбертовий простір $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ випадкових величин ξ , що мають нульове математичне сподівання, $E\xi = 0$, скінченний

другий момент, $E|\xi|^2 < \infty$, та скалярний добуток $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$, та гільбертовий простір $L_2(f + g)$ комплекснозначних функцій на $[-\infty, \infty]$, інтегровних в квадраті за мірою, що має щільність $f(\lambda) + g(\lambda)$.

Теорема 3.3. *Нехай $\xi(t)$ – стаціонарний процес, і нехай $\eta \in H$. Тоді знайдеться така функція $\varphi \in L_2(f)$, що*

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) Z(d\lambda).$$

3.2. Задача інтерполяції стаціонарного процесу з пропусками

У даному підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} a(t) \xi(t) dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$, стаціонарний процес $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$. Задачу досліджено для двох випадків: коли спектральні щільності стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відомі та коли вигляд спектральних щільностей невідомий, але задані класи допустимих спектральних щільностей.

3.2.1. Класичний метод інтерполяції. Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ – некорельовані між собою стаціонарні стохастичні процеси з нульовими математичними сподіваннями $E\xi(t) = 0$, $E\eta(t) = 0$. Кореляційні функції $R_\xi(k) = E\xi(t+k)\overline{\xi(t)}$ та $R_\eta(k) = E\eta(t+k)\overline{\eta(t)}$ стаціонарних процесів $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ відповідно допускають спектральний розклад (3.1) із спектральними мірами $F(d\lambda)$ та $G(d\lambda)$ процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відповідно. Будемо розглядати стаціонарні процеси з абсолютно неперервними спектральними мірами $F(d\lambda)$, $G(d\lambda)$ та кореляційними функціями вигляду (3.2) із спектральними щільностями $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ такими, що виконується умова мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad \gamma(\lambda) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \alpha(t) e^{it\lambda} dt, \quad (3.5)$$

де $\gamma(\lambda)$ – деяка ненульова функція експоненціального типу. Ця умова достатня для того, щоб було неможливе безпомилкове оцінювання процесу [25].

Процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ допускають спектральний розклад (3.3) із ортогональними випадковими мірами $Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(d\lambda)$, що підпорядковані спектральним мірам $F(d\lambda)$ та $G(d\lambda)$ такими, що виконуються співвідношення (3.4).

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} a(t) \xi(t) dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ в моменти часу $t \in \mathbb{R} \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$.

Використаємо спектральний розклад стаціонарного процесу $\xi(t)$, щоб записати функціонал $A_s \xi$ у вигляді

$$A_s \xi = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(e^{i\lambda}) Z_\xi(d\lambda), \quad A_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} a(t) e^{it\lambda} dt.$$

Позначимо через $\hat{A}_s \xi$ оптимальну лінійну оцінку функціонала $A_s \xi$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$. Вона має вигляд

$$\hat{A}_s \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{i\lambda}) (Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)),$$

де $h(e^{i\lambda})$ – спектральна характеристика оцінки функціоналу. Нехай $\Delta(f, g) = E \left| A_s \xi - \hat{A}_s \xi \right|^2$ – середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_s \xi$. Оскільки спектральні щільності стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відомі, то для відшукування оцінки $\hat{A}_s \xi$ використаємо метод ортогональних проєкцій у гільбертових просторах [59].

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір гільбертового простора $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, породжений величинами $\{\xi(t) + \eta(t) : t \in \mathbb{R} \setminus S\}$.

Розглянемо підпростір $L_2^s(f+g)$ простору $L_2(f+g)$, що породжений функціями $\{e^{it\lambda}, t \in \mathbb{R} \setminus S\}$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h; f)$ оцінки $\hat{A}_s \xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h; f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(e^{i\lambda})|^2 g(\lambda) d\lambda.$$

За класичним методом оптимальною оцінкою функціонала $A_s \xi$ буде проєкція елемента $A_s \xi$ простору H на підпростір $H^s(\xi + \eta)$, яка визначається з умов

- 1) $\hat{A}_s \xi \in H^s(\xi + \eta)$,
- 2) $A_s \xi - \hat{A}_s \xi \perp H^s(\xi + \eta)$.

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_s \xi$ для всіх $t \in \mathbb{R} \setminus S$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} E \left[\left(A_s \xi - \hat{A}_s \xi \right) \left(\overline{\xi(t)} + \overline{\eta(t)} \right) \right] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) e^{-it\lambda} f(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{i\lambda}) e^{-it\lambda} g(\lambda) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Тобто

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_s(e^{i\lambda}) f(\lambda) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + g(\lambda))] e^{-it\lambda} d\lambda = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus S. \quad (3.6)$$

Позначимо функцію $C_s(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) f(\lambda) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + g(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, і її перетворення Фур'є

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_s(e^{i\lambda}) e^{-it\lambda} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

З умови (3.6) випливає, що функція $\mathbf{c}(t)$ відмінна від нуля лише на множині S . Звідси

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{c}(t) e^{it\lambda} dt,$$

і спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_s \xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_s(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (3.7)$$

З 1-ї умови, $\hat{A}_s \xi \in H^s(\xi + \eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A_s \xi$, випливає, що для деякої $v(t) \in L_2^s(f + g)$

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus S} v(t) e^{it\lambda} d\lambda,$$

звідси випливає, що для всіх $t \in S$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_s(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} \right) e^{-it\lambda} d\lambda = 0. \quad (3.8)$$

Запишемо останнє співвідношення у термінах лінійних операторів у просторі $L_2(S)$. Для цього введемо наступні позначення операторів

$$(\mathbf{B}_s \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$(\mathbf{R}_s \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$(\mathbf{Q}_s \mathbf{x})(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du,$$

$$\mathbf{x}(t) \in L_2(S), \quad t \in S.$$

Тепер рівність (3.8) можна записати у вигляді

$$(\mathbf{R}_s \mathbf{a})(t) = (\mathbf{B}_s \mathbf{c})(t), \quad t \in S. \quad (3.9)$$

Припустимо, що оператор \mathbf{B}_s має обернений. Тоді функцію $\mathbf{c}(t)$ можна обчислити за формулою $\mathbf{c}(t) = (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{a})(t)$, $t \in S$.

Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}_s \xi$ обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_s(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (3.10)$$

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \quad t \in S.$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_s \xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(h; f, g) &= E \left| A_s \xi - \hat{A}_s \xi \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})g(\lambda) + C_s(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})f(\lambda) - C_s(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda \\ &= \langle \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де $\langle A, C \rangle = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} A(t) \overline{C(t)} dt$ – скалярний добуток в просторі $L_2(S)$.

Теорема 3.4. *Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (3.5). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus S$ можна обчислити за формулами (3.10), (3.11).*

Розглянемо випадок, коли стаціонарний процес $\xi(t)$ спостерігається без шуму. Тоді спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_s \xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) - C_s(e^{i\lambda}) f^{-1}(\lambda), \quad C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{c}(t) e^{it\lambda} dt,$$

а співвідношення (3.9) $\mathbf{a}(t) = (\mathbf{B}_s \mathbf{c})(t)$, $t \in S$. Якщо оператор \mathbf{B}_s має обернений, то невідома функція $\mathbf{c}(t)$ обчислюється за формулою $\mathbf{c}(t) = (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{a})(t)$, $t \in S$, а формула для спектральної характеристики оцінки $\hat{A}_s \xi$ має вигляд

$$\begin{aligned} h(e^{i\lambda}) &= A_s(e^{i\lambda}) - C_s(e^{i\lambda}) f^{-1}(\lambda), \\ C_s(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \quad t \in S. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Середньоквадратична похибка оцінки функціонала має вигляд

$$\Delta(h; f) = \langle \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle. \quad (3.13)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3.5. *Нехай $\xi(t)$ – стаціонарний стохастичний процес, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (3.14)$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(h, f)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_s \xi$ функціонала $A_s \xi$ за даними спостережень процесу $\xi(t)$ в точках $t \in \mathbb{R} \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, можна обчислити за формулами (3.12), (3.13).

3.2.2. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції. Теореми 3.4 та 3.5 можна застосувати лише у тих випадках, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$. Якщо спектральні щільності точно не відомі, але задані множини допустимих щільностей, то до задачі оцінювання функціонала можна застосувати мінімаксний підхід. Він полягає у відшуванні такої оцінки, яка б мінімізувала величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 3.2. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 3.3. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала

$A_s \xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D} L_2^s(f+g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Користуючись отриманими результатами та означеннями можна переко-
натись у справедливості леми.

Лема 3.1. *Спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$, що задо-
вольняють умову мінімальності (3.5), найменш сприятливі в класі $D =$
 $D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо ко-
ефіцієнти Фур'є функцій*

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

задають оператори $\mathbf{B}_s^0, \mathbf{R}_s^0, \mathbf{Q}_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної за-
дачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{a}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{a}, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (3.15)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за
формулою (3.10) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Наслідок 3.1. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ така, що $f_0^{-1}(\lambda)$
інтегровна. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ є найменш сприятливою в
класі D_f для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ за даними спосте-
режень процесу $\xi(t)$ в точках $t \in \mathbb{R} \setminus S$, якщо коефіцієнти Фур'є функції
 $f_0^{-1}(\lambda)$ задають оператор \mathbf{B}_s^0 , який визначає розв'язок задачі*

$$\max_{f \in D_f} \langle \mathbf{B}_s^{-1} \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (3.16)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за фор-
мулою (3.12) за умови, що $h(f_0) \in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спе-
ктральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції
 $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f_0, g_0) \leq \Delta(h; f_0, g_0), \quad \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g,$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) – розв’язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

$$C_s^0(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} ((\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \quad t \in S.$$

Задача на умовний екстремум (3.17) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (3.18)$$

де $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв’язок задачі (3.18) визначається умовою $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial \Delta_D(f_0, g_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0) .

Лема 3.2. *Нехай (f_0, g_0) – розв’язок екстремальної задачі (3.18). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A_s \xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.*

3.2.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_0 \times D_\varepsilon$. Розглянемо задачу оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, коли їхні щільності невідомі, але належать до множини допустимих спектральних щільностей $D = D_0 \times D_\varepsilon$, де

$$D_0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

де спектральна щільність $g_1(\lambda)$ відома і фіксована, $w(\lambda)$ – невідома спектральна щільність.

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_0$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$. Введемо наступні позначення

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (3.19)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (3.20)$$

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda.$$

Припустимо, що функції визначенні формулами (3.19), (3.20) обмежені. У цьому випадку функціонал $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому має місце співвідношення [23]

$$\partial\Delta_{D_0 \times D_\varepsilon}(f_0, g_0) = -\partial\Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) + \partial\delta((f_0, g_0) | D_0 \times D_\varepsilon).$$

З умови $0 \in \partial\Delta_{D_0 \times D_\varepsilon}(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (3.21)$$

$$|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (3.22)$$

де $\varphi(\lambda) \leq 0$, і $\varphi(\lambda) = 0$, коли $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon)g_1(\lambda)$, константи $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$. Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda) d\lambda = P_1$.

Таким чином справедлива теорема.

Теорема 3.6. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_0$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$ задовольняють умову мінімальності (3.5), і функції обчислені за формулами (3.19), (3.20) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_0 \times D_\varepsilon$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо*

вони є розв'язком системи рівнянь (3.21), (3.22) і визначають розв'язок екстремальної задачі (3.15). Функція обчислена за формулою (3.10), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Теорема 3.7. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_0^f$, $g_0(\lambda) \in D_0^g$, де

$$D_0^f = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\}, \quad D_0^g = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

задовольняють умову мінімальності (3.5). Вважаємо, що функції обчислені за формулами (3.19), (3.20) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_0 \times D_\varepsilon$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо вони є розв'язком системи рівнянь

$$|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (3.23)$$

$$|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})| = \alpha_2(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (3.24)$$

де $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, при чому $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda) d\lambda = P_1$ та $\alpha_2 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda) d\lambda = P_2$, і пара $(f_0(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.15). Функція обчислена за формулою (3.10), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Наслідок 3.2. Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_0$, функція $(f_0(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$ інтегровна і функція $h_f(f_0, g)$, визначена за формулою (3.19), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі D_0 для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо вона має вигляд

$$f_0(\lambda) = \max\{0, \alpha_1^{-1} |A_s(e^{i\lambda})g(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda)\},$$

і пара $(f_0(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.15). Функція обчислена за формулою (3.10), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Наслідок 3.3. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_0$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна і функція визначена за формулою (3.12) обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі D_0 для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо вона має вигляд $f_0(\lambda) = \alpha_1 |C_s^0(e^{i\lambda})|$, і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.16). Функція обчислена за формулою (3.12), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

3.2.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^2$. Розглянемо задачу оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$ на множині допустимих спектральних щільностей $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^2$,

$$D_{\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \left| f(\lambda) = (1 - \varepsilon_1)f_1(\lambda) + \varepsilon_1 w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^2 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\},$$

де спектральні щільності $f_1(\lambda), g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, $w(\lambda)$ – невідома функція. Клас D_{ε_1} описує модель “ ε -забруднення” стохастичних процесів, $D_{\varepsilon_2}^2$ – це “ ε -окіл” у просторі L_2 заданої обмеженої спектральної щільності $g_1(\lambda)$.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$, $g^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$ за формулами (3.19), (3.20). Тоді з умови $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння які мають задовольняти найменш сприятливі щільності

$$|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_1^{-1}), \quad (3.25)$$

$$|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))\alpha_2, \quad (3.26)$$

α_1, α_2 – сталі величини, $\varphi(\lambda) \leq 0$, і $\varphi(\lambda) = 0$, коли $f_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon_1)f_1(\lambda)$.

Рівняння (3.25), (3.26) разом з екстремальною умовою (3.15) та умовою

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda = \varepsilon_2, \quad (3.27)$$

визначають найменш сприятливі щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^2$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.8. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$ задовольняють умову мінімальності (3.5), і функції обчислені за формулами (3.19), (3.20) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^2$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо вони задовольняють рівняння (3.25)-(3.27) і визначають розв'язок екстремальної задачі (3.15). Функція обчислена за формулою (3.10), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.*

Наслідок 3.4. *Нехай відома спектральна щільність $g(\lambda)$, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.5), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (3.19), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_{ε_1} для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо*

$$f_0(\lambda) = \max \left\{ (1 - \varepsilon_1) f_1(\lambda), \alpha_1 \left| A_s(e^{i\lambda}) g(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda}) \right| - g(\lambda) \right\},$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.15). Функція $h(f_0, g)$, обчислена за формулою (3.10), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Наслідок 3.5. *Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.5), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (3.20), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{\varepsilon_2}^2$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо вона задовольняє співвідношення*

$$\left| A_s(e^{i\lambda}) f(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda}) \right|^2 = (f(\lambda) + g_0(\lambda))^2 (g_0(\lambda) - g_1(\lambda)),$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.15). Функція $h(f, g_0)$, обчислена за формулою (3.10), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

Наслідок 3.6. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна і функція визначена за формулою (3.12) обмежена. Спектральна*

щільність $f_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $D_{\varepsilon_2}^2$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_s \xi$, якщо виконується співвідношення

$$|C_s^0(e^{i\lambda})|^2 = f_0^2(\lambda)(f_0(\lambda) - g_1(\lambda))\alpha_1,$$

і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.16). Функція обчислена за формулою (3.12), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s \xi$.

3.3. Задача екстраполяції стаціонарного процесу з пропусками

У даному підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_0^{\infty} a(t)\xi(t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. Процес $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$. Розглядаються випадки спектральної визначеності, коли спектральні щільності процесів відомі, та спектральної невизначеності, коли задані класи допустимих множин.

3.3.1. Класичний метод екстраполяції. Нехай $\xi(t)$ та $\eta(t)$ – некорельовані між собою стаціонарні стохастичні процеси з нульовими математичними сподіваннями $E\xi(t) = 0$, $E\eta(t) = 0$. Кореляційні функції $R_\xi(k) = E\xi(t+k)\overline{\xi(t)}$ та $R_\eta(k) = E\eta(t+k)\overline{\eta(t)}$ стаціонарних процесів $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ відповідно допускають спектральний розклад (3.2) з спектральними щільностями $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відповідно, такими, що виконується умова мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad \gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} \alpha(t)e^{it\lambda} dt \quad (3.28)$$

де $\gamma(\lambda)$ – деяка ненульова функція експоненціального типу. Процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ допускають спектральний розклад (3.3) з ортогональними випадковими мірами

$Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(d\lambda)$.

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$, від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ в моменти часу $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$.

Нехай функція $a(t)$, яка визначає функціонал $A\xi$ задовольняє умови

$$\int_0^\infty |a(t)| dt < \infty, \quad \int_0^\infty t |a(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.29)$$

Спектральний розклад стаціонарного процесу $\xi(t)$ дозволяє записати функціонал $A\xi$ у вигляді

$$A\xi = \int_{-\infty}^\infty A(e^{i\lambda})Z_\xi(d\lambda), \quad A(e^{i\lambda}) = \int_0^\infty a(t)e^{it\lambda}dt.$$

Оптимальну лінійну оцінку функціонала $A\xi$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ позначимо через $\hat{A}\xi$. Вона має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int_{-\infty}^\infty h(e^{i\lambda})(Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)), \quad (3.30)$$

де $h(e^{i\lambda})$ – спектральна характеристика оцінки. Розглядаємо випадок спектральної визначеності, коли спектральні щільності стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відомі, тому для відшукування оцінки $\hat{A}\xi$ використаємо класичний метод запропонований А.М. Колмогоровим [59].

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, породжений величинами $\{\xi(t) + \eta(t) : t \in \mathbb{R}^- \setminus S\}$, а через $L_2^s(f + g)$ підпростір простору $L_2(f + g)$, породжений функціями $\{e^{it\lambda}, t \in \mathbb{R}^- \setminus S\}$.

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h; f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |h(e^{i\lambda})|^2 g(\lambda) d\lambda. \quad (3.31)$$

За методом ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі оптимальна оцінка функціонала $A\xi$ визначається з умов:

- 1) $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$,
- 2) $A\xi - \hat{A}\xi \perp H^s(\xi + \eta)$.

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ для всіх $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} E \left[\left(A\xi - \hat{A}\xi \right) \left(\overline{\xi(t)} + \overline{\eta(t)} \right) \right] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})) e^{-it\lambda} f(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{i\lambda}) e^{-it\lambda} g(\lambda) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Тобто

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(e^{i\lambda})f(\lambda) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + g(\lambda))] e^{-it\lambda} d\lambda = 0, \quad t \in \mathbb{R}^- \setminus S. \quad (3.32)$$

Позначимо функцію $C(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda})f(\lambda) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + g(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, і її перетворення Фур'є

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(e^{i\lambda}) e^{-it\lambda} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

З умови (3.32) випливає, що функція $\mathbf{c}(t)$ відмінна від нуля на множині $T = S \cup \{0, 1, \dots\}$. Тобто

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{c}(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} \mathbf{c}(t) e^{it\lambda} dt,$$

і спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (3.33)$$

З 1-ї умови, $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A\xi$, випливає, що для деякої $v(t) \in L_2^s(f + g)$

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^- \setminus S} v(t) e^{it\lambda} d\lambda,$$

звідси випливає, що для всіх $t \in T$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} \right) e^{-it\lambda} d\lambda = 0. \quad (3.34)$$

Запишемо останнє співвідношення у термінах лінійних операторів у просторі $L_2(T)$. Для цього введемо наступні позначення операторів

$$\begin{aligned} (\mathbf{Bx})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ (\mathbf{Rx})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ (\mathbf{Qx})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) \in L_2(T), \quad t \in T.$$

Рівність (3.35) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} a(u) e^{i(u-t)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} du d\lambda \\ &- \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \frac{\mathbf{c}(e^{i(u-t)\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} du d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{c}(e^{i(u-t)\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} du d\lambda \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Розглянемо функцію $\mathbf{a}(t)$, де $\mathbf{a}(t) = 0$, $t \in S$, $\mathbf{a}(t) = a(t)$, $t \geq 0$. Тоді рівність (3.35) можна записати у вигляді

$$(\mathbf{Ra})(t) = (\mathbf{Bc})(t), \quad t \in T. \quad (3.36)$$

Припустимо, що оператор \mathbf{B} має обернений. Тоді функцію $\mathbf{c}(t)$ можна обчислити за формулою

$$\mathbf{c}(t) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})(t), \quad t \in T.$$

Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} h(e^{i\lambda}) &= A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \\ C(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})(t) e^{it\lambda} dt. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(h; f, g) &= E \left| A\xi - \hat{A}\xi \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda = \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra} \rangle + \langle \mathbf{Q}\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle, \end{aligned} \quad (3.38)$$

де $\langle A, C \rangle = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} A(t) \overline{C(t)} dt + \int_0^{\infty} A(t) \overline{C(t)} dt$ – скалярний добуток в просторі $L_2(T)$.

Таким чином, можемо стверджувати, що справедлива теорема.

Теорема 3.9. *Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (3.28). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ можна обчислити за формулами (3.37), (3.38).*

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N \xi = \int_0^N a(t) \xi(t) dt$, від невідомих значень стаціонарного

процесу $\xi(t)$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ в моменти часу $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$.

Лінійну оцінку $\hat{A}_N \xi$ функціонала $A_N \xi$ шукатимемо у вигляді

$$\hat{A}_N \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h_N(e^{i\lambda})(Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)),$$

де $h_N(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f + g)$ – спектральна характеристика оцінки.

Введемо в розгляд функцію $\mathbf{a}_N(t)$, яка задається таким чином

$$\mathbf{a}_N(t) = a(t), t \in S, \quad \mathbf{a}_N(t) = a(t), t \in T \cap [0, N], \quad \mathbf{a}_N(t) = 0, t \in T \setminus [0, N].$$

Тоді спектральна характеристика $h_N(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}_N \xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} h_N(e^{i\lambda}) &= A_N(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_N(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \\ C_N(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_N)(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_N)(t) e^{it\lambda} dt, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де $A_N(e^{i\lambda}) = \int_0^N a(t) e^{-it\lambda} dt$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h_N; f, g)$ оцінки $\hat{A}_N \xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h_N; f, g) = E \left| A_N \xi - \hat{A}_N \xi \right|^2 = \langle \mathbf{R} \mathbf{a}_N, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_N \rangle + \langle \mathbf{Q} \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N \rangle. \quad (3.40)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді наслідку.

Наслідок 3.7. *Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (3.28). Спектральну характеристику $h_N(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h_N; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N \xi$ від невідомих значень процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ можна обчислити за формулами (3.39), (3.40).*

Розглянемо випадок, коли стаціонарний процес $\xi(t)$ спостерігається без шуму. Тоді спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$\begin{aligned} h(e^{i\lambda}) &= A(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda), \\ C(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} \mathbf{c}(t)e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} \mathbf{c}(t)e^{it\lambda} dt. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Позначимо $a(t) = 0, t \in S$, тоді співвідношення (3.36) вигляд $\mathbf{a}(t) = (\mathbf{B}\mathbf{c})(t), t \in T$. Якщо оператор \mathbf{B} має обернений, то невідома функція $\mathbf{c}(t)$ обчислюється за формулою $\mathbf{c}(t) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})(t), t \in T$, а формула для спектральної характеристики оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$\begin{aligned} h(e^{i\lambda}) &= A(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda), \\ C(e^{i\lambda}) &= \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})(t)e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})(t)e^{it\lambda} dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Середньоквадратична похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\Delta(h; f) = \langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle. \quad (3.43)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3.10. *Нехай $\xi(t)$ – стаціонарний стохастичний процес, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності (3.14), тобто функція $f^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(h, f)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ за даними спостережень процесу $\xi(t)$ в точках $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, можна обчислити за формулами (3.42), (3.43).*

3.3.2. Мінімаксний (робастний) метод екстраполяції. Розглянуті теореми ефективно використовувати лише у тих випадках, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$. У випадку спектральної невизначеності, якщо вказані множини допустимих щільностей, то до задачі оцінювання функціонала доцільно застосувати мінімаксний підхід. Він полягає у відшуванні такої оцінки, яка б мінімізувала величину се-

редньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 3.4. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 3.5. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D} L_2^s(f+g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Користуючись отриманими результатами та означеннями можна переко-
натись у справедливості леми.

Лема 3.3. Спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$, що за-
довольняють умову мінімальності (3.28), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо ко-
ефіцієнти Фур'є функцій

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

задають оператори $\mathbf{B}^0, \mathbf{R}^0, \mathbf{Q}^0$, які визначають розв'язок екстремальної за-
дачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}\vec{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}^0\vec{a}, (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}^0\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (3.44)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за
формулою (3.37) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Наслідок 3.8. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ така, що $f_0^{-1}(\lambda)$
інтегровна. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f$ є найменш сприятливою в
класі D_f для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спосте-
режень процесу $\xi(t)$ в точках $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, якщо коефіцієнти Фур'є функції
 $f_0^{-1}(\lambda)$ задають оператор \mathbf{B}^0 , який визначає розв'язок задачі

$$\max_{f \in D_f} \langle \mathbf{B}^{-1} \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = \langle (\mathbf{B}^0)^{-1} \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle. \quad (3.45)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за формулою (3.42) за умови, що $h(f_0) \in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f_0, g_0) \leq \Delta(h; f_0, g_0), \quad \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g,$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) – розв’язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

$$C^0(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \quad t \in S.$$

Задача на умовний екстремум (3.46) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (3.47)$$

де $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв’язок задачі (3.47) визначається умовою $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial \Delta_D(f_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0) .

Лема 3.4. Нехай (f_0, g_0) – розв’язок екстремальної задачі (3.47). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A\xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.

3.3.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_0 \times D_\varepsilon^1$. Розглянемо задачу оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$ від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, коли їхні щільності невідомі, але належать до множини допустимих спектральних щільностей $D = D_0 \times D_\varepsilon^1$, де

$$D_0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon^1 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon \right. \right\}$$

де спектральна щільність $g_1(\lambda)$ відома і фіксована. Клас D_ε^1 – це “ ε -окіл” у просторі L_1 заданої обмеженої спектральної щільності $g_1(\lambda)$.

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_0$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon^1$. Введемо наступні позначення

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (3.48)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (3.49)$$

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda.$$

Припустимо, що функції визначенні формулами (3.48), (3.49) обмежені. У цьому випадку функціонал $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому має місце [23]

$$\partial\Delta_{D_0 \times D_\varepsilon^1}(f_0, g_0) = -\partial\Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) + \partial\delta((f_0, g_0) | D_0 \times D_\varepsilon^1).$$

Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_{D_0 \times D_\varepsilon^1}(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (3.50)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_2, \quad (3.51)$$

де $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$, коли $g_0(\lambda) \neq g_1(\lambda)$, константи $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$.

Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda) d\lambda = P_1$.

Рівняння (3.50), (3.51) разом з екстремальною умовою (3.44) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon \quad (3.52)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі D .

Теорема 3.11. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_0$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon^1$ задовольняють умову мінімальності (3.28), і функції обчислені за формулами (3.48), (3.49) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_0 \times D_\varepsilon^1$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють систему рівнянь (3.50)–(3.52) і визначають розв'язок екстремальної задачі (3.44). Функція обчислена за формулою (3.37), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Теорема 3.12. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^1$, де*

$$D_{\varepsilon_1}^1 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^1 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\},$$

спектральні щільності $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані. Вважаємо, що спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності (3.28), функції обчислені за формулами (3.48), (3.49) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^1$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вони є розв'язком системи рівнянь

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi_1(\lambda)\alpha_1,$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi_2(\lambda)\alpha_2,$$

де $|\Psi_1(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi_1(\lambda) = \text{sign}(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))$, коли $f_0(\lambda) \neq f_1(\lambda)$, $|\Psi_2(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi_2(\lambda) = \text{sign}(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$, коли $g_0(\lambda) \neq g_1(\lambda)$, константи $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, визначають розв'язок екстремальної задачі (3.44) та задовольняють умови нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon_2.$$

Функція обчислена за формулою (3.37), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 3.9. Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.28), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (3.48), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{\varepsilon_1}^1$ для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вона має вигляд

$$f_0(\lambda) = \max \{ f_1(\lambda), \alpha_1 |A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda) \},$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.44). Функція, обчислена за формулою (3.37), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 3.10. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна і функція визначена за формулою (3.42) обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $D_{\varepsilon_1}^1$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вона задовольняє співвідношення

$$|C^0(e^{i\lambda})| = f_0(\lambda)\Psi_1(\lambda)\alpha_1,$$

і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.45). Функція обчислена за формулою (3.42), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

3.3.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times D_0$. Розглянемо задачу оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$ на множині допустимих спектральних щільностей $D_v^u \times D_0$,

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_0 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

де спектральні щільності $u(\lambda), v(\lambda)$ відомі і обмежені. Клас D_v^u описує “смугу” модель стохастичних процесів.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_v^u, g^0(\lambda) \in D_0$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0), h_g(f_0, g_0)$ за формулами (3.48), (3.49). Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння які мають задовольняти найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_1^{-1}), \quad (3.53)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2 = \alpha_2(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (3.54)$$

α_1, α_2 – сталі величини, $\gamma_1 \leq 0$ і $\gamma_1 = 0$, коли $f_0(\lambda) \geq v(\lambda)$, $\gamma_2 \geq 0$ і $\gamma_2 = 0$, коли $f_0(\lambda) \leq u(\lambda)$. Константа $\alpha_2 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda) d\lambda = P_2$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.13. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_v^u, g_0(\lambda) \in D_0$ задовольняють умову мінімальності (3.28), і функції обчислені за формулами (3.48), (3.49) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda), g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_v^u \times D_0$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (3.53)-(3.54) і визначають розв’язок екстремальної задачі (3.44). Функція обчислена за формулою (3.37), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 3.11. *Нехай відома спектральна щільність $g(\lambda)$, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_v^u$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.28), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (3.48),*

обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_v^u для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$f_0(\lambda) = \min \{ \max \{ f_1(\lambda), v(\lambda) \}, u(\lambda) \},$$

$$f_1(\lambda) = \alpha_1 |A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda),$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.44). Функція $h(f_0, g)$, обчислена за формулою (3.37), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 3.12. Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_v^u$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, функція визначена за формулою (3.42) обмежена. Тоді спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою щільністю в класі D_v^u для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вона має вигляд

$$f_0(\lambda) = \max \{ v(\lambda), \min \{ u(\lambda), \alpha_1 |C^0(e^{i\lambda})| \} \}$$

і функція $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.45). Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою (3.42).

3.4. Задача фільтрації стаціонарного процесу з пропусками

У цьому підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_{R^s} a(t)\xi(-t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $R^s = [0, \infty) \setminus S^+$,

$S^+ = \bigcup_{l=1}^s [M_l, \dots, M_l + N_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. В залежності від відомостей про спектральні щільності стаціонарних процесів розглядаються два методи розв'язання задачі оцінювання.

3.4.1. Класичний метод фільтрації. Нехай $\xi(t)$ та $\eta(t)$ – некорельовані між собою стаціонарні стохастичні процеси з нульовими математичними сподіваннями $E\xi(t) = 0$, $E\eta(t) = 0$. Кореляційні функції $R_\xi(k) = E\xi(t+k)\overline{\xi(t)}$ та $R_\eta(k) = E\eta(t+k)\overline{\eta(t)}$ стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ допускають спектральний розклад (3.2) із спектральними щільностями $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ такими, що виконується умова мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad (3.55)$$

де $\gamma(\lambda) = \int_{R^s} \alpha(t) e^{it\lambda} dt$ – деяка ненульова функція експоненціального типу.

Процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ допускають спектральний розклад (3.3) із ортогональними випадковими мірами $Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(d\lambda)$.

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi = \int_{R^s} a(t)\xi(-t)dt$, від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ в моменти часу $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $R^s = [0, \infty) \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s [M_l, \dots, M_l + N_l]$.

Нехай функція $a(t)$, яка визначає функціонал $A\xi$ задовольняє умови (3.56)

$$\int_{R^s} |a(t)| dt < \infty, \quad \int_{R^s} t |a(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.56)$$

Використаємо спектральний розклад стаціонарного процесу $\xi(t)$, і запишемо функціонал $A\xi$ у вигляді

$$A\xi = \int_{-\infty}^{\infty} A(e^{i\lambda}) Z_\xi(d\lambda), \quad A(e^{i\lambda}) = \int_{R^s} a(t) e^{-it\lambda} dt.$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ має вигляд (3.30). Оскільки вважаємо, що спектральні щільності стаціонарних процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ відомі, то для відшукування оцінки $\hat{A}\xi$ використаємо метод ортогональних проєкцій у гільбертовому просторі [59].

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір, породжений величинами $\{\xi(t) + \eta(t) : t \in \mathbb{R}^- \setminus S\}$ у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Розглядатимемо підпростір $L_2^s(f + g)$ простору $L_2(f + g)$, породжений функціями $\{e^{it\lambda}, t \in \mathbb{R}^- \setminus S\}$.

Оптимальна оцінка лінійного функціонала $A\xi$ буде проекція елемента $A\xi$ простору H на підпростір $H^s(\xi + \eta)$, яка визначається з умов:

$$\begin{aligned} 1) & \hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta), \\ 2) & A\xi - \hat{A}\xi \perp H^s(\xi + \eta). \end{aligned}$$

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ для всіх $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ задовольняє співвідношення (3.32).

Тобто

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(e^{i\lambda})f(\lambda) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + g(\lambda))] e^{-it\lambda} d\lambda = 0, \quad t \in \mathbb{R}^- \setminus S. \quad (3.57)$$

Позначимо функцію $C(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda})f(\lambda) - h(e^{i\lambda})(f(\lambda) + g(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, і її перетворення Фур'є

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(e^{i\lambda}) e^{-it\lambda} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

З умови (3.57) випливає, що функція $\mathbf{c}(t)$ відмінна від нуля на множині $T = S \cup \{0, 1, \dots\}$. Тобто

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{c}(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} \mathbf{c}(t) e^{it\lambda} dt,$$

і спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$ має вигляд

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}. \quad (3.58)$$

З 1-ї умови, $\hat{A}\xi \in H^s(\xi + \eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A\xi$, випливає, що для деякої $v(t) \in L_2^s(f + g)$

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^- \setminus S} v(t) e^{it\lambda} d\lambda,$$

звідси випливає, що для всіх $t \in T$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} \right) e^{-it\lambda} d\lambda = 0. \quad (3.59)$$

Введемо наступні позначення лінійних операторів у просторі $L_2(T)$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Bx})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ (\mathbf{Rx})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(u+t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u+t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ (\mathbf{Qx})(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \end{aligned}$$

$\mathbf{x}(t) \in L_2(T)$, $t \in T$.

Рівність (3.59) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{R^s} a(u) e^{i(u-t)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} du d\lambda \\ &- \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} \frac{\mathbf{c}(e^{i(u-t)\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} du \right) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{c}(e^{i(u-t)\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} du d\lambda \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Позначимо через $\mathbf{a}(t)$ функцію виду

$$\mathbf{a}(t) = 0, t \in S, \quad \mathbf{a}(t) = a(t), t \in R^s \quad \mathbf{a}(t) = 0, t \in S^+.$$

Тоді використовуючи введені вище позначення рівність (3.60) можна записати у вигляді

$$(\mathbf{Ra})(t) = (\mathbf{Bc})(t), \quad t \in T. \quad (3.61)$$

Припустимо, що оператор \mathbf{B} має обернений. Тоді функцію $\mathbf{c}(t)$ можна обчислити за формулою $\mathbf{c}(t) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})(t)$, $t \in T$. Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})(t) e^{it\lambda} dt. \quad (3.62)$$

З формули (3.31), знайденого вигляду спектральної характеристики та введених позначень операторів \mathbf{B} , \mathbf{R} та \mathbf{Q} отримуємо формулу для обчислення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}\xi$

$$\Delta(h; f, g) = E \left| A\xi - \hat{A}\xi \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda \quad (3.63)$$

$$= \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra} \rangle + \langle \mathbf{Qa}, \mathbf{a} \rangle,$$

де $\langle A, C \rangle = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} A(t) \overline{C(t)} dt + \int_0^{\infty} A(t) \overline{C(t)} dt$ – скалярний добуток в просторі $L_2(T)$.

Теорема 3.14. *Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (3.55). Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ можна обчислити за формулами (3.62), (3.63).*

Позначимо інтервал $N^s = [0, N] \cap R^s$. Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N \xi = \int_{N^s} a(t) \xi(-t) dt$, від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за відомими спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ в моменти часу $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$.

Лінійну оцінку $\hat{A}_N \xi$ функціонала $A_N \xi$ шукатимемо у вигляді

$$\hat{A}_N \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h_N(e^{i\lambda}) (Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)),$$

де $h_N(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f + g)$ – спектральна характеристика оцінки.

Введемо в розгляд функцію $\mathbf{a}_N(t)$, яка задається таким чином

$$\mathbf{a}_N(t) = a(t), t \in S, \quad \mathbf{a}_N(t) = a(t), t \in T \cap [0, N], \quad \mathbf{a}_N(t) = 0, t \in T \setminus [0, N].$$

Тоді спектральна характеристика $h_N(e^{i\lambda})$ та середньоквадратична похибка $\Delta(h_N; f, g)$ оцінки $\hat{A}_N \xi$ обчислюються за формулами

$$h_N(e^{i\lambda}) = A_N(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_N(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$

$$C_N(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_N)(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_N)(t) e^{it\lambda} dt, \quad (3.64)$$

$$A_N(e^{i\lambda}) = \int_{N^s} a(t) e^{-it\lambda} dt,$$

$$\Delta(h_N; f, g) = E \left| A_N \xi - \hat{A}_N \xi \right|^2 = \langle \mathbf{R} \mathbf{a}_N^-, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_N^- \rangle + \langle \mathbf{Q} \mathbf{a}_N^-, \mathbf{a}_N^- \rangle. \quad (3.65)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді наслідку.

Наслідок 3.13. *Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності (3.55). Спектральну характеристику $h_N(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h_N; f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N \xi$ від невідомих значень процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$ можна обчислити за формулами (3.64), (3.65).*

3.4.2. Мінімаксний (робастний) метод фільтрації. Теорему 3.13 та її наслідок можна застосувати лише у випадку спектральної визначеності. У випадку, коли повної інформації щодо спектральних щільностей процесів нема, але вказані множини допустимих щільностей, то до задачі фільтрації застосовується мінімаксний підхід. Він полягає у відшуванні такої оцінки, яка б мінімізувала величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 3.6. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими для оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 3.7. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D} L_2^s(f+g), \quad \min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Користуючись отриманими результатами та означеннями можна переко-
натись у справедливості леми.

Лема 3.5. Спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$, що задовольняють умову мінімальності (3.55), найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій

$$(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$$

задають оператори $\mathbf{B}^0, \mathbf{R}^0, \mathbf{Q}^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}\vec{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}^0\vec{a}, (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}^0\vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (3.66)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (3.62) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f_0, g_0) \leq \Delta(h; f_0, g_0), \quad \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g,$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) – розв’язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

$$C^0(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \quad t \in S.$$

Задача на умовний екстремум (3.67) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [23]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (3.68)$$

де $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв’язок задачі (3.68) визначається умовою $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial \Delta_D(f_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0) .

Лема 3.6. Нехай (f_0, g_0) – розв’язок екстремальної задачі (3.68). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A\xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.

3.4.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^2$. Розглянемо задачу оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$ від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$, коли їхні щільності невідомі, але належать до множини допустимих спектральних щільностей $D = D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^2$, де

$$D_{\varepsilon_1}^1 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^2 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\}.$$

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$. Введемо наступні позначення

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (3.69)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (3.70)$$

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda.$$

Припустимо, що функції визначенні формулами (3.69), (3.70) обмежені. У цьому випадку функціонал $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому має місце [23]

$$\partial \Delta_{D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^2}(f_0, g_0) = -\partial \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) + \partial \delta((f_0, g_0) | D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^2).$$

Тоді з умови $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння, яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_1, \quad (3.71)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))\alpha_2, \quad (3.72)$$

де $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))$, коли $f_0(\lambda) \neq f_1(\lambda)$, константи $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$.

Рівняння (3.71), (3.72) разом з екстремальною умовою (3.66) та умовами нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda = \varepsilon_2 \quad (3.73)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі D .

Теорема 3.15. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^1$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$ задовольняють умову мінімальності (3.55), і функції обчислені за формулами (3.69), (3.70) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1}^1 \times D_{\varepsilon_2}^2$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють систему рівнянь (3.71)–(3.73) і визначають розв'язок екстремальної задачі (3.66). Функція обчислена за формулою (3.62), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Теорема 3.16. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^2$, $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^2$, де*

$$D_{\varepsilon_1}^2 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^2 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\},$$

спектральні щільності $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані. Вважаємо, що спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності (3.55), функції обчислені за формулами (3.69), (3.70) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1}^2 \times D_{\varepsilon_2}^2$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вони є розв'язком системи рівнянь

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1,$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))\alpha_2,$$

($\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$), визначають розв'язок екстремальної задачі (3.66) і задовольняють умови нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda = \varepsilon_2.$$

Функція обчислена за формулою (3.62), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 3.14. Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}^2$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.55), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (3.69), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{\varepsilon_1}^2$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вона задовольняє співвідношення

$$|A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1,$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.66). Функція, обчислена за формулою (3.62), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

3.4.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^1$. Розглянемо задачу оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$ на множині допустимих спектральних щільностей $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^1$,

$$D_{\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \left| f(\lambda) = (1 - \varepsilon_1)f_1(\lambda) + \varepsilon_1 w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}^1 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_2 \right. \right\},$$

де спектральні щільності $f_1(\lambda), g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, $w(\lambda)$ – невідома спектральна щільність. Клас D_{ε_1} описує модель “ ε -забруднення” стохастичних процесів.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$, $g^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^1$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$ за формулами (3.69), (3.70). Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння які мають задовольняти найменш сприятливі щільності

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_1^{-1}), \quad (3.74)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_2, \quad (3.75)$$

α_1, α_2 – сталі величини, $\varphi(\lambda) \leq 0$, $\varphi(\lambda) = 0$, коли $f_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon_1)f_1(\lambda)$, $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$, коли $g_0(\lambda) \neq g_1(\lambda)$. Рівняння (3.69), (3.70) разом з екстремальною умовою (3.66) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda = \varepsilon_2$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі D .

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.17. *Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$, $g^0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^1$ задовольняють умову мінімальності (3.55), і функції обчислені за формулами (3.69), (3.70) обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}^1$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (3.74)-(3.75) і визначають розв'язок екстремальної задачі (3.66). Функція обчислена за формулою (3.62) є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.*

Наслідок 3.15. *Нехай спектральна щільність $g(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_1}$. Нехай функція $f_0(\lambda) + g(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.55), а функція $h_f(f_0, g)$, що визначена за формулою (3.69), обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_{ε_1} для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо вона має вигляд*

$$f_0(\lambda) = \max \left\{ (1 - \varepsilon_1)f_1(\lambda), \alpha_1 |A(e^{i\lambda})g(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| - g(\lambda) \right\},$$

і пара $(f_0(\lambda), g(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.66). Функція обчислена за формулою (3.62) є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 3.16. Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_{\varepsilon_2}^1$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (3.55), а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (3.70), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{\varepsilon_2}^1$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \{g_1(\lambda), \alpha_2 |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda)\},$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (3.66). Функція обчислена за формулою (3.62) є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Висновки до розділу 3

У розділі 3 розв'язано задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі досліджено за умов спектральної визначеності, коли вигляд спектральних щільностей процесів заданий, та у випадку спектральної невизначеності, коли відома лише множина допустимих щільностей.

При дослідженні задачі інтерполяції встановлено формули для обчислення значень середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оцінки функціонала

$$A_s \xi = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} a(t) \xi(t) dt,$$

за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$, стаціонарний процес $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$. Якщо спектральні щільності процесів невідомі, але

задано множини допустимих щільностей, за допомогою мінімаксного методу знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оцінки функціонала.

У випадку задачі екстраполяції знайдено формули для обчислення значень середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оцінки функціонала

$$A\xi = \int_0^{\infty} a(t)\xi(t)dt,$$

за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$. Процес $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$. Для випадку спектральної невизначеності виведено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

У задачі фільтрації знайдено формули для обчислення значень середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оцінки функціонала

$$A\xi = \int_{R^s} a(t)\xi(-t)dt,$$

за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, $R^s = [0, \infty) \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^s [M_l, \dots, M_l + N_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. У випадку, коли точний вигляд спектральних щільностей процесів не відомий, але вказані множини їх допустимих значень, визначено співвідношення, яким повинні задовольняти найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Знайдено розв'язки для задач інтерполяції, екстраполяції та фільтрації в умовах спектральної визначеності та спектральної невизначеності. У випадку спектральної визначеності, коли задано явний вигляд спектральних щільностей послідовностей та процесів, отримано формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оцінок лінійних функціоналів. У випадку спектральної невизначеності, коли точний вигляд спектральних щільностей невідомий, але задані множини їх допустимих значень, застосовано мінімаксний (робастний) метод оцінювання лінійних функціоналів та встановлено формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик.

У дисертації отримано наступні нові наукові результати:

- знайдено формули, що дозволяють обчислити значення середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками в умовах спектральної визначеності;
- сформульовано та запропоновано розв'язки задач мінімаксної (робастної) інтерполяції, екстраполяції та фільтрації функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками, отримано співвідношення, яким задовольняють найменш сприятливі спектральні щільності та формули, які визначають мінімаксні спектральні характеристики;

- наведено формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками;
- сформульовано та наведено розв'язки задач мінімаксної (робастної) інтерполяції, екстраполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками, виведено формули, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

Сформульовані в роботі результати досліджень мають теоретичне значення при вивченні випадкових процесів та можуть бути застосовані при розв'язанні задач аналізу часових рядів, передачі інформації, фінансової математики. Приклади використання отриманих результатів оцінювання наведено для конкретних функціоналів з вказаними спектральними щільностями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 5-е изд / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
2. Голубев Г. К. Минимаксная экстраполяция последовательностей/ Г. К. Голубев, М. С. Пинскер// Проблемы передачи информации. — 1983. — Т. 19, Вып. 4. — С. 31–42.
3. Голубев Г. К. Экстремальные задачи минимаксного оценивания последовательностей/ Г. К. Голубев, М. С. Пинскер// Проблемы передачи информации. — 1985. — Т. 21, Вып. 3. — С. 36–52.
4. Засухин В. Н. К теории многомерных стационарных процессов/ В. Н. Засухин// ДАН СССР. — 1941. — Т.33. — С. 435–437.
5. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве/ А. Н. Колмогоров// Бюллетень МГУ. — 1941. — Т. 2, № 6. — С. 1–40.
6. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей/ А. Н. Колмогоров// Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1941. — Т. 5. — С. 3–14.
7. Крейн М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи/ М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. — М: “Наука”, 1973.— 552 с.
8. Куркин О.М. Минимаксная обработка информации/ Куркин О. М., Коробочкин Ю. Б., Шаталов С. Д. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 214 с.
9. Миравель А.П. Об одном алгоритме в задаче интерполяции многомерных временных рядов/ А.П.Миравель, Л.И. Питербарг// Проблемы передачи информации. — 1982. — Том 18, Вып. 3. — С. 53–61.
10. Моклячук М. П. Об одной игре двух лиц с нулевой суммой и экстраполяции стационарных случайных последовательностей/ М. П. Моклячук// Исследование операций и АСУ. — 1981. — Вып. 17. — С. 122–127.

11. Моклячук М. П. Про задачу фільтрації векторних послідовностей/ М. П. Моклячук// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1992. — Вип. 47. — С. 101–118.
12. Моклячук М. П. Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція/ М. П. Моклячук// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1993. — Вип. 48. — С. 135–146.
13. Моклячук М. П. Екстраполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом/ М. П. Моклячук// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1997. — Вип. 57. — С. 125–133.
14. Моклячук М. П. Інтерполяція векторних стаціонарних послідовностей/ М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2005. — Вип. 73. — С. 112–119.
15. Моклячук М. П. Екстраполяція векторних стаціонарних послідовностей/ М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2005. — Вип. 3. — С. 60–70.
16. Моклячук М. П. Про задачу фільтрації векторної стаціонарної послідовності/ М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2006. — Вип. 75. — С. 95–104.
17. Моклячук М. П. Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів: монографія/ М. П. Моклячук. — К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. — 320 с.
18. Моклячук М. П. Оцінки функціоналів від процесів зі стаціонарними приростами та коінтегрованих послідовностей/ М. П. Моклячук, М. М. Луз. — НВП “Інтерсервіс”, 2016. — 272 с.
19. Моклячук М. П. Інтерполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 142–155. (english translation in *Theory Probability and Mathematical Statistics* — 2016. — Vol. 93. — P. 153–167.)

20. Моклячук М. П. Задача інтерполяції стаціонарних послідовностей/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано-Франківськ, 24-27 лютого 2016 р.(тези доповідей) — 2016. — С. 40–41.
21. Моклячук М. П. Оцінювання невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності за спостереженнями із пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19-20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ “КПІ”, 2016. — С. 113–117.
22. Моклячук М. П. Задача фільтрації стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано - Франківськ, 22-25 лютого 2017 р.(тези доповідей) — 2017. — С. 41–42.
23. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума/ Б. Н. Пшеничный. — М.: “Наука”, 1982. — 144 с.
24. Розанов Ю. А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем/ Ю. А. Розанов// Успехи математических наук. — 1958. — Т. 13, № 2. — С. 93–142.
25. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы/ Ю. А. Розанов. — 2-е изд., доп.. — М.: “Наука”, 1990. — 272 с.
26. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х книгах/ А. Н. Ширяев. — 3-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2004. — Кн.2. — 408 с.
27. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью/ А. М. Яглом// Труды Московского математического общества. — 1955. — №4. — С. 333–374.
28. Яглом А. М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спек-

- тром/ А. М. Яглом// Теория вероятностей и ее применения. — 1960. — Т 5, № 3. — С. 265–292.
29. Сідей М. І. Екстраполяція стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками/ М. І. Сідей// XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців “Шевченківська весна”, 6-8 квітня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. — 2016. — С. 68–72.
 30. Abraham B. Missing observations in the time series/ B. Abraham// Commun. Statist. — 1981. — A10. — P. 1643–1653.
 31. Bondon P. Influence of missing values on the prediction of a stationary time series/ P. Bondon// Journal of Time Series Analysis. — 2005. — Vol. 26, No. 4. — P. 519–525.
 32. Bondon P. Prediction with incomplete past of a stationary process/ P. Bondon // Stochastic Process and their Appl. — 2002. — Vol. 98. — P. 67–76.
 33. Breiman L. A note of minimax filtering/L. Breiman// Ann. Prob.— 1973.— Vol. 1, No. 1. — P. 175–179.
 34. Brubacher S. R. Interpolating time series with application to the estimation of holiday effects on electricity demand/ S.R. Brubacker, T. Wilson// Appl. Statist. — 1976. — Vol. 25, No. 2. — P. 107–116.
 35. Cheng R. Some extremal problems in $L^p(w)$ /R. Cheng, A. G. Miamee, M. Pourahmadi// Proc. Am. Math. Soc.— 1998.— Vol. 126.— P. 2333–2340.
 36. Cheng R. Prediction with incomplete past and interpolation of missing values/ R. Cheng, M. Pourahmadi // Statistics & Probability Letters. — 1996. — Vol. 33. — P. 341–346.
 37. Cramer H. On the theory of stationary random processes/ H. Cramer// Ann. Math. — 1940. — Vol. 41. — P. 215–230.
 38. Damsleth E. Interpolating missing values in a time series/ E. Damsleth// Scand. J. Statist. — 1980. — Vol. 7. — P. 33–39.
 39. Dubovets’ka I.I. Interpolation of periodically correlated stochastic sequences/ I.I. Dubovets’ka, O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2012. — Vol. 84. — P. 43–56.

40. Dubovets'ka I.I. Filtration of linear functionals of periodically correlated sequences/ I.I. Dubovets'ka, M.P. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2013. — Vol. 86. — P. 51–64.
41. Dubovets'ka I.I. Extrapolation of periodically correlated processes from observations with noise/ I.I. Dubovets'ka, M.P. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2013. — Vol. 88. — P. 43–55.
42. Dubovets'ka I.I. Minimaxestimation problem for periodically correlated stochastic processes/ I.I. Dubovets'ka, M.P. Moklyachuk// Journal of Mathematics and System Science.— 2013.— Vol. 3, No. 1,— P. 26–30.
43. Dubovets'ka I.I. On minimax estimation problems for periodically correlated stochastic processes/ I.I. Dubovets'ka, M.P. Moklyachuk// Contemporary Mathematics and Statistics. — 2014. — Vol. 2, No. 1. — P. 123–150.
44. Franke J. On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise/ J. Franke // J. Time Ser. Analysis. — 1984. — Vol. 5, No. 4. — P. 227–244.
45. Franke J. Minimax robust prediction of discrete time series/ J. Franke// Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1985. — Vol. 68. — P. 337–364.
46. Franke J. Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors/ J. Franke, H. V. Poor // Robust and Nonlinear Time Series Analysis. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag. — 1984. — Vol. 26. — P. 87–126.
47. Gikhman I. I. The theory of stochastic processes. I./ I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. — Springer, Berlin, 2004. — 574 p.
48. Grenander U. A prediction problem in game theory/ U. Grenander // Arkiv för Matematik. — 1957. — Vol. 3. — P. 371–379.
49. Hannan E. J. Multiple time series / E. J. Hannan . — John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970. — 536 p.
50. Hosoya Y. Robust linear extrapolations of second-order stationary processes / Y. Hosoya // Ann. Prob. — 1978. — Vol. 6, No. 4. — P. 574–584.
51. Huber P. J. Robust estimation of a location parametr/ P. J. Huber// Ann. Math. Stat. — 1964. — Vol. 35, No. 1. — P. 73–101.

52. Huber P. J. A robust version of the probability ratio test/ P. J. Huber// Ann. Math. Stat. — 1964. — Vol. 36, No. 6. — P. 1753–1758.
53. Ioffe A. D. Theory of extremal problems/ A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov. — Amsterdam, New York, Oxford: North–Holland Publishing Company, 1979. — 460 p.
54. Karhunen K. Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung/ K. Karhunen// Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica. — 1947. — Vol. 37. — P. 3–79.
55. Kasahara Y. Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values/ Y. Kasahara, M. Pourahmadi, A. Inoue// Statistics & Probability Letters. — 2009. — Vol. 79, No. 14. — P.1637–1646.
56. Kassam S. A. Robust hypothesis testing for bounded classes of probability densities/ S. A. Kassam// IEEE Trans. Inform. Theory. — 1981. — Vol. IT - 27. — P. 242–247.
57. Kassam S. A. Robust hypothesis testing and robust time series interpolation and regression/ S. A. Kassam// J. Time Ser. Analysis. — 1982. — Vol. 3, No. 3. — P. 185–194.
58. Kassam S. A. Robust techniques for signal processing: A survey/ S. A. Kassam, H. V. Poor// Proceedings of the IEEE. — 1985. — Vol. 73, No. 3. — P. 433–481.
59. Kolmogorov A. N. Selected works of A. N. Kolmogorov. Volume II: Probability theory and mathematical statistics / A. N. Kolmogorov. — Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1992. — 597 p.
60. Luz M. M. Interpolation of functional of stochastic sequences with stationary increments/ M. M. Luz, M. P. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2013. — No. 87. — P. 117–133.
61. Luz M. M. Interpolation of functionals of stochastic sequences with stationary increments/ M. M. Luz, M. P. Moklyachuk// Theory Probab. Math. Stat.— 2013. — Vol. 87.— P. 117–133.

62. Luz M. M. Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments/ M. M. Luz, M. P. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — No. 89. — P. 127–142.
63. Luz M. Robust Extrapolation Problem for Stochastic Processes with Stationary Increments/ M. Luz, M. Moklyachuk// Mathematics and Statistics. — 2014. — Vol. 2, No. 2. — P. 78–88.
64. Luz M. Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences/ M. Luz, M. Moklyachuk// Statistics, Optimization and Information Computing. — 2014. — Vol. 2, No. 3. — P. 176–199.
65. Luz M. Minimax Interpolation problem for random processes with stationary increments/ M. Luz, M. Moklyachuk// Statistics, Optimization and Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 1. — P. 30–41.
66. Luz M. Minimax-robust prediction problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences/ M. Luz, M. Moklyachuk// Statistics, Optimization and Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 2. — P. 160–188.
67. Luz M. Filtering problem for random processes with stationary increments/ M. Luz, M. Moklyachuk// Columbia International Publishing. Contemporary Mathematics and Statistics. — 2015.— Vol. 3, No. 1.— P. 8–27.
68. Luz M. Minimax interpolation of random processes with stationary increments from observations with noise/ M. Luz, M. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistic. — 2016. — Vol.94. — P. 117–130.
69. Luz M. Filtering problem for functionals of stationary sequences/ M. Luz, M. Moklyachuk// Statistics, Optimization & Information Computing.— 2016.— Vol. 4, No. 1.— P. 68–83.
70. Moklyachuk M. P. Estimation of linear functionals of stationary stochastic processes and a two-person zero-sum game/ M. P. Moklyachuk// Stanford University Technical Report No. 169. — 1981. — 82 p.

71. Moklyachuk M. P. Estimation of stochastic processes from observations with noise / M. P. Moklyachuk // Theory of Stochastic Processes. — 1997. — Vol. 3(19), No. 3-4. — P. 330–338.
72. Moklyachuk M. P. Robust procedures in time series analysis / M. P. Moklyachuk // Theory of Stochastic Processes. — 2000. — Vol. 6(22), No. 3-4. — P. 127–147.
73. Moklyachuk M. Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic sequences / M. Moklyachuk, A. Masyutka // Theory of Stochastic Processes. — 2008. — Vol. 14(30), No. 3-4. — P. 89–103.
74. Moklyachuk M. P. Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes / M. P. Moklyachuk, A. Yu. Masyutka. — LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. — 296 p.
75. Moklyachuk M. Robust extrapolation problem for stochastic sequences with stationary increments / M. Moklyachuk, M. Luz // Contemporary Mathematics and Statistics. — 2013. — Vol. 1, No 3. — P. 123–150.
76. Moklyachuk M. P. Periodically correlated processes estimates / M. Moklyachuk, I. Golichenko. — LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. — 308 p.
77. Moklyachuk M. Interpolation Problem for Stationary Sequences with Missing Observations / M. Moklyachuk, M. Sidei // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 3. — P. 259–275.
78. Moklyachuk M. Filtering problem for stationary sequences with missing observations / M. Moklyachuk, M. Sidei // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2016. — Vol. 4, No. 4. — P. 308–325.
79. Moklyachuk M. P. Extrapolation problem for functionals of stationary processes with missing observations / M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Vol. 4, No. 1-2. — P. 122–129.
80. Moklyachuk M. P. Interpolation of functionals of stationary processes with missing observations / M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei // Вісник Київського

- університету. Серія: фіз.-мат. науки — 2016. — No. 1. — P. 24–30.
81. Moklyachuk M. Filtering problem for functionals of stationary processes with missing observations/ M. Moklyachuk, M. Sidei// Communication in Optimization Theory — 2016. — Article ID 21. — 18 p. URL: <http://cot.mathres.org/issues/COT201621.pdf>
 82. Moklyachuk M. P. Interpolation problem for stationary sequences with missing observations/ M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei// International conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces”, October 14-16, 2015, Kyiv, Ukraine (program and abstracts) — 2015. — P. 39.
 83. Nakazi T. Two problems in prediction theory/ T. Nakazi// Studia Math. — 1984. — Vol. 78. — P. 7–14.
 84. Pelagatti M. M. Time series modelling with unobserved components/ M. M. Pelagatti. — New York: CRC Press, 2015. — 275 p.
 85. Poor H. On robust Wiener filtering/ H. Poor// IEEE Trans. Automat. Control. — 1980. — Vol. AC-25. — P. 531–536.
 86. Poor H. Robust mathed filters/ H. Poor// IEEE Trans. Inform. Theory. — 1983. — Vol. 29, No. 5. — P. 677–687.
 87. Pourahmadi M. A prediction problem in $L^2(w)$ / M. Pourahmadi, A. Inoue, Y. Kasahara// Proceedings of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 135, No. 4. — P. 1233–1239.
 88. Pourahmadi M. Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series/ M. Pourahmadi// Journal of time series analysis. — 1989. — Vol. 10, No. 2. — P. 149–169.
 89. Rockafellar R. T. Convex Analysis/ R. T. Rockafellar. — Princeton University Press, 1997. — 472 p.
 90. Salehi H. Algorithms for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes/ H. Salehi// The Annals of Probability. — 1979. — Vol. 7, No. 5. — P. 840–846,.
 91. Taniguchi M. Robust regression and interpolation for time series/ M. Taniguchi// J. Time Ser. Analysis.— 1981.— Vol. 2, No. 1.— P. 53–62.

92. Vastola S. K. An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering/ S. K. Vastola, H. V. Poor// *Automatica*. — 1983. — Vol. 19, No. 3. — P. 289–293.
93. Verdu S. On minimax robustness: a general approach and applications/ S. Verdu, H. V. Poor// *IEEE Trans. Inform. Theory*. — 1984. — Vol. IT - 30, No. 2. — P. 328–340.
94. Weerasinghe S. A missing values imputation method for time series data: an efficient method to investigate the health effect of sulphur dioxide levels/ S. Weerasinghe// *Envirometrics*. — 2010. — Vol. 210. — P. 162–172.
95. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: With engineering applications/ N. Wiener. — Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. — 163 p.
96. Wiener N. The prediction theory of multivariate stochastic processes. Part 1: The regularity condition/ N. Wiener, P. Masani// *Acta Math*. — 1957. — Vol. 98. — P. 111–150.
97. Wiener N. The prediction theory of multivariate stochastic processes. Part 2: The linear predictor/ N. Wiener, P. Masani// *Acta Math*. — 1957. — Vol. 99.— P. 93–137.
98. Wold H. A study in the analysis of stationary time series/ H. Wold. — Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1954. — 236 p.
99. Wold H. On prediction in stationary time series/ H. Wold// *Ann. Math. Stat.* — 1948. — Vol. 19, No. 4. — P. 558–567.
100. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results/ A. M. Yaglom. — Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. — 526 p.
101. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Supplementary notes and references/ A. M. Yaglom. — Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. — 258 p.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць

1. *Моклячук М. П.* Інтерполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 142–155. (english translation in Theory Probability and Mathematical Statistics — 2016. — Vol. 93. — P. 153–167.)
2. *Moklyachuk M.* Interpolation Problem for Stationary Sequences with Missing Observations/ М. Moklyachuk, М. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 3. — P. 259–275.
3. *Moklyachuk M.* Filtering problem for stationary sequences with missing observations/ М. Moklyachuk, М. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing — 2016. — Vol. 4, No. 4. — P. 308–325.
4. *Moklyachuk M. P.* Extrapolation problem for functionals of stationary processes with missing observations/ М. P. Moklyachuk, М. I. Sidei// Буквинський математичний журнал. — 2016. — Vol. 4, No. 1-2. — P. 122–129.
5. *Moklyachuk M. P.* Interpolation of functionals of stationary processes with missing observations/ М. P. Moklyachuk, М. I. Sidei// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки — 2016. — No. 1. — P. 24–30.
6. *Moklyachuk M.* Filtering problem for functionals of stationary processes with missing observations/ М. Moklyachuk, М. Sidei// Communication in Optimization Theory — 2016. — Article ID 21. — 18 p. URL: <http://cot.mathres.org/issues/COT201621.pdf>
7. *Moklyachuk M. P.* Interpolation problem for stationary sequences with missing observations/ М. P. Moklyachuk, М. I. Sidei// International

- conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces”, October 14-16, 2015, Kyiv, Ukraine (program and abstracts) — 2015. — P. 39.
8. *Моклячук М. П.* Задача інтерполяції стаціонарних послідовностей/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано - Франківськ 24-27 лютого 2016 р.(тези доповідей) — 2016. — С. 40–41.
 9. *Сідей М. І.* Екстраполяція стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками/ М. І. Сідей// XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців “Шевченківська весна”, 6-8 квітня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. — 2016. — С. 68–72.
 10. *Моклячук М. П.* Оцінювання невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності за спостереженнями із пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19-20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ “КПІ”, 2016. — С. 113–117.
 11. *Моклячук М. П.* Задача фільтрації стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано - Франківськ, 22-25 лютого 2017 р.(тези доповідей) — 2017. — С. 41–42.

Апробація результатів дисертації

1. International Conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces” (Kyiv, 2015)
2. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ, 2016);

3. XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців “Шевченківська весна” (Київ, 2016)
4. XVII міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 2016);
5. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ, 2017);
6. Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Ю. С. Мішури та проф. Ю. В. Козаченка (Київ, 2017);
7. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, 2017);
8. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я. І. (м. Львів, 2017);