

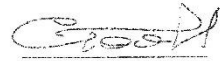
**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ
ПРУЖНИХ ПЛИТ**

Виконав студент 4-го курсу
Стоян Арсен Олександрович



Науковий керівник:
доктор фіз.-мат. наук, професор
Стоян Володимир Анотонівч



Роботу заслухано на засіданні
кафедри моделювання складних
систем та рекомендовано до захисту,
протокол №18 від «10» червня 2022р.

Завідувач кафедри
Д. І. Черній



Київ – 2022

Зміст

Вступ.....	5
Розділ 1. Математичні моделі динаміки товстих пружних плит	6
1.1. Основні закони та залежності класичної теорії пружності	6
1.2. Товсті пружні плити та математичні моделі їх динаміки.	9
Розділ 2. Математичні основи розв’язання початково-крайових задач динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем.....	17
2.1. Постановка початково-крайової задачі.....	17
2.2. Загальний розв’язок задачі.....	18
2.3. Розв’язок початково-крайової задачі з дискретними спостереженнями та дискретними моделюючими функціями	20
2.3.1. Розв’язки для задачі в загальному вигляді	20
2.3.2. Розв’язки початково-крайової задачі у необмежених просторово-часових областях	22
2.3.3. Особливості моделювання дискретно спостережуваних систем... ..	23
2.4. Неперервно-аналітичне моделювання дискретно спостережуваних систем з неперервними моделюючими факторами	25
2.4.1. Моделювання дискретно спостережуваних систем з неперервно визначеними моделюючими факторами в необмежених просторово-часових областях	27
2.5. Моделювання початково-крайової задачі з неперервно заданими спостереженнями.....	29
2.5.1 Моделювання початково-крайових задач із неперервними спостереженнями в необмежених просторово-часових областях	32
Розділ 3. Задачі математичного моделювання динаміки товстих пружних плит	34
3.1. Постановка задачі моделювання стану пружної плити	34

3.2. Розв’язок задачі моделювання динаміки плити з неперервними спостереженнями.....	39
3.3. Розв’язок задачі моделювання динаміки плити з дискретними спостереженнями при дискретних моделюючих факторах	41
3.4. Розв’язок задачі моделювання динаміки плити з дискретними спостереженнями при неперервних моделюючих факторах.....	43
Розділ 4. Комп’ютерно-аналітичне моделювання розв’язків задач динаміки пружних плит нульової товщини	45
4.1. Постановки задачі зі спрощеннями.....	45
4.2. Загальний розв’язок задачі моделювання динаміки мембрани з неперервними спостереження.....	46
4.3. Загальний розв’язок задачі моделювання динаміки мембрани з дискретними спостереження за неперервними моделюючими факторами	48
4.4. Загальний розв’язок задачі моделювання динаміки мембрани з дискретними спостереження за векторами значень моделюючих факторів	50
4.5. Часткові випадки	51
4.6. Комп’ютерна реалізація часткового розв’язку при дискретних спостереженнях	52
4.6.1. Постановка задачі з дискретними спостереженнями для комп’ютерної реалізації.....	53
4.6.2. Опис комп’ютерної реалізації.....	54
4.6.3. Інтерфейс.....	54
4.6.4. Результати роботи програми.....	59
4.6.5. Перевірка на експериментальних даних.....	61
4.7. Комп’ютерна реалізація часткового розв’язку при неперервних спостереженнях	66

4.7.1. Опис програми та вхідних даних.....	66
Висновки	68
Список джерел посилання.....	69

Вступ

Пружні плити входять до складу великої кількості технічних пристроїв, винаходів та інженерних конструкцій. Для їх якісної розробки, використання та модернізації, необхідно уміти моделювати взаємодію товстих пружних плит із зовнішніми факторами. В цій роботі описано загальновідомі знання про фізику такої взаємодії, а також розглянуто задачу моделювання стану плити при відомих неповних [недостатніх] спостереженнях за системою. Розглянуто частковий випадок постановки задачі з надзвичайно тонкою, відносно лінійних розмірів плитою, на стільки, що її товщиною можна знехтувати, та розв'язано програмно задачу моделювання даного часткового випадку з деякими припущеннями [спрощеннями].

Розділ 1. Математичні моделі динаміки товстих пружних плит

1.1. Основні закони та залежності класичної теорії пружності

В природі, повсякденному житті та оточуючих нас технічних об'єктах (механізмах, приладах та конструкціях) значне місце займають пружні елементи (тіла). Зазвичай ці тіла знаходяться під дією певних просторово-силових факторів і мають властивість відновлювати свою форму по закінченню дій зовнішньо-силових факторів. Під пружністю при цьому розуміють властивість тіла відновлювати ту форму, яку воно має у стані спокою [5]. Наука, яка вивчає властивості та поведінку пружних тіл, називається теорією пружності. Поточний просторово-часовий стан точок пружного тіла визначають зміщеннями його точок відносно недеформованого стану (стану спокою) та зміною розмірів і положень утворених ними елементів.

Для побудови математичних теорій, які б описували стан внутрішніх точок пружного тіла та дозволяли вивчати їх властивості теорія пружності оперує з такими поняттями, як «зміщення точки» та її положенням відносно інших (сусідніх) точок, що характеризується «деформацією» тіла.

При вивченні стану та властивостей тривимірного пружного тіла введемо до розгляду тривимірну декартову систему координат з осями x , y , z . Зміщення точок тіла в напрямку цих осей будемо позначати через u , v , w відповідно.

Далі будемо виходити з того, що в досліджуваному тілі [2, с. 77]:

- відбуватимуться зміщення точки на u , v , w , тобто з координатами ставатиметься наступне перетворення $(x, y, z) \rightarrow (x + u, y + v, z + w)$.

- виникатимуть розтягувальні $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ деформації та деформації зсуву між координатними напрямками $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. При цьому,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Будемо вважати також, що вздовж векторів нормалей Ox, Oy, Oz виникають розтягувальні та зсувні напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ відповідно.

Зв'язок зміщень та розтягувальних деформацій можна описати наступними співвідношеннями [2, с. 77]:

$$\varepsilon_x = \partial_x u, \quad \varepsilon_y = \partial_y v, \quad \varepsilon_z = \partial_z w, \quad (1.1)$$

а якщо ввести розтягувальні деформації в площинах, то їх залежність зі зміщеннями визначається співвідношеннями [2, с. 77]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $G = \frac{0.5E}{(1+\nu)}$, ν - коефіцієнт Пуассона, E - модуль Юнга.

$$\text{Введемо заміну } \lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Сталі λ та μ називаються константами Ляме. За допомогою них характеризується пружне середовище.

Для пружних зміщень точок тіла, його розтягувальних і зсувних деформацій та напружень в ньому справедливі наступні співвідношення [2, с. 77-78]:

а) Напруження та деформації:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy},$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \mu\varepsilon_{xz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \mu\varepsilon_{yz};\end{aligned}\quad (1.3)$$

б) Рівноваги довільної внутрішньої точки тіла:

$$\begin{aligned}\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} + \rho F_x &= 0, \\ \partial_x \tau_{yx} + \partial_y \sigma_y + \partial_z \tau_{yz} + \rho F_y &= 0, \\ \partial_x \tau_{zx} + \partial_y \tau_{zy} + \partial_z \sigma_z + \rho F_z &= 0,\end{aligned}\quad (1.4)$$

де ρ – питома густина матеріалу, F_x, F_y, F_z – проекції F на координатні осі.

На основі вище наведених співвідношень (1.1), (1.3), (1.4), побудовані рівняння Ляме [2, с. 77-79] :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\partial_x \theta + \mu\Delta u + \rho(F_x - \partial_t^2 u) &= 0; \\ (\lambda + \mu)\partial_y \theta + \mu\Delta v + \rho(F_y - \partial_t^2 v) &= 0; \\ (\lambda + \mu)\partial_z \theta + \mu\Delta w + \rho(F_z - \partial_t^2 w) &= 0;\end{aligned}\quad (1.5)$$

де $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, $\rho\partial_t^2 u, \rho\partial_t^2 v, \rho\partial_t^2 w$ - інерційні сили, присутні при поступальному русі середовища.

Однак, для знаходження зміщення довільної точки тіла, пружно-деформаційна взаємодія якого, описана рівняннями Ляме (1.5), необхідно описати силове завантаження граничної поверхні тіла. Позначимо X_v, Y_v, Z_v , як проекції поверхнево заданого силового фактору F_v на елементах, виділеного v - нормаллю до відповідної поверхні. Тоді поверхнево-граничні умови, описуються співвідношеннями [2, с. 79]:

$$\begin{aligned}X_v &= \sigma_x \cos(xv) + \tau_{xy} \cos(yv) + \tau_{xz} \cos(zv); \\ Y_v &= \tau_{yx} \cos(xv) + \sigma_y \cos(yv) + \tau_{yz} \cos(zv); \\ Z_v &= \tau_{zx} \cos(xv) + \tau_{zy} \cos(yv) + \sigma_z \cos(zv).\end{aligned}\quad (1.6)$$

Ці рівняння, враховуючи (1.1), (1.3) і те, що диференціали зміщень вздовж однієї осі до диференціалів зміщень по іншій осі, визначаються наступним чином (аналогічно для $v(x, y, z)$ і $w(x, y, z)$):

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = \partial_x \cdot u \cos(xv) + \partial_y \cdot u \cos(yv) + \partial_z \cdot u \cos(zv), \quad (1.7)$$

подаємо у наступному вигляді [2, с. 79]:

$$\begin{aligned} X_v &= \lambda\theta \cos(xv) + \mu[\partial_v u + \partial_x u \cos(xv) + \partial_x v \cos(yv) + \partial_x w \cos(zv)]; \\ Y_v &= \lambda\theta \cos(yv) + \mu[\partial_v v + \partial_y v \cos(yv) + \partial_y w \cos(zv) + \partial_y u \cos(xv)]; \\ Z_v &= \lambda\theta \cos(zv) + \mu[\partial_v w + \partial_z w \cos(zv) + \partial_z u \cos(xv) + \partial_z v \cos(yv)]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Рівнянь (1.5) та (1.8) достатньо, щоб розв'язати початково-крайову задачу моделювання пружно-деформаційних зміщень (та інших характеристик) тіла при заданих зовнішньо-силових умовах [2, с. 78-79].

1.2. Товсті пружні плити та математичні моделі їх динаміки.

В теорії пружності розглядається взаємодія пружно-динамічних факторів на кожен точку деякого тіла (об'єкта). Визначимо деякі з них.

Пружний шар – об'єкт, утворений «вирізанням» двома паралельними площинами об'єму із тривимірного пружного простору [2, с. 77]. Якщо обмежити лінійні розміри такого шару, утвориться товста пружна плита. Пружну плиту, товщина якої значно менша за її лінійні розміри, називають пластиною. Якщо ж товщина пластини близька до нуля і нею можна знехтувати, то буде мембрана.

Зважаючи на складність початково-крайових задач, які виникають при дослідженні динаміки пружних пластин (та більш того – пружних плит), зазвичай останні розв'язуються в серединній площині пластини (плити), а їх розв'язок за певними механічними моделями поширюється на всю товщину.

Однією із відносно простих механічних моделей такого поширення є модель, запропонована Кірхгофом-Лявом [3].

Ґрунтується вона на наступних припущеннях [3]:

- Прямі лінії, перпендикулярні до серединної поверхні залишаються такими ж і після деформації;
- Прямі ці, не видовжуються, а товщина пластини не змінюється при деформації.

Покращенням даної моделі є теорія пластин Міндліна-Рейснера, яка враховує зсувні напруження та деформації по товщині пластини [4]. Тут вже не припускається, що нормаль до серединної поверхні залишається перпендикулярною до неї при деформації. Дану модель, на відміну до попередньої, можна застосовувати і до товстіших плит. Подальші удосконалення цієї моделі допускають і викривлення (деформації) лінії, перпендикулярної до серединної поверхні пластини (плити).

Загальний висновок із наведеного аналізу підходів та методик моделювання динаміки плити по всьому її об'єму це складна задача, оскільки нема універсального, точного і надійного алгоритму поширенні процесів, які відбуваються на серединному шарі пластини (плити) на всю товщину її, включаючи граничні паралельні шари [верхній та нижній].

Тому, заслуговують на увагу математичні моделі динаміки пружних пластин (плит) вільні від механічних гіпотез і припущень. Отримати їх можна шляхом інтегрування по поперечній (виродженій) координаті наведених вище класичних рівнянь Ляме, які математично точно описують пружно-динамічні процеси в тривимірному пружному середовищі, частиною якого є і досліджувані нижче плити та пластини.

Наведемо основні положення та математичні результати [2, с. 82] такого підходу на прикладі товстого пружного шару віднесеного до циліндричної системи координат (для спрощення викладок).

Розглянемо тривимірний пружний простір, який характеризується константами Ляме λ та μ . Використовуватимемо циліндричну систему координат r, θ, z . Виділимо площинами $z = \pm h$ пружний шар. На граничні поверхні будуть діяти осесиметричні сили (симетричні в площині $z = \pm h$ відносно $r = 0$). Позначимо сили, направлені вздовж нормалі до граничних поверхонь

$$\begin{aligned} q_1^+(r, t) \text{ при } z = h; \\ q_1^-(r, t) \text{ при } z = -h. \end{aligned} \quad (1.9)$$

та сили, напрямом яких, утворює дотичну до поверхонь:

$$\begin{aligned} q_2^+(r, t) \text{ при } z = h; \\ q_2^-(r, t) \text{ при } z = -h. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Припустимо, що останні утворені лише з радіальних складові, тобто скручування відсутнє.

Вектор зміщень шару складається з радіальних $u_1(r, z, t)$ та нормальних $u_2(r, z, t)$ до поверхні $z = \pm h$ складових. При відсутності масових сил, складові вектору зміщень задовольнятиме диференціальним рівнянням Ляме [2, с. 82]:

$$\begin{aligned} u_2'' + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} D_{22}^2 u_2 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} D u_1 = 0, \\ u_1'' + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} D_{11}^2 u_2 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \partial u_2' = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де ∂_r – похідна по радіальній r , а всі інші – по z .

$$D = \partial_r + \frac{1}{r}; \quad D_{mn}^2 = \Delta_n - \frac{1}{c_m^2} \partial_t^2 \quad (m, n = \overline{1, 2}) \quad (1.12)$$

де c_1, c_2 – швидкості поширення та зсуву хвиль в середовищі. ∂_t – похідна по часу. При цьому, диференціальний оператор Δ_1 задовольняє

$$\Delta_2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r, \quad \Delta_1 \partial_r = \partial_r \Delta_2. \quad (1.13)$$

де σ_z, σ_{rz} – нормальні та дотичні напруження до поверхонь $z = const$. Тоді граничні умови подаємо у вигляді [2, с. 82]:

$$\begin{aligned}\sigma_z|_{z=\pm h} &= q_1^\pm(r, t); \\ \sigma_{rz}|_{z=\pm h} &= q_2^\pm(r, t).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Тоді задача знаходження поля пружних зміщень зведеться до розв'язання системи диференціальних рівнянь (1.11), наведених вище, з описаними граничними умовами (1.14) [2, с. 82-83].

Для розв'язання задачі (1.11) з крайовими умовами (1.14), введемо деяку функцію $u(r, z, t)$, замість функції радіальних зміщень $u_1(r, z, t)$, яку визначимо диференціальним співвідношенням [2, с. 83]:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial r}.\quad (1.15)$$

При побудові загального розв'язку системи граничні умови на поверхнях $z = \pm h$, розглядатимемо як суму задач повздовжнього розтягу та поперечного згину [2, с. 84]. Вони виникають при дії сил:

1. симетричних відносно поверхні,
2. асиметричних відносно поверхні.

Для задачі [2, с. 84]:

1. повздовжнього розтягу:

$$\begin{aligned}\sigma_z|_{z=h} + \sigma_z|_{z=-h} &= q_1^+ + q_1^-; \\ \sigma_{rz}|_{z=h} - \sigma_{rz}|_{z=-h} &= q_2^+ - q_2^-;\end{aligned}\quad (1.16)$$

2. поперечного згину:

$$\begin{aligned}\sigma_z|_{z=h} - \sigma_z|_{z=-h} &= q_1^+ - q_1^-; \\ \sigma_{rz}|_{z=h} + \sigma_{rz}|_{z=-h} &= q_2^+ + q_2^-.\end{aligned}\quad (1.17)$$

При цьому, $u_n(r, z, t) = \sum_{l=1}^2 u_n^{(l)}(r, z, t)$, для $(n = \overline{1, 2})$

Тут $u_n^{(l)}(r, z, t)$ – зміщення точок плити при граничних умовах (1.14), якщо $l = 1$, та відповідає (1.15) при $l = 2$.

Розглядаючи диференціальні оператори Δ_n ($n = \overline{1, 2}$) та ∂_t^2 в наведеній вище системі диференціальних рівнянь, як числа, з якими можна оперувати, як алгебраїчними величинами, а самі рівняння як звичайні диференціальні рівняння з незалежною змінною z загальний розв'язок системи (1.11) запишемо у вигляді [2, с. 82-83]:

$$u_1(r, z, t) = \partial_r \left[\frac{\sin(zD_{12})}{D_{12}} \Phi_1 - \cos(zD_{12}) \Phi_2 + D_{22}^2 \frac{\sin(zD_{22})}{D_{22}} \Phi_3 - \cos(zD_{22}) \Phi_4 \right]; \quad (1.18)$$

$$u_2(r, z, t) = \cos(zD_{12}) \Phi_1 + D_{22}^2 \frac{\sin(zD_{12})}{D_{12}} \Phi_2 + \Delta_2 \cos(zD_{22}) \Phi_3 + \Delta_2 \frac{\sin(zD_{22})}{D_{22}} \Phi_4. \quad (1.19)$$

Тут $\frac{\sin(zD_{mn})}{D_{mn}}$ та $\cos(zD_{mn})$ диференціальні оператори, зміст яких отримується після розвинення тригонометричних функцій у степеневі ряди та повернення символу D_{mn} значення оператора диференціювання функцій, які написані після нього.

Виходячи з (1.18)-(1.19), отримуємо [2, с. 84-85]:

$$\begin{cases} u_1^{(1)}(r, z, t) = -\partial_r [\cos(zD_{12}) \Phi_2 + \cos(zD_{22}) \Phi_4]; \\ u_2^{(1)}(r, z, t) = D_{12}^2 \frac{\sin(zD_{12})}{D_{12}} \Phi_2 + \Delta_2 \frac{\sin(zD_{22})}{D_{22}} \Phi_4; \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} u_1^{(2)}(r, z, t) = \partial_r \left[\frac{\sin(zD_{12})}{D_{12}} \Phi_1 + D_{22}^2 \frac{\sin(zD_{22})}{D_{22}} \Phi_3 \right]; \\ u_2^{(2)}(r, z, t) = \cos(zD_{12}) \Phi_1 + \Delta_2 \cos(zD_{22}) \Phi_3. \end{cases} \quad (1.21)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \mu [(\Delta_2 + D_{22}^2) \cos(zD_{12}) \Phi_2 + 2\Delta_2 \cos(zD_{22}) \Phi_4]; \\ \sigma_{rz}^{(1)} &= \mu \partial_r [2D_{12}^2 \frac{\sin(zD_{12})}{D_{12}} \Phi_2 + (\Delta_2 + D_{22}^2) \frac{\sin(zD_{22})}{D_{22}} \Phi_4], \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(2)} &= -\mu[(\Delta_2 + D_{22}^2) \frac{\sin(zD_{12})}{D_{12}} \Phi_1 - 2\Delta_2 D_{22}^2 \frac{\sin(zD_{22})}{D_{22}} \Phi_3]; \\ \sigma_{rz}^{(2)} &= \mu \partial_r [2 \cos(zD_{12}) \Phi_1 + (\Delta_2 + D_{22}^2) \cos(zD_{22}) \Phi_3].\end{aligned}\quad (1.23)$$

Звідки, з (1.22)-(1.23) з врахуванням граничних умов (1.16)-(1.17), знаходимо вирази для $\Phi_1 - \Phi_4$, а далі і розв'язок задачі пошуку поля динамічних зміщень точки під дією динамічних сил (1.9), (1.10) у вигляді [2, с. 82-86]:

$$Q_n^{(l)}(h, \Delta_n, \partial_t^2) u_n^{(lo)} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^2 d_{nk}^{(l)}(z, h, \Delta_n, \partial_t^2) \partial_r^{3-n-k} q_k^{(l)}, \quad (n, l = \overline{1, 2}). \quad (1.24)$$

Тут:

$$\begin{aligned}q_1^{(1)} &= \frac{1}{2}(q_1^+ + q_1^-); \quad q_1^{(2)} = \frac{1}{2}(q_1^- - q_1^+); \\ q_2^{(1)} &= \frac{1}{2}(q_2^+ - q_2^-); \quad q_2^{(2)} = \frac{1}{2}(q_2^+ + q_2^-),\end{aligned}\quad (1.25)$$

$$Q_n^{(l)}(h, \Delta_n, \partial_t^2) = Q^{(l)}(\Delta_n, \partial_t^2), \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}d_{n1}^{(1)}(z, h, \Delta_n, \partial_t^2) &= (-1)^n D_{1n}^{2(n-1)} \partial_z^{2-n} [(\Delta_n + D_{2n}^2) \frac{\sin(zD_{1n})}{D_{1n}} \times \\ &\times \frac{\sin(hD_{2n})}{D_{2n}} - 2(\Delta_n - \frac{2-n}{c_1^2} \partial_t^2) \frac{\sin(zD_{2n})}{D_{2n}} \frac{\sin(hD_{1n})}{D_{1n}}];\end{aligned}\quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}d_{n1}^{(2)}(z, h, \Delta_n, \partial_t^2) &= \partial_z^{n-1} [(\Delta_n + D_{2n}^2) \frac{\sin(zD_{1n})}{D_{1n}} \times \\ &\times \cos(hD_{2n}) - 2(\Delta_n - \frac{2-n}{c_2^2} \partial_t^2) \frac{\sin(zD_{2n})}{D_{2n}} \cos(hD_{1n})];\end{aligned}\quad (1.28)$$

$$\begin{aligned}d_{n2}^{(1)}(z, h, \Delta_n, \partial_t^2) &= (-1)^n \Delta_n^{n-1} \partial_z^{2-n} [(\Delta_n + D_{2n}^2) \cos(hD_{1n}) \times \\ &\times \frac{\sin(zD_{2n})}{D_{2n}} - 2(\Delta_n - \frac{n-1}{c_1^2} \partial_t^2) \cos(hD_{2n}) \frac{\sin(zD_{1n})}{D_{1n}}];\end{aligned}\quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}d_{n2}^{(2)}(z, h, \Delta_n, \partial_t^2) &= \partial_z^{n-1} (\Delta_n - \frac{2-n}{c_2^2} \partial_t^2) [(\Delta_n + D_{2n}^2) \frac{\sin(hD_{1n})}{D_{1n}} \times \\ &\times \frac{\sin(zD_{2n})}{D_{2n}} - 2(\Delta_n - \frac{n-1}{c_2^2} \partial_t^2) \frac{\sin(hD_{2n})}{D_{2n}} \frac{\sin(zD_{1n})}{D_{1n}}].\end{aligned}\quad (1.30)$$

Одержана систему рівнянь при $z = const$ буде описувати динаміку точок деякого тонкого шару $z = const$. В часткових випадках, при $z = \pm h$, отримуємо рівняння динаміки поверхневих шарів $\pm h$, а при $z = 0$, це перетвориться в рівняння динаміки серединного шару. В цьому випадку отримані рівняння спрощуються і матимуть вигляд [2, с. 90]:

$$Q_1^{(1)}u_1^{(1)}(r,t) = -\frac{1}{2\mu}[d_{11}\partial_r(q_1^+ + q_1^-) + d_{12}(q_2^+ - q_2^-)];$$

$$Q_2^{(2)}u_2^{(2)}(r,t) = \frac{1}{2\mu}[d_{21}(q_1^+ - q_1^-) + d_{22}D(q_2^+ + q_2^-)].$$
(1.31)

$$d_{11} = (\Delta_1 + D_{21}^2)\frac{\sin(hD_{21})}{D_{21}} - 2D_{11}^2\frac{\sin(hD_{11})}{D_{11}};$$
(1.32)

$$d_{12} = (\Delta_1 + D_{21}^2)\cos(hD_{11}) - 2\Delta_1\cos(hD_{21});$$
(1.33)

$$d_{21} = (\Delta_2 + D_{22}^2)\cos(hD_{22}) - 2\Delta_2\cos(hD_{12});$$
(1.34)

$$d_{22} = (\Delta_2 + D_{22}^2)\frac{\sin(hD_{12})}{D_{12}} - 2D_{22}^2\frac{\sin(hD_{22})}{D_{22}}.$$
(1.35)

$$Q_2^{(1)}u_2^{(1)}(r,t) = 0,$$
(1.36)

$$Q_1^{(2)}u_1^{(2)}(r,t) = 0.$$

Далі для рівнянь, отриманих при $z = 0$, визначимо їхнє місце серед вже відомих [2, с. 86-93]. Зауважимо при цьому, що всі відомі раніше підходи до побудови математичних моделей динамічних процесів у пружних пластинах (плитах) обмежувалися побудовою тільки одного рівняння (а тут чотири) – рівняння поперечних зміщень точок плити при згинних коливаннях останньої.

Неважко показати, що всі відомі нам диференціальні математичні моделі поперечних динамічних зміщень точок плити при згинних коливаннях останньої отримуються з нашої моделі, записаної в диференціальній формі з утриманням певної обмеженої кількості членів у розвиненні символічних диференціальних операторів у степеневі ряди [2, с.77-93].

В загальному ж випадку, за допомогою наведених рівнянь можна побудувати поле динамічних зміщень точок плити як для задачі її поперечного згину так і повздовжнього розтягу заданими поверхневими навантаженнями.

Очевидно, що наведені рівняння (1.18)-(1.23), (1.27)-(1.30), (1.31)-(1.35) при роботі з ними потребують розвинення $\frac{\sin(zD_{mn})}{D_{mn}}$, $\cos(zD_{mn})$, $\frac{\sin(hD_{mn})}{D_{mn}}$, $\cos(hD_{mn})$ та інших виразів у степеневі ряди, повернення символам D_{mn}^2 , ∂_i^2 значення оператора диференціювання. В загальному випадку рівняння ці

будуть нескінченно високого порядку, оскільки нескінченно довгими будуть операторні ряди, а отже робота з ними потребуватиме великої кількості початково-крайових умов. Виконати ж останнє на практиці практично неможливо.

Розділ 2. Математичні основи розв'язання початково-крайових задач динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем

До цього ми розглядали основні закони, еквівалентності та моделі теорії пружності. Тепер перейдемо до методів моделювання фізичних процесів, які далі використаємо для моделювання стану пружних плит. За основу візьмемо теорію моделювання просторово розподілених систем [1].

2.1. Постановка початково-крайової задачі

Розглядатимемо проблему дослідження функції стану $y(s)$ деякої системи, розподіленої в просторово-часовій області $S_0^T = S_0 \times [0, T]$.

Введемо наступні позначення [1, с. 23]:

- $s = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in S_0^T$ - просторово-часова змінна;
- $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$ - вектор частинних похідних за x_1, \dots, x_n, t ;
- $L(\partial_s)$ - лінійний диференціальний оператор;
- $u(s)$ - функція зовнішніх збурень.

Динамічна система, яку ми розглядаємо, підпорядкована рівнянню [1, с. 24]:

$$L(\partial_s)y(s) = u(s). \quad (2.1)$$

Нехай, для даної системи існують початкові ($t=0$) та крайові умови (по контуру Γ області S_0) спостереження. Розглядатимемо їх заданими неперервно в деякій просторово-часовій області та дискретно, в фіксовані моменти часу в певних точках. У цих випадках, спостереження матимуть наступний вигляд [1, с. 24].

а) Неперервно задані спостереження:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}, x \in S_0), \quad (2.2)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s \in \Gamma \times [0, T]} = Y_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (2.3)$$

б) Дискретно задані спостереження:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0 \in S_0}} = Y_{rl}^0 \quad (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \quad (2.4)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_{\rho l}^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (2.5)$$

Не будемо обмежувати кількість початково-крайових умов. Можливий випадок їх відсутності. Тоді, неперервна [(2.1)-(2.2)] та дискретна [(2.3)-(2.4)] задачі моделювання функції стану нерозв'язні методами аналітичної та обчислювальної математики в загальному випадку [1, с. 24].

Тому виникає необхідність побудувати функцію стану $y(s)$, яка буде розв'язком (2.1) і оптимальною за критерієм [1, с. 24-25]:

- для неперервного випадку:

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0(x) \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(s) \right)^2 ds \rightarrow \min_{y(s)} \quad (2.6)$$

- для дискретного випадку:

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0 \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_{\rho l}^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma \right)^2 \rightarrow \min_{y(s)} \quad (2.7)$$

2.2. Загальний розв'язок задачі

Оскільки область дослідження обмежена і зовнішньо-динамічних факторів усього три, визначимо $y(s)$, як [1, с. 25]:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \quad (2.8)$$

де

- y_0 – початкові

- y_Γ – крайові
- y_∞ – інші (поверхневі, внутрішні) фактори.

Будуємо перехідну функцію Гріна, яка відповідає рівнянню [1, с. 25]:

$$L(\partial_s)G(s-s') = \delta(s-s'), \quad (2.9)$$

і отримуємо $y_\infty(s), y_0(s), y_\Gamma(s)$ у вигляді:

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds', \quad (2.10)$$

$$y_0(s) = \int_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds', \quad (2.11)$$

$$y_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds', \quad (2.12)$$

Функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ діють в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times (0, T]$, відповідно. Дані області є «минулим» – подіями до моменту $t=0$, та зовнішніми факторами (виникають поза просторово досліджуваною зоною, впливають на область) [1, с. 25-26].

Функції $u_0(s), u_\Gamma(s)$, які є складовими інтегральних функцій це моделюючі фактори, які діють на передісторію та зовнішню межу, відповідно. Вони, як і $u(s)$, можуть визначатись векторами своїх значень у точках моделювання [1, с. 25-26]:

$$u = \text{col}(u(s_m), m = \overline{1, M}) \quad (s_m \in S_0^T), \quad (2.13)$$

$$u_0 = \text{col}(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0}) \quad (s_m^0 \in S^0), \quad (2.14)$$

$$u_\Gamma = \text{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}) \quad (s_m^\Gamma \in S^\Gamma). \quad (2.15)$$

Тоді $y_\infty(s), y_0(s), y_\Gamma(s)$ матимуть вигляд [1, с. 25-26]:

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s-s_m)u_m, \quad (2.16)$$

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)u_{0m}, \quad (2.17)$$

$$y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) u_{\Gamma m} \quad (2.18)$$

Це зводить задачу пошуку $y(s)$ до пошуку функцій $u_0(s)$ ($s \in S^0$), $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$), або відповідних векторів.

Зрозуміло, що існує безліч задач, в яких початково-крайові спостереження відсутні, або присутні в недостатній кількості.

2.3. Розв'язок початково-крайової задачі з дискретними спостереженнями та дискретними моделюючими функціями

2.3.1. Розв'язки для задач в загальному вигляді

Розглядатимемо побудову функції $y(s)$ системи (2.1) при дискретних спостереженнях, задовольняючих (2.4), (2.5). Пошук векторів u_0 , u_Γ таких, щоб виконався критерій (2.7) можна звести до розв'язку [1, с. 27]:

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma} \quad (2.19)$$

Це є еквівалентом середньоквадратичного відносно u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) оберненню СЛАР, отриманою підстановкою розв'язку (2.8), (2.16) – (2.18) до (2.4), (2.5) [1, с. 27-28].

$$A\bar{u} = \bar{Y} \quad (2.20)$$

де:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$Y_0 = \text{col}((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_l)y_\infty(s))\Big|_{t=0, x=x_l^0}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}), \quad (2.22)$$

$$Y_\Gamma = \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s))\Big|_{x=x_l^\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (2.23)$$

$$A_{11} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_l)G(s - s_m^0))\Big|_{t=0, x=x_l^0}, m = \overline{1, M_0}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}), \quad (2.24)$$

$$A_{12} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{t=0}^{x=x_l^0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}), \quad (2.25)$$

$$A_{21} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (2.26)$$

$$A_{22} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (2.27)$$

Вектор \bar{u} , визначений цією системою, задовольнятиме [1, с. 28]:

$$\bar{u} = \arg \min_{u \in R^{M_0 + M_\Gamma}} \|Au - \bar{Y}\|^2. \quad (2.28)$$

Запишемо його у вигляді [1, с. 28]:

$$\bar{u} = A^+(\bar{Y} - Av) + v, \quad (2.29)$$

де A^+ – псевдообернена до A матриця, а v – довільний вектор розмірності $M_0 + M_\Gamma$.

Звідки:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{u_0 : \|A\bar{u} - \bar{Y}\|^2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma} \} = \\ &= \{u_0 : u_0 = (A_{11}^T, A_{21}^T)P_1^+(\bar{Y} - Av) + v_0, \forall v_0 \in R^{M_0}\}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\Gamma &= \{u_\Gamma : \|A\bar{u} - \bar{Y}\|^2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma} \} = \\ &= \{u_\Gamma : u_\Gamma = (A_{12}^T, A_{22}^T)P_1^+(\bar{Y} - Av) + v_\Gamma, \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $P_1 = AA^T$.

Якщо $u_0 \in \Omega_0, u_\Gamma \in \Omega_\Gamma$, то точність моделювання (узгодженість спостережень та відхилень змодельованої функції у точках спостереження) початково-крайових умов буде [1, с. 28-29]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s))\Big|_{t=0}^{x=x_l^0} - Y_{rl}^0)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_p^\Gamma(\partial_x)y(s))\Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 = \\ &= \min_{y(s)} \Phi_2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi_2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Умова однозначності розв'язку: якщо $\det A^T A > 0$, то в (2.30), (2.31) $v_0 = v_\Gamma \equiv 0$ і моделювання однозначне. Якщо $\det A^T A = 0$, то неоднозначне [1, с. 29].

2.3.2. Розв'язки початково-крайової задачі у необмежених просторово-часових областях

Якщо при розгляді просторово-часового процесу в області S_0^T , виявлено, що вплив крайових умов (2.5) на S_0 , або часових (2.4) на $[0, T]$ несуттєво впливає на функцію $y(s)$ і відсутній інтерес розгляду даного впливу, то відповідною умовою можна знехтувати і будувати середньоквадратичне наближення лише за іншим фактором [1, с. 29].

У випадку нехтування граничними умовами [1, с. 29]:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) \quad (s \in S_0 \times [0, T]) \quad (2.33)$$

У випадку нехтування початковими умовами [1, с. 29]:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \quad (s \in S_0 \times [0, T]). \quad (2.34)$$

Складові $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначимо за (2.10), (2.17), (2.18) відповідно. Перехідну функцію $G(s-s')$ знайдемо за (2.9). Критерій оптимального вибору векторів u_0 та u_Γ матиме вигляд [1, с. 30]:

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 \rightarrow \min_{u_0}, \quad (2.35)$$

або

$$\Phi_\Gamma = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{u_\Gamma}, \quad (2.36)$$

для відповідних випадків.

Вектори значень моделюючих факторів u_0 та u_Γ шукатимемо з рівнянь [1, с. 30]:

$$A_{11}u_0 = Y_0 \quad (2.37)$$

та

$$A_{22}u_\Gamma = Y_\Gamma \quad (2.38)$$

відповідно.

Розв'язки, які відповідають критерію: $\|A_{11}u_0 - Y_0\|^2 \rightarrow \min_{u_0}$ та $\|A_{22}u_\Gamma - Y_\Gamma\|^2 \rightarrow \min_{u_\Gamma}$, матимуть вигляд [1, с. 30-31]:

$$u_0 = A_{11}^+ Y_0 + v_0 - A_{11}^+ A_{11} v_0, \quad (2.39)$$

$$u_\Gamma = A_{22}^+ Y_\Gamma + v_\Gamma - A_{22}^+ A_{22} v_\Gamma \quad (2.40)$$

Точності узгодження визначимо наступним способом [1, с. 31]:

$$\varepsilon_0^2 = \min_{y(s)} \Phi_0 = \min_{u_0} \Phi_0 = (Y_0)^T Y_0 - (Y_0)^T A_{11} A_{11}^+ Y_0, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_\Gamma^2 = \min_{y(s)} \Phi_\Gamma = \min_{u_\Gamma} \Phi_\Gamma = (Y_\Gamma)^T Y_\Gamma - (Y_\Gamma)^T A_{22} A_{22}^+ Y_\Gamma. \quad (2.42)$$

Критерій однозначності: для першої (другої) задачі буде однозначний розв'язок при $\det(A_{11}^T A_{11}) > 0$ ($\det(A_{22}^T A_{22}) > 0$) і неоднозначний при $\det(A_{11}^T A_{11}) = 0$ ($\det(A_{22}^T A_{22}) = 0$) [1, с. 31].

2.3.3. Особливості моделювання дискретно спостережуваних систем

Далі наведено особливості описаного вище підходу для моделювання функції $y(s)$ розподіленої в обмеженій просторово-часовій області S_0^T [1, с. 31-32]:

1. Динаміка системи описується лінійним диференціальним рівнянням (2.1);
2. Початково-крайові спостереження дискретні;
3. Моделюючі вектори u_0 та u_Γ визначаються дискретно.

Очевидно, що даний метод неможливо застосувати до задач, які не підходять під дані обмеження. Однак для деяких з цих типів задач існують способи побудувати модель вище наведеним методом [1, с. 32]. Зокрема це дозволяє:

1. Розглядати алгоритм розв'язку для систем із доповненими/заміненими дискретними просторово-часовими умовами з/замість початково-крайовими. Позначимо ці спостереження як:

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_i \in S_0^T} = Y_i \quad (i = \overline{1, I}); \quad (2.43)$$

2. Можна поширити методуку на дискретно спостережувані просторово розподілені системи, важкі для формалізації (2.1).

Розглянемо перший випадок: необхідно побудувати функцію стану $y(s)$ системи (2.1) з початково-крайовими спостереженнями (2.4), (2.5) та доповненими просторово-часовими умовами (2.43). Введення нових спостережень не вплине на природу зовнішньо динамічних збурень, тому u_0 та u_Γ визначимо із СЛАР (2.19). Спостереження (2.43) зведе розв'язання системи (2.20) до розв'язання задачі з розширеним вектором [1, с. 32-33]:

$$Y = \text{col}(Y_i, i = \overline{1, I}). \quad (2.44)$$

Відповідно, розширимо на наступні блоки матриці A :

$$A_{31} = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^0)|_{s=s_i}, m = \overline{1, M_0}), i = \overline{1, I}), \quad (2.45)$$

$$A_{32} = \text{col}(\text{str}(L_i(\partial_s)G(s - s_m^\Gamma)|_{s=s_i}, m = \overline{1, M_\Gamma}), i = \overline{1, I}). \quad (2.46)$$

Матриця A та вектор \bar{Y} з рівняння (2.20) матимуть вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \\ Y \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Зважаючи, що u_0 та u_Γ визначаються через A та \bar{Y} , їх вигляд зміниться:

$$u_0 = (A_{11}^T, A_{21}^T, A_{31}^T)P_1^+(\bar{Y} - Av) + v_0, \forall v_0 \in R^{M_0}, \quad (2.48)$$

$$u_\Gamma = (A_{12}^T, A_{22}^T, A_{32}^T)P_1^+(\bar{Y} - Av) + v_\Gamma, \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \quad (2.49)$$

(за вищезначених P_1 та v).

Оцінки точності та умови однозначності будуть такими ж, як для задачі без додаткових спостережень [а саме (2.1), (2.4), (2.5)] [1, с. 34].

2.4. Неперервно-аналітичне моделювання дискретно спостережуваних систем з неперервними моделюючими факторами

До цього моменту ми розглядали дискретно спостережувані системи виду (2.1) з спостереженнями (2.4), (2.5), моделюючі функції яких, будувались, як вектори u_0, u_Γ . Тепер розглянемо побудову моделі з неперервно визначеними функціями $u_0(s)$ ($s \in S^0$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$). Функції $y_0(s), y_\Gamma(s)$, складові (2.8) визначаються за допомогою (2.11) – (2.12). Функція $y(s)$, побудована за (2.8), (2.10) – (2.12) точно задовольняють (2.1), тому обмеження на вибір $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ може бути виражений тільки рівняннями (2.4), (2.5) [1, с. 34-35]. Скористаємось критерієм (2.7), або еквівалентним йому:

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)}, \quad (2.50)$$

де Φ_2 визначається як (2.7).

Розв'язок цієї задачі знаходиться середньоквадратичним оберненням системи інтегральних рівнянь [1, с. 35-36]:

$$\begin{aligned} & \int_{S^0} L_r^0(\partial_t)G(s-s') \Big|_{x=x_l^0} u_0(s') ds' + \\ & + \int_{S^\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s') \Big|_{x=x_l^0} u_\Gamma(s') ds' = \bar{Y}_{rl} \quad (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S^0} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s') \Big|_{s=s_l^\Gamma} u_0(s') ds' + \\ & + \int_{S^\Gamma} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s') \Big|_{s=s_l^\Gamma} u_\Gamma(s') ds' = \bar{Y}_{pl} \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; p = \overline{1, R_\Gamma}), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де $\bar{Y}_{rl} = Y_{rl} - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{x=x_l^0}$, $\bar{Y}_{\rho l} = Y_{\rho l} - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}$.

Запишемо систему інтегральних рівнянь у вигляді [1, с. 36]:

$$\int_{(\cdot)} A(s)\bar{u}(s)ds = \bar{Y}, \quad (2.53)$$

при чому, інтегрування здійснюємо по області зміни аргументу s вектор-функції $\bar{u}(s) = \text{col}(u_0(s) \ (s \in S^0), \ u_\Gamma(s) \ (s \in S^\Gamma))$ і матричної функції

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) \ (s \in S^0), & A_{12}(s) \ (s \in S^\Gamma) \\ A_{21}(s) \ (s \in S^0), & A_{22}(s) \ (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

де \bar{Y} визначено через (2.20) [1, с. 36]. Елементи матриці визначаються як [1, с. 36]:

$$A_{li} = \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s-s'))\Big|_{x=x_l^0}, \ l = \overline{1, L_0}, \ r = \overline{1, R_0}), \quad (2.55)$$

$$A_{2i} = \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s'))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \ l = \overline{1, L_\Gamma}, \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (2.56)$$

причому $s' \in S^0$, якщо $i = 1$, та $s' \in S^\Gamma$, якщо, $i = 2$.

Тоді $\bar{u}(s)$, оптимальний за

$$\left\| \int_{(\cdot)} A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{Y} \right\|_{u(s)}^2 \rightarrow \min, \quad (2.57)$$

матиме вигляд [1, с. 36-37]:

$$\bar{u}(s) = A^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v(s) \quad (2.58)$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} A(s)A^T(s)ds, \quad (2.59)$$

$$A_v = \int_{(\cdot)} A(s)v(s)ds, \quad (2.60)$$

а $v(s)$ – довільна інтегровна в області зміни аргументів функція виду:

$$v(s) = \text{col}(v_0(s) \ (s \in S^0), \ v_\Gamma(s) \ (s \in S^\Gamma)). \quad (2.61)$$

З (2.58) отримуємо [1, с. 37-38]:

$$u_0(s) = A_0(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_0(s), \quad (2.62)$$

$$u_\Gamma(s) = A_\Gamma(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v_\Gamma(s), \quad (2.63)$$

де

$$A_0(s) = (A_{11}^T(s), A_{21}^T(s)) \quad (s \in S^0), \quad (2.64)$$

$$A_\Gamma(s) = (A_{12}^T(s), A_{22}^T(s)) \quad (s \in S^\Gamma), \quad (2.65)$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_\Gamma} \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$P_{ij} = \int_{S^0} A_{i1}(s)A_{j1}^T(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{i2}(s)A_{j2}^T(s)ds \quad (i, j = \overline{1,2}), \quad (2.67)$$

$$A_{v_0} = \int_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{12}(s)v_\Gamma(s)ds, \quad (2.68)$$

$$A_{v_\Gamma} = \int_{S^0} A_{21}(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds. \quad (2.69)$$

Така функція стану $y(s)$ системи (2.1), (2.4), (2.5), побудована згідно (2.8), (2.10) – (2.12) має похибку визначення $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ [1, с. 38]:

$$\varepsilon^2 = \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \Phi = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}. \quad (2.70)$$

Функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, визначаються однозначно при

$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A^T(s_i)A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$, та неоднозначно в інших випадках [1, с. 38].

2.4.1. Моделювання дискретно спостережуваних систем з неперервно визначеними моделюючими факторами в необмежених просторово-часових областях

Якщо для системи (2.1) зі спостереженнями (2.4), (2.5), аналогічно до вище наведених випадків, немає значного впливу функцій $y_\Gamma(s)$, або $y_0(s)$ на $y(s)$, то ними можна знехтувати [1, с. 38].

Отже, розглядатимемо два спрощені випадки: в першому нехтуємо $y_\Gamma(s)$, в другому $y_0(s)$. Тоді визначимо [1, с. 38]:

1) для першого випадку: $y(s)$, як (2.33) з компонентами (2.10), (2.11);

2) для другого випадку: $y(s)$, як (2.34) з компонентами (2.10), (2.12).

Для обох задач спрощується визначення (2.62), (2.63) моделюючих функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$. Побудуємо їх. Визначимо (2.51) та (2.52) як [1, с. 38-39]:

$$\int_{S^0} A_{11}(s)u_0(s)ds = Y_0, \quad (2.71)$$

$$\int_{S^\Gamma} A_{22}(s)u_\Gamma(s)ds = Y_\Gamma, \quad (2.72)$$

де Y_0 , Y_Γ з п. 2.3.1 цього розділу.

Тоді розв'язки матимуть вигляд [1, с. 39]:

$$u_0(s) \in \Omega_0 = \{u_0(s) : u_0(s) = A_{11}^T(s)P_0^+(Y_0 - A_{v_0}) + v_0(s)\}, \quad (2.73)$$

$$u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma(s) : u_\Gamma(s) = A_{22}^T(s)P_\Gamma^+(Y_\Gamma - A_{v_\Gamma}) + v_\Gamma(s)\}, \quad (2.74)$$

де $v_0(s)$ ($v_\Gamma(s)$) – будь-які інтегровні в S^0 (S^Γ) функції,

$$\begin{aligned} P_0 &= \int_{S^0} A_{11}(s)A_{11}^T(s)ds, \\ P_\Gamma &= \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)A_{22}^T(s)ds, \\ A_{v_0} &= \int_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds, \\ A_{v_\Gamma} &= \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Тоді точність функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ матиме вигляд [1, с. 39-40]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^2 &= \min_{u_0(s) \in \Omega_0} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=s_0^r}} - Y_{rl}^0)^2 = \\
&= \min_{u_0(s) \in \Omega_0} \left\| \int_{S^0} A_{11}(s) u_0(s) ds - Y_0 \right\|^2 = (Y_0)^T Y_0 - (Y_0)^T P_0 P_0^+ Y_0, \\
\varepsilon_\Gamma^2 &= \min_{u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{s=s_\Gamma^\rho} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 = \\
&= \min_{u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma} \left\| \int_{S^\Gamma} A_{22}(s) u_\Gamma(s) ds - Y_\Gamma \right\|^2 = (Y_\Gamma)^T Y_\Gamma - (Y_\Gamma)^T P_\Gamma P_\Gamma^+ Y_\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Умови однозначності [1, с. 40]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A_{11}^T(s_i) A_{11}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0, \tag{2.77}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A_{22}^T(s_i) A_{22}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0. \tag{2.78}$$

для $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ відповідно. В інших випадках – неоднозначний розв’язок.

2.5. Моделювання початково-крайової задачі з неперервно заданими спостереженнями

Розглядатимемо моделювання стану $y(s)$ системи (2.1) розподіленої в S_0^T з початково-крайовими спостереженнями виду (2.2), (2.3). Вважаємо, що функція зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$ відома, кількість умов R_0 , R_Γ не повинна бути узгоджена з порядком диференціального оператора $L(\partial_s)$, просторово-часова область на яких вони задані не обов’язково співпадає з S_0^T [1, с. 40-41].

Функцію стану $y(s)$ та її компоненти виразимо співвідношеннями (2.8), (2.10), (2.17), (2.18), $u_0 = (u_{0m}, m = \overline{1, M_0})^T$, $u_\Gamma = (u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma})^T$. Компоненти u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) векторів виразимо з умови середньоквадратичного виконання умов (2.2), (2.3), тобто [1, с. 40-41]:

$$\Phi = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_0^T dx \int_\Gamma (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(x,t))^2 dt \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma}, \quad (2.79)$$

що еквівалентно

$$\Phi \rightarrow \min_{y(s)}. \quad (2.80)$$

За критерієм (2.79), (2.80) знайдемо моделюючі вектори u_0 , u_Γ з урахуванням спостережень (2.2), (2.3) і поширимо їх вплив на S_0^T через $G(s-s')$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь для пошуку компонент u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) [1, с. 42]:

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)|_{t=0} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma) u_{\Gamma m} =$$

$$= \bar{Y}_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}), \quad (2.81)$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)|_{x \in \Gamma} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma) u_{\Gamma m} =$$

$$= \bar{Y}_\rho^\Gamma(x, t) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (2.82)$$

При цьому [1, с. 42-43]:

$$\bar{Y}_r^0(x) = Y_r^0(x) - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)|_{t=0}, \quad (2.83)$$

$$\bar{Y}_\rho^\Gamma(x, t) = Y_\rho^\Gamma(x, t) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)|_{x \in \Gamma}. \quad (2.84)$$

Щоб розв'язати систему (2.81), (2.82) наближаючи за критерієм (2.79), перетворимо її до вигляду [1, с. 43]:

$$B(s)\bar{u} = Y(s), \quad (2.85)$$

де:

$$\bar{u} = \text{col}(u_0, u_\Gamma), \quad Y(s) = \text{col}(Y_0(x) \quad (x \in S_0), Y_\Gamma(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T]), \quad (2.86)$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} (B_{11}(x) \quad (x \in S_0)) & (B_{12}(x) \quad (x \in S_0)) \\ (B_{21}(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T]) & (B_{22}(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T]) \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \text{col}(\bar{Y}_r^0(x), r = \overline{1, R_0}), \\ Y_\Gamma(x, t) &= \text{col}(\bar{Y}_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} B_{11}(x) &= \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0))\Big|_{t=0}, m = \overline{1, M_0}), r = \overline{1, R_0}, \\ B_{12}(x) &= \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{t=0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), r = \overline{1, R_0}, \\ B_{21}(x, t) &= \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0)), m = \overline{1, M_0}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}, \\ B_{22}(x, t) &= \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma)), m = \overline{1, M_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Розв'язок вище наведеної системи еквівалентне знаходженню \bar{u} з

$$\bar{u} = \arg \min_{u \in R^{M_0+M_\Gamma}} \int_{(\cdot)} \|B(s)u - Y(s)\|^2 ds, \quad (2.90)$$

де інтегрування розуміється по області зміни аргументу s , означеного в (2.87).

За допомогою псевдообернення лінійних функціональних рівнянь, отримаємо [1, с. 44-45]:

$$\bar{u} \in \Omega_u = \{u : u = P^+ B_y + v - P^+ P v, \forall v \in R^{M_0+M_\Gamma}\}, \quad (2.91)$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} B^T(s)B(s)ds, \quad B_y = \int_{(\cdot)} B^T(s)Y(s)ds. \quad (2.92)$$

Оскільки інтегрування відбувається по області зміни аргументу s , перепишемо (2.92) [1, с. 45]:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

де

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x)B_{1j}(x)dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(x, t)B_{2j}(x, t)dxdt, \quad (2.94)$$

$$B_{yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x)Y_0(x)dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^T(x, t)Y_\Gamma(x, t)dxdt \quad (i, j = \overline{1, 2}). \quad (2.95)$$

Знайдемо u_0 та u_Γ , вважаючи [1, с. 44]:

$$P^+ = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

де

$$Q_{11} \in R^{M_0 \times M_0}, \quad Q_{12} \in R^{M_0 \times M_\Gamma}, \quad Q_{21} \in R^{M_\Gamma \times M_0}, \quad Q_{22} \in R^{M_\Gamma \times M_\Gamma}, \quad \text{а} \quad (2.97)$$

$$v = \text{col}(v_0, v_\Gamma), \quad v_0 \in R^{M_0}, \quad v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}.$$

Отримуємо [1, с. 44-45]:

$$u_0 \in \Omega_0 = \{u \in R^{M_0} : u = (Q_{11}, Q_{12})B_y + v_0 - (Q_{11}, Q_{12})Pv, \quad \forall v \in R^{M_0}\}, \quad (2.98)$$

$$u_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \{u \in R^{M_\Gamma} : u = (Q_{21}, Q_{22})B_y + v_\Gamma - (Q_{21}, Q_{22})Pv, \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}\}. \quad (2.99)$$

Для векторів u_0, u_Γ справедлива оцінка точності [1, с. 45]:

$$\varepsilon_0^2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi = \min_{u \in \Omega_0 \times \Omega_\Gamma} \int_{(\cdot)} \|B(s)u - Y(s)\|^2 ds = \int_{S_0} Y_0^T(x)Y_0(x)dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} Y_\Gamma^T(x, t)Y_\Gamma(x, t)dxdt - B_y^T P^+ B_y, \quad (2.100)$$

де Φ визначене за (2.79).

Однозначність розв'язку буде при $\det P > 0$. В інших випадках – неоднозначно [1, с. 45].

2.5.1 Моделювання початково-крайових задач із неперервними спостереженнями в необмежених просторово-часових областях

Аналогічно до ситуацій, розглянутих в з п. 2.3.3 та п. 2.4.1 цієї роботи, при незначному впливі умов (2.2), або (2.3), можна знехтувати відповідним фактором, вважаючи область S_0^T необмеженою за просторовими, або часовими координатами.

Розглянемо два випадки [1, с. 45-46]:

1. Відсутні крайові спостереження виду (2.3) та моделюючий вектор u_Γ . Тоді [1, с. 45-46]:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) \quad (s \in R^n \times [0, T]), \quad (2.101)$$

де $y_\infty(s)$ та $y_0(s)$ визначаються співвідношеннями (2.10) та (2.17), в яких:

$$u_0 = P_{11}^+ B_{y_0} + v_0 - P_{11}^+ P_{11} v_0 \quad \forall v_0 \in R^{M_0}, \quad (2.102)$$

при P_{11} та v_0 , визначених з співвідношень (2.93)-(2.97), а

$$B_{y_0} = \int_{S_0} B_{11}^T(x) Y_0(x) dx. \quad (2.103)$$

2. Відсутні початкові спостереження виду (2.2) та моделюючий вектор u_0 . Тоді [1, с. 46]:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \quad (s \in S_0 \times (-\infty, T]), \quad (2.104)$$

де $y_\infty(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначаються співвідношеннями (2.10) та (2.18), в яких:

$$u_\Gamma = P_{22}^+ B_{y_\Gamma} + v_\Gamma - P_{22}^+ P_{22} v_\Gamma \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \quad (2.105)$$

при P_{22} та v_Γ визначених з співвідношень (2.93)-(2.97), а

$$B_{y_\Gamma} = \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{22}^T(x, t) Y_\Gamma(x, t) dx dt \quad (2.106)$$

Розв'язки (2.101) та (2.104) і вектори u_0 та u_Γ , визначені в (2.102) та (2.105) моделюють початкові (2.2) і крайові (2.3) умови. При цьому, узгодженість спостережень та розв'язку буде [1, с. 46]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx = \\ &= \int_{S_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx - B_{y_0}^T P_{11}^+ B_{y_0}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Gamma^2 &= \min_{y(s)} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(x, t))^2 ds = \\ &= \int_{\Gamma \times [0, T]} Y_\Gamma^T(x, t) Y_\Gamma(x, t) dx dt - B_{y_\Gamma}^T P_{22}^+ B_{y_\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

Розв'язки будуть однозначними при $\det P_{11} > 0$ та $\det P_{22} > 0$ відповідно [1, с. 47].

Розділ 3. Задачі математичного моделювання динаміки товстих пружних плит

У першому розділі даної роботи було описано загальні відомості про пружні плити та дано основні закони та моделі. Потім було розглянуто методи розв'язання задач моделювання початково-крайових систем, при відсутності умов на кількість спостережень. Це дозволить розв'язати задачу моделювання динаміки товстих пружних плит за початково-крайовими спостереженнями.

3.1. Постановка задачі моделювання стану пружної плити

Систематизуємо відомості про пружну плиту:

- розглядається в декартовій системі координат;
- є тривимірним пружним тілом $S_0(\xi)$, обмежене паралельними площинами $z = \pm h$ та контуром $\Gamma(\xi)$ в XoY ;
- густина середовища ρ ;
- пружні характеристики визначені константами Ляме λ і μ ;
- зміщення $u_i(s)$ ($i = \overline{1, 3}$) задовольняють рівнянню Ляме:

$$L(\partial_s)u(s) = f(s), \quad (3.1)$$

де $s = (\xi, t)$ – просторово-часова змінна, $\partial_s = (\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t)$ – вектор похідних по компонентах просторово-часової змінної;

$L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор виду:

$$L(\partial_s) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 + \mu(\partial_y^2 + \partial_z^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_y & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_y\partial_x & (\lambda + 2\mu)\partial_y^2 + \mu(\partial_z^2 + \partial_x^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_y\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_z\partial_x & (\lambda + \mu)\partial_z\partial_y & (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Виходячи з постановки задачі в п. 2.1, введемо передаточну функцію

$$L(\partial_s)G(s - s') = \Delta(s - s'), \quad (3.3)$$

де

$$\Delta(s-s') = \text{diag}(\delta(s-s'), i = \overline{1,3}), \quad (3.4)$$

$$\delta(s-s') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\delta(t-t'). \quad (3.5)$$

Тепер перейдемо до інтегральної форми моделі:

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f(s')ds'. \quad (3.6)$$

Оскільки ми розглядаємо плоскі плити, опишемо зовнішні сили в такому вигляді:

$$f^+(s)\Big|_{z=+h} = \text{col}(f_1^+(x, y, t), f_2^+(x, y, t), f_3^+(x, y, t)), \quad (3.7)$$

$$f^-(s)\Big|_{z=-h} = \text{col}(f_1^-(x, y, t), f_2^-(x, y, t), f_3^-(x, y, t)), \quad (3.8)$$

$$f^\Gamma(s)\Big|_{\xi \in \Gamma} = \text{col}(f_1^\Gamma(s), f_2^\Gamma(s), f_3^\Gamma(s)). \quad (3.9)$$

Користуючись (2.8), запишемо функцію зміщення точок як:

$$u(s) = u_\infty(s) + u^+(s) + u^-(s) + u^\Gamma(s), \quad (3.10)$$

$$u_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')f(s')ds', \quad (3.11)$$

$$u^+(s) = \int_{S_0^+} G(s-s')\Big|_{z=+h} f^+(s')ds', \quad (3.12)$$

$$u^-(s) = \int_{S_0^-} G(s-s')\Big|_{z=-h} f^-(s')ds', \quad (3.13)$$

$$u^\Gamma(s) = \int_{S_0^\Gamma} G(s-s')f^\Gamma(s')ds', \quad (3.14)$$

де

$$S_0^T = S_0(\xi) \times [0, T], \quad (3.15)$$

$$S_0^+ = \{(x, y, z) \in S_0(\xi), z = +h\} \times [0, T], \quad (3.16)$$

$$S_0^- = \{(x, y, z) \in S_0(\xi), z = -h\} \times [0, T], \quad (3.17)$$

$$S_0^\Gamma = \{S_0(\xi), -h \leq z \leq +h\} \times [0, T]. \quad (3.18)$$

Враховуючи нові представлення складових співвідношення (3.1), перепишемо цю модель:

$$L(\partial_s)u(s) = \begin{cases} f(s), & s \in S_0^T, \\ f^+(s), & s \in S_0^+, \\ f^-(s), & s \in S_0^-, \\ f^\Gamma(s), & s \in S_0^\Gamma, \end{cases} \quad (3.19)$$

Дана система, сили, зміщення та їх компоненти відносяться до випадку неперервних спостережень. Тепер запишемо аналогічні системи при моделюючих факторах, визначених дискретно:

$$L(\partial_s)u(s)|_{s=s_m^+} = f_m^+ (m = \overline{1, M^+}), \quad (3.20)$$

$$L(\partial_s)u(s)|_{s=s_m^-} = f_m^- (m = \overline{1, M^-}), \quad (3.21)$$

$$L(\partial_s)u(s)|_{s=s_m^\Gamma} = f_m^\Gamma (m = \overline{1, M^\Gamma}), \quad (3.22)$$

$$u^+(s) = \sum_{m=1}^{M^+} G(s - s_m^+) f_m^+, \quad (3.23)$$

$$u^-(s) = \sum_{m=1}^{M^-} G(s - s_m^-) f_m^-, \quad (3.24)$$

$$u^\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M^\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) f_m^\Gamma. \quad (3.25)$$

Для системи (3.10), (3.19), або її дискретного аналогу (3.10), (3.20)-(3.22), можна розв'язати задачу моделювання не лише за взаємодією зовнішніми силовими факторами, а й за зміщеннями її поверхнево-граничних точок, перетворених лінійними функціями. Враховуючи неможливість виміряти силову взаємодію в реальних системах, при відносній простоті визначення зміщень точок, це розширює прикладне використання даних моделей.

Тож, розглядатимемо взаємодію на тіло несиловими зовнішніми факторами. Неперервні спостереження будуть задані через функції зміщення у вигляді:

$$L_r^0(\partial_t)u(s)|_{\substack{t=0 \\ \xi \in S_0}} = U_r^0(\xi) (r = \overline{1, R_0}), \quad (3.26)$$

$$L_{\rho}^{+}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s \in S_0^{+}} = U_{\rho}^{+}(s) \quad (\rho = \overline{1, R_+}), \quad (3.27)$$

$$L_{\rho}^{-}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s \in S_0^{-}} = U_{\rho}^{-}(s) \quad (\rho = \overline{1, R_-}),$$

$$L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s \in S_0^{\Gamma}} = U_{\rho}^{\Gamma}(s) \quad (\rho = \overline{1, R_{\Gamma}}). \quad (3.28)$$

В постановці нашої задачі немає обмежень на кількість початково-крайових спостережень. Щоб уникнути ситуації, коли задача нерозв'язна, шукатимемо її розв'язок середньоквадратично, наближаючи $u(s)$ за критерієм:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0} - U_r^0(\xi))^2 d\xi + \sum_{\rho=1}^{R_+} \int_{S_0^{+}} (L_{\rho}^{+}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s \in S_0^{+}} - U_{\rho}^{+}(s))^2 ds + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_-} \int_{S_0^{-}} (L_{\rho}^{-}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s \in S_0^{-}} - U_{\rho}^{-}(s))^2 ds + \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \int_{S_0^{\Gamma}} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s \in S_0^{\Gamma}} - U_{\rho}^{\Gamma}(s))^2 ds \rightarrow \min_{u(s)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Аналогічно запишемо спостереження та критерій наближення $u(s)$ для задачі з дискретними спостереженнями:

$$L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0}^{\xi=\xi_l^0 \in S_0} = U_{rl}^0 \quad (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \quad (3.30)$$

$$L_{\rho}^{+}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s=s_l^{+} \in S_0^{+}} = U_{\rho l}^{+} \quad (\rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \quad (3.31)$$

$$L_{\rho}^{-}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s=s_l^{-} \in S_0^{-}} = U_{\rho l}^{-} \quad (\rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}),$$

$$L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s=s_l^{\Gamma} \in S_0^{\Gamma}} = U_{\rho l}^{\Gamma} \quad (\rho = \overline{1, R_{\Gamma}}, l = \overline{1, L_{\Gamma}}), \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0}^{\xi=\xi_l^0} - U_{rl}^0)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_+} \sum_{l=1}^{L_+} (L_{\rho}^{+}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s=s_l^{+}} - U_{\rho l}^{+})^2 + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_-} \sum_{l=1}^{L_-} (L_{\rho}^{-}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s=s_l^{-}} - U_{\rho l}^{-})^2 + \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{L_{\Gamma}} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s)\Big|_{s=s_l^{\Gamma}} - U_{\rho l}^{\Gamma})^2 \rightarrow \min_{u(s)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Для обох постановок побудуємо $u(s)$ у вигляді:

$$u(s) = u_{\infty}(s) + u_0(s) + u^{+}(s) + u^{-}(s) + u^{\Gamma}(s). \quad (3.34)$$

Так як ми розглядаємо несилові зміщення $u_{\infty}(s)$, $u_0(s)$, $u^{+}(s)$, $u^{-}(s)$, $u^{\Gamma}(s)$, промодельюємо їх силовими характеристиками $f_0(s)$ ($s \in S_0 \times (-\infty, 0]$), $f^{+}(s)$ ($s \in S_0^{+}$), $f^{-}(s)$ ($s \in S_0^{-}$), $f^{\Gamma}(s)$ ($s \in S_0^{\Gamma}$). Складову $u_{\infty}(s)$ залишимо без змін, а інші запишемо як:

$$\begin{aligned}
u_0(s) &= \int_{S_0 \times (-\infty, 0]} G(s-s') f_0(s') ds', \\
u^+(s) &= \int_{S_0^+} G(s-s') f^+(s') ds', \\
u^-(s) &= \int_{S_0^-} G(s-s') f^-(s') ds', \\
u^\Gamma(s) &= \int_{S_0^\Gamma} G(s-s') f^\Gamma(s') ds'
\end{aligned} \tag{3.35}$$

для задачі з неперервними спостереженнями та

$$\begin{aligned}
u_0(s) &= \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0) f_{0m} \quad (s_m^0 \in S_0 \times (-\infty, 0], m = \overline{1, M_0}), \\
u^+(s) &= \sum_{m=1}^{M^+} G(s-s_m^+) f_m^+ \quad (s_m^+ \in S_0^+, m = \overline{1, M^+}), \\
u^-(s) &= \sum_{m=1}^{M^-} G(s-s_m^-) f_m^- \quad (s_m^- \in S_0^-, m = \overline{1, M^-}), \\
u^\Gamma(s) &= \sum_{m=1}^{M^\Gamma} G(s-s_m^\Gamma) f_m^\Gamma \quad (s_m^\Gamma \in S_0^\Gamma, m = \overline{1, M^\Gamma})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

для дискретної постановки задачі.

Оскільки для двох задач наближення $u(s)$ за критерієм, ми розписали компоненти $u(s)$ через компоненти вектора $\bar{f} = \text{col}(\bar{f}_0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma)$, перетворимо критерій на:

$$\Phi_1 \rightarrow \min_f, \tag{3.37}$$

$$\Phi_2 \rightarrow \min_f, \tag{3.38}$$

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{\bar{f}(s)}, \tag{3.39}$$

в яких наближується не $u(s)$, а \bar{f} , або $\bar{f}(s)$, де

$$\bar{f}_0 = \text{col}(f_{0m}, m = \overline{1, M_0}), \tag{3.40}$$

$$\bar{f}^+ = \text{col}(f_m^+, m = \overline{1, M^+}), \tag{3.41}$$

$$\bar{f}^- = \text{col}(f_m^-, m = \overline{1, M^-}), \tag{3.42}$$

$$\overline{f^\Gamma} = \text{col}(f_m^\Gamma, m = \overline{1, M^\Gamma}). \quad (3.43)$$

Як ми побачили в другому розділі, $u(s)$ точно задовольняє (3.1) для будь-яких розв'язків (3.37) – (3.39), тож необхідно середньоквадратично задовольнити останні.

3.2. Розв'язок задачі моделювання динаміки плити з неперервними спостереженнями

Розглянемо задачу з критерієм (3.37). Позначимо:

$$\overline{U}(s) = \text{col}((U_0(\xi), \xi \in S_0, t = 0), (U^+(s), s \in S_0^+), (U^-(s), s \in S_0^-), (U^\Gamma(s), s \in S_0^\Gamma)) , \quad (3.44)$$

$$A(s) = \text{col}(L_G^0(\xi), L_G^+(s), L_G^-(s), L_G^\Gamma(s)), \quad (3.45)$$

де

$$\begin{aligned} U_0(\xi) &= \text{col}(U_r^0(\xi) - L_r^0(\partial_t)u_\infty(s)|_{\xi \in S_0, t=0}, i = \overline{1, R_0}), \\ U^+(s) &= \text{col}(U_\rho^+(s) - L_\rho^+(\partial_\xi)u_\infty(s)|_{s \in S_0^+}, \rho = \overline{1, R_+}), \\ U^-(s) &= \text{col}(U_\rho^-(s) - L_\rho^-(\partial_\xi)u_\infty(s)|_{s \in S_0^-}, \rho = \overline{1, R_-}), \\ U^\Gamma(s) &= \text{col}(U_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u_\infty(s)|_{s \in S_0^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} L_G^0(\xi) &= \text{col}(L_r^0(\partial_t)\overline{G}(s)|_{\xi \in S_0, t=0}, r = \overline{1, R_0}), \\ L_G^+(s) &= \text{col}(L_\rho^+(\partial_\xi)\overline{G}(s)|_{s \in S_0^+}, \rho = \overline{1, R_+}), \\ L_G^-(s) &= \text{col}(L_\rho^-(\partial_\xi)\overline{G}(s)|_{s \in S_0^-}, \rho = \overline{1, R_-}), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} L_G^\Gamma(s) &= \text{col}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\overline{G}(s)|_{s \in S_0^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \\ \overline{G}(s) &= \text{str}(\overline{G}^0(s), \overline{G}^+(s), \overline{G}^-(s), \overline{G}^\Gamma(s)), \\ \overline{G}^0(s) &= \text{str}(G(s - s_m^0), m = \overline{1, M_0}), \\ \overline{G}^+(s) &= \text{str}(G(s - s_m^+), m = \overline{1, M^+}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\overline{G}^-(s) = \text{str}(G(s - s_m^-), m = \overline{1, M^-}),$$

$$\overline{G}^\Gamma(s) = \text{str}(G(s - s_m^\Gamma), m = \overline{1, M^\Gamma})$$

Тоді шукатимемо розв'язок \bar{f} з системи вигляду:

$$A(s)\bar{f} = \bar{U}(s). \quad (3.49)$$

Щоб уникнути ситуації відсутності розв'язку, шукатимемо \bar{f} середньоквадратично за критерієм:

$$\int_{(\cdot)} \|A(s)\bar{f} - \bar{U}(s)\|^2 ds \rightarrow \min_{\bar{f}}. \quad (3.50)$$

Розв'язок має вигляд:

$$\bar{f} = P_2^+ A_U + \bar{v} - P_2^+ P_2 \bar{v}, \quad (3.51)$$

де

$$P_2 = \int_{s_0} [L_G^0(\xi)]^T L_G^0(\xi) d\xi + \int_{s_0^+} [L_G^+(s)]^T L_G^+(s) ds + \int_{s_0^-} [L_G^-(s)]^T L_G^-(s) ds + \int_{s_0^\Gamma} [L_G^\Gamma(s)]^T L_G^\Gamma(s) ds, \quad (3.52)$$

$$A_U = \int_{s_0} [L_G^0(\xi)]^T U_0(\xi) d\xi + \int_{s_0^+} [L_G^+(s)]^T U^+(s) ds + \int_{s_0^-} [L_G^-(s)]^T U^-(s) ds + \int_{s_0^\Gamma} [L_G^\Gamma(s)]^T U^\Gamma(s) ds. \quad (3.53)$$

$\bar{v} = \text{col}(v_0, v^+, v^-, v^\Gamma)$ – довільний скалярний вектор, з компонентами розмірністю $3M_0, 3M^+, 3M^-, 3M^\Gamma$ відповідно.

Складові вектора \bar{f} матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= P_2^0 A_U + v_0 - P_2^0 P_2 \bar{v}, \\ \bar{f}^+ &= P_2^+ A_U + v^+ - P_2^+ P_2 \bar{v}, \\ \bar{f}^- &= P_2^- A_U + v^- - P_2^- P_2 \bar{v}, \\ \bar{f}^\Gamma &= P_2^\Gamma A_U + v^\Gamma - P_2^\Gamma P_2 \bar{v}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

де

$$\text{col}(P_2^0, P_2^+, P_2^-, P_2^\Gamma) = P_2^*. \quad (3.55)$$

Розв'язок буде однозначним при $\det P_2 > 0$ і тоді він матиме вигляд:

$$\bar{f} = P_2^* A_U. \quad (3.56)$$

Знайдена функція $u(s)$ буде узгоджена зі спостереженнями з точністю:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_1 = \min_f \Phi_1 = & \int_{S_0} [U_0(\xi)]^T U_0(\xi) d\xi + \\ & + \int_{S_0^+} [U^+(s)]^T U^+(s) ds + \int_{S_0^-} [U^-(s)]^T U^-(s) ds + \\ & + \int_{S_0^\Gamma} [U^\Gamma(s)]^T U^\Gamma(s) ds - A_U^T P_2^* A_U. \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.3. Розв'язок задачі моделювання динаміки плити з дискретними спостереженнями при дискретних моделюючих факторах

Тепер розглянемо розв'язок задач з неперервними спостереженнями із критеріями (3.38) та (3.39). Введемо позначення U та A :

$$U = \text{col}(U_0, U^+, U^-, U^\Gamma), \quad (3.58)$$

$$A = \text{col}(L_G^0, L_G^+, L_G^-, L_G^\Gamma), \quad (3.59)$$

$$A(s) = \text{str}(A_0(s), A^+(s), A^-(s), A^\Gamma(s)), \quad (3.60)$$

де

$$\begin{aligned} U_0 &= \text{col}(U_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t)u_\infty(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_l^0 \in S_0}}, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\ U^+ &= \text{col}(U_{\rho l}^+ - L_\rho^+(\partial_\xi)u_\infty(s) \Big|_{s=s_l^+ \in S_0^+}, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\ U^- &= \text{col}(U_{\rho l}^- - L_\rho^-(\partial_\xi)u_\infty(s) \Big|_{s=s_l^- \in S_0^-}, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), \\ U^\Gamma &= \text{col}(U_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u_\infty(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma \in S_0^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \\ L_G^0(s) &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)\bar{G}(s) \Big|_{s=s_l^+}, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\ L_G^+(s) &= \text{col}((L_\rho^+(\partial_\xi)\bar{G}(s) \Big|_{s=s_l^+}, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\ L_G^-(s) &= \text{col}((L_\rho^-(\partial_\xi)\bar{G}(s) \Big|_{s=s_l^-}, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), \\ L_G^\Gamma(s) &= \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\bar{G}(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
A_0(s) &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s_l^0 - s), r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\
&\quad (L_\rho^+(\partial_\xi)G(s_l^0 - s), \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\
&\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)G(s_l^0 - s), \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), \\
&\quad (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s_l^0 - s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (s_l^0 = (\xi_l^0, 0), s \in S_0^+), \\
A^+(s) &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s_l^+ - s), r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\
&\quad (L_\rho^+(\partial_\xi)G(s_l^+ - s), \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\
&\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)G(s_l^+ - s), \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), \\
&\quad (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s_l^+ - s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (s \in S_0^+), \\
A^-(s) &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s_l^- - s), r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\
&\quad (L_\rho^+(\partial_\xi)G(s_l^- - s), \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\
&\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)G(s_l^- - s), \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), \\
&\quad (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s_l^- - s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (s \in S_0^-), \\
A^\Gamma(s) &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s_l^\Gamma - s), r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\
&\quad (L_\rho^+(\partial_\xi)G(s_l^\Gamma - s), \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\
&\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)G(s_l^\Gamma - s), \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), \\
&\quad (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s_l^\Gamma - s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (s \in S_0^\Gamma).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Тоді для задач з критеріями (3.38) та (3.39) запишемо спостереження у вигляді систем у вигляді:

$$A\bar{f} = U, \tag{3.64}$$

та

$$\int_{(\cdot)} A(s)\bar{f}(s)ds = U \tag{3.65}$$

відповідно.

Розв'язком системи (3.64) за критерієм

$$\|A\bar{f} - U\|^2 \rightarrow \min_{\bar{f}} \tag{3.66}$$

буде

$$\bar{f} = (\bar{f}_0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma) = A^T P_1^* U + \bar{v} - A^T P_1^* \bar{v}, \tag{3.67}$$

де

$$\bar{v} = \text{col}(v_0 \in R^{M_0}, v^+ \in R^{M^+}, v^- \in R^{M^-}, v^\Gamma \in R^{M^\Gamma}). \quad (3.68)$$

Єдиність розв'язку досягається при $\det(A^T A) > 0$, тоді

$$P_1 = AA^T, \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= A_0^T P_1^* (U - A\bar{v}) + v_0, \\ \bar{f}^+ &= A_+^T P_1^* (U - A\bar{v}) + v^+, \\ \bar{f}^- &= A_-^T P_1^* (U - A\bar{v}) + v^-, \\ \bar{f}^\Gamma &= A_\Gamma^T P_1^* (U - A\bar{v}) + v^\Gamma, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)\bar{G}^0(s))\Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_t^0 \in S_0}}, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), (L_\rho^+(\partial_\xi)\bar{G}^0(s))\Big|_{s=s_t^+}, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\ &\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)\bar{G}^0(s))\Big|_{s=s_t^-}, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\bar{G}^0(s))\Big|_{s=s_t^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \\ A_+ &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)\bar{G}^+(s))\Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_t^0 \in S_0}}, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), (L_\rho^+(\partial_\xi)\bar{G}^+(s))\Big|_{s=s_t^+}, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\ &\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)\bar{G}^+(s))\Big|_{s=s_t^-}, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\bar{G}^+(s))\Big|_{s=s_t^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \\ A_- &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)\bar{G}^-(s))\Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_t^0 \in S_0}}, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), (L_\rho^+(\partial_\xi)\bar{G}^-(s))\Big|_{s=s_t^+}, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\ &\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)\bar{G}^-(s))\Big|_{s=s_t^-}, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\bar{G}^-(s))\Big|_{s=s_t^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \\ A_\Gamma &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)\bar{G}^\Gamma(s))\Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_t^0 \in S_0}}, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), (L_\rho^+(\partial_\xi)\bar{G}^\Gamma(s))\Big|_{s=s_t^+}, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}), \\ &\quad (L_\rho^-(\partial_\xi)\bar{G}^\Gamma(s))\Big|_{s=s_t^-}, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}), (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\bar{G}^\Gamma(s))\Big|_{s=s_t^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Узгодженість розв'язку з початково-крайовими спостереженнями:

$$\varepsilon_f^2 = \min_{u(s)} \Phi_2 = \min_f \Phi_2 = U^T U - U^T P_1 P_1^* U. \quad (3.72)$$

3.4. Розв'язок задачі моделювання динаміки плити з дискретними спостереженнями при неперервних моделюючих факторах

Аналогічно до розв'язку системи (3.64), розв'язком системи (3.65) із критерієм

$$\left\| \int_{(C)} A(s) \bar{f}(s) ds - U \right\|^2 \rightarrow \min_{\bar{f}(s)} \quad (3.73)$$

буде

$$\bar{f}(s) = A^T(s) P^* U + \bar{v}(s) - A^T(s) P^* A_v, \quad (3.74)$$

де

$$P = \int_{S_0 \times \{0\}} [A_0(s)]^T A_0(s) ds + \int_{S_0^+} [A^+(s)]^T A^+(s) ds + \int_{S_0^-} [A^-(s)]^T A^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [A^\Gamma(s)]^T A^\Gamma(s) ds \quad (3.75)$$

$$A_v = \int_{S_0 \times \{0\}} [A_0(s)]^T v_0(s) ds + \int_{S_0^+} [A^+(s)]^T v^+(s) ds + \int_{S_0^-} [A^-(s)]^T v^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [A^\Gamma(s)]^T v^\Gamma(s) ds \quad (3.76)$$

$$\bar{v}(s) = \text{col}((v_0(s), s \in S_0 \times (-\infty, 0]), (v^+(s), s \in S_0^+), (v^-(s), s \in S_0^-), (v^\Gamma(s), s \in S_0^\Gamma)), \quad (3.77)$$

де $v_0(s), v^+(s), v^-(s), v^\Gamma(s)$ – довільні інтегровні в області зміни своїх компонент тривимірні вектор-функції.

Розв'язок єдиний при $\lim_{N \rightarrow \infty} \det[A^T(s_i)A(s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$, тоді

$$\bar{f}(s) = A^T(s) P^* U. \quad (3.78)$$

узгодженість цих розв'язків із початково-крайовими спостереженнями

буде:

$$\mathcal{E}_{\bar{f}(s)}^2 = \min_{u(s)} \Phi_2 = \min_{\bar{f}(s)} \Phi_2 = U^T U - U^T P P^* U. \quad (3.79)$$

Розділ 4. Комп'ютерно-аналітичне моделювання розв'язків задач динаміки пружних плит нульової товщини

Ми розглянули загальні відомості про динаміку пружних тіл (зокрема товстих пружних плит) та деякі математичні моделі, які дозволяють спростити задачу моделювання динаміки подібного тіла. Було наведено методи моделювання стану деякої абстрактної просторово розподіленої задачі за її дискретними, або неперервними початково-крайовими спостереженнями. Гарантується наявність розв'язку подібних моделей, оскільки він шукається за допомогою середньоквадратичного наближення. В цьому розділі описано комп'ютерну реалізацію даних моделей для розрахунку динаміки пружної мембрани, як часткового випадку товстої пружної плити. Для спрощення розрахунків та моделей, було введено деякі спрощення.

4.1. Постановки задачі зі спрощеннями

В даній задачі розглядатимемо динаміку пружної плити, яка має товщину значно меншу, ніж її інші лінійні розміри. Об'єктом дослідження буде мембрана, яка описується двовимірним замкненим контуром $\Gamma(\xi)$ в площині x_1x_2 . Товщиною знехтуємо і вважатимемо рівною нулю $h = 0$, тоді поперечна координата також буде рівна нулю $x_3 = 0$.

Відповідно до [6], динаміка мембрани визначається співвідношенням Ляме:

$$L(\partial_s)u(s) = f(s) \quad (4.1)$$

де $f(s) = \text{col}(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$ – зовнішньо-силові фактори.

Введемо до розгляду перехідну функцію (функція Гріна) $G(s-s')$, яка узгоджується з $L(\partial_s)$ співвідношенням:

$$L(\partial_s)G(s-s') = \Delta(s-s') \quad (4.2)$$

де $\Delta(s)$ – це дельта-функція Дірака.

Згідно з (3.10), розв'язок в представимо загальному вигляді:

$$u(s) = u_\infty(s) + u_0(s) + u_\Gamma(s), \quad (4.3)$$

де складові частини будуть визначені далі для різних типів спостережень.

Для задачі пружних зміщень, диференціальний оператор $L(\partial_s)$ має вигляд [6]:

$$L(\partial_s) = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - c^2 \partial_t^2 \quad (4.4)$$

А функція переходу $G(s-s')$ визначається як [6]:

$$G(s-s') = \frac{\delta(t + \frac{|\xi - \xi'|}{c} - t)}{|\xi - \xi'|}. \quad (4.5)$$

4.2. Загальний розв'язок задачі моделювання динаміки мембрани з неперервними спостереження

Розглянемо математичне моделювання динаміки мембрани за неперервними початково-крайовими спостереженнями виду (2.2), (2.3):

$$L_r^0(\partial_t)u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi = \xi_t^0 \in S_0}} = U_{rl}^0 (r = \overline{1, R_0}; l = \overline{1, L_0}), \quad (4.6)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = U_{\rho l}^\Gamma (\rho = \overline{1, R_\Gamma}; l = \overline{1, L_\Gamma}). \quad (4.7)$$

Для таких спостережень, складові частини загального розв'язку (4.3) визначаються, як (2.8), (2.16) – (2.18):

$$u_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s-s_m) f_m, \quad (4.8)$$

$$u_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0) f_m^0, \quad (4.9)$$

$$u_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) f_m^\Gamma. \quad (4.10)$$

В загальному випадку, спостереження несилові. Не накладаючи обмежень на їх кількість та якість, промодельюємо їх за допомогою силових функцій:

$$f^0(s), (s \in S^0 = \{(\xi, t) : \xi \in S_0, t \in [-\infty, 0]\}), \quad (4.11)$$

$$f^\Gamma(s), (s \in S^\Gamma = \{(\xi, t) : \xi \in R^2 \setminus S_0, t \in [0, T]\}), \quad (4.12)$$

визначених у точках $s_m^0 \in S^0$ ($m = \overline{1, M_0}$), $s_m^\Gamma \in S^\Gamma$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) значеннями $f_m^0 = f^0(s_m^0)$, $f_m^\Gamma = f(s_m^\Gamma)$.

Розв'язок шукатимемо наближаючи середньоквадратично, за критерієм:

$$\Phi = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left\| (L_r^0(\partial_t)u(s))|_{t=0} - U_\Gamma^0(\xi) \right\|^2 d\xi + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} \left\| (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)) - U_\rho^\Gamma(s) \right\|^2 ds \rightarrow \min_{\bar{f}}. \quad (4.13)$$

Згідно з (3.49), розв'язок задачі еквівалентний середньоквадратичному оберненню системи:

$$B(s)\bar{f} = \bar{U}(s), \quad (4.14)$$

де

$$\begin{aligned} B_{11}(\xi) &= \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0)), m = \overline{1, M_0}, r = \overline{1, R_0}), \\ B_{12}(\xi) &= \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma)), m = \overline{1, M_\Gamma}, r = \overline{1, R_0}), \\ B_{21}(\xi) &= \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s - s_m^0)), m = \overline{1, M_0}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \\ B_{22}(\xi) &= \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s - s_m^\Gamma)), m = \overline{1, M_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

З урахування того, що множина оптимальних векторів моделюючих значень визначається як:

$$\Omega_f = \{ \bar{f} : \int_{(\bullet)} \left\| (B(s)\bar{f} - \bar{U}(s)) \right\|^2 ds \rightarrow \min_{\bar{f}} \} \quad (4.16)$$

вектор моделюючих значень \bar{f} , згідно (2.91), (3.51) визначається як:

$$\bar{f} = P^+ B_U + \bar{v} - P^+ P \bar{v}, \quad (4.17)$$

де $\bar{v} = col(v_0 \in R^{M_0}, v_\Gamma \in R^{M_\Gamma})$ – довільний вектор.

Складові (4.17) визначаються як:

$$B_U = \int_{(\bullet)} B^T(s) U(s) ds, \quad (4.18)$$

$$P = \int_{(\bullet)} B^T(s) B(s) ds, \quad (4.19)$$

а знаком «+» позначається операція псевдообернення матриці.

Розв'язок, з даними моделюючими векторами f^0 та f^Γ , узгоджується зі спостереженнями з точністю:

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi = \min_{\substack{\bar{f} \in \Omega_f \\ \text{ⓐ}}} \int \|B(s) \bar{f} - U(s)\|^2 ds = U^2 - B_U^T P_2 P_2^+ B_U. \quad (4.20)$$

4.3. Загальний розв'язок задачі моделювання динаміки мембрани з дискретними спостереження за неперервними моделюючими факторами

Розглянемо динаміку мембрани з дискретними початково-крайовими спостереженнями виду:

$$L_r^0(\partial_t) u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ \zeta = \zeta_l^0 \in S_0}} = U_{rl}^0 (r = \overline{1, R_0}; l = \overline{1, L_0}), \quad (4.21)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = U_{\rho l}^\Gamma (\rho = \overline{1, R_\Gamma}; l = \overline{1, L_\Gamma}). \quad (4.22)$$

Складові загального розв'язку (4.3) згідно з (2.10) – (2.12) визначаються як:

$$u_\infty(s) = \int_{s_0^\Gamma} G(s-s') f(s') ds', \quad (4.23)$$

$$u_0(s) = \int_{s^0} G(s-s') f^0(s') ds', \quad (4.24)$$

$$u_{\Gamma}(s) = \int_{S^{\Gamma}} G(s-s') f^{\Gamma}(s') ds'. \quad (4.25)$$

Розв'язок задачі (4.1) зі спостереженнями (4.21), (4.22) згідно з (2.53), буде еквівалентний до середньоквадратичного обернення системи:

$$\int_{(\bullet)} A(s) \bar{f}(s) ds = \bar{U}, \quad (4.26)$$

(де інтегрування розуміється по області визначення аргументу)

за критерієм:

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ \zeta=\zeta_t^0}} - U_{rl}^0)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{L_{\Gamma}} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s) \Big|_{s=s_l^{\Gamma}} - U_{\rho l}^{\Gamma})^2 \rightarrow \min_{u(s)}, \quad (4.27)$$

Складові системи (4.26) визначаються як:

$$\bar{f}(s) = col((f^0(s), s \in S^0), (f^{\Gamma}(s), s \in S^{\Gamma})), \quad (4.28)$$

$$\bar{U} = col(((U_{rl}^0, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), ((U_{\rho l}^{\Gamma}, l = \overline{1, L_{\Gamma}}), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}})),$$

$$A(s) = \begin{pmatrix} (A_{11}(s), s \in S^0) & (A_{12}(s), s \in S^{\Gamma}) \\ (A_{21}(s), s \in S^0) & (A_{22}(s), s \in S^{\Gamma}) \end{pmatrix},$$

$$A_{1i}(s') = col((L_r^0(\partial_t)G(s-s') \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_t^0}}, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), \quad (4.29)$$

$$A_{2i}(s') = col((L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})G(s-s') \Big|_{s=s_l^{\Gamma}}, l = \overline{1, L_{\Gamma}}), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}})$$

$$s' \in \begin{cases} S^0, i = 1 \\ S^{\Gamma}, i = 2 \end{cases}$$

А розв'язком (4.1), (4.21), (4.22), оптимальним за критерієм

$$\left\| \int_{(\bullet)} A(s) \bar{f}(s) ds - \bar{U} \right\|_{f(s)}^2 \rightarrow \min, \quad (4.30)$$

згідно (2.58) (3.74), буде:

$$\bar{f}(s) = A^T(s) P_1^+ \bar{U} + \bar{v}(s) - A^T(s) P_1^+ A, \quad (4.31)$$

де

$$\bar{v}(s) = col((v^0(s), s \in S^0), (v^{\Gamma}(s), s \in S^{\Gamma})) \quad (4.32)$$

– довільна вектор-функція, тотожна нулю, якщо $\det P_1 > 0$, а складові (4.31)

визначаються як

$$P_1 = \int_{(\bullet)} A(s)A^T(s)ds, \quad (4.33)$$

$$A_v = \int_{(\bullet)} A(s)\bar{v}(s)ds. \quad (4.34)$$

4.4. Загальний розв'язок задачі моделювання динаміки мембрани з дискретними спостереження за векторами значень моделюючих факторів

Якщо спостереження моделюються не за допомогою вектор функцій $f^0(s)$ та $f^\Gamma(s)$, а векторами значень f_m^0 ($m = \overline{1, M_0}$) та f_m^Γ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) цих функцій у відповідних точках:

$$\bar{u}^0 = \text{col}(u_m^0, m = \overline{1, M_0}), \quad (4.35)$$

$$\bar{u}^\Gamma = \text{col}(u_m^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma}), \quad (4.36)$$

то, складові загального розв'язку згідно з (2.16) – (2.18), матимуть вигляд:

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s - s_m)u_m, \quad (4.37)$$

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0)u_{0m}, \quad (4.38)$$

$$y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma)u_{\Gamma m}, \quad (4.39)$$

а саму задачу, згідно (2.20), можна звести до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь:

$$A\bar{u} = \bar{Y}, \quad (4.40)$$

і розв'язувати за середньоквадратичним критерієм:

$$\|A\bar{u} - \bar{Y}\| \rightarrow \min_u \quad (4.41)$$

де складові визначаються як:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)) \Big|_{t=0, \xi=\xi_l^0}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), \\ A_{12} &= \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)) \Big|_{t=0, \xi=\xi_l^0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), \\ A_{21} &= \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s_m^0)) \Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_0}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \\ A_{22} &= \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s_m^\Gamma)) \Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$Y_0 = \text{col}((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)) \Big|_{t=0, x=x_l^0}, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), \quad (4.44)$$

$$Y_\Gamma = \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)) \Big|_{x=x_l^\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

Тоді розв'язок, згідно (2.29), матиме вигляд:

$$\bar{u} = A^+(\bar{Y} - Av) + v, \quad (4.45)$$

де $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_\Gamma \end{pmatrix}$ – довільний $(M_0 + M_\Gamma)$ -вимірний вектор, рівний нулю, при

$\det A^T A > 0$.

Точність узгодження даного розв'язку зі спостереженнями буде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)) \Big|_{t=0, x=x_l^0} - Y_{rl}^0)^2 + \\ &+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 = \\ &= \min_{y(s)} \Phi_2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi_2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.5. Часткові випадки

Деякі часткові задачі моделювання динаміки мембрани зі спрощеною постановкою, викликають необхідність розгляду через можливість їх прикладного використання у моделюванні конструкцій, складовою яких є

мембрана. Дві такі постановки наведемо у цій роботі, виконаємо моделювання динаміки однієї з них на комп'ютерній моделі.

1. У першій постановці задачі розглянемо пружний розтяг мембрани, який характеризується зміщенням точок у площині x_1x_2 , тобто відхиленнями $u_1(s)$, $u_2(s)$, спричиненими силами $f_1(s)$ та $f_2(s)$.

У вектор-функціях $f(s)$ та $u(s)$, складові поперечних сил $f_3(s)$ та поперечних відхилень $u_3(s)$ відсутні. Це значно спрощує оператор $L(\partial_s)$:

$$L(\partial_s) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_{x_1}^2 + \mu\partial_{x_2}^2 - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} \\ (\lambda + \mu)\partial_{x_2}\partial_{x_1} & (\lambda + 2\mu)\partial_{x_2}^2 + \mu\partial_{x_1}^2 - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

2. У другому випадку розглянемо динамічні коливання мембрани вздовж осі x_3 , із зміщеннями $u_3(s)$, викликаними силовими факторами $f_3(s)$.

У вектор-функціях $f(s)$ та $u(s)$, складові силових факторів $f_1(s)$, $f_2(s)$ та зміщень $u_1(s)$, $u_2(s)$ в площині x_1x_2 будуть відсутні. Це спрощує диференціальний оператор $L(\partial_s)$:

$$L(\partial_s) = \mu(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - \rho\partial_t^2. \quad (4.48)$$

В обох випадках, відсутність деяких компонент у диференціальному операторі спростить розрахунок функції $G(s-s')$, $u(s)$ та її компонентів.

Далі виконаємо моделювання та комп'ютерну реалізацію другого випадку.

4.6. Комп'ютерна реалізація часткового розв'язку при дискретних спостереженнях

Для демонстрації правильності моделі та апробації результатів її роботи, було розроблено дві програми для моделювання динаміки мембрани. Перша представляє собою повноцінну програму з графічним інтерфейсом, дозволяє проводити моделювання лише за дискретними спостереженнями. Для проведення розрахунків за неперервними спостереженнями, було написано

інший модуль, який являє собою бібліотеку для Python. Дане програмне забезпечення може працювати зі значно розширеними постановками задачі, відносно першого.

Далі буде описано моделі, вхідні дані, представлення результату та особливості роботи для програмного забезпечення, яке моделює динаміку мембрани за дискретними спостереженнями.

4.6.1. Постановка задачі з дискретними спостереженнями для комп'ютерної реалізації

Мембрану представимо у вигляді прямокутника:

$$S_0 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq X_1, 0 \leq x_2 \leq X_2\} \quad (4.49)$$

Поперечні зміщення $u_3(s)$ визначаються рівнянням (4.1), де

$$s = (\xi, t) = (x_1, x_2, t), \quad u(s) \equiv u_3(s), \quad f(s) = f_3(s), \quad (4.50)$$

$$L(\partial_s) = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - c^2 \partial_t^2, \quad (4.51)$$

де $c^2 = 1$.

Функція Гріна буде представлена у вигляді:

$$G(s - s') = \frac{\delta(t' + \frac{|\xi - \xi'|}{c} - t)}{|\xi - \xi'|}. \quad (4.52)$$

Функцію $u(s)$ побудуємо так, щоб вона задовольняла початково-крайовим спостереженням:

$$u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ s=\xi_l^0 \in S_0}} = U_l^0 \quad (l = \overline{1, L_0}), \quad (4.53)$$

$$u(s) \Big|_{s=s_l^T \in \Gamma \times [0, T]} = U_l^T \quad (l = \overline{1, L_T}). \quad (4.54)$$

Тоді розв'язком буде:

$$u(s) = u_\infty(s) + u_0(s) + u_\Gamma(s), \quad (4.55)$$

де

$$u_{\infty}(s) = \int_{s_0} G(s-s')f(s')ds', \quad (4.56)$$

$$u_0(s) = \int_{s^0} G(s-s')f^0(s')ds', \quad (4.57)$$

$$u_{\Gamma}(s) = \int_{s^{\Gamma}} G(s-s')f^{\Gamma}(s')ds'. \quad (4.58)$$

Для комп'ютерної реалізації, за спостереження, візьмемо значення функції:

$$u(s) = 10^{-3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi(1.8 \cdot x_1 - X_1)}{X_1}\right) + 1 \right] \left[\cos\left(\frac{\pi(1.8 \cdot x_2 - X_2)}{X_2}\right) + 1 \right] \sin \omega t \quad (4.59)$$

в точках спостереження, де $X_1 = 2, X_2 = 2, \omega = 1$.

4.6.2. Опис комп'ютерної реалізації

Програмний комплекс являє собою веб-сервер із зв'язком за допомогою HTTP та веб інтерфейсом у браузері. Це дозволяє використовувати програмне забезпечення на будь-яких сучасних електронних пристроях, а також використовувати даний сервер для власних обчислень у задачах. Комплекс написаний на Java із використанням Python для розрахунків. Це дозволяє обробляти велику кількість клієнтських підключень та використовувати потужні бібліотеки Python для розрахунків.

4.6.3. Інтерфейс

Користувачу пропонується на вибір декілька прикладів вхідних даних для демонстрації роботи ПЗ, або ввести задачу самостійно (рис.1). Спочатку необхідно ввести з клавіатури постановку задачі: константи Ляме (рис.2а), розмірності мембрани (рис.2б) та відрізок часу. Потім вибрати функцію та/або ввести її параметри, якщо це передбачено (рис.2в та рис.2б). Зауважимо, що дані поля заповнені допустимими значеннями автоматично, а також здійснюється перевірка введених даних і повідомляється про помилки введення.

Виберіть постановку задачі

Вибрати приклад

Приклад 1 ▾ Вибрати

Ввести самостійно

Рис. 1 Вибір постановки задачі

Введіть константи Ляме

$\lambda =$

$\mu =$

Рис. 2а Ввід констант Ляме

Введіть розмірність мембрани та проміжок часу

$X_1 =$ $x \in [0, X_1]$

$X_2 =$ $y \in [0, X_2]$

$T =$ $t \in [0, T]$

Введіть характеристику "швидкості" часу (константа при t)

$\Omega =$

Рис. 2б Введення характеристик мембрани

Задайте динаміку мембрани

Вибрати функцію зі списку

f1 ▾

Ввести функцію самостійно

Рис. 2в Вибір функції

Для демонстрації обираємо данні та функцію (4.59), описані вище, в розділах 4.3, 4.4. Після цього необхідно ввести точки початкових та крайових

спостережень (рис.3а) виду (4.21), (4.22). Це можна зробити: а) з клавіатури (рис.3б); б) графічно: натиснувши мишкою у відповідній точці області для вводу (рис.3в). Час вводиться пересуванням повзунка. При цьому, точка, введена мишкою буде записана у поля для ручного вводу координат і буде обчислено значення раніше заданої функції в даній точці. Для точного вводу точок таким способом, координати точки, в якій знаходиться вказівник миші, відображаються в лівому верхньому кутку. Якщо введена користувачем точка не належить ОДЗ, або була вже додана, користувачу буде показано повідомлення з попередженням. Якщо введені точки не викликають помилок, користувач додає їх, натиснувши відповідну кнопку. Якщо точка була додана помилково, її можна видалити. Для зручності, точка, координати якої введено у відповідні поля, відображається червоним кольором, а точки, додані для обчислень – жовтим.

Області графічного вводу мають наступні особливості, в залежності від типу точок:

1. в області для початкових точок координата часу зафіксована, а повзуном змінити часу відсутній;
2. в області для крайових спостережень, клік лівою кнопкою миші обирає найближчу граничну точку.

Далі користувачу пропонується додати збурення на спостереження (рис.4).

Тепер необхідно ввести точки, в яких будуть моделюватися спостереження. Сумарна кількість спостережень повинна співпадати з сумарною кількістю моделюючих точок. Їх ввід здійснюється аналогічно до точок спостереження. Далі вказано особливості, в залежності від типу точок.

1. Для моделювання початкових збурень: часова координата точок повинна бути до 0. Щоб захистити користувача від помилок вводу, область обмежена $t \in [-T, 0]$.

Введіть точки початкових спостережень

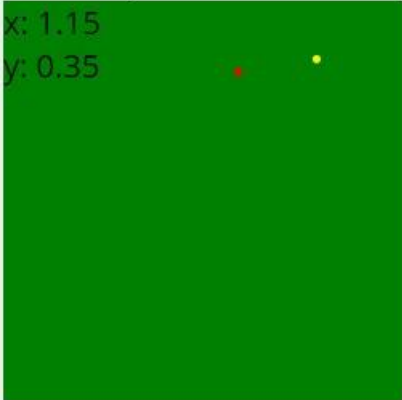
x =

y =

t =

f =

x: 1.15
y: 0.35



Точок обрано: 1

#0: x: 1.54 y: 0.27 t: 0

Рис. 3а Введення точок

x =

y =

t =

f =

**Рис. 3б Введення точок з
клавіатури**

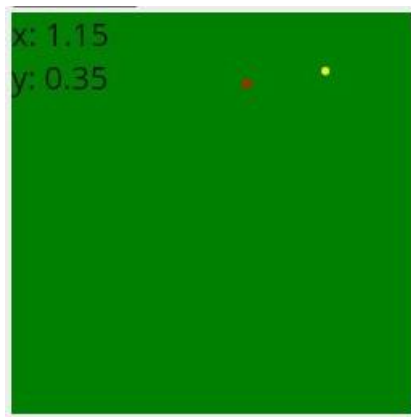


Рис. 3в Введення точок графічно

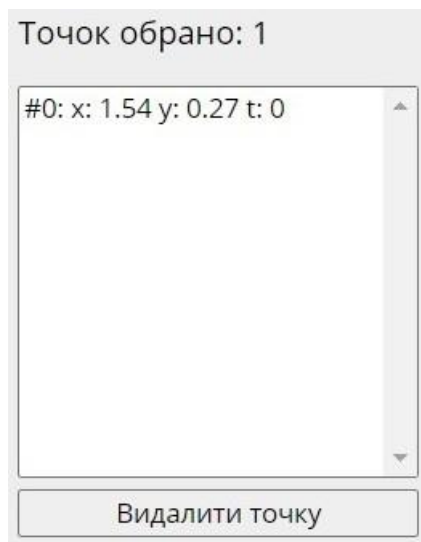


Рис. 3г Список обраних точок

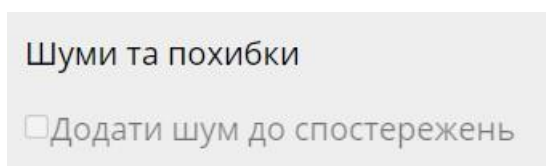


Рис. 4 Додача збурення

2. Для моделювання крайових збурень, обрані точки повинні знаходитись за областю $S_0 = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq X_1, 0 \leq x_2 \leq X_2\}$. Щоб зменшити помилки користувача, дану область розширили на 1 в кожную сторону та виключили область S_0 , тобто $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2): -1 \leq x_1 \leq X_1 + 1, -1 \leq x_2 \leq X_2 + 1, (x_1, x_2) \notin S_0\}$. При виборі

точки всередині S_0 , користувач побачить попередження що точка не належить ОДЗ.

4.6.4. Результати роботи програми

Користувачу пропонується перевірити введені дані (рис.5), після чого, відправити їх на сервер для розрахунків. Якщо дані неправильні, користувач побачить повідомлення про помилку, інакше – отримає результат обчислень. В якості результату, користувачу передаються відхилення змодельованої у точках спостереження (рис.6), середньоквадратичне відхилення (рис.6) та дані, які можуть бути використані для відображення інших результатів обчислення. Застосувавши ці дані, будуються графіки змодельованої функції в усі моменти часу, коли були спостереження (рис. 7). Окрім функції, позначаються спостереження, тому користувач може візуально оцінити наближення розв'язку до спостережень.

▼ Контроль спостережень для розв'язанні задачі

Оновити дані

$\lambda = 1$
 $\mu = 1$
 $x_1 = 2$
 $x_2 = 2$
 $t = 8$
 $\omega = 1$
 $f = 1$

$u_{z_size} = 1$
 $u_{g_size} = 1$
 $m_{z_size} = 1$
 $m_{g_size} = 1$
 $noise = false$

Точки початкових спостережень:
1.54 0.27 0

Точки граничних спостережень:
2.00 0.80 1.64

Точки для до початкових спостережень:
1.71 1.32 -1.79

Точки для поза граничних спостережень:
0.88 -0.58 2.32

Відправити на сервер

Рис. 5 Контроль даних для обробки

Оцінка розв'язку задачі в точках спостереження			
Точка	Спостереження	Змодельоване значення	Різниця
1.54 0.27 0	0.0	0.6111444389254178	0.6111444389254178
2.00 0.80 1.64	0.3119716222397842	0.37004609912393344	0.05807447688414924

Середньоквадратичне відхилення в точках спостереження

0.669218915809567

Рис. 6 Результати обчислень (таблиця спостережень)

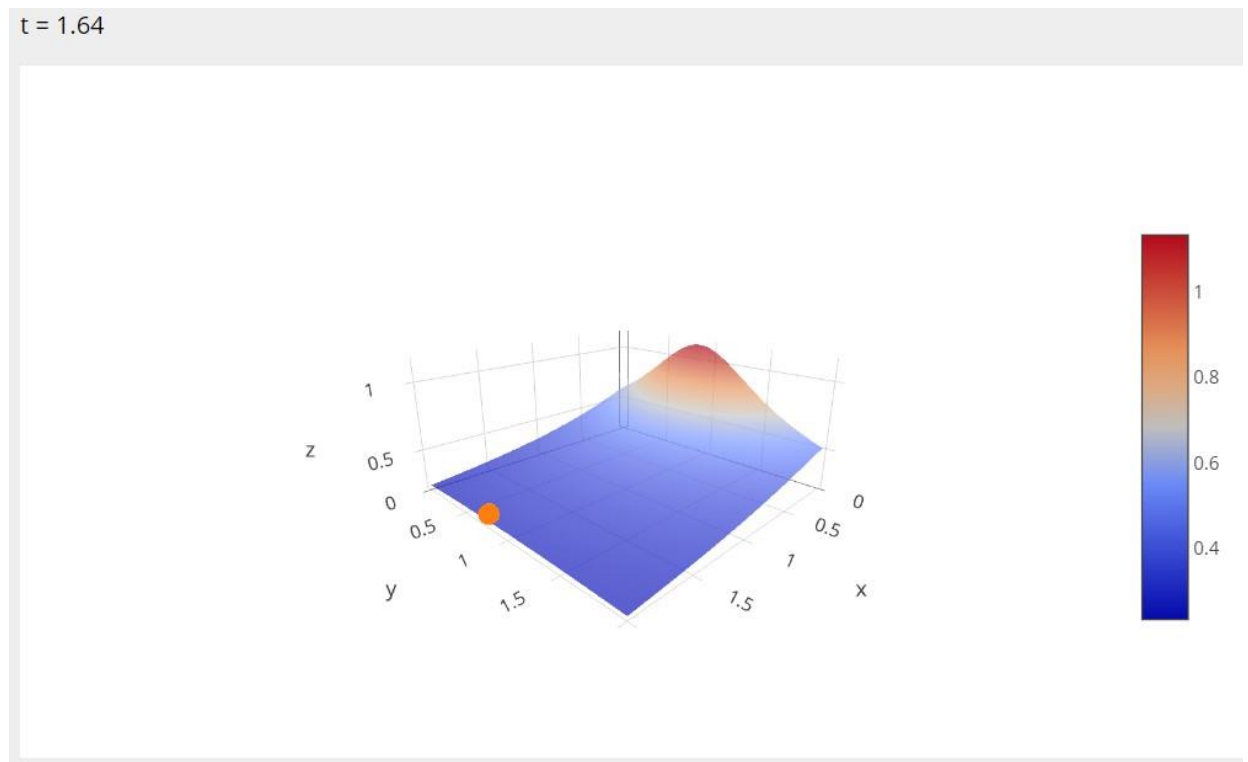


Рис. 7 Графік в момент $t = 1.64$

4.6.5. Перевірка на експериментальних даних

Тепер перевіримо роботу програми на більшій кількості спостережень. Розмірність мембрани та інші дані залишимо з минулого прикладу, а для спостережень візьмемо 4 початкових та 4 крайових точки. Для них, відповідно по 4 точки для моделювання. Дані, використані в цьому експерименті, зображено на рис. 8 – рис. 11, а в програмі їх можна завантажити, обравши «приклад 3» у виборі постановки задачі.

Введіть точки початкових спостережень

x =

y =

t =

f =

Точок обрано: 4

```
#0: x: 0.74 y: 0.36 t: 0
#1: x: 1.61 y: 0.65 t: 0
#2: x: 1.6 y: 1.52 t: 0
#3: x: 0.4 y: 1.59 t: 0
```

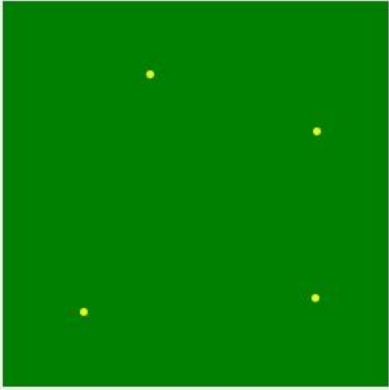


Рис. 8

Введіть точки крайових спостережень

x =

y =

t =

f =

Точок обрано: 4

```
#0: x: 2 y: 0.3 t: 2.85
#1: x: 2 y: 0.9 t: 2.85
#2: x: 2 y: 1.47 t: 2.85
#3: x: 1.19 y: 2 t: 2.85
```

Час

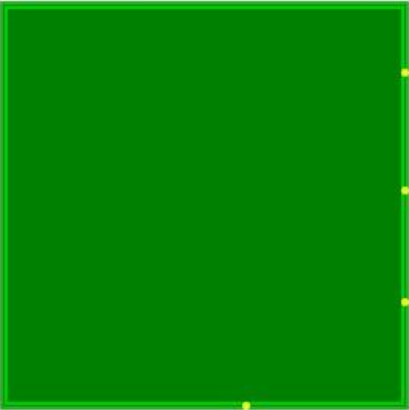


Рис. 9

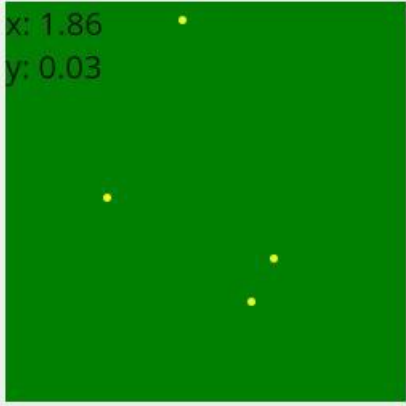
Введіть точки, в яких моделюються початкові спостереження (до початкового моменту часу)

x =

y =

t =

x: 1.86
y: 0.03



Час

Точок обрано: 4

```
#0: x: 0.86 y: 0.07 t: -0.01
#1: x: 1.21 y: 1.48 t: -0.01
#2: x: 1.32 y: 1.26 t: -0.01
#3: x: 0.49 y: 0.96 t: -0.01
```

Рис. 10

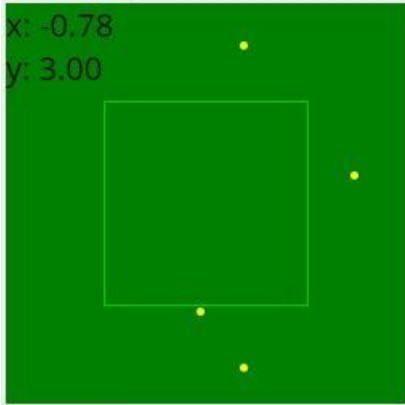
Введіть точки, в яких моделюються крайові спостереження (за межами)

x =

y =

t =

x: -0.78
y: 3.00



Час

Точок обрано: 4

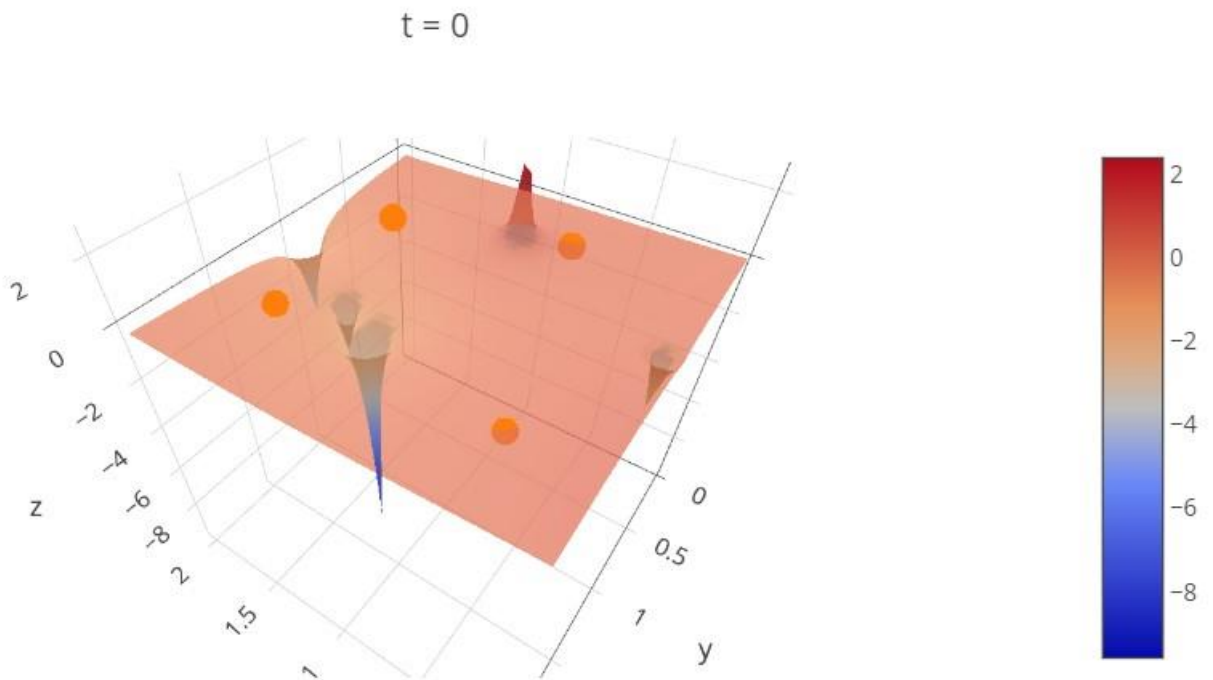
```
#0: x: 1.34 y: -0.62 t: 1.21
#1: x: 2.44 y: 0.68 t: 1.21
#2: x: 1.34 y: 2.6 t: 2.57
#3: x: 0.9 y: 2.04 t: 2.57
```

Рис. 11

Оцінка розв'язку задачі в точках спостереження			
Точка	Спостереження	Змодельоване значення	Різниця
0.74 0.36 0	0.0	0.04897032346347241	0.04897032346347241
1.61 0.65 0	0.0	-0.014135357353005362	0.014135357353005362
1.6 1.52 0	0.0	-0.11739376262660822	0.11739376262660822
0.4 1.59 0	0.0	0.323195136110802	0.323195136110802
2 0.3 2.85	0.018595135162330793	0.11328043510627941	0.09468529994394861
2 0.9 2.85	0.10031296273065755	0.18966317496827176	0.0893502122376142
2 1.47 2.85	0.08388393596642582	0.21229168385994895	0.12840774789352313
1.19 2 2.85	0.10844668708130599	0.9879183588169584	0.8794716717356524

Середньоквадратичне відхилення в точках спостереження
1.6956095113646263

Рис. 12 Таблиця результатів обчислення

Рис. 13. Графік в момент $t = 0$

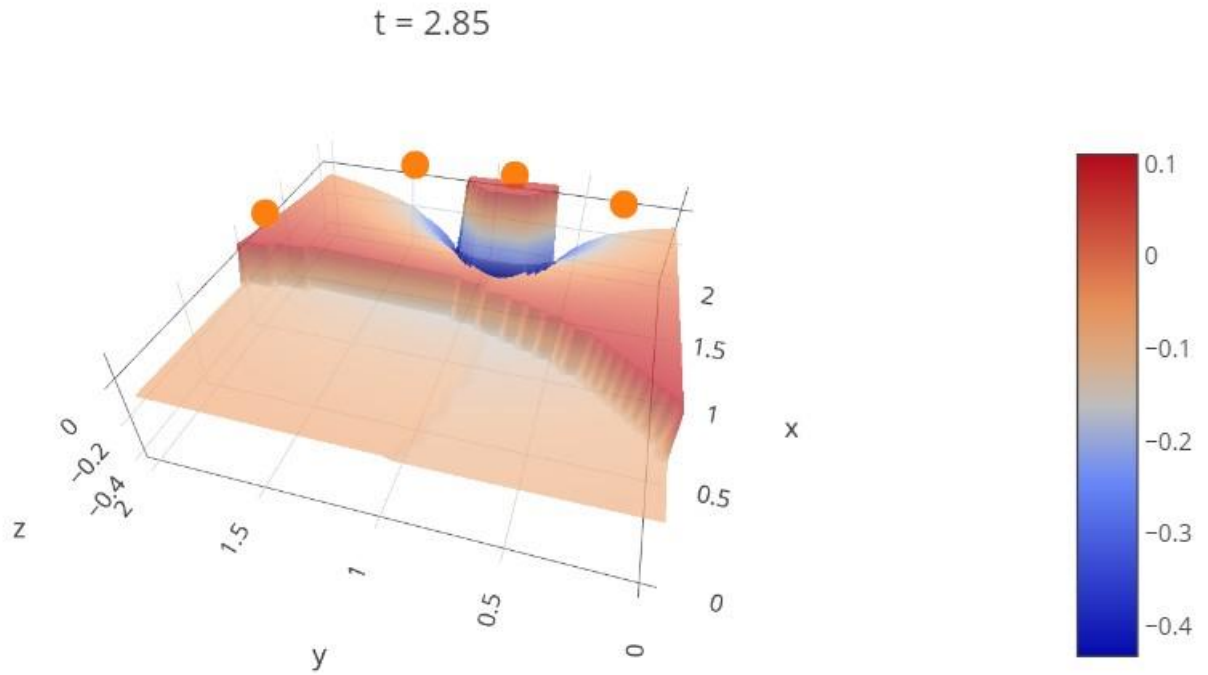


Рис. 14. Графік в момент $t = 2.85$

Як видно з графіків, у точках спостереження, змодельовані та спостережувані значення знаходяться на близькій відстані. Це ж саме підтверджується з таблиці оцінки розв'язку та середньоквадратичного наближення.

4.7. Комп'ютерна реалізація часткового розв'язку при неперервних спостереженнях

Для моделювання динаміки мембрани за неперервними спостереженнями, було створено бібліотеку для Python, а також написано програму-оболонку для демонстрації роботи моделі. Модуль має можливість графічного представлення результатів. Далі буде описано можливості, особливості, обмеження даного програмного забезпечення, а також продемонстровано приклади його роботи.

4.7.1. Опис програми та вхідних даних

Для розгляду задачі вимагається задати:

- Просторово-часову області, на якій будемо розглядати задачу. Подається областю S_0 у вигляді опуклого багатокутника та часовим обмеженням T для відрізка часу виду $[0, T]$.
- Функцію спостережень, яка задається лямбда-функцією від параметрів (x, y, t) .
- Перехідну функцію $G(s-s')$, яка аналогічно до функції спостережень задається лямбда-функцією від параметрів (x, y, t) .
- набір областей спостереження у вигляді списку, де кожна область задається многокутником який є підмножиною S_0 та часовим відрізком $[t_0, t_1]$, тобто компактною просторово-часовою множиною. Початкові спостереження мають часовий часову множину у вигляді $[0, 0]$ та розташовані у списку перед граничними спостереженнями.
- набір точки моделювання у вигляді списку, де розташовані точки, значеннями в яких, моделюватиметься передісторія та зовнішній вплив у теперішні моменти часу. Точки моделювання впливу

передісторії мають час $T < 0$, розташовані в середині області S_0 , записані на початку списку. Точки моделювання зовнішнього впливу в реальному (теперішньому) часу, розташовані поза областю S_0 , але в проміжку часу $[0, T]$.

Програма має функцію представлення результату у вигляді тривимірного графіка в довільний момент часу.

Висновки

В роботі було оглянуто загальні відомості з теорії пружності зокрема, теорію плит Кірхгофа-Лява. Вивчено методи моделювання фізичних процесів та їх адаптацію для моделювання поля динамічних відхилень товстої пружної плити. Для часткової задачі моделювання динаміки товстої пружної плити – у випадку нехтування товщиною та перетворенню плити на мембрану, побудовано та апробовано методи моделювання динаміки цієї часткової задачі. Розроблено два варіанти програмного забезпечення для перевірки моделей. Результати роботи в співавторстві з науковим керівником опубліковані в міжнародному науково-технічному журналі “Проблеми керування та інформатики”.

Список джерел посилання

- [1]: Стоян В.А. Лабораторне моделювання просторово розподілених динамічних систем: навчальний посібник / В. А. Стоян – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2021 – 202 с.
- [2]: Стоян В.А. Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит: монографія / В.А. Стоян. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. — 179 с.
- [3]: Теорія плит Кірхгофа-Лява; [Електронний ресурс] // Сайт Вікіпедія. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_плит_Кірхгофа-Лява
- [4]: Теорія пластин Міндліна-Рейснера; [Електронний ресурс] // Сайт Вікіпедія. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_пластин_Міндліна-Рейснера
- [5]: Пружність; [Електронний ресурс] // Сайт Вікіпедія. – Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Пружність>
- [6]: Про вироджений випадок тривимірної задачі динаміки товстих пружних плит. / Стоян В.А., Черній Д.І., Волощук С.Д., Стоян А.О. // Проблеми керування та інформатики. – 2022. – № 1. – С. 11–25.

АНОТАЦІЯ

Розв'язані складні задачі тривимірної теорії пружності для товстих пружних плит з довільною геометрією їх бічної поверхні. Побудовано розв'язки початково-крайових задач динаміки товстих пружних плит за зовнішньо-динамічними збуреннями їх поверхонь та торців при неповноті інформації про такі збурення. Розглянуто випадки побудови поля динамічних зміщень плити за дискретних та неперервно визначених спостереженнях за об'єктом. Враховано неоднозначність розв'язку. Отримані математичні результати протестовані на спрощених моделях.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ
Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр



Ім'я користувача:
Шатирко Андрій ФКомпНаук
ID перевірки:
1011546126
Дата перевірки:
11.06.2022 14:17:02 EEST
Тип перевірки:
Doc vs internet + Library
Дата звіту:
11.06.2022 14:22:02 EEST
ID користувача:
100007163

Назва документа: Стоян А Диплом Prerage
Кількість сторінок: 69 Кількість слів: 12624 Кількість символів: 80819 Розмір файлу: 1.30 MB ID файлу: 1011417003

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

16.5%

Схожість

Найбільша схожість: 8.18% з джерелом з Бібліотеки (ID файлу: 1002655186)

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнено

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнено

0%

Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Закінчені символи

Підозріле форматування

Експертна оцінка роботи науковим керівником: *Зваляючи на роботу виконавця самостійно і повністю відповідала всім принципам доброчесності. На виконанні дотримана вроджені кваліфікації. Робота рекомендується до захисту на ДЕК.*

Науковий керівник:

Шатирко
(підпис)

Стоян Р.А.
(ПІБ)

Оператор:

Шатирко
(підпис)

А.В.Шатирко
(ПІБ)

ВІДГУК

на випускню кваліфікаційну роботу
студента IV курсу факультету КНК (кафедра МСС)

СТОЯНА АРСЕНА ОЛЕКСАНДРОВИЧА “МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ”

Випускна кваліфікаційна робота “Математичне моделювання динаміки товстих пружних плит” присвячена побудові математичних моделей та розв’язанню задач динаміки тривимірного пружного об’єкту з виредженою геометрією за однією з просторових координат для випадку, коли динаміка ця досліджується за умов неповноти інформації про зовнішньо динамічні умови функціонування його. Це складна математична проблема досліджувана протягом останніх десятиліть розвинута тривимірну теорію пружності та його теорії еластодинаміки пружних пластин і оболонок. Чому? Тривимірна постановка задачі; вихідні співвідношення тривимірної теорії пружності складні й громіздкі; початкові та просторові умови сформулювати і врахувати при розв’язанні задач важко. Тому і задачі по дослідженню динаміки товстих пружних плит в тривимірній постановці практично не розв’язувалися.

В роботі Стояна А. О. запропоновано методику переходу від класично відомих тривимірних рівнянь теорії пружності до їх інтегральних еквівалентів, ядром яких є передатна функція Гріна нескінченної просторово-часової області. Остання і дозволила аналітично описати ефект впливу початково та поверхнево розподілених розподілених динамічних збурень на компоненти поля пружнодинамічних зміщень точок плити не залежно від кількості та якості таких збурень. Далі останню було використано для побудови розв’язків початково-крайових задач динаміки пружної плити за умов неповноти інформації про об’єм та характер зовнішньо-динамічних збурень.

Особливістю роботи є те, що запропоновані в ній математичні результати програмно реалізовані і протестовані на спрощеній моделі товстої пружної плити – на пружній мембрані. При цьому реалізовані розв’язки початково-крайових задач динаміки пружної мембрани, зовнішнє збурення якої визначається дискретно та неперервно заданими спостереженнями за станом мембрани.

Робота зроблена велика. Студент Стоян А. О. проявив уміння працювати як на математичному, так і на програмному рівні. Отримані в роботі теоретичні та практичні результати в співавторстві з науковим керівником опубліковані в міжнародному науково-технічному журналі “Проблеми керування та інформатики”.

Вважаю, що випускна кваліфікаційна робота Стояна А. О. “Математичне моделювання динаміки товстих пружних плит” сповна заслуговує на саму високу оцінку ДЕК.

Науковий керівник роботи
доктор ф.-м. наук, професор



Стоян В. А.

РЕЦЕНЗІЯ

на випускнї кваліфікаційнї роботу
студента IV курсу факультету КНК (кафедра МСС)
**Стояна Арсена Олександровича “Математичне моделювання динаміки
товстих пружних плит”**

Випускна кваліфікаційна робота Стояна А. О. “Математичне моделювання динаміки товстих пружних плит” складається з чотирьох розділів, доповнених вступом, описом використаної літератури та висновками.

В перших двох розділах автор дає огляд основних положень класичної теорії пружності та використання їх в розв’язанні задач динаміки пружних пластин в двовимірній та напівтривимірній постановках. Дається короткий аналіз прореферованих підходів до побудови та розв’язання моделей динаміки тонких пружних пластин і плит, окреслюються їх недоліки та формуються проблеми наступного наукового дослідження.

В третьому розділі роботи будуються математичні моделі поля пружних динамічних зміщень точок товстої пружної плити за відомих зовнішньо-динамічних збурень їх поверхонь та торців. З використанням останніх, пропонуються розв’язки початково-крайових задач динаміки товстих пружних плит, які перебувають в умовах неповноти інформації про зовнішньо-динамічні збурення граничних та торцевих поверхонь. Розглядається випадок побудови поля динамічних зміщень точок плити при дискретних та неперервно визначених спостереженнях за нею. Задачі математично некоректні, можуть мати одне (або кілька) наближень до розв’язку, що теж враховується автором роботи.

В четвертому розділі рецензованої роботи, отримані математичні розв’язки розглядуваних задач тестуються програмно на прикладі динаміки пружної плити нульової товщини – мембрани. Тестуюча програма має зручний та універсальний інтерфейс постановки задачі на комп’ютері та перегляду і аналізу результатів її роботи. Наведені в роботі числові реалізації та розрахунки підтверджують правильність отриманих в роботі математичних результатів.

Випускна кваліфікаційна робота Стояна А. О. “Математичне моделювання динаміки товстих пружних плит” написана грамотно, оформлена згідно вимог ДЕК, а викладені в ній результати можуть бути оцінені на “відмінно”.

Доктор фіз.-мат. наук,



професор кафедри ДО

Ігор Самойленко