Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ФІСУНЕНКО АНДРІЙ ЛЕОНІДОВИЧ

УДК 004.021:004.023:004.054:519.16

ПОБУДОВА ГЕНЕРАТОРА ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ НА ПЛОЩИНІ

01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичної інформатики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Терещенко Василь Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичної інформатики.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук
Семенова Наталія Володимирівна,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, провідний науковий співробітник відділу методів дискретної оптимізації, математичного моделювання та аналізу складних систем.

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Рисцов Ігор Костянтинович,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», доцент кафедри математичного моделювання економічних систем.

Захист відбудеться 30 червня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.09 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03680, Київ, проспект Академіка Глушкова, 4д, факультет кібернетики, аудиторія 40.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601 МСП, Київ, вул. Володимирська, 58, зал №12.

Автореферат розісланий “ 20” травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **В.П. Шевченко**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сучасній людині щодня доводиться мати справу з результатами роботи алгоритмів обробки геометричних об'єктів обчислювальними системами: в графічних інтерфейсах цифрових пристроїв, в автоматизовано створених конструкціях, інструментах, машинах. Сучасні технології базуються на проектуванні виробів в CAD-системах, які, в свою чергу, зараз неможливо уявити без алгоритмів обчислювальної геометрії.

Як самостійна галузь науки, обчислювальна геометрія сформувалася в середині 70-х років минулого століття. Разом з розвитком комп'ютерної техніки і засобів графічного вводу-виводу потреби в результатах досліджень цієї тематики тільки зростали. Задачам і методам ефективної обробки геометричних об'єктів приділяли увагу такі вчені, як M. Shamos, F. Preparata, J. O'Rourke, R. Karp, M. Overmas, B. Chazelle, J. Goodman, N. M. Amato, K. Brown, C. Papadimitriou, S. Fekete, F. Hurtado, P. Erdos, M. Newborn, S. Akl, E. M. Arkin, Y.-J. Chiang, M. Held, J.S.B. Mitchell, V. Sacristan, S. Skiena, T.-C. Yang та багато інших.

Многокутники – це один з найпростіших геометричних об'єктів, але, незважаючи на простоту, дуже багато складних задач обчислювальної геометрії зводяться до побудови і знаходження їх певних характеристик, перевірки властивостей.

Окрім прямого традиційного застосування в CAD-системах, комп'ютерній графіці та системах візуалізації, многокутники інтенсивно використовуються в розпізнаванні образів, обробці супутникових та медичних зображень, мультимедійних та GIS-системах. Останнім часом, у зв'язку з бурхливим розвитком таких нових прикладних міждисциплінарних напрямків, як віртуальна та збагачена реальність, потреби в ефективних методах обробки геометричних об'єктів стають ще більш актуальними.

Тому алгоритми обробки многокутників – один із найбільш важливих розділів обчислювальної геометрії. Зокрема, цей напрямок досліджень розвивався і вітчизняними вченими, такими як Анісімов А. В. , Шор Н.З., Ю.Г. Стоян, М.І. Шлезінгер, Є.М. Кисельова, Ю.І. Петунін, В.П. Клименко, О.М. Васюков, О.А. Ємець, Терещенко В. М., Клюшин Д.А., Рубльов Б. В., Семенова Н.В., Панкратов О. В та інші.

Водночас з практичними задачами існує низка відкритих фундаментальних проблем обчислювальної геометрії, зокрема питання щодо складності підрахунку усіх можливих простих многокутників для заданої множини точок, пошуку, так званих, оптимальних конфігурацій для заданої кількості точок, які максимізують кількість можливих простих многокутників, породження многокутників із заданими властивостями.

Ці задачі можуть використовуватись для *забезпечення якості програмно-апаратних комплексів, що використовують такі алгоритми* обчислювальної геометрії.

Таким чином, тематика даної дисертаційної роботи, що присвячена базисним задачам комбінаторної та обчислювальної геометрії є актуальною.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота є складовою частиною наукових робіт, які ведуться на кафедрі математичної інформатики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при виконанні теми “Створення теоретичних основ, методів та програмних засобів інтелектуалізації інформаційно-комунікаційних та трансформерних технологій” (№ держреєстрації – 0111U005416, 2011-2015 рр.).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є створення ефективних методів і алгоритмів генерації геометричних об’єктів із заданими властивостями та їх практична реалізація.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі основні задачі:

1. розробка алгоритмів генерації простих многокутників із заданими властивостями;
2. дослідження особливостей генерації простих многокутників в залежності від конфігурації множини точок, які повинні бути вершинами отриманих многокутників;
3. пошук оптимальних об’єктів за визначеними критеріями;
4. узагальнення методів генерації простих многокутників для породження простих поліедрів у просторах більшої розмірності ($d=3, 4,\ldots$);
5. практична реалізація алгоритмів та пов’язані задачі:
   – оптимізація алгоритмів генерації;
   – візуалізація алгоритмів та результатів їх роботи;
   – практичне застосування розроблених алгоритмів і методів.

Об’єкт дослідження – процес породження геометричних об’єктів на скінчених множинах точок з повним включенням усіх точок до породжених об’єктів.

Предмет дослідження – стратегії та підходи ефективного породження геометричних об’єктів.

Методи дослідження. Дисертаційна робота ґрунтується на:

- загальних методах прикладної теорії алгоритмів;
- методах обчислювальної геометрії;
- методах інтерактивної комп’ютерної графіки та візуалізації.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі розвинуто методи генерації простих многокутників.

Вперше:

- розроблено метод генерації простих многокутників нарощуванням опуклих оболонок, на основі якого доведено існування простого поліедра в евклідовому просторі довільного виміру d для скінченої множини точок, жодні $d+1$ з яких не лежать в одній гіперплощині, та запропоновано новий алгоритм генерації простих поліедрів, що включають усі точки вхідної множини у якості вершин;

- показано, що раніше відомі спіральні многокутники, можуть бути отримані як окремий випадок методу вирізання та нарощування опуклих оболонок;

- розширено діапазон застосування алгоритму генерації випадкових елементів з повної множини усіх можливих простих многокутників з використанням поняття графа взаємної видимості вільних точок;

- розроблено метод підрахунку усіх можливих простих полігонізацій скінченої множини точок на площині;
- досліджено новий клас об'єктів - квітко-подібні многокутники і запропоновані методи їх породження і підрахунку;
- запропоновано новий клас розташувань – діаграму еквівалентності зіркових розбиттів та досліджено її застосування для алгоритму генерації та підрахунку квітко-подібних многокутників.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має як теоретичну, так і прикладну спрямованість. Отримані результати розширюють коло вирішених задач, що пов'язані з відкритими проблемами обчислювальної геометрії; можуть бути застосовані при розробці та тестуванні алгоритмів обчислювальної геометрії, які оперують простими многокутниками та їх узагальненнями для просторів більших вимірів - поліедрів, а також для перевірки та порівняння різних наближених розв'язків оптимізаційних задач над множинами простих многокутників на заданій скінченій множині точок.

Результати, які отримані при проведенні роботи, можуть використовуватись для забезпечення перевірки доведення коректності та якості реалізації рішень оптимізаційних задач та задач генерації геометричних об'єктів із заданими властивостями.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, які складають суть дисертаційної роботи, одержані здобувачем самостійно, сформульовані у вигляді теорем та строго доведені з використанням допоміжних лем та тверджень. Обґрунтування включають посилання на використані джерела. З робіт, виконаних із співавторами, на захист виносяться лише результати, одержані особисто здобувачем. Персональний внесок здобувача до всіх наукових праць, опублікованих із співавторами [2], [5-11] полягає у застосуванні розроблених за темою дисертації методів генерації геометричних об'єктів із заданими властивостями, як вхідні дані для перевірки програмних реалізацій відповідних алгоритмів та вимірювання результатів чисельного експерименту, порівняння результатів з відомими результатами попередніх досліджень.

Апробація результатів дисертації. Основні ідеї і положення дисертаційного дослідження обговорювалися на наукових семінарах кафедри математичної інформатики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Основний зміст дисертаційної роботи викладено та оприлюднено у доповідях і тезах міжнародних і всеукраїнських наукових конференцій, зокрема:

- 16th International Conference on Information Visualisation IV2012, Montpellier, France, 11-13 July 2012 (міжнародна конференція, Франція);
- XIX International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties", Україна, 23-27 квітня, 2012 р. (міжнародна конференція, Україна);
- 1-а міжнародна науково-технічна конференція «Комп'ютерна графіка та розпізнавання зображень», 17-18 травня, Вінниця. Україна, 2012 р.;
- 12th IC "Parallel Computing Technologies", St.-Petersburg, Russia, September 30 - October 4, 2013, PaCT 2013 – (міжнародна конференція, РФ);

- International Conference "Parallel and Distributed Computing Systems" PDCS 2013, Ukraine, Kharkiv, March 13-14, 2013 (міжнародна конференція, Україна);
- 7th International Academic Conference “Computer Science & Engineering 2015” (CSE-2015) as a part of International Youth Science Forum “Litteris Et Artibus”, November 26–28, 2015, Lviv, Ukraine (міжнародна конференція, Україна).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано 6 наукових праць – 4 наукових статей у фахових виданнях ВАК України, 2 – у міжнародних журналах, що індексуються у наукометричній базі SCOPUS, та 6 тез міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел (64 найменування) і додатків. Загальний обсяг дисертації становить 128 с., основний текст роботи викладено на 102 с.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дослідження, сформульовано мету та основні задачі дослідження, показано зв’язок з науковими програмами та іншими дослідженнями у галузі тематики дисертаційної роботи.

На початку **Розділу 1** Підрозділ 1.1 надається попереднє неформальне введення в постановку задачі для розкриття її основної суті.

Підрозділом 1.2 вводиться ряд формальних означень для основних означень, зокрема, для різних типів простих многокутників.

Підрозділ 1.3 містить відомості про основну модель обчислень, яка використовується в роботі для аналізу складності алгоритмів.

Підрозділ 1.4 формалізує та узагальнює постановку основних задач дослідження.

Розглянемо скінчену множину S з N точок $p_i=(x_i, y_i)$, $i=0, \dots, N-1$ на площині ($S \in \boldsymbol{E}^2$): $S = \{p_0, p_2, \dots, p_{N-1}\}$, де $N>2$. Зробимо спрощуюче припущення, що усі точки множини знаходяться у, так званому, загальному розташуванні: будь-які три точки множини S не належать спільній прямій.

Примітка. Оскільки в більшості практичних застосувань використовується наближене представлення координат точок за допомогою раціональних чисел обмеженої точності, то справедливе таке припущення: якщо деякі три точки належать одній прямій, можна змінити координати будь-якої з них на деяке невелике число δ у межах заданої точності ε для задачі: $p_i=(x_i, y_i) \rightarrow p_i` = (x_i+\delta, y_i)$: $\delta<\varepsilon$ та задовольнити вимогу загального розташування.

Без зменшення загальності вважатимемо, що нумерація точок в S починається з точки, яка має найменшу координату x, а у випадку, коли є дві точки зі співпадаючою найменшою координатою x, то і найменшу координату y: три чи більше точок з однаковою координатою x не може існувати за зробленим вище припущенням загального розташування точок.

Позначимо через $P(S)$ такий простий многокутник, у якого усі точки заданої вхідної множини S являються його вершинами. Будемо також казати, що у цьому випадку многокутник породжений множиною S або, що він спирається на множину точок S.

Відповідно, через $SP(S) = \{P_1(S), ..., P_M(S)\}$ позначимо множину усіх можливих простих многокутників для даної множини точок.

Теорема 1.1 (Steinhaus H., 1964). $\forall S\ \exists\ P(S)$: для будь-якої множини точок S на площині, що задовольняє зробленим вище припущенням, завжди існує принаймні один простий многокутник, що спирається на всі точки множини S.

Примітка. Хоча доведення Теореми 1.1 відоме принаймні з 1964, в даній дисертаційній роботі доведено існування простого поліедра для евклідового простору $\boldsymbol{E}^d$ довільного виміру $d \geq 2$. Доведення базується на запропонованому методі побудови простого поліедра нарощуванням опуклих оболонок на видаленій гіпер-грані простої поверхні, що будується.

Зауваження: якщо $\sigma=\{\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(N\text{-}1)\}$ перестановка індексів точок S, то усі можливі перестановки індексів однозначно визначають $N!$ різних варіантів з'єднання точок відрізками у замкнені цикли, тобто у многокутники загального вигляду (див. Означення 1.7). Передбачається, що цикл замикається з останньої на першу точку перестановки, тобто многокутник утворений множиною відрізків $\{\overline{p_{\pi(0)}p_{\pi(1)}}, \overline{p_{\pi(1)}p_{\pi(2)}}, \dots, \overline{p_{\pi(N-2)}p_{\pi(N-1)}}, \overline{p_{\pi(N-1)}p_{\pi(0)}}\}$. Але, по-перше, для кожного многокутника існує $N\text{-}1$ інших варіантів послідовностей, які геометрично еквівалентні з точністю до циклічного зсуву номерів послідовності точок по позиціях «еталонній перестановці» $\sigma=\{0, \sigma(1), ..., \sigma(N\text{-}1)\}$, *в якій* на першій позиції знаходиться точка p_0. Тому кількість перестановок, що дають різні многокутники, з урахуванням двох напрямків обходу дорівнює $(N\text{-}1)!$. По-друге, для кожної перестановки, що задає обхід точок за напрямком руху годинникової стрілки, існує відповідна «дзеркальна» перестановка, що задає обхід точок у протилежному напрямку $\sigma'=\{0, \sigma(N\text{-}1), ..., \sigma(2)\}$. Тому, зробивши припущення, що відрізки, які утворюються парами точок, неорієнтовані, та позначивши многокутник, які породжується перестановкою σ як $P(S, \sigma)$ можемо сформулювати наступне твердження.

Твердження 1.1. Кількість геометрично різних многокутників $P(S, \sigma) = \{p_0, p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(N-1)}\}$ загального вигляду, що можуть спиратися на множину S з N точок ($N>2$) дорівнює $(N\text{-}1)!/2$.

Очевидно, що не всі породжені многокутники будуть простими, оскільки у загальному випадку серед можливих перестановок будуть зустрічатися такі, в яких ребра перетинаються на своїх внутрішніх точках, тому справедливе наступне.

Твердження 1.2. $M(S) = |SP(S)| \leq (N\text{-}1)!/2\ (\forall N>2)$.

Зауважимо, що оскільки еталонна перестановка $\sigma=\{0, \sigma(1), ..., \sigma(N\text{-}1)\}$ однозначно задає многокутник у геометричному сенсі, то ми можемо використовувати такі перестановки (послідовності з $N\text{-}1$ індексів j точок p_j: $1<j\leq N$) для однозначної ідентифікації многокутників серед інших для заданої множини точок S.

Сформулюємо також декілька простих, але корисних у подальшому, тверджень.

Твердження 1.3. Опуклою оболонкою $CH(S)$ скінченої множини точок $S = \{p_0, p_2, ..., p_{N-1}\}$, де $N>2$ є опуклий многокутник.

Твердження 1.4. Якщо $S \in CH(S)$, то $M(S) = |SP(S)| = 1$ $(\forall N>2)$.

Твердження 1.5. Якщо $\exists p \in S: p \notin CH(S)$, то $M(S) = |SP(S)| > 1$ $(\forall N>3)$.

Тобто, у загальному випадку, коли усі точки вхідної множини S лежать на опуклій оболонці, то можливим єдиним простим многокутником є сама опукла оболонка (опуклий многокутник – згідно з Означенням 1.9); якщо ж частина точок множини S не лежить на опуклій оболонці $CH(S)$, та $N>3$, то кількість можливих простих многокутників $M(S)$ для S більша ніж 1. Очевидно, що при цьому точки S, що не належать опуклій оболонці, є «внутрішніми» точками S. Визначимо такі точки формально:

Означення 1.16. Підмножиною внутрішніх точок $Interior(S)$ множини $S=\{p_1, p_2, ..., p_N\}$, де $N>3$, називається множина точок p: $p \in S \wedge p \notin CH(S)$. Відповідно, кожна точка $Interior(S)$ називається внутрішньою точкою S.

Примітка: підмножину внутрішніх точок можна альтернативно визначити, як $Interior(S) = S \setminus (S \cap CH(S))$.

Означення 1.17 Відбірковим предикатом для множини простих многокутників $SP(S) = \{P_1(S), ..., P_M(S)\}$ будемо називати функцію $F(S, P(S))$, яка приймає значення 1 («істина»), коли простий многокутник $P(S)$ задовольняє деякій властивості, та значення 0 - у протилежному випадку.

З урахуванням усього викладеного вище, у найбільш загальній постановці основні задачі дослідження можуть бути сформульовані наступним чином.

Задача 1. (*«Перелічення» або «Enumeration»*) Дано: S – вхідна множина точок на площині, $F(S, P(S))$ – відбірковий предикат для множини простих многокутників. Знайти підмножину $SP'(S)$ серед усіх можливих простих многокутників $SP(S) = \{P_1(S), ..., P_M(S)\}$ $(SP'(S) \subset SP(S))$, для кожного з елементів такої підмножини відбірковий предикат приймає значення 1 («істина»).

Задача 2. (*«Підрахунок» або «Counting»*) Дано: S – вхідна множина точок на площині, $F(S, P(S))$ – відбірковий предикат для множини простих многокутників. Знайти кількість елементів підмножини $SP'(S) \subset SP(S)$, для яких відбірковий предикат приймає значення 1 («істина»).

Зауваження: Хоча на перший погляд задачі дуже схожі, але складність перелічення, як правило, виявляється більшою ніж складність задач підрахунку, які можуть використовувати деякі геометричні властивості об'єктів або деякі виродження чи результати попередніх кроків алгоритмів, що часто зменшують часову складність алгоритмів.

Задача 3. (*«Випадкове породження» або «Random Generation»*) Дано: S – вхідна множина точок на площині, $F(S, P(S))$ – відбірковий предикат для множини простих многокутників. Знайти випадковий елемент підмножини $SP'(S)$ серед усіх можливих простих многокутників $SP(S) = \{P_1(S), ..., P_M(S)\}$ $(SP'(S) \subset SP(S))$, причому для кожного з елементів підмножини відбірковий предикат приймає значення 1 («істина»), а ймовірність дорівнює $1/|SP'(S)|$.

Підрозділ 1.5 містить аналіз сучасного стану більшості основних досліджень та підходів, які пов'язані із задачами 1-3.

Наразі відомо, що для максимальної кількості простих многокутників на заданій скінченій множині з N точок виконується наступні два обмеження:

$$|SP(S)| = \Omega(b^N),\ b = 3.60501960$$
$$|SP(S)| = O(a^N),\ a = 56$$

Іншими словами, хоча спосіб точного підрахунку $|SP(S)|$ наразі невідомий, але відомо, що кількість простих многокутників для заданої множини з N точок на площині у загальному випадку зростає *експоненційно*.

З іншого боку, в переліку відкритих проблем обчислювальної геометрії питання про існування алгоритму з поліноміальною складністю для вирішення задачі підрахунку усіх можливих простих многокутників на заданій множині точок залишається відкритим. З 2000 року ця задача фігурує як Задача 16 (Problem 16) у зазначеному переліку відкритих проблем (http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/P16.html).

В рамках проектів «Rectilinear Crossing Number Project» і «ComPoSe: Combinatorics on Point Sets and Arrangements of Objects» отримані наступні результати для максимально можливої кількості простих многокутників при певній заданій кількості точок N (див. Таблиця 1.1)

Таблиця 1.1

Кількість точок, N	**Максимально можлива кількість простих многокутників, P_N**	**P_N / P_{N-1}, (наближене)**	**Примітка**
1	**2**	**3**	**4**
3	1		Точне значення
4	3	3	Точне значення
5	8	2,667	Точне значення
6	29	3,625	Точне значення
7	92	3,172	Нижня границя
8	339	3,685	Нижня границя
9	1282	3,782	Нижня границя
10	4994	3,895	Нижня границя

До сьогоднішнього дня автори намагаються вирішувати різні варіанти Задачі 2 для окремих типів простих многокутників, тобто різних відбіркових предикатів в термінах, що введені вище.

Є два основних напрямки досліджень: перший – розглядати деякі евристики, які дозволяють породжувати прості многокутники загального типу другий – це вивчення певних типів простих многокутників: зіркових, псевдо-зіркових, монотонних, монотонних за кутом, «соняшникових», спіральних та інших.

Таблиця 1.2 підсумовує відомості про результати досліджень щодо простих многокутників (на момент написання цієї дисертаційної роботи).

Таблиця 1.2

Тип простого многокутника, основне посилання	**Складність перевірки на належність типу**	**Міцність множини**	**Часова складність породження випадкового екземпляру**	**Часова складність підрахунку кількості /пам'ять**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Загальний	$O(N)$	$O(b^N)$, $\Omega(b^N)$	$O(N^4 logN)$	Відкрита проблема
Зірковий	$O(N)$	$O(N^3)$	$O(N^2 logN)$ $O(N)$	$O(N^5 logN)$ $O(N)$
Монотонний	$O(N)$	$O(5^{(N-2)/2})$	$O(N)$	$O(N)$ $O(K)$, $N<K<N^2$
Псевдо-зірковий	$O(N)$	Невідомо	Невідомо	$O(N^2)$
Спіральний	$O(N)$	$O(1)$	-	Тільки два екземпляри
Соняшниковий		$O(1)$	-	Тільки два екземпляри

З Таблиці 1.4 можна зробити наступні висновки:

1. На сьогодні, практично, не існує ефективних алгоритмів для породження простих многокутників з повним покриттям множини можливих простих многокутників на заданій множині точок.
2. Більшість дослідників пропонують деякі евристики, але вони виявляються або з недетермінованим часом виконання, або мають низьку ефективність по часу виконання з ростом розміру вхідних даних, або не покривають всієї множини $SP(S)$.
3. Для породження випадкових екземплярів з повним покриттям множини $SP(S)$ наразі існує тільки один метод, що має складність $O(N^4 logN)$.
4. З окремих типів многокутників більш-менш опрацьованими можна вважати тільки зіркові та монотонні. Через те, що спіральні та соняшникові прості многокутники мають тільки по два екземпляри, автор вважає більш

доцільним класифікувати їх скоріше як геометричні інваріанти заданої множини точок, ніж, як окремі класи простих многокутників.

5. Відомий лише один наближений алгоритм знаходження простого многокутника з мінімальною площиною – методи пошуку оптимальних многокутників дослідниками системно, практично, не розглядалися.

Враховуючи викладене вище в Розділі 1, зроблено висновок, що задачі пов'язані з породженням таких геометричних об'єктів, як прості многокутники, залишаються актуальними та вивченими лише фрагментарно.

Розділ 2 вводить основний апарат для аналізу вхідних даних та рішення задач породження геометричних об'єктів.

Підрозділ 2.1 служить для попереднього неформального знайомства з об'єктами, які є важливими для подальшого викладення методів породження простих многокутників: діаграми еквівалентності зіркових розбиттів, що базуються на розташуваннях, типи розташування та граф взаємної видимості точок на площині, що базується на геометричному графі.

В Підрозділі 2.2 детально розглянуто діаграми еквівалентності зіркових розбиттів.

Означення 2.1. Нехай p - внутрішня точка многокутника, обмеженого $CH(S)$, причому $p \notin CH(S) \wedge p \notin S$, та $T_i(p)$ – трикутник, що визначається внутрішньою точкою p та вершинами i-го ребра $CH(S)$; *зірковим розбиттям* $\prod(S, p)$ множини точок на площині S відносно точки p є множина підмножин внутрішніх точок $Interior(S)$, які опиняються всередині того чи іншого трикутника $T_i(p)$: $\prod(S, p)=\{S_i(p): \forall i=1..h\ S_i(p) \in Ti(p) \wedge S_i(p) \subset Interior(S)\}$, де h – кількість вершин опуклої оболонки $CH(S)$. Точка p називається центром зіркового розбиття.

Означення 2.2. Припустимо $p \neq p'$; будемо казати, що два зіркові розбиття $\prod_1(S, p)$ та $\prod_2(S, p')$ еквівалентні тоді, та тільки тоді, коли $S_i(p)=S_i(p')$, $\forall i=1..h$.

Означення 2.3. Геометричне місце точок на площині $R_k(S)$ називається областю еквівалентності зіркового розбиття, якщо: $\forall p, p'$: $p \in R_k(S)$ та $p' \in R_k(S)$ відповідні зіркові розбиття $\prod_1(S, p)$ та $\prod_2(S, p')$ є еквівалентними.

Зробимо наступні позначення та припущення.

1. $\{p_{CH(1)}, \ldots, p_{CH(h)}\} \subset S$ - множина усіх вершин опуклої оболонки $CH(S)$;
2. $S \backslash CH(S)=\{p_{I(1)}, \ldots p_{I(N-h)}\} \subset S$ – множина усіх внутрішніх точок; розглядаємо тільки не вироджені випадки: N-h>0;
3. $r(S,i, j)$ - промінь на прямій $p_{I(i)}p_{H(j)}$, що випущений з внутрішньої точки $p_{I(i)}$ у напрямку, який протилежний вершині $p_{H(j)}$;
4. $A(S,i, j)$ – кут, що утворюється променями $r(S,i, j)$ та $r(S,i, j+1)$ або $r(S,i, 0)$, якщо $j=h$.

Лема 2.1. Області, що утворені перетином опуклої оболонки множини точок S *та множиною усіх променів* $r(S,i, j)$ *(*$i=1,\ldots, N-h$, $j=1, \ldots, h$; $h>2$; $N-h>1$*) є опуклими многокутниками.*

Означення 2.4. Припустимо наступне: $R(S)=\{R_1(S),\ldots , R_K(S)\}$ – множина опуклих многокутників, яка отримана процедурою, що використана в доведенні Леми 2.1. Множину $R(S)$ будемо називати *діаграмою еквівалентності зіркових розбиттів* множини точок S.

Теорема 2.1. *Кожен опуклий многокутник $R_k(S)$ є областю еквівалентності зіркового розбиття $\prod_k(S, p)$ для будь-якої точки $p \in R_k(S)$.*

Наслідок 2.1. Припустимо, що E_i – ребро опуклої оболонки $CH(S)$; $\prod(S, p)$ – зіркове розбиття множини точок S; $R_k(S)$ – області еквівалентності: $R_k(S) \subset R(S)$; тоді множина усіх простих ланцюгів, що побудована на кінцях E_i та внутрішніх точках, та, відповідно множина усіх простих многокутників, які є об'єднанням усіх цих ланцюгів $i=1..h$, є однаковими $\forall p \in R_k(S)$.

Означення 2.5. *Розташуванням*, що породжується множиною точок S є декомпозиція (розбиття) площини на грані, ребра та вершини, які утворюються попарними прямими лініями, відрізками і променями, що визначаються усіма можливими парами точок S.

Наслідок 2.2. Діаграма еквівалентності зіркових розбиттів множини S є розташуванням (витікає безпосередньо з означень вище та Теореми 2.1).

Примітка. Зазначимо, що $\boldsymbol{k}$ попарних перетинів $\boldsymbol{n}$ відрізків на площині можуть бути обчислені за час $O(\boldsymbol{n}\log\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})$; час виконання є оптимальним, вимоги по пам'яті $O(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})$. Ця теорема була доведена Chazelle та Edelsbrunner. У випадку розбиття, що розглядається, $\boldsymbol{n}=h(N-h)$.

У Підрозділі 2.3 формально введено поняття графу видимості вільних точок.

Припустимо, що на вхідній множині точок S ми будуємо *k-й* простий многокутник, починаючи з точки p_0 і послідовно додаючи точки із тих, які можуть бути з'єднані з останньою доданою точкою без перетинів ланцюга. Нехай $C_m(S, k)$ – простий ланцюг на кроці m побудови k-го многокутника, що містить m точок з вхідної множини у якості своїх вершин, які у свою чергу є кінцями відрізків – ребер цього ланцюга: $C_m(S, k) = \{s(p_0, p_{\sigma(1)}), s(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}), \ldots, s(p_{\sigma(m-1)}, p_{\sigma(m)})\}, m \leq N-1$.

Означення 2.6. Геометричним графом називається об'єднання точок-вершин та ребер-відрізків, які з'єднують деякі з точок на площині.

Означення 2.7. *Графом взаємної видимості вільних точок* $VG_m(S, k)$ будемо називати геометричний граф, утворений на вільних точках-вершинах, які ще не входять до складу простого ланцюга $C_m(S, k)$ і кінцевих точок ланцюга p_0 та $p_{\sigma(m)}$, при цьому жоден з цих відрізків-ребер геометричного графу $VG_m(S, k)$ не перетинається з ланцюгом $C_m(S, k)$ ніде, окрім, можливо, його кінцевих точок. Також, альтернативно будемо називати точки $p_{\sigma(m)}$ *вхідною* точкою графу $VG_m(S, k)$, а точку p_0 – *вихідною* точкою графу $VG_m(S, k)$.

На початку побудови простого многокутника граф $VG_0(S, k)$ з'єднує усі точки вхідної множини. Відрізки, що складають граф $VG_m(S, k)$ є потенційними ребрами простого многокутника. Однак, слід зауважити, що не всі відрізки, які додаються до простого ланцюга, приводять в результаті до успішного закінчення процедури побудови простого многокутника. Безпосередньо з означення витікає, що ті відрізки, які опиралися на $p_{\sigma(m-1)}$, після додавання точки $p_{\sigma(m)}$, повинні бути видалені з графу $VG_m(S, k)$.

В Підрозділі 2.4 наведені основні висновки до Розділу 2.

Розглянуті допоміжні об'єкти діаграма еквівалентності зіркових розбиттів та граф взаємної видимості точок базуються на вхідних множинах точок і дозволяють робити аналіз конфігурацій:.

Узагальнюючи, можна спрощено стверджувати, що діаграми еквівалентності гарантують наступне: для заданої множини точок і певного типу многокутників, які інваріантні до зіркових розбиттів, ми забезпечуємо вичерпний у строгому розумінні перелік усіх можливих варіантів простих многокутників.

Зауважимо, що попередній аналіз точок часто дозволяє обирати той чи інший алгоритм в задачах, пов'язаних з простими многокутниками. Наприклад, якщо більшість точок вхідної множини опиняються на опуклій оболонці, і внутрішніх точок небагато, при цьому, якщо внутрішня область є забороненою для перетину ребрами, то таку конфігурацію інколи можна обробляти навіть алгоритмами вичерпного перебору з відсіканням зайвих гілок обходу дерева варіантів для отримання точного рішення, наприклад, оптимізаційних задач над множиною простих многокутників для даної множини точок.

У Розділі 3 розглядаються методи побудови і підрахунку усіх можливих та породження випадкових простих многокутників загального типу. Множини усіх інших типів, такі як зіркові, спіралеві та інші многокутники є підмножинами повної множини усіх можливих простих многокутників. Підрозділом 3.1 обґрунтовується доцільність розгляду і оптимізації перебірних алгоритмів.

Підрозділом 3.2 вводиться базовий рекурсивний алгоритм послідовного нарощування простого ланцюга з перевіркою його на самоперетини після отримання перестановки.

Підрозділ 3.3 присвячений оптимізації процедури послідовного нарощування ланцюга шляхом відсікання зворотних послідовностей, залишаючи з кожної пари геометрично еквівалентних дзеркальних послідовностей обходу точок за годинниковою стрілкою та проти, тільки одну – проти годинникової стрілки. Розглянута оптимізація зменшує дерево варіантів удвічі.

Далі, у Підрозділі 3.4 надано алгоритм, який виконує відсікання дерева обходу варіантів послідовного нарощування ланцюга (бектрекінг рекурсивної процедури) шляхом перевірки на кожному кроці, чи не перетинає ланцюг сам себе.

У Підрозділі 3.5 розглядається алгоритм бектрекінгу на основі аналізу гамільтоновості графу взаємної видимості вільних точок. Можливість закінчити побудову простого ланцюга при його послідовному нарощуванні і отримати простий многокутник однозначно визначається тим, чи існує Гамільтонів шлях в графі взаємної видимості вільних точок між точками зчеплення простого ланцюга із цим графом. Наведемо основні означення та твердження цього Підрозділу.

Означення 3.2. Діагоналями повного геометричного графу *VG(S)* будемо називати такі ребра-відрізки, що з'єднують будь-яку пару точок-вершин опуклої оболонки *CH(S)*, які не є сусідніми одна для іншої.

Означення 3.3. *Проріджeним повним геометричним графом* $VG_0(S)$ будемо називати геометричний граф, який отриманий з повного геометричного графу шляхом видалення усіх його діагоналей.

Означення 3.4. Назвемо максимальну кількість відрізків-ребер в проріджeному повному графі $VG_0(S)$, що можуть бути ребрами простого многокутника, побудованого на усіх точках S, *потенціалом E(S)* множини точок *S*.

Теорема 3.2. Діагоналі *VG(S)* не можуть бути ребрами будь-якого простого многокутника, що включає усі точки множини *S*. (Або в альтернативному формулюванні: діагоналі повного геометричного графу не можуть бути ребрами, які входять в Гамільтонів цикл без самоперетинів).

Означення 3.5. (18.1, Р. Седжвік) *Мостом* (*bridge*) в графі називається ребро, після видалення якого граф розпадається на два не пов'язаних між собою під-графи. Граф, якій не має мостів, називається реберно-зв'язаним (*edge-connected*).

Означення 3.6. (18.2, Р. Седжвік) *Точка сполучення* (articulation point) графу є вершина, в разі видалення якої зв'язний граф розпадається на два графи, що не перетинаються.

Означення 3.7. (18.3, Р. Седжвік) Граф називається *двозв'язним* (biconnected), якщо кожна пара вершин з'єднана двома шляхами, які не перетинаються. Підграфи графу, які являються двозв'язними називаються *двозв'язними компонентами графу* (*biconnected components*).

Лема 3.5. Припустимо, що граф $VG_m(S, k)$ містить інші вільні точки-вершини окрім вхідної та вихідної точок, тоді ребро, що з'єднує вхідну і вихідну точки не може бути ребром Гамільтонового шляху без самоперетинів між вхідною та вихідною точкам та ребром простого многокутника, що будується.

Лема 3.6. Якщо вхідна точка-вершина графу взаємної видимості вільних точок (голова простого ланцюга) є точкою сполучення $VG_m(S, k)$ (або $\widetilde{VG}_m(S,k)$), то не існує Гамільтонового шляху між вхідною та вихідною точками та, відповідно, побудова простого многокутника не може бути завершена.

Лема 3.7. Якщо вихідна точка-вершина графу взаємної видимості вільних точок (хвіст простого ланцюга) є точкою сполучення $VG_m(S, k)$ (або $\widetilde{VG}_m(S,k)$), то не існує Гамільтонового шляху між вхідною та вихідною точками та, відповідно, побудова простого многокутника не може бути завершена.

Означення 3.9. Припустимо, що точки входу і виходу графу взаємної видимості вільних точок $VG_m(S, k)$ не є точками сполучення $VG_m(S, k)$, тоді, якщо будь-який шлях без циклів (повторних входів на ті самі точки) від вхідної до вихідної точки проходить через деяку точку сполучення і при цьому вона є також точкою сполучення для деякого компонента, який не містить жодне з ребер таких шляхів, то такий компонент називається *термінальним*.

Лема 3.8. Якщо в графі взаємної видимості вільних точок існує термінальний компонент, то не існує Гамільтонового шляху між вхідною та вихідною точками та, відповідно, побудова простого многокутника не може бути завершена.

Твердження 3.4. (Властивість 18.6, Р. Седжвік) Мости графу знаходяться за лінійний час від суми кількості ребер та вершин.

Твердження 3.5. (Властивість 18.8, Р. Седжвік) Точки сполучення та двозв'язні компоненти графу знаходяться за лінійний час від суми кількості ребер та вершин.

Означення 3.10. Точки-вершини входу і виходу, сполучення двозв'язних компонент графу взаємної видимості вільних точок $VG_m(S, k)$ будемо узагальнено називати точками *зчеплення* графу $VG_m(S, k)$.

Лема 3.9. Якщо деяка двозв'язна BCC_n компонента графа видимості вільних точок містить дві точки зчеплення p_i та p_j, і в компоненті існує більше одного ребра, то ребро $\overline{p_i p_j}$, яке сполучає точки зчеплення, не може бути ребром Гамільтонового шляху без самоперетинів між вхідною та вихідною точкам та ребром простого многокутника, що будується.

Лема 3.10. Якщо граф взаємної видимості вільних точок складається з $K>1$ двозв'язних компонент, кожна з яких має рівно дві різних точки зчеплення, що зв'язують її із іншими компонентами графу, або кінцями простого ланцюга (для вхідної та вихідної точки), і в цьому графі існує, принаймні, один Гамільтонів шлях від вхідної до вихідної вершини-точки, який завершує побудову простого многокутника (тобто, для кожної i-ої двозв'язної компоненти BCC_i між точками зчеплення даної компоненти існує H_i Гамільтонових шляхів, $H_i > 0$, принаймні, $H_i = 1$) , то для цього графу існує $\prod_{i=1}^{K} H_i$ Гамільтонових шляхів, що завершують побудову простого многокутника.

Означення 3.11. *Невиродженою* двозв'язною компонентою графа взаємної видимості вільних точок будемо називати таку компоненту, яка містить не менше чотирьох точок-вершин. Відповідно, *виродженою* компонентою будемо називати таку двозв'язну компоненту графа взаємної видимості вільних точок, яка містить три або дві точки-вершини.

Лема 3.11. Якщо деяка підмножина ребер невиродженої двозв'язної компоненти графа взаємної видимості вільних точок співпадає з ребрами опуклої оболонки множини точок-вершин, а точки зчеплення – це вершини опуклої оболонки, то Гамільтонів шлях в такій компоненті завжди існує.

Лема 3.12. Жодне ребро графу взаємної видимості вільних точок, що перетинає міст цього графу, не може бути ребром Гамільтонового шляху без самоперетинів між вхідною та вихідною точкам та ребром простого многокутника, що будується.

Теорема 3.3 Загальна складність перевірок необхідних і достатніх умов можливості завершення побудови простого многокутника, що викладені в Лемах 3.5 – 3.12, не перевищує $O(N^2)$.

Розділ 4 присвячений методам породження окремих типів многокутників з використанням діаграм еквівалентності зіркових розбиттів різних типів.

Зокрема, Підрозділ 4.1 описує процедуру побудови повної множини зіркових многокутників, яка має складність $O(N^4)$ у найгіршому випадку.

У Підрозділі 4.2 описано метод породження простих многокутників шляхом нарощування опуклих оболонок на видаленому ребрі простого ланцюга, що будується, і вільних точках, які ще не входять до складу простого ланцюга.

Теорема 4.1. Алгоритм побудови випадкового простого многокутника методом рекурсивного нарощування опуклих оболонок на випадково обраному ребрі простого ланцюга, що будується, має складність $O(N \log N)$ і потребує $O(N)$ пам'яті.

Теорема 4.2 Для будь-якої заданої скінченої множини точок Евклідового простору розмірності $d>2$ існує простий поліедр, який містить усі точки цієї множини у якості своїх вершин.

Підрозділом 4.3 вводиться новий тип простих многокутників – квітко-подібні та досліджуються процедура їх властивості і процедури побудови та підрахунку.

Розділ 5 описує практичну реалізацію генератора геометричних об'єктів у вигляді мульти-алгоритмічного середовища та засобів візуалізації множин простих многокутників, діаграм еквівалентності зіркових розбиттів та графів взаємної видимості вільних точок. На прикладах показано можливість застосування розроблених алгоритмів для оцінки та верифікації алгоритмів обробки простих многокутників.

В додатках подані вихідні тексти програмної реалізації окремих задач, які розв'язані в роботі, а також результати роботи алгоритмів та їх порівняння на тестових наборах даних.

ВИСНОВКИ

Головним результатом дисертаційної роботи є побудова мультиалгоритмічної платформи-генератора геометричних об'єктів на площині, що розв'язує задачу породження простих многокутників певних типів із визначеними властивостями на заданих скінчених множинах точок.

Основні результати дисертації.

1. Вперше застосовано поняття діаграми еквівалентності зіркових розбиттів, та областей еквівалентності для аналізу вхідних множин точок на площині та процедур породження декількох типів простих многокутників.
2. Досліджено та суттєво розширено перелік необхідних і достатніх умов існування Гамільтонового шляху в таких геометричних графах і відповідно, перевірки можливості завершити ланцюг побудовою простого многокутника. Умови існування Гамільтонового шляху базуються на аналізі графу взаємної видимості вільних точок. Загальна складність усіх перевірок умов обмежена $O(N^2)$ при умові використання $O(N^2)$ пам'яті. Отримано прискорення алгоритму шляхом скорочення об'єму обчислювань з плаваючою точкою на перевірки перетинів відрізків ціною $O(N^4)$ пам'яті, в якій зберігається попередньо оброблена інформація про перетині усіх пар відрізків.
3. Розроблено метод послідовного нарощування простого ланцюга з відсіканням дерева варіантів для реалістичних розмірів вхідної множини, який, фактично, наблизив складність обчислювань до $O(P(N)a^N)$, де $P(N)$ – поліноміальна функція від N; a – деяка константа.
4. Розроблено метод підрахунку усіх можливих простих многокутників на заданій скінченій множині точок, який суттєво прискорює процедури шляхом рекурсивного розбиття на під-задачі пошуку кількості Гамільтонових шляхів на двозв'язних компонентах та перемноження окремих результатів.
5. Розроблено евристичний метод породження простих многокутників нарощуванням простих оболонок на видаленому ребрі простого ланцюга, що будується. Доведено, що метод є одним із самих ефективних на сьогодні, маючи часову складність $O(N \log N)$, та потребуючи $O(N)$ пам'яті. Показано, що деякі з відомих типів простих многокутників, зокрема спіральні, можуть бути отримані, як окремий випадок запропонованого методу.
6. Узагальнено метод нарощування простих оболонок для евклідових просторів довільної розмірності.

7. Доведено існування простого поліедру для скінченої множини точок у, так званому, загальному розташуванні, коли жодна з $d+1$ точок не знаходяться в одній гіперплощині.
8. Вперше досліджено властивості нового типу простих многокутників – квітко-подібних (квіткових).
9. Розроблено відповідну процедуру породження квітко-подібних многокутників з використанням діаграми еквівалентності зіркових розбиттів.
10. Узагальнено на простори більших розмірностей жадібний метод пошуку простого многокутника мінімальної площини, який включає усі точки вхідної множини у якості вершин: жадібний метод пошуку простого поліедра мінімального об'єму.
11. Виконано практичну реалізацію генератора геометричних об'єктів у вигляді мульти-алгоритмічного середовища та засобів візуалізації множин простих многокутників, діаграм еквівалентності зіркових розбиттів та графів взаємної видимості вільних точок. Формати вхідних та вихідних даних розроблені таким чином, щоб уможливити просте використання множин точок і відповідних породжених многокутників для перевірки алгоритмів обчислювальної геометрії.
12. Застосовано практичну реалізацію генератора геометричних об'єктів до верифікації низки алгоритмів єдиного алгоритмічного середовища розв'язування комплексу задач обчислювальної геометрії, що розробляється на кафедрі математичної інформатики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Фісуненко А. Л., Модель мультиагентної системи обробки візуальної інформації для вирішення задач реконструкції / А. Л. Фісуненко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, №3. – 2012. – С. 261-264.
2. Фісуненко А. Л., Особливості розв'язання задач регіонального пошуку для d-вимірного випадку / В. М. Терещенко, А. Л. Фісуненко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, №4. – 2012. – С. 207-210.
3. Фісуненко А. Л., Генерація простих многокутників вирізанням та нарощуванням опуклих оболонок / А. Л. Фісуненко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, спецвипуск – 2013. – С. 190-193.
4. Фісуненко А. Л., Діаграма еквівалентності зіркових розбиттів та генерація простих многокутників / А. Л. Фісуненко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, №2 – 2014. – С. 210-214.
5. Fisunenko A. Domain Triangulation between Convex Polytopes. / V. Tereshchenko, S. Pilipenko, A. Fisunenko (SCOPUS Author ID: 55433978800) // Journal "Procedia Computer Science", Volume 18, Elsevier, 2013. – P. 2500-2503.

6. Fisunenko A. Algorithm for Finding the Domain Intersection of a Set of Polytopes / V. Tereshchenko, S. Pilipenko, A. Fisunenko (SCOPUS Author ID: 55433978800) // Journal “Procedia Computer Science”, Elsevier, Volume 18, 2013. – P. 459-464.
7. Fisunenko A. Solving the Range Searching Problem for Region Bounded by a Convex Surface / V. Tereshchenko, O. Socolov, A. Fisunenko// Proceedings of the 16th International Conference on Information Visualisation IV2012, Montpellier, France, 11-13 July 2012. – P. 491- 494.
8. Фісуненко А. Л., Модель мультиагентної адаптивної обробки візуальної інформації. / Терещенко В. М., Фісуненко А. Л. // Abstracts of the XIX International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”, Україна, 23-27 квітня, 2012. – С. 214-215
9. Фісуненко А. Л. Триангуляція прямолінійного планарного графа гострими кутами / Терещенко В. М., Фісуненко А. Л. // Матеріали 1-ої міжнародної науково-технічної конференції «Комп’ютерна графіка та розпізнавання зображень», 17-18 травня, Вінниця. Україна, 2012. – С. 184-188.
10. Fisunenko A. The Unified Algorithmic Platform for Solving Complex Problems of Computational Geometry / V. Tereshchenko, I. Budjak, A. Fisunenko // In Proc. of the 12th IC “Parallel Computing Technologies” (PaCT 2013), Springer. 2013. – P. 424-429.
11. Fisunenko A. An approach to solving complex problems of computational geometry / V. Tereshchenko, I. Budjak, A. Fisunenko // In Proceedings of International Conference "Parallel and Distributed Computing Systems" PDCS 2013 (Ukraine, Kharkiv, March 13-14, 2013. - P.320.
12. Fisunenko A., One Approach for Computing Simple Polygons on a Given Point Set in the Plain / A. Fisunenko // In Proc. of 7th International Academic Conference “Computer Science & Engineering 2015” (CSE-2015) as a part of International Youth Science Forum “Litteris Et Artibus”, Lviv, Ukraine, November 26–28, 2015. – P. 44-45.

АНОТАЦІЯ

Фісуненко А. Л. Побудова генератора геометричних об’єктів із заданими властивостями на площині. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 – теоретичні основи інформатики і кібернетики. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2016.

В роботі розглядається ряд задач на побудову і підрахунок множини простих многокутників різних типів, вершинами яких є всі точки заданої скінченої множини точок і які задовольняють певним критеріям.

Для аналізу вхідної множини точок і побудови простих многокутників введені діаграма еквівалентності зіркових розбиттів і граф взаємної видимості вільних точок. Досліджено їх властивості.

Для вирішення задачі побудови, підрахунку множини усіх простих многокутників і породження випадкових многокутників на цій множині використано метод

послідовного нарощування простого ланцюга з відсіканням. Непродуктивні гілки дерева варіантів відсікаються за допомогою аналізу структури графа взаємної видимості вільних точок, що представляє собою геометричний граф. Розширено перелік необхідних і достатніх умов існування Гамільтона шляху в таких графах, як на основі аналізу їх зв'язності, так і з використанням специфічних умов побудови простого многокутника. Для аналізу гамільтоновості графа, у тому числі, використані двозв'язні компоненти і точки сполучення. Сформульовано і доведено ряд тверджень, що дозволяють проріднти граф взаємної видимості вільних точок, зменшуючи при цьому дерево варіантів. Запропонований підхід дозволяє збільшити максимальний розмір вхідної множини точок для точного повного рішення в середньому з 15 до 25-30 в залежності від конфігурації точок. Крім того, використання графа взаємної видимості вільних точок дозволяє отримувати точне рішення для важливого окремого випадку - побудови простих многокутників при заданих областях, які заборонено перетинати ребрами многокутника.

Для множин з довільною кількістю точок запропонована ефективна процедура для генерації простих многокутників - метод нарощування опуклих оболонок на місці видаленого ребра. На відміну від описаних раніше методів дана евристика гарантовано завершує побудову многокутника для будь-якої множини точок. Крім цього, процедура легко узагальнюється для просторів довільної розмірності і, по суті, є конструктивним доведенням існування поліедра для скінченої множини точок в евклідовому просторі будь-якої розмірності, з точністю до заміни поняття ребра на поняття гіпер-грані. Показано також, що деякі типи простих многокутників, зокрема спіралеподібні, можуть бути отримані за допомогою запропонованої процедури.

Введено і досліджено новий тип простих многокутників - квітко-подібні. Запропонована процедури побудови, підрахунку і випадкового породження таких многокутників.

При практичній реалізації генератора геометричних об'єктів використаний підхід мульти-алгоритмічного середовища: використані загальні засоби вводу-виводу і візуалізації, а також деякі загальні структури даних. Засоби візуалізації дозволяють досліджувати як прості многокутники, отримані в результаті роботи алгоритмів, так і допоміжні об'єкти: графи взаємної видимості вільних точок і діаграми еквівалентності зіркових розбиттів. Множини породжених многокутників можуть бути використані, як вхідні дані для перевірки довільних алгоритмів обробки простих многокутників. При цьому гарантується якісне покриття та варіативність даних.

Ключові слова: обчислювальна геометрія, простий многокутник, полігонізація, породження, генерація, нарощування опуклих оболонок.

АННОТАЦИЯ

Фисуненко А. Л. Построение генератора геометрических объектов с заданными свойствами на плоскости. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 – теоретические основы информатики и кибернетики. –

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2016.

В работе рассматривается ряд задач на построение и подсчёт множества простых многоугольников различных типов, вершинами которых являются все точки заданного конечного множества точек и которые удовлетворяют определённым критериям.

Для анализа входного множества точек и построения простых многоугольников введены диаграмма эквивалентности звёздных разбиений и граф взаимной видимости свободных точек. Исследованы их свойства.

Для решения задачи построения, подсчёта множества всех простых многоугольников и порождения случайных многоугольников на этом множестве использован метод последовательного наращивания простой цепи с отсечением. Непродуктивные ветви дерева вариантов отсекаются с помощью анализа структуры графа взаимной видимости свободных точек, представляющего собой геометрический граф. Расширен перечень необходимых и достаточных условий существования Гамильтонового пути в таких графах, как на основе анализа их связности, так и с использованием специфичных условий построения простого многоугольника. Для анализа гамильтоновости графа, в том числе, использованы двусвязные компоненты и точки сочленения. Сформулирован и доказан ряд утверждений, позволяющих прорежать граф взаимной видимости свободных точек, уменьшая при этом дерево вариантов. Предложенный подход позволяет увеличить максимальный размер входного множества точек для точного полного решения в среднем с 15 до 25-30 в зависимости от конфигурации точек. Кроме того, использование графа взаимной видимости свободных точек позволяет получать точное решение для важного частного случая – построения простых многоугольников при заданных областях, которые запрещено пересекать рёбрами многоугольника.

Для множеств с произвольным количеством точек предложена эффективная процедура для генерации простых многоугольников – метод наращивания выпуклых оболочек на месте удалённого ребра. В отличие от описанных ранее методов данная эвристика гарантированно завершает построение многоугольника для любого множества точек. Кроме этого, процедура легко обобщается на пространства любой размерности и, по сути, является конструктивным доказательством существования полиэдра для конечного множества точек в евклидовом пространстве любой размерности, с точностью до замены понятия ребра на понятие гипер-грани. Показано также, что некоторые типы простых многоугольников, в частности спиралевидные, могут быть получены с помощью предложенной процедуры.

Ведён и исследован новый тип простых многоугольников – цветочно-подобные. Предложена процедура построения, подсчёта и случайного порождения таких многоугольников.

При практической реализации генератора геометрических объектов использован подход мульти-алгоритмической среды: использованы общие средства ввода-вывода и визуализации, а также некоторые общие структуры данных. Средства визуализации позволяют исследовать как простые многоугольники, полученные в результате работы алгоритмов, так и вспомогательные объекты: графы взаимной видимости свободных точек и диаграммы эквивалентности звёздных разбиений. Множества порождённых многоугольников могут использованы, как входные данные для проверки произвольных алгоритмов обработки простых многоугольников. При этом гарантируется качественное покрытие и вариативность данных.

Ключевые слова: вычислительная геометрия, простой многоугольник, полигонизация, порождение, генерация, наращивание выпуклых оболочек.

ANNOTATION

Fisunenko A. L. Constructing a generator of geometric objects with defined properties on the plain. – Manuscript.

The thesis for acquiring degree of Candidate of Mathematical and Physical Sciences in specialty 01.05.01 – Theoretical Foundations of Computer Science and Cybernetics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv MES of Ukraine, 2016.

The thesis considers several interconnected problems that relate to constructing, counting and randomly generating sets of different types of simple polygons, which embrace all given input points as their vertices and satisfy defined criteria.

For analysis of input point sets and constructing simple polygons, we introduce a star partitioning equivalence diagram and points mutual visibility graph and devise their properties.

For solving problems of constructing simple polygons, counting a set of all possible simple polygons and generating random polygons on this set, we use a method of incremental construction of polygonal chain with backtracking. The method assumes cutting unproductive branches of variants’ tree by analyzing a structure of points' mutual visibility graph, which is a geometrical graph in fact. We extend the list of necessary and sufficient conditions for existence of Hamiltonian path in such graphs both by analyzing graph’s connectedness and by using specific geometric conditions for constructing simple polygons. For analysis of hamiltonicity of the graph, we also use its biconnected components and articulation points. We formulate and prove several propositions allowing elimination of redundant edges from the graph, what leads to decreasing number of traverses in variants’ tree. The proposed approach allows increasing the maximal size of an input point set for obtaining an exact solution from 15 to 25-30 in average depending on points’ configuration. Beside of that, by using the points’ mutual visibility graph one can obtain an exact solution for the important special case – constructing simple polygons with defined restricted areas that disallow crossing by edges of resulting polygons.

For input sets with arbitrary number of points, we propose an effective procedure for generating simple polygons by method of building up convex hulls on a removed edge of constructed simple chain. In contrast to earlier described methods, this heuristic completes construction of a simple polygon with guarantee for any given point set. Additionally, the procedure allows generalization for Euclidian space of arbitrary dimension up to the replacement of edges by hyper-faces. We also show that the proposed procedure generates some known types of simple polygonizations, in particular spiral polygons, as its special cases while being more general and universal.

We introduce and devise a new type of simple polygons, which we called ‘flower-like’ or simply ‘flower’ polygons. We suggest a procedure for constructing, counting and randomly generating such polygons. One can obtain a full flower polygon set by applying star partitioning equivalence diagram to an input point set and by connecting all simple polygonal chains lean on all neighboring pairs of vertices of the convex hull of the point set and embracing all interior points of each triangle of the star partitioning. Number of all possible flower polygons is sum of products of numbers of all possible polygonal chains in each triangle for each different equivalence region defined by star partitioning equivalence diagram for this set. Choosing a reference point for each star partitioning for a selected equivalence region is arbitrary, e.g. the centroid of the equivalence region can play such role. From other side, number of all possible polygonal chains for each triangle of star partitioning can be computed by exhaustive search algorithm based on incremental construction and backtracking with use of points’ mutual visibility graph. However, such approach has limitations due to exponential number of possible polygonal chains. For practical generation of flower polygons one can use the developed method of building up convex hulls on a removed edge. Even if coverage of obtained simple polygons is lower comparing with full set of flower polygons, such method allows generating random polygons for very big point sets.

Since the notion of convex hull is universal for arbitrary Euclidian space of dimension *d*, a flower polygon have natural generalization for such space – a flower polyhedron. In case of higher dimensions starting from $d=3$ faces replace edges and hyperplanes replace lines in forming star partitioning equivalence diagram. An important property of flower polygon and its generalization is that for any point set there exists such a region inside the convex hull of the set that has a point connecting any vertex of the convex hull without crossing polygonal chain of the flower polygon built on all points of the given point set.

While implementing a generator of geometric objects we use the approach of multi-algorithmic environment: the system uses common input-output modules, visualization tools, and some unified data structures in appropriate cases. Input point set can be formed either manually using interactive GUI application or as a textual input file created by another application. Visualization tools allow navigating and devising both simple polygons obtained as the result of algorithms’ execution and helper objects: points’ mutual visibility graphs, star partitioning equivalence diagrams. Generated sets fit well for testing and verification of arbitrary algorithms processing simple polygons as an input while supporting even distribution and variability.

Keywords: computational geometry, simple polygon, polygonization, generation, building up convex hulls.