Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра обчислювальної математики

Випускна кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня магістра

за спеціальністю 113 Прикладна математика

на тему:

ЕКСТРАГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ РІВНОВАГИ ВИРОБНИЦТВА ТА СПОЖИВАННЯ

ВИКОНАВ СТУДЕНТ 2-ГО КУРСУ

КРУГЛИЙ ОСТАП АНДРІЙОВИЧ ____________________

НАУКОВИЙ КЕРІВНИК:

ПРОФЕСОР

СЕМЕНОВ ВОЛОДИМИР ВІКТОРОВИЧ ____________________

ЗАСВІДЧУЮ, ЩО В ЦІЙ РОБОТІ НЕМАЄ ЗАПОЗИЧЕНЬ З ПРАЦЬ ІНШИХ АВТОРІВ БЕЗ ВІДПОВІДНИХ ПОСИЛАНЬ.

СТУДЕНТ ____________________

РОБОТУ РОЗГЛЯНУТО Й ДОПУЩЕНО ДО ЗАХИСТУ НА ЗАСІДАННІ КАФЕДРИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

«05» ТРАВНЯ 2023 Р.,ПРОТОКОЛ № 7

ЗАВІДУВАЧ КАФЕДРИ

ЛЯШКО СЕРГІЙ ІВАНОВИЧ____________________

Київ — 2023

РЕФЕРАТ

Кількість сторінок – 47, кількість ілюстрацій – 7, кількість використаних джерел – 15, таблиць - 1.

Перелік ключових слів – НЕЛІНІЙНА РІВНОВАГА СПОЖИВАННЯ ТА ВИРОБНИЦТВА, ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ (VI), ОПЕРАТОР МЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ, ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД, НЕРУХОМА ТОЧКА, МОДЕЛЬ ВИПУСК-ВИТРАТИ.

Об'єкт дослідження - проблема нелінійного виробництва та споживання економіки (NPCE) та її еквівалентна варіаційна нерівність (VI).

Мета роботи – порівняння роботи різних проекційних алгоритмів для вирішення поставленої задачі.

Методи та інструменти – теорія варіаційних нерівностей, зокрема проекційні методи їх розв'язання; безкоштовне, вільно поширюване інтегроване середовище розробки PyCharm IDE; Мова програмування Python

Результати та їх новизна – для вирішення даної задачі раніше не використовувались методи екстраполяції з минулого та Tseng'a

Взаємозв'язок з іншими роботами – розглянуто модель з джерел [6] та [7], застосовано методи з джерел [9], [10], [15].

ЗМІСТ

Реферат.......... 2

Вступ 4

1 Огляд деяких економічних моделей 7

2 Деякі положення теорії варіаційних нерівностей.......... 15

2.1 Системи рівнянь.......... 15

2.2 Задачі оптимізації 16

2.3 Задача доповняльності.......... 17

2.4 Задача нерухомих точок.......... 17

3 Нелінійна рівновага виробництва та споживання.......... 24

3.1 Модель 24

3.2 Поняття нелінійної рівноваги 26

3.3 Існування НРВС 27

4 Проекційні методи пошуку розв’язку варіаційних нерівностей.......... 30

4.1 Екстргградієнтний метод Корпелевич.......... 30

4.2 Метод екстраполяції з минулого.......... 31

4.3 Метод Tseng’a 32

5 Застосування проекційних методів для пошуку НРВС.......... 34

5.1 Метод Корпелевич 35

5.2 Метод екстраполяції з минулого.......... 37

5.3 Метод Tseng’a 38

Результати 39

Висновки.......... 44

Список використаних джерел.......... 46

ВСТУП

Рівновага є однією з головних ідей пов'язаних з вивченням проблем конкуренції. Проблеми конкуренції можна вивчати використовуючи цілу низку методів та підходів, та одним з найбільш поширених і популярних є використання варіаційних нерівностей, які знаходять широке застосування в задачах математичної економіки, механіки, інженерії тощо.

Рівновага в економіці означає такий стан, коли вже не можна знайти жодного способу поліпшити благополуччя учасників ринку без погіршення благополуччя хоча б одного з них. Інакше кажучи, рівновага в економіці описує стан ринку, в якому попит на товари дорівнює пропозиції, і ціни не мають тенденції до зміни.

У той же час, варіаційні нерівності є математичним інструментом для моделювання різноманітних фізичних і соціально-економічних процесів, де стан системи може змінюватися в часі.

Таким чином, рівновага варіаційної нерівності в економіці означає такий стан, коли ринок знаходиться в стабільному стані, де кожен учасник ринку максимізує свій благополуччя, а умови на ринку задовольняють варіаційну нерівність. Такі моделі зазвичай використовуються для вивчення процесів довгострокового розвитку на ринку, а також для розробки стратегій управління ризиками в економіці.

Останні здобутки в сфері варіаційних нерівностей охоплюють розвиток нових методів розв'язування таких нерівностей, зокрема застосування методів оптимізації з нелінійними обмеженнями та методів чисельного аналізу. Для вирішення складних задач, пов'язаних з варіаційними нерівностями, дедалі більше застосовуються чисельні методи, такі як методи пристрілки, методи обмежень та методи кутових точок.

Також у сучасній літературі все більше звертають увагу на розв'язання варіаційних нерівностей у некомутативних просторах та їх застосування в квантовій механіці. Це відкриває нові можливості для розвитку квантової теорії оптимізації та розв'язування складних задач, пов'язаних з квантовою інформацією.

Крім того, дослідження варіаційних нерівностей знаходять застосування в різних галузях науки та техніки, таких як математична економіка, інженерія, оптимізація транспортних мереж, комп'ютерна графіка та інші. Розуміння варіаційних нерівностей та розвиток нових методів їх розв'язування є важливими складовими сучасної науково-технічної діяльності.

Саме з точки зору варіаційних нерівностей та проекційних методів їх розв’язання буде розглянута модель, запропонована Ігорем Гривою та Романом Поляком. Суть цієї моделі полягає в об’єднанні лінійного програмування та моделі типу витрати – випуск. В той же час характерною особливістю даного підходу є те що він включає в себе і виробничу, і споживацьку складові. Окрім цього витрати на виробництво, споживання та доступність ресурсів не є сталими – натомість вони є відповідними функціями.

Об’єкт дослідження – комбінація підходу лінійного програмування та економічної моделі ввід-вивід з постановкою задачі у вигляді варіаційної нерівності;

Метод дослідження – проекційні методи для вирішення варіаційних нерівностей: екстраградієнтний метод Корпелевич, метод екстраполяції з минулого, метод Tseng’a

Використані бібліотеки, мова програмування – мова програмування Python, бібліотеки random, numpy.

1 ОГЛЯД ДЕЯКИХ ЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Виробництво та споживання - це дві основні сфери економічної діяльності, які взаємодіють між собою у будь-якій економічній системі.

Виробництво охоплює всі етапи створення товарів і послуг від початкового створення сировини до готового продукту. Цей процес включає в себе розробку продукту, проектування та інженерінг, виробництво, контроль якості і пакування. Виробництво зазвичай відбувається на підприємствах, які можуть бути різних розмірів та виконувати різноманітні функції. [13]

Споживання - це процес, коли люди використовують товари і послуги, які були вироблені. Споживання може бути як безпосереднім (наприклад, коли люди купують харчі), так і опосередкованим (наприклад, коли компанії купують обладнання для виробництва товарів). Споживання може бути як індивідуальним, так і колективним (наприклад, коли держава закуповує товари для використання в охороні здоров'я або військових потребах).

Взаємодія між виробництвом та споживанням відбувається через ринок, де товари та послуги продаються та купуються. На ринку формується цінова система, яка відображає співвідношення між попитом і пропозицією на різні товари та послуги. Ця цінова система регулює виробництво та споживання, що забезпечує ефективне використання ресурсів та розподіл доходів в економіці.

Модель виробництва та споживання є центральною темою в економічній теорії, і моделює взаємодію між попитом та пропозицією на ринку. Ця модель базується на законах попиту та пропозиції, які вказують на те, що ціна товару визначається взаємодією між кількістю товарів, які пропонуються на ринку (пропозиція), та кількістю товарів, які покупці готові придбати за цю ціну (попит). [12]

Модель виробництва та споживання використовується для дослідження ефективності ринкової економіки. Наприклад, для дослідження того, як зміни в ринкових умовах впливають на виробництво та споживання, і які політики можуть бути застосовані для підвищення ефективності економіки. Тепер розглянемо декілька основних економічних моделей, які досліджуються взаємозвязок між виробництвом та споживанням.

Модель витрати - випуск (Input-Output model) це модель американського економіста радянського походження Василя Леонтьєва, що включає більш детальне розглядання взаємодії різних галузей економіки.

У моделі витрати - випуск економічна система розглядається як набір виробничих секторів, що між собою взаємодіють. Кожен виробничий сектор використовує в своїй діяльності ресурси (включаючи вироблені іншими секторами товари) та виробляє продукцію, яка може бути використана іншими секторами.

Дана модель базується на використанні матриць витрати - випуск, що відображають взаємодію між секторами економіки. У матриці витрати - випуск для кожного сектора показують, скільки він використовує ресурсів від інших секторів, і скільки виробляє товарів, які будуть використовуватися іншими секторами. За допомогою цих матриць можна розрахувати, яка частина виробленої продукції буде використана в інших секторах економіки, а яка - для споживачів.

Модель витрати - випуск використовується для аналізу впливу змін в одному секторі на весь економічний комплекс, а також для оцінки впливу зовнішнього середовища на економіку країни, включаючи зовнішню торгівлю та зміну цін на ресурси. Крім того, модель витрати -випуск може бути використана для прогнозування розвитку економіки та для планування розподілу ресурсів між різними виробничими секторами.

Одним з найважливіших застосувань даної моделі є її використання у сфері екології. За допомогою моделі витрати -випуск можна проаналізувати вплив виробничих секторів на довкілля та оцінити ефективність різних заходів для зменшення негативного впливу на довкілля.

В цілому, модель витрати - випуск є потужним інструментом для аналізу економічних процесів та їх взаємодії в різних галузях економіки. Ця модель дозволяє розглядати економічну систему як цілісний організм, що взаємодіє зі своїм середовищем та іншими системами, що дозволяє зрозуміти складні взаємодії між різними галузями та зміни в економічному середовищі. [5]

Модель Геккшера-Оліна (Heckscher–Ohlin model), також відома як теорема Геккшера-Оліна, є економічною теорією, що пояснює причини міжнародної торгівлі залежно від різниці у виробництві факторів виробництва. Ця модель є однією з основних теорій торгівлі і була розроблена незалежно від двох економістів Еліасом Геккшером та Бертілом Оліном у 20-х роках 20-го століття.

Основна ідея моделі Геккшера-Оліна полягає в тому, що країни спеціалізуються в виробництві товарів, в яких вони мають відносну перевагу використання певних факторів виробництва. Ці фактори виробництва включають робочу силу, капітал, землю та інші ресурси.

Основні припущення моделі Геккшера-Оліна включають:

- Країни виробляють два товари.
- Фактори виробництва можна розподілити на працю і капітал.

- У кожній країні існує можливість переміщення факторів виробництва всередині своїх кордонів.
- Виробництво залежить від використання факторів виробництва.

За моделлю Геккшера-Оліна, країна буде спеціалізуватися в виробництві товару, який використовує відносно більше тих факторів виробництва, яких у неї більше. Наприклад, якщо країна має велику кількість робочої сили, то вона спеціалізуватиметься в виробництві товарів, які вимагають багато праці. Країна з багатими ресурсами землі може спеціалізуватися в аграрних виробництвах і т.д.

Модель Геккшера-Оліна надає певний набір інструментів, які використовують для розуміння торговельних відносин між країнами і визначення того, які товари вони будуть експортувати або імпортувати. Вона показує, що різниця у виробництві факторів виробництва між країнами є одним з ключових факторів, які впливають на обсяг та напрямок міжнародної торгівлі.

Ця модель також спирається на теорему Столпера-Самуелясона, яка заявляє, що зміна цін на вироблені товари впливає на зміну цін на фактори виробництва, такі як праця і капітал. Залежно від співвідношення цін на фактори виробництва в країнах, вони можуть мати різні переваги у виробництві різних товарів.

Узагальнені моделі Геккшера-Оліна, такі як модель Геккшера-Оліна-Самуелясона, розширюють базову модель, враховуючи більшість факторів виробництва, таких як земля, технології та інші. Ці моделі дозволяють більш глибоко дослідити міжнародну торгівлю та вплив різних факторів на економіку країн. [14]

Модель Солоу-Свона (Solow-Swan model) є економічною моделлю, розробленою Робертом Солоу і Тревором Своном в 1950-х і 1960-х роках. Ця модель відноситься до теорії економічного зростання і досліджує фактори, що впливають на рівень виробництва та економічне зростання в довгостроковій перспективі.

Основна ідея моделі Солоу-Свона полягає в тому, що економіка виробляє товари, використовуючи ресурси праці, капіталу та технології. Модель зосереджується на аналізі зміни капіталовкладень, наявності капіталу, технологічного прогресу та демографічних факторів.

Основні припущення моделі Солоу-Свона включають:

- Виробництво залежить від капіталу, праці та технології.
- Капітал може зростати шляхом інвестицій, але з деякою ступенем зношування.
- Технологічний прогрес може підвищувати ефективність виробництва.
- Населення зростає за певною швидкістю, а працездатність людей є відносно сталою.

Модель Солоу-Свона дозволяє досліджувати вплив різних факторів на економічне зростання. Вона показує, що зростання капіталовкладень, технологічний прогрес та зростання населення можуть сприяти збільшенню рівня виробництва. Однак, модель також виявляє, що в довгостроковій перспективі економіка може досягти сталої рівноваги, коли зростання залежить від технологічного прогресу.

Модель Солоу-Свона є важливим інструментом для вивчення факторів, які впливають на довгострокове економічне зростання. Вона служить основою для подальшого розвитку інших моделей і досліджень в галузі економічної теорії зростання та політики. [2]

Модель "Lucas islands" (острові Лукаса) є економічною моделлю, яку розробив Роберт Лукас у 1970-х роках. Ця модель є однією з основних моделей в рамках раціональних очікувань (rational expectations) і відноситься до макроекономіки.

Основна ідея моделі "Lucas islands" полягає в тому, що вона аналізує вплив фіскальної політики (податки, витрати на державні програми тощо) на економіку. Модель отримала свою назву "острови Лукаса" через уявну метафору, що розділяє реальний сектор економіки (приватний сектор) і фіскальний сектор (держава).

Одним із головних припущень моделі є раціональні очікування, що означає, що учасники економіки у своїх рішеннях враховують доступну інформацію і очікують, що фіскальна політика буде впливати на їх доходи та витрати.

Ця модель також покликана підкреслити важливість раціональних очікувань та взаємодії між реальним і фіскальним секторами економіки. Вона служить основою для дослідження впливу фіскальної політики на макроекономічні зміни та розвиток інших моделей в макроекономіці. [3]

Модель Рамсея-Касса-Купманса (Ramsey-Cass-Koopmans model) є економічною моделлю, розробленою Френкліном Рамсеєм, Девідом Кассом та Томасом Купмансом у 1920-1930-х роках. Ця модель відноситься до теорії економічного зростання і досліджує вплив інвестицій, заощаджень та споживання на довгострокове зростання економіки.

Основна ідея моделі Рамсея-Касса-Купманса полягає в аналізі оптимального вибору споживання та інвестицій в умовах нескінченного часу.

Модель враховує, як сьогоднішні рішення щодо споживання та інвестицій впливають на майбутнє благополуччя.

Основні припущення моделі включають:

- Раціональність агентів, які приймають рішення щодо споживання та інвестицій.
- Індивіди максимізують свою користь протягом нескінченного часу.
- Часова перспектива: агенти враховують не тільки поточне споживання, але й майбутні доходи та благополуччя.

Модель Рамсея-Касса-Купманса дозволяє досліджувати вплив різних факторів на економічне зростання, зокрема на рівень споживання, інвестицій та капіталовкладень. Вона використовується для аналізу різних економічних політик, таких як фіскальна політика, податки, заощадження та інші фактори, що впливають на довгострокове економічне зростання.

Ця модель є важливим інструментом для вивчення оптимальних рішень щодо споживання та інвестицій в умовах довгострокового зростання економіки і допомагає розуміти, як економічні рішення сьогодні впливають на майбутнє економічне благополуччя. [4]

Таким чином, можемо зробити висновок що економічні моделі мають досить широке практичне застосування. З їхньою допомогою можна аналізувати складні взаємодії та залежності між економічними змінними, агентами та ринками; прогнозувати майбутні тенденції та розвиток; розуміти вплив різних стратегій та політик; розширити розуміння різних принципів та концепцій; прогнозувати ризики і управління, враховувати несприятливі фактори; та не менш важливий пункт – це розвиток економічної науки в цілому. Дані моделі хоч не завжди є універсальними та достатньо обширними, тим не менш дають змогу зрозуміти природу економічних відносин та робити прогнози.

2 ДЕЯКІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Друга глава книги [8] слугувала основним джерелом для написання даного розділу.

Визначення 1. Розв'язати варіаційну нерівність (***VI***) означає знайти такий вектор $X^* \in K \ \subset R^n$

$$(F(X^*), X - X^*) \geq 0, \qquad \forall X \in K$$

де F це задана неперервна функція від K, K це задана закрита опукла множина, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - скалярний добуток в R^n, R^n – n-вимірний простір Евкліда.

Тепер оглянемо основні класи проблем для моделювання рівноваги і визначимо їхнє відношення з варіаційними нерівностями.

2.1 Системи рівнянь

Системи рівнянь часто використовуються при розв'язанні проблем, пов'язаних з пошуком рівноваги. Наприклад, коли попит дорівнює постачанню різних товарів за рівнями цін рівноваги. Нехай $K = R^n$ та $F: R^n \to R^n$ – задана функція. Тоді вектор $X^* \in R^n$ є розв'язком системи рівнянь якщо

$$F(X^*) = 0.$$

Зв'язок з варіаційними нерівностями задається наступним чином:

Нехай $K = R^n$ та $F: R^n \to R^n$ – задана векторна функція. Тоді вектор $X^* \in R^n$ буде розв'язком варіаційної нерівності $VI(F, K)$ тоді та тільки тоді якщо X^* є розв'язком системи рівнянь

$$F(X^*) = 0.$$

2.2 Задачі оптимізації

Задача оптимізації з іншої сторони розділяють функцію, яку намагаються мінімізувати (або максимізувати) беручи до уваги рівності та нерівності. Нехай f – деяка задана неперервна диференційовна функція така що $f: K \to R$. Математично задачу оптимізації можна сформулювати наступним чином:

$$\text{Мінімізувати } f(X)$$

З врахуванням того що

$$X \in K$$

Зв'язок з варіаційними нерівностями задається наступним чином:

Нехай X^* є розв'язком задачі оптимізації

$$\text{Мінімізувати } f(X)$$

$$X \in K$$

де f – неперервна диференційновна функція та K – закрита та опукла множина. Тоді X^* буде розв'язком варіаційної нерівності

$$\langle \nabla f(X^*), X - X^* \rangle \geq 0, \qquad \forall X \in K$$

Крім цього ми можемо стверджувати, що якщо $f(X)$ є опуклою функцією та X^* є розв'язком варіаційної нерівності $VI(\nabla f, K)$то X^* є розв'язком вищезгаданої задачі оптимізації.

2.3 Задача доповняльності

Хоч проблема доповняльності не є окремим підходом у пошуку рівноваги, а особливим випадком варіаційної нерівності, тим не менш вона заслуговує окремої уваги оскільки часто виникає при формулюванні різних моделей.

Задача доповняльності є особливим випадком варіаційної нерівності з допустимою множиною у вигляді не негативного ортанта.

Позначимо через R_+^n ненегативним ортантом в R^n та нехай $F: R^n \to R^n$. Тоді задача доповняльності це система рівнянь та нерівностей і розв’язати її означає знайти такий $X \geq 0$ що

$$F(X^*) \geq 0 \text{ та } \langle F(X^*), X^* \rangle = 0$$

Зв'язок з варіаційними нерівностями задається наступним чином:

$VI(F, R_+^n)$ та задача доповняльності мають однакові розв'язки за умови що такі існують.

2.4 Задача нерухомих точок

Одним з базових підходів для пошуку розвязку варіаційної нерівності $VI(F, R_n^+)$ є пошук нерухомих точок для оператора F.

Спочатку дамо визначення метричної проекції.

Визначення 2. Нехай K – це замкнена та опукла множина в R^n. Тоді для довільного $X \in R^n$ існує єдина точка y така що

$$||X - y|| \leq ||X - z||, \quad \forall z \in K$$

І точка y також відома як ортогональна проекція X на множину K згідно Евклідової норми тобто

$$y = P_K(X) = \arg\min_{z \in K} ||X - z||$$

оператор $P_K(\cdot)$ також називається оператором метричного проектування.

Тобто точка y це найближча точка з множини K по відношенню до X.

Варто вказати одну корисну властивість метричного оператора. Нехай K – замкнута та опукла множина. Тоді оператор P_K є нерозтягуючим, тобто

$$||P_K X - P_K X'|| \leq ||X - X'||, \qquad \forall X, X' \in R^n$$

Тоді відношення між нерухомою точкою та варіаційною нерівністю можна задати як на рисунку 2.1.

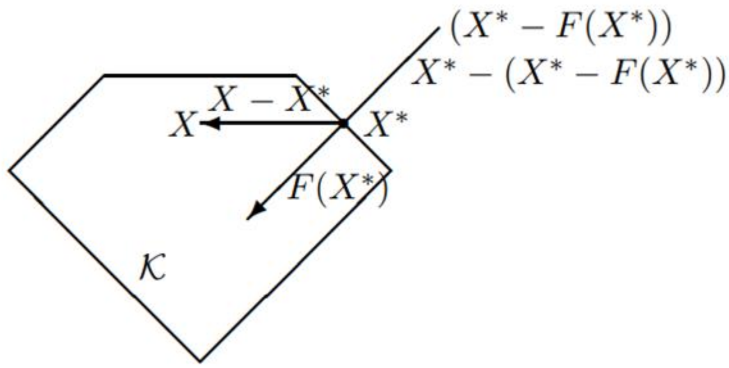


Рисунок 2.1

Теорема 1. Припускаємо що K – це замкнута та опукла множина. Тоді $X^* \in K$ є ровязком варіаційної нерівності $VI(F, K)$ тоді і тільки тоді якщо X^* є нерухомою точкою для $P_K(I - \alpha F): K \to K$ для довільного $\alpha > 0$, тобто

$$X^* = P_K\big(X^* - \alpha F(X^*)\big)$$

Тепер можемо вивести необхідну і достатню умову для того щоб X^* був розв'язком $VI(F, K)$:

$$-F(X^*) \in C(X^*)$$

де $C(X)$ позначає конус нормалі**:**

$$C(X) \equiv \{y \in R^n : \langle y, X^{'} - X \rangle \leq 0, \forall X^{'} \in K\}$$

Існування розв'язку варіаційної нерівності слідує з неперервності функції F з врахуванням того що K це компакт. Справді, маємо наступне:

Теорема 2. Якщо $K -$ це компактна опукла множина та $F(X)$ є неперервною на K то варіаційна нерівність має хоча б один розв'язок X^*.

У випадку якщо множина K необмежена вищевказана теорема не працює – але існування розв'язку варіаційної нерівності може бути визначено наступними умовами**.**

Нехай $B_R(0)$ позначає замкнену кулю радіусу R з центром в 0 та нехай $K_R = K \cap B_R(0)$. Тоді K_R є обмеженою. Через VI_R позначимо таку варіаційну нерівність:

Знайти такий $X_R^* \in K_R$ такі що

$$\langle F(X_R^*), y - X_R^* \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K_R$$

тоді можемо стверджувати:

Теорема 3. $VI(F, K)$ має розв'язок тоді і тільки тоді якщо існує $R > 0$ та розв'язок VI_R X_R^* такий що $\left||X_R^*|\right| < R$

Існування розв'язку варіаційної нерівності може бути доведено за примусовості:

Наслідок 1. Припускаємо що $F(X)$ задовольняє умові примусовості:

$$\frac{\langle F(X) - F(X_0), X - X_0 \rangle}{\left||X - X_0|\right|} \to \infty$$

Якщо $\left||X|\right| \to \infty$ для X з K та для деяких $X_0 \in K$. Тоді $VI(F, K)$ завжди має розв'язок.

Наслідок 2. Припускаємо що X^* є розв'язком $VI(F, K)$ та $X^* \in K^0$, внутрішньості K. Тоді $F(X^*) = 0$.

Властивості існування та єдинсті розв'язку стають доступним за певних умов монотонності. Дамо декілька визначень та відповідних теорем.

Визначення 5. $F(X)$ буде монотонним на K якщо

$$\langle F(X_1) - F(X_2), X_1 - X_2 \rangle \geq 0, \qquad \forall X_1, X_2 \in K$$

Визначення 6. $F(X)$ буде сильно монотонним на K якщо

$$\langle F(X_1) - F(X_2), X_1 - X_2 \rangle > 0, \qquad \forall X_1, X_2 \in K, X_1 ! = X_2$$

Визначення 7. $F(X)$ буде сильно монотонним на K якщо

$$\langle F(X_1) - F(X_2), X_1 - X_2 \rangle \geq \alpha \left||X_1 - X_2|\right|^2, \qquad \forall X_1, X_2 \in K$$

Визначення 8. $F(X)$ буде Ліпшицевим відображенням на K якщо існує таке $L > 0$ таке що

$$\left||F(X_1) - F(X_2)|\right| \leq L \left||X_1 - X_2|\right|, \qquad \forall X_1, X_2 \in K$$

Також можемо визначити локальну монотонність якщо точки X_1, X_2будуть сусідами точки $\bar{X}$. Через $B(\bar{X})$ позначимо кулю в R^n з центром в $\bar{X}$.

Визначення 9. $F(X)$ буде локально монотонним в $\bar{X}$ якщо

$$\langle F(X_1) - F(X_2), X_1 - X_2 \rangle \geq 0, \qquad \forall X_1, X_2 \in K \cap B(\bar{X})$$

Визначення 10. $F(X)$ буде локально сильно монотонним в $\bar{X}$ якщо

$$\langle F(X_1) - F(X_2), X_1 - X_2 \rangle > 0, \qquad \forall X_1, X_2 \in K \bigcap B(\bar{X}), X_1 != X_2$$

Визначення 11. $F(X)$ буде локально сильно монотонним в $\bar{X}$ якщо

$$\langle F(X_1) - F(X_2), X_1 - X_2 \rangle \geq \alpha \left| |X_1 - X_2| \right|^2, \qquad \forall X_1, X_2 \in K \bigcap B(\bar{X}).$$

Єдиність будуть стверджувати наступні теореми

Теорема 4. Нехай $F(X)$ є сильно монотонним на K то $VI(F, K)$ має щонайменше один розв'язок

Монотоність тісно повязана з додатньою визначеністю.

Визначення 12. Матриця розміру $n \times n$ чиї елементи $m_{ij}(X)$; $i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n$ є функціями визначеними на множині $S \subset R^n$ називається матрицею невідємної частинної визначеності на S якщо

$$v^T M(X) v \geq 0, \qquad \forall v \in R^n, X \in S.$$

Називається додатньо визначеною на S якщо

$$v^T M(X) v > 0, \qquad \forall v != 0, v \in R^n, X \in S.$$

Називається сильно додатньо визначеною на S якщо

$$v^T M(X) v > \alpha \left| |v| \right|^2, \qquad \text{для деяких } \alpha > 0, \qquad v \in R^n, X \in S.$$

Дані визначення можна вважати еквівалентними, але з врахуванням подальшого використання сталої α зафіксуємо обидва означення.

Теорема 5. Нехай $F(X)$ є неперервною та диференційовною функцією на K та якобіан

$$\nabla F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}.$$

Який має бути бути матрицею невідємною частинної визначеності (або додатньо визначеною). Тоді $F(X)$ є монотонним (або сильно монотонним).

Теорема 6. Припускаємо що $F: K \to R^n$ є неперервним та диференційовним в $\bar{X}$. Тоді $F(X)$ будемо називати сильно монотонним в $\bar{X}$ якщо $\nabla F(\bar{X})$ є додатньо визначеною (сильно додатньо визначеною) тобто

$$v^T F(\bar{X}) v > 0, \qquad \forall v \in R^n, v! = 0,$$

$$v^T \nabla F(\bar{X}) v \geq \alpha \left|\left|v\right|\right|^2, \text{для деяких } \alpha > 0, \forall v \in R^n.$$

Наступні теореми забезпечують умови коли одночасно гарантуються існування та єдиність розв'язку варіаційної нерівності. Важливо підмітити що жодних припущень з приводу множини K не робиться.

Теорема 7. Припускаємо що $F(X)$ є сильно монотонним. Тоді існує рівно один розв'язок X^* для $VI(F, K)$.

Отже, у випадку необмеженої множини K, сильна монотонність функції F гарантує існування та єдиності розв'язку. Якщо K є компактом то існування забезпечується якщо F є неперервною та для гарантії єдиності розв'язку достатньо виконання умов строї монотонності.

Тепер зробимо припущення що $F(X)$ є одночасно сильно монотонною та неперервною за Ліпшицем функцією. Тоді проекція $P_K[X - \beta F(X)]$ є стисненням відносно X, і будемо мати наступне:

Теорема 8. Для деякого значення $0 < \beta \leq \frac{\alpha}{L^2}$ де β та L це змінні з визначень сильної монотонності та неперервності за Ліпшицем. Тоді

$$\left|\left|P_K\big(X - \beta F(X)\big) - P_K\big(y - \beta F(y)\big)\right|\right| \leq \gamma\left|\left|X - y\right|\right|$$

Для всіх $X, y \ \in K$ де

$$(1 - \beta\alpha)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma < 1$$

Наслідок 3. Оператор $P_K\big(X - \beta F(X)\big)$ має єдину нерухому точку X^*.

3 НЕЛІНІЙНА РІВНОВАГА ВИРОБНИЦТВА ТА СПОЖИВАННЯ

Даний розділ повністю базується на джерелах [6] та [7].

3.1 Модель

НРВС це узагальнення рівноваги Леонтьєва-Вальраса, яке поєднує у собі нелінійну рівновагу для розподілу ресурсів з нелінійною рівновагою моделі “витрати-випуск”. Припущення, за яких існує НРВС, економічно обґрунтовані. Модель НРВС складається з двох частин: виробництва та споживання. Виробнича частина перетворює фактори (ресурси) на продукти. Частина споживання використовує результат виробництва для максимізації споживання. Спробуємо тепер розглянути основні положення та ідеї.

Нехай $A: R^n \to R^n$ – це матриця балансу з елементами a_{ij}, які означають скільки продукту $1 \leq i \leq n$ необхідно для виготовлення однієї умовної одиниці продукту $1 \leq j \leq n$. Ми вважаємо що A не містить нульових стовпчиків або рядків. Для вектору споживання y будемо мати:

$$y = x - Ax = (I - A)x,$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор виробництва з елементами x_j – кількість умовних одиниць $j -$ го продукту, які було виготовлено.

Ми вважаємо що економіка ефективна, тобто для будь-якого вектору споживання $c \in R_+^n$ наступна система має розв’язки:

$$(x - Ax) = c, \qquad x \in R_+^n.$$

В такому випадку матриця A називається продуктивною матрицею.

Нехай λ − вектор цін, тобто λ_j визначає ціну однієї умовної одиниці продукту $1 \leq j \leq n$, тоді $q = (I - A)^T\lambda$ – це вектор прибутку, тобто $q_j, 1 \leq j \leq n$ це прибуток з однієї умовної одиниці продукту $1 \leq j \leq n$ такий що

$$q_j = ((I - A)^T\lambda)_j, \qquad 1 \leq j \leq n, \lambda \in R_+^n$$

Розв'язком першої системи буде такий вектор x_c який задовольняє споживання $c \in R_+^n$.

Розв'язком другої системи буде такий вектор λ_q, що задовольняє прибуток $q \in R_+^n$.

Для продуктової матриці A обернена $(I - A)^{-1}$ існує обернена додатня матриця, отже обидві системи будуть мати єдиності і не нульові розв'язки x_c та λ_q.

Нехай $B: R^n \to R^m$ – технологічна матриця. Елементи b_{ij} означають скільки ресурсу $1 \leq i \leq m$ необхідно для виготовлення однієї умовної одиниці продукту $1 \leq j \leq n$. Вважається що матриця B не містить нульових стовпчиків або рядків.

Задані наступні оператори:

- $p: R^n \to R^n$ – сильно зростаючий оператор який перетворює вектор кількості продуктів $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ у вектор цін для виробництва $p(x) = \left(p_1(x), \dots, p_n(x)\right)^T$
- $c: R^n \to R^n$ – сильно спадаючий оператор який перетворює вектор цін $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ у вектор споживання $c(\lambda) = \left(c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda)\right)^T$
- $r: R^m \to R^m$ – сильно зростаючий оператор який перетворює вектор цін на ресурси $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ у вектор доступності $r(v) = \left(r_1(v), \dots, r_n(v)\right)^T$

3.2 Поняття нелінійної рівноваги

НРВС визначається як $y^* = (x^*, \lambda^*, v^*) \in \Omega$:

$$x^* \in Argmin\{\langle p(x^*), X\rangle | (I - A)X \geq c(\lambda^*), BX \leq r(v^*), X \in R_+^n\}, \tag{1}$$

де X – вектор виробництва

$$(\lambda^*, v^*) \in \text{Argmax}\left\{\begin{matrix} \langle c(\lambda^*), \Lambda\rangle - \langle r(v^*), V\rangle | \\ |(I - A)^T\Lambda - \text{B}^\text{T}V \leq p(x^*), \Lambda \in R_+^n, V \in R_+^n \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

де Λ – вектор цін споживання та V – вектор цін ресурсів.

Якщо перефразувати, то отримаємо наступне твердження: НРВС визначає такий вектор продуктів $x^* \in R_+^n$, вектор цін споживання $\lambda^* \in R_+^n$ і вектор цін ресурсів $v^* R_+^m$, що загальна ціна виробництва $(p(x^*), x^*)$ досягає мінімуму, в той час як споживання без врахування цін на ресурси досягає максимуму. Також є зрозумілим що загальне споживання дорівнює сумі цін виробництва та ресурсів:

$$\langle c(\lambda^*), \lambda^*\rangle = \langle p(x^*), x^*\rangle + \langle r(v^*), v^*\rangle$$

З умов доповняльності для всіх $1 \leq i \leq m$ та $1 \leq j \leq n$ отримаємо:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow p_j(x^*) + (B^T v^*)_j - ((I - A)^T\lambda^*)_j = 0$$

$$x_j^* = 0 \Leftarrow p_j(x^*) + (B^T v^*)_j - ((I - A)^T\lambda^*)_j > 0,$$

$$\lambda_j^* > 0 \Rightarrow \left((I - A)x^*\right)_j - c_j(\lambda^*) = 0$$

$$\lambda_j^* = 0 \Leftarrow \left((I - A)x^*\right)_j - c_j(\lambda^*) > 0$$

$$v_j^* > 0 \Rightarrow r_i(v^*) - (Bx^*)_i = 0$$

$$v_j^* = 0 \Leftarrow r_i(v^*) - (Bx^*)_i > 0$$

3.3 Існування НРВС

Нехай $p: R^n \to R^n$ – це сильно монотонний зростаючий оператор, такий що існує якесь $\alpha > 0$, що для довільних x_1 та x_2 з R_+^n виконується наступна умова:

$$\langle p(x_1) - p(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha \left||x_1 - x_2|\right|^2$$

Де $\left||x|\right| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ – норма Евкліда.

Дана умова, зокрема, має на увазі наступне: збільшення виробництва якогось продукти за умови що виробництво інших продуктів не змінюється веде до збільшення ціни.

Нехай $c: R^n \to R^n$ – це сильно монотонний спадаючий оператор, такий що існує якесь β > 0, що для довільних x_1 та x_2 з R_+^n виконується наступна умова:

$$\langle c(\lambda_1) - c(\lambda_2), \lambda_1 - \lambda_2 \rangle \leq -\beta \left||\lambda_1 - \lambda_2|\right|^2$$

Дана умова, зокрема, має на увазі наступне: збільшення ціни якогось продукту за умови що ціни інших продуктів не змінюються веде до зменшення споживання продукту.

Нехай $r: R^m \to R^m$ – це сильно монотонний зростаючий оператор, такий що існує якесь $\gamma > 0$, що для довільних v_1 та v_2 з R_+^m виконується наступна умова:

$$\langle r(v_1) - r(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \gamma \left||v_1 - v_2|\right|^2$$

Дана умова, зокрема, має на увазі наступне: збільшення ціни якогось ресурсу за умови що ціни інших продуктів не змінюються веде до зменшення споживання продукту.

Пошук y^* можна сформулювати як розв'язання наступної варіаційної нерівності:

$$\langle g(y^*), y - y^* \rangle \leq 0, \qquad \forall y \in \Omega \tag{3}$$

де оператор $g: R^{2n+m} \to R^{2n+m}$ визначається як:

$$g(y) = -\big((I - A)^T \lambda - p(x) - B^T v; c(\lambda) - (I - A)x; Bx - r(v)\big) \tag{4}$$

Теорема 9. Для $y^* = (x^*, \lambda^*, v^*)$ щоб бути розв'язком пари лінійного програмування (**1, 2**) необхідно і достатньо щоб y^* було розв'язком варіаційної нерівності **(3)** з оператором **(4)**;

Перефразуємо умови монотонності для операторів p, c та r таким чином, щоб сильна монотонність зберігалась лише в точці рівноваги $y^* = (x^*, \lambda^*, v^*)$, тобто ми припускаємо існування таких $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ що:

$$\langle p(x) - p(x^*), x - x^* \rangle \geq \alpha \big||x - x^*|\big|^2, \qquad \forall x \in R_+^n \tag{5}$$

$$\langle c(\lambda) - c(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle \leq -\beta \big||\lambda - \lambda^*|\big|^2, \qquad \forall \lambda \in R_+^n \tag{6}$$

$$\langle r(v) - r(v^*), v - v^* \rangle \geq \gamma \big||v - v^*|\big|^2, \qquad \forall v \in R_+^n \tag{7}$$

Припущення **(5)** має на увазі що оператор виробництва p чутливий до змін біля x^***.**

Припущення **(6)** має на увазі що оператор споживання c чутливий до змін біля λ^***.**

Припущення **(7)** має на увазі що оператор виробництва r чутливий до змін біля v^***.**

Також припускаємо що оператори p, c та r задовільняють умові Ліпщиця, тобто існуються такі $L_p > 0, L_c > 0$ та $L_r > 0$ такі що

$$\left\|p(x) - p(x^*)\right\| \leq L_p\left\|x - x^*\right\|^2, \qquad \forall x \in R_+^n$$

$$\left\|c(\lambda) - c(\lambda^*)\right\| \leq L_c\left\|\lambda - \lambda^*\right\|^2, \qquad \forall \lambda \in R_+^n$$

$$\left\|r(v) - r(v^*)\right\| \leq L_r\left\|v - v^*\right\|^2, \qquad \forall v \in R_+^n$$

ці умови означають що виробництво, споживання та доступність ресурсів знаходяться під контролем в межах рівноваги.

4 ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКУ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Проекційні методи є одним з найбільш поширених методів пошуку розв'язку варіаційної нерівності. Ці методи ґрунтуються на ідеї проекції вектора на множину, що задає нерівність.

Основна ідея проекційного методу полягає в тому, щоб послідовно проекціювати поточний вектор на множину, що задає нерівність, доки не буде досягнуто розв'язку. Даний процес може бути зображений графічно як послідовність точок, що є проекціями поточного вектора на множину.

Нагадаємо собі формулювання задачі. Необхідно знайти такий вектор $X^* \in K \subset R^n$

$$(FX, X - X^*) \geq 0, \qquad \forall X \in K$$

Де $F: R^n \to R^n$ це оператор, при чому є монотонним та ліпшицевим на множині K, K це задана закрита опукла множина, а $\langle \cdot,\cdot \rangle$ - скалярний добуток в R^n, R^n – Евклідів простір.

Розглянемо декілька найбільш поширених методів для пошуку розв'язку варіаційних нерівностей.

4.1 Екстргградієнтний метод Корпелевич

Суть екстраградієнтних методів полягає в тому, що з початкового положення виконується крок в сторону напрямку градієнта, в отриманому наближенні шукаємо напрямок градієнту і в цьому напрямку робимо крок з початкової точки. Екстраградієнтні методи називають прогнозними, оскільки перед виконанням кожного кроку відбувається прогнозний крок. Сам метод виглядає наступним чином [10]:

1) Задаємо $x_0 \in K, \alpha \in (0, \frac{1}{L})$
2) Для x_n обчислюємо

$$y_n = P_K(x_n - \alpha F x_n)$$

3) Якщо $x_n = y_n$ то зупиняємось, в іншому випадку обчислюємо

$$x_{n+1} = P_K(x_n - \alpha F y_n)$$

$$n = n + 1$$

Та повертаємось на другий крок.

Лема 1. Для $z \in VI(F, K)$ та породжених алгоритмом методу Корпелевич послідовностей $(x_n), (y_n)$ виконується нерівність [11]:

$$||x_{n+1} - z||^2 \leq ||x_n - z||^2 - (1 - \alpha^2 L^2)||x_n - y_n||^2$$

Теорема 15. Породжені алгоритмом методу Корпелевич послідовності збігаються до розвязку варіаційної нерівності (1). [11]

4.2 Метод екстраполяції з минулого

Метод екстраполяції з минулого для вирішення варіаційних нерівностей був запропонований Поповим у 1980 році. Даний метод представлений у вигляді ітераційної схеми з нерухомою точкою, яка генерує послідовність наближених розв'язків за допомогою екстраполяції з минулих ітерацій.

Алгоритм має наступний вигляд [15]:

1) Задаємо $x_0 = y_0 \in K, \alpha \in (0, \frac{1}{3L})$

2) Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_K(x_n - \alpha F y_n)$$

Якщо $x_n = y_n = x_{n+1}$ то зупиняємось, в іншому випадку переходимо на крок 3

3) Обчислюємо

$$y_{n+1} = P_K(x_{n+1} - \alpha F y_n)$$

$$n = n + 1$$

Та повертаємось на крок 2.

Лема 2. . Для $z \in VI(F, K)$ та породжених алгоритмом методу екстраполяції з минулого послідовностей $(x_n), (y_n)$ виконується нерівність [11]:

$$||x_{n+1} - z||^2 \leq ||x_n - z||^2 - (1 - \alpha L)||x_n - y_n||^2 - (1 - 2\alpha L)||x_{n+1} - y_n||^2 +$$

$$+\alpha L||x_n - y_{n-1}||^2$$

Теорема 16. Породжені алгоритмом методу екстраполяції з минулого послідовності $(x_n), (y_n)$ збігаються до розв'язку варіаційної нерівності (1). [11]

4.3 Метод Tseng'а

Даний метод був розроблений Цзеном з такою самою ціллю як наприклад метод Попова – послабити умови збіжності задля використання алгоритму для ширшого набору операторів. Хоч даний методі володіє значною кількістю переваг, його основним недоліком вважається занадто малий розмір кроку. В даному методі обчислюється тільки одна проекція на кожній ітерації і він приймає наступний вигляд [9]:

1) Задаємо $x_0 \in R^n, \alpha \in (0, \frac{1}{L})$
2) Обчислюємо

$$y_n = P_K(x_n - \alpha F x_n)$$

3) Якщо $x_n = y_n$ то зупиняємось, в іншому випадку

$$x_{n+1} = y_n - \alpha(F y_n - F x_n)$$

$$n = n + 1$$

Та переходимо на крок 2.

Лема 3. . Для $z \in VI(F, K)$ та породжених алгоритмом методу екстраполяції з минулого послідовностей $(x_n), (y_n)$ виконується нерівність [11]:

$$\left||x_{n+1} - z|\right|^2 \leq \left||x_n - z|\right|^2 - (1 - \alpha^2 L^2)\left||x_n - y_n|\right|^2$$

Теорема 17. Породжені алгоритмом методу Tseng'a послідовності $(x_n), (y_n)$ збігаються до розвязку варіаційної нерівності (1). [11]

5 ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ПОШУКУ НРВС

Методи розв'язання варіаційних нерівностей побудовані на операції проектування мають теоретичну цінність, але практично рідко застосовуються через. Але у випадку простої множини, на яку виконується проекція, ці методи є досить ефективними.

Визначимо функцію порушення доповняльності $C: \Omega \to R_+$ [7]:

$$C(y) = C(x, \lambda, v) = max\{|\langle (I-A)^T\lambda - p(x) - B^T v, x\rangle|;$$

$$|\langle c(\lambda) - (I-A)x, \lambda\rangle|; |\langle Bx - r(v), v\rangle|\}$$

та функцію порушення оптимальності $\nu: \Omega \to R_+$ [7]:

$$\nu(x, \lambda, v) = max\{\left|\left|[(I-A)^T\lambda - p(x) - B^T v]_+\right|\right|_\infty,$$

$$\left|\left|[c(\lambda) - (I-A)x]_+\right|\right|_\infty, \left|\left|[Bx - r(v)]\right|\right|_\infty, C(x, \lambda, v)\}$$

Дані функції будуть використовуватись в критерії зупинки.

Проекція $u \in R^q$ на R_+^q виглядає наступним чином [7]:

$$v = P_{R_+^q}(u) = [u]_+ = \left([u_1]_+, \dots, [u_q]_+\right),$$

де для довільного $1 \le i \le q$ маємо:

$$[u_j]_+ = \begin{cases} u_i, & u_i \ge 0 \\ 0, & u_i < 0 \end{cases}$$

Проекційний оператор $P_\Omega: \Omega \to \Omega$ тоді задамо як [7]

$$P_\Omega = ([x]_+, [\lambda]_+, [v]_+)$$

де $y = (x, \lambda, v) \in R^{2n+m}$.

Вектор y^* є розв'язком варіаційної нерівності якщо для довільного $t > 0$ вектор y^* є нерухомою точкою оператор $P_\Omega(I + tg): \Omega \rightarrow \Omega$, тобто: [7]

$$y^* = P_\Omega\big(y^* + tg(y^*)\big)$$

5.1 Метод Корпелевич

Нехай $y_0 = (x_0, \lambda_0, v_0) \,\epsilon\, \Omega$ буде стартовою точкою і нехай $y_s = (x_s, \lambda_s, v_s) \,\epsilon\, \Omega$ вже знайдена деяка точка. Тоді

$$y_{s+1} = P_\Omega(y_s + tg(y_s))$$

$$x_{s+1,j} = \left[x_{s,j} + t((I - A)^T \lambda_s - p(x_s) - B^T v_s)_j\right]_+, \qquad 1 \le j \le n$$

$$\lambda_{s+1,j} = \left[\lambda_{s,j} + t(c(\lambda_s) - (I - A)x_s)_j\right]_+, \qquad 1 \le j \le n$$

$$v_{s+1,i} = \left[v_{s,j} + t(Bx_s - r(v_s))_i\right]_+, \qquad 1 \le i \le m$$

З формули (1) слідує, що якщо для довільного продукту $1 \le j \le n$ ринкова ціна однієї умовної одиниці $[(I - A)^T \lambda_s]$ є більшою за суму витрат виробництва та ціни ресурсу $(p(x_s) + (B^T v_s))$ тоді виробництво $(x_s)_j$ має бути збільшеним, в той час якщо $[(I - A)^T \lambda_s]_j < [p(x_s) + (B^T v_S)]_j$ то виробництво $(x_s)_j$ має бути зменшено.

З формули (2) слідує: якщо для довільного продукту $1 \le j \le n$ чинне споживання $c_j(\lambda_s)$ є більшим ніж кількість цього ж продукту $[(I - A)x_s]_j$, тоді ціна $(\lambda_s)_j$ має бути збільшено, але якщо $c_j(\lambda_s) < [(I - A)x_s]_j$, то ціна $(\lambda_s)_j$ має бути зменшена.

З формули (3) слідує: якщо для довільного ресурсу $1 \le i \le m$ споживання $(Bx_s)_i$ більше ніж його доступність $r_i(v_s)$, то ціна $(v_s)_i$ має бути збільшена, в той час якщо $(Bx_s)_i < r_i(v_s)$, то ціна $(v_s)_i$ має бути зменшена.

На першому кроці передбачається вектор виробництва $\hat{x}$, вектор цін споживання $\hat{\lambda}$ та вектор цін на ресурси $\hat{v}$. Далі ми передбачаємо вектор цін за умовну одиницю $p(\hat{x})$, вектор споживання $\mathrm{c}(\hat{\lambda})$ та вектор доступності ресурсів $r(\hat{v})$.

На наступному кроці ми використовуємо $p(\hat{x}), \mathrm{c}(\hat{\lambda})$ та $r(\hat{v})$ для знаходження нових векторів цін, споживання та цін на ресурси.

Формально це буде виглядати наступним чином:

$$\widehat{y_s} = P_\Omega\big(y_s + tg(y_s)\big) = [y_s + tg(y_s)]_+$$

На другій фазі будемо робити такі обчислення:

$$y_{s+1} = P_\Omega(y_s + tg(\widehat{y_s}))$$

Більш детально обчислення виглядають:

$$\widehat{x_s} = [x_s + t((I - A)^T \lambda_s - p(x_s) - B^T v_s)]_+$$

$$\widehat{\lambda_s} = [\lambda_s + t(c(\lambda_s) - (I - A)x_s)]_+$$

$$\hat{v}_s = \big[v_s + t\big(Bx_s - r(v_s)\big)\big]_+$$

І наступна апроксимація вираховується як:

$$x_{s+1} = [x_s + t((I - A)^T \hat{\lambda}_s - p(\hat{x}_s) - B^T \hat{\lambda}_s)]$$

$$\lambda_{s+1} = \big[\lambda_s + t\big(c\big(\hat{\lambda}_s\big) - (I - A)\hat{x}_s\big)\big]_+$$

$$v_{s+1} = \big[v_s + t\big(B\hat{x}_s - r(\hat{v}_s)\big)\big]_+$$

Алгоритм буде зупинятись коли $\nu(x_s, \lambda_s, v_s) \geq eps$, де eps – це задана точність.

5.2 Метод екстраполяції з минулого

Нехай $y_0 = z_0 = (x_0, \lambda_0, v_0) \,\epsilon\, \Omega$ буде стартовою точкою Тоді для y_s та z_s обчислюємо

$$y_{s+1} = P_\Omega(y_s + tg(z_s))$$

Або більш детально:

$$x_{y_{s+1},j} = \left[x_{y_s,j} + t\big((I-A)^T\lambda_{z_s} - p\big(x_{z_s}\big) - B^T v_{z_s}\big)_j\right]_+, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda_{y_{s+1},j} = \left[\lambda_{y_s,j} + t\big(c(\lambda_{z_s}) - (I-A)x_{z_s}\big)_j\right]_+, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$v_{z_{s+1},i} = \left[v_{y_s,j} + t\big(Bx_{z_s} - r(v_{z_s})\big)_i\right]_+, \qquad 1 \leq i \leq n$$

На другому кроці обчислюємо:

$$z_{s+1} = P_\Omega(y_{s+1} + tg(z_s))$$

Або більше детально:

$$x_{z_{s+1},j} = \left[x_{y_{s+1},j} + t\big((I-A)^T\lambda_{z_s} - p\big(x_{z_s}\big) - B^T v_{z_s}\big)_j\right]_+, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda_{z_{s+1},j} = \left[\lambda_{y_{s+1},j} + t\big(c(\lambda_{z_s}) - (I-A)x_{z_s}\big)_j\right]_+, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$v_{z_{s+1},i} = \left[v_{y_{s+1},j} + t\big(Bx_{z_s} - r(v_{z_s})\big)_i\right]_+, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Алгоритм буде зупинятись коли $\nu(x_s, \lambda_s, v_s) \geq eps$, де eps – це задана точність.

5.3 Метод Tseng'а

Нехай $y_0 = (x_0, \lambda_0, v_0) \epsilon \Omega$ буде стартовою точкою Тоді для y_s обчислюємо

$$\hat{y}_s = P_\Omega(y_s + tg(y_s))$$

Або більш детально:

$$\hat{x}_{s,j} = \left[x_{s,j} + t((I - A)^T \lambda_s - p(x_s) - B^T v_s)_j\right]_+, \qquad 1 \le j \le n$$

$$\hat{\lambda}_{s,j} = \left[\lambda_{s,j} + t(c(\lambda_s) - (I - A)x_s)_j\right]_+, \qquad 1 \le j \le n$$

$$\hat{v}_{s,i} = \left[v_{s,j} + t(Bx_s - r(v_s))_i\right]_+, \qquad 1 \le i \le n$$

На другому кроці обчилюємо:

$$y_{s+1} = \hat{y}_s + t(g(\hat{y}_s) + g(y_s\ ))$$

Або більше детально:

$$x_{s,j} = \hat{x}_{s,j} + t(\left((I - A)^T \hat{\lambda}_s - p(\hat{x}_s) - B^T \hat{v}_s\right)_j$$

$$+(\ (I - A)^T \lambda_{s,j} - p\left(x_{s,j}\right) - B^T v_{s,j})_j), \qquad 1 \le j \le n$$

$$\lambda_{s,j} = \hat{\lambda}_{s,j} + t(\left(c\left(\hat{\lambda}_s\right) - (I - A)\hat{x}_s\right)_j + (c(\lambda_s) - (I - A)x_s)_j), \qquad 1 \le j \le n$$

$$v_{s,i} = \hat{v}_{s,i} - t(\left(B\hat{x}_s - r(\hat{v}_s)\right)_i + \left(Bx_s - r(v_s)\right)_i), \qquad 1 \le i \le n$$

Алгоритм буде зупинятись коли $\nu(x_s, \lambda_s, v_s) \ge eps$, де eps – це задана точність.

6 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

Щоб знайти верхню межу константи Ліпшиця знайдемо якобіан оператора g [7]:

$$J = \nabla g(x,\lambda,v) = \begin{bmatrix} -\nabla p(x) & (I-A)^T & -B^T \\ -(I-A) & \nabla c(\lambda) & 0_{(n,m)} \\ B & 0_{(m,n)} & -\nabla r(v) \end{bmatrix}$$

Тоді [7]

$$L \le \left||J_F|\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n+m}\sum_{j=1}^{2n+m} J_{ij}^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2n+m}\sum_{j=1}^{2n+m} M^2} = (2n+m)M$$

Де $M = \max\{J_{kl} | 1 \le k \le 2n+m, 1 \le l \le 2n+m\}$

Були використані наступні векторні функції:

$$\hat{p}(x) = Px + \overline{p},$$

$$\hat{c}(\lambda) = C\lambda + \overline{c},$$

$$\hat{r}(v) = Rv + \overline{r},$$

Де $P, C: R^n \to R^n, R: R^m \to R^m$ випадково згенеровані додатньо визначені матриці з найменшим власним значенням 1 та елементи яких не перевищують 2. Елементи продуктової матриці A та технологічної матриці B згенеровані у проміжку $(0,1)$.

Далі вводимо нелінійні доданки до векторних функцій:

$$p(x) = \hat{p}(x) - \breve{p}(x)$$

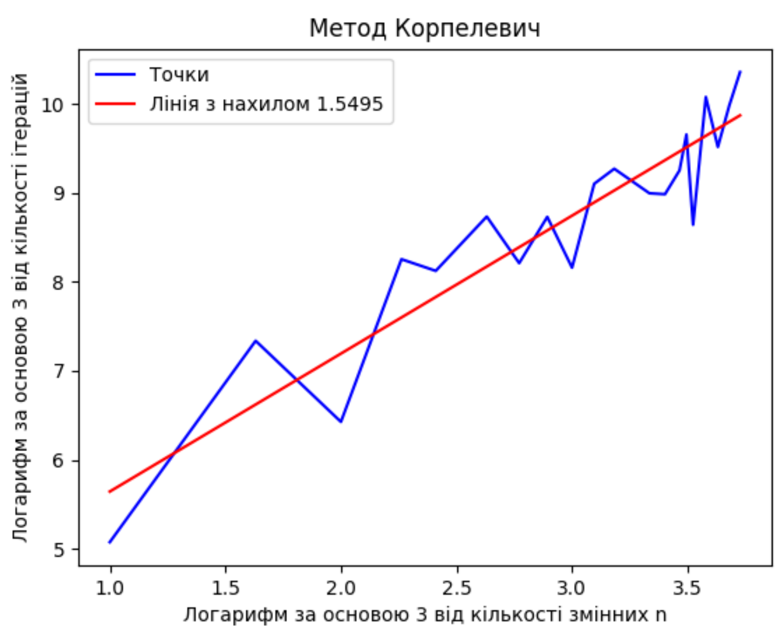
З $\check{p}(x) = \left(\check{p}_1(x), \dots, \check{p}_n(x)\right), \check{p}_i(x) = \xi_i \ln(1 + x_i)$ та ξ_i це випадково згенероване число з проміжку $(0,1)$. Схожим чином визначимо

$$c(\lambda) = \hat{c}(\lambda) - \check{c}(\lambda)$$

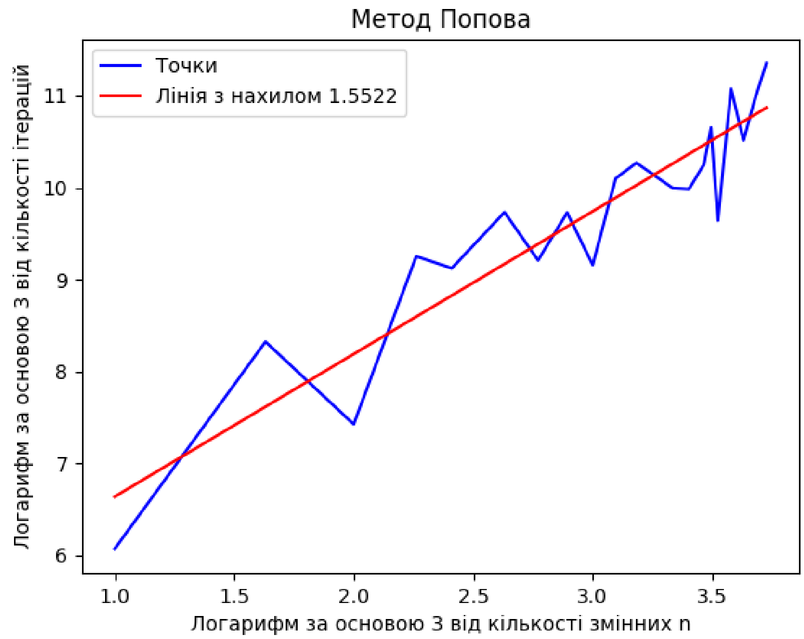
$r(v) = \hat{r}(v) + \check{r}(v)$

Ми спробували знайти рівновагу у випадку якщо $n = 3,6,9, \dots, 60$ та провели емпіричні дослідження того як швидко і за яку кількість ітерацій сходять різні методи.

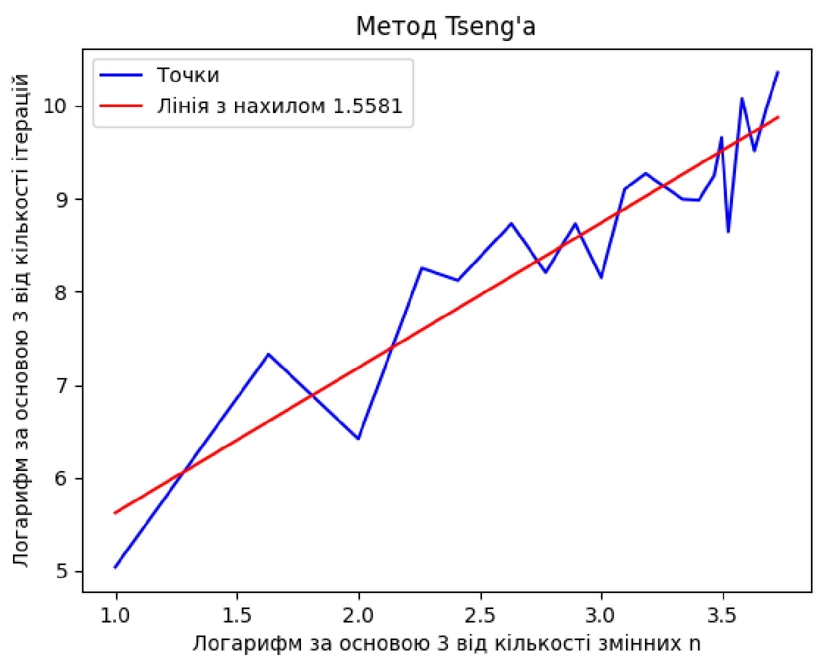
Кількість ітерацій для методу Корпелевич



Кількість ітерацій для методу Попова

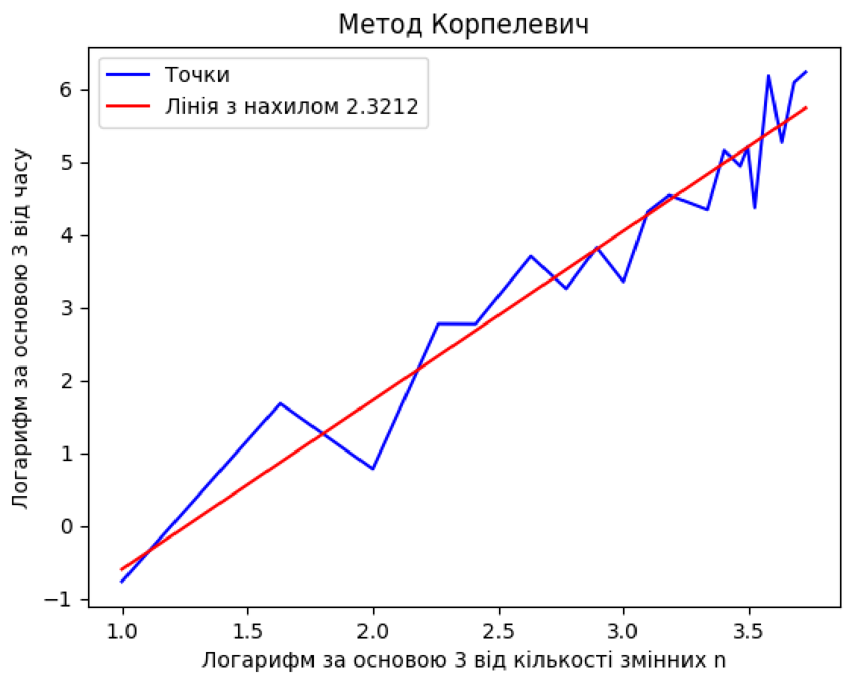


Кількість ітерацій методу Tseng'а

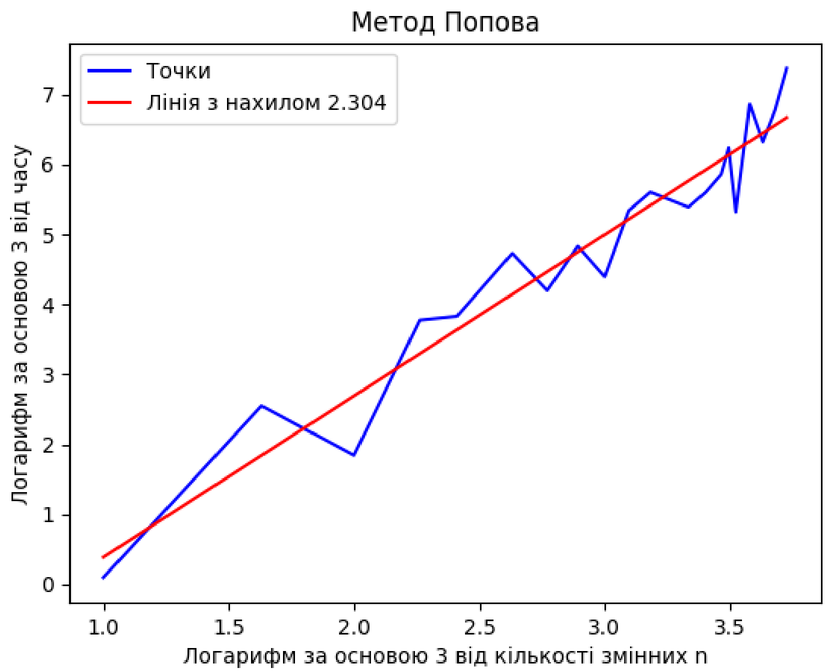


З отриманих результатів можемо зробити висновок що метод Tseng'а показує приблизно таку саму швидкість зростання кількості ітерацій що і метод Попова; метод Корпелевич сходиться найшвидше і за найменшу кількість ітерацій; в той же час метод Попова вимагає приблизно втричі більше ітерацій ніж метод Корпелевич

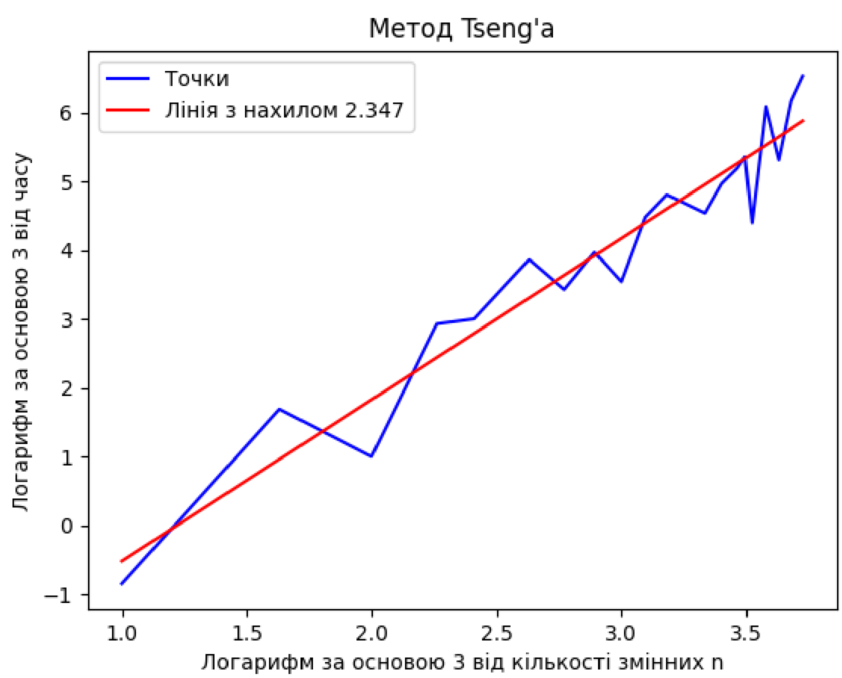
Час в секундах для методу Корпелевич



Час в секундах для методу Попова



Час в секундах методу Tseng'a



Метод Попова показав найкращу швидкість зростання, проте фактичний час є досить високим; швидкість зростання часу методу Корпелевич є трішки повільніша ніж метод Tseng'a, проте фактична різниця у часі для обчислень в порівнянні з методом Попова є не настільки суттєвою.

Розмірність	Метод Корпелевич	Метод Попова	Метод Tseng'a
3	0.4339940547943115	0.3910007476806640	1.115001201629638
6	6.347996950149536	6.367001533508301	16.515995502471924
9	2.3599929809570312	2.987528085708618	7.600585460662842
12	21.075050115585327	24.932995557785034	63.42215919494629
15	21.00652050971985	26.985467672348022	67.31977605819702
18	58.56756114959717	69.5680902004242	181.1365749835968
21	35.77272439002991	43.0388720035553	101.07073855400085
24	66.64459443092346	78.11395573616028	202.916565656662
27	39.63097667694092	48.88473033905029	125.83263444900513
30	113.999094247818	136.80831933021545	353.84401988983154
33	146.64131212234497	195.78566122055054	473.15358710289
36	117.87400078773499	145.9840636253357	374.09956979751587
39	287.26846194267273	234.27363085746765	471.54894185066223
42	227.04976773262024	300.4921524524689	627.1412048339844
45	304.71299743652344	359.77528643608093	951.5270037651062
48	121.60299897193909	125.20099711418152	346.2926034927368
51	887.583179473877	799.5937855243683	1880.8752887248993
54	324.7712781429291	341.83985805511475	1041.7837846279144
57	803.0525479316711	878.1550447940826	1720.8097083568573
60	939.9476897716522	1308.3256826400757	3311.0935690402985

Таблиця 6.1 Значення часу при різних розмірностях та методах

ВИСНОВКИ

У даній роботі були розглянуті різні економічні моделі, їхні застосування, переваги та недоліки. Дані економічні моделі можуть бути використані для розгляду різних аспектів економічних систем, включаючи виробництво, споживання, інвестиції, фінанси та макроекономічну стабільність. Кожна модель має свої припущення, обмеження та цільову функцію, що визначають її область застосування.

Описані основні положення теорії варіаційних нерівностей, які знаходять широке застосування в різних галузях таких як економіка, оптимальне керування, гідродинаміка, фізика, біологія та багато інших; розглянуті різні методології для роботи з ними. Особливу увагу було приділено теорії нерухомих точок, оскільки на ній базуються проекційні методи.

Розглянуто модель, запропоновану Ігорем Гривою та Романом Поляком, реалізовано методи Попова та Tseng'а для знаходження НРВС, які не використовувались до цього; а також виконане порівняння отриманих результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production. The American Economic Review. 1928. Vol. 18, no. 1. P. 139–165.
2. Swan T. W. ECONOMIC GROWTH and CAPITAL ACCUMULATION. Economic Record. 1956. Vol. 32, no. 2. P. 334–361.
3. Lucas R. E. Expectations and the neutrality of money. Journal of Economic Theory. 1972. Vol. 4, no. 2. P. 103–124.
4. Ramsey F. P. A Mathematical Theory of Saving. The Economic Journal. 1928. Vol. 38, no. 152. P. 543.
5. Leontief W. Input–Output Analysis. The New Palgrave Dictionary of Economics. London, 1987. P. 1–8.
6. R. A. Polyak, Finding Nonlinear Production - Consumption Equilibrium, to appear in a volume entitled “David Gale: Mathematical Economist: Essays in Appreciation on his 100th Birthday” in the series Monographs in Mathematical Economics (Springer), 2023.
7. Polyak R. A., Griva I., Numerical aspects of finding Nonlinear Production – Consumption Equilibrium. 2023.
8. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. 2nd ed. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1999. 412 p.
9. Tseng P. A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings. SIAM Journal on Control and Optimization. 2000. Vol. 38, no. 2. P. 431–446.
10. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. Экономика и математические методы. 1976. № 4. С. 747–756.

11. Семенов В. В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми : підручник. Київ, 2021. С.63 – 71.
12. Deaton A. Understanding Consumption. Understanding Consumption. 1992. P. 214–221.
13. Saari S. PRODUCTIVITY Theory and Measurement in Business. Espoo, Finland: European Productivity Conference. 2006.
14. Leamer E. E. The Heckscher-Ohlin Model in theory and practice. Princeton, N.J : International Finance Section, Department of Economics, Princeton University, 1995. 50 p.
15. Попов Л. Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек. Математические заметки. 1980. Т. 28, № 5. С. 777–784.