Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Наквасюк Юлія Анатоліївна

УДК 517.956

Усереднення варіаційних нерівностей в густих з'єднаннях

01.01.02 --- диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Мельник Тарас Анатолійович
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ -- 2016

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми

Відомо, що деякі властивості матеріалів залежать від їх геометричної структури. Тому вивчення впливу мікростуктури матеріалу дозволяє глибше зрозуміти процеси, які відбуваються в тілах з таких матеріалів, покращити їх корисні властивості та зменшити небажані ефекти. Математичними моделями цих процесів є крайові задачі в областях складної структури: перфорованих областях, областях з швидко осцилюючою межею, з'єднаннях тонких областей різної конфігурації, густих з'єднаннях, тощо. Масштаб мікроструктури системи відображається наявністю деякого малого параметра в таких математичних моделях.

Часто складно або практично неможливо розв'язати ці задачі безпосередньо, використовуючи аналітичні або чисельні методи. Найбільш ефективними інструментами дослідження таких задач є асимптотичні методи теорії усереднення. Теорія усереднення для звичайних диференціальних рівнянь була в основному розроблена М.М.Криловим, М.М.Боголюбовим, Ю.О.Митропольським, А.М. Самойленком та їхніми учнями. Теорія усереднення для диференціальних рівнянь в частинних похідних почала розвиватися в 70-80 роки минулого століття в працях М.С.Бахвалова, В.В.Жикова, В.О.Марченко, О.А.Олійник, І.В.Скрипника, Є.Я.Хруслова, A.Bensoussan, D.Cioranescu, E.De Giorgi, J.L.Lions, F.Murat, G.C.Papanicolau, E.Sanchez-Palencia, S.Spagnolo, L.Tartar, і зараз продовжує активно розвиватися в роботах О.А.Ковалевського, Т.А.Мельника, С.О.Назарова, С.Є.Пастухової, Г.В.Сандракова, Г.О.Чечкіна, Т.А.Шапошнікової, P.Donato та інших як українських так і зарубіжних математиків.

Одним з типів крайових умов, які можуть бути заданими на межах областей складної структури, є умови Сіньоріні. Вперше задача теорії пружності з такими крайовими умовами була поставлена самим Сіньоріні в 1959 році в роботі [112]. В задачі Сіньоріні є два альтернативних набори крайових умов, які містять не тільки рівності, а також нерівності. Причому апріорі невідомо, який з двох наборів умов виконується для кожної точки. Умови Сіньоріні зустрічаються в багатьох прикладних задачах, зокрема в гідрогеології, в теорії пластичності, в теорії розповсюдження тріщин в пружних середовищах, в задачах оптимального керування. Цікаві асимптотичні властивості виявлено при дослідженні крайових задач Сіньоріні в перфорованих областях в роботах А.Ю. Воробйова і Т.А. Шапошнікової [8], [9], А.Ю. Воробйова [10], С.Є. Пастухової [42], Г.В. Сандракова [43], А.Ю. Бєляєва [50].

Основним інструментарієм дослідження крайових задач Сіньоріні є теорія варіаційних нерівностей, основи якої були закладені в минулому столітті в фундаментальних роботах Ж.-Л. Ліонса, Г. Стампаккьї, Р. Гловінскі, Р. Тремольєрі, Г.Дюво, Д. Кіндерлерера, А. Фрідмана та інших (див. [87], [24], [78], [11], [15], [45]). За допомогою цієї теорії доводяться теореми існування та єдиності.

В багатьох галузях природознавства застосовуються конструкції у формі густих з'єднань. Густим з'єднанням типу $k:p:d$ називається область в $\mathbb{R}^n$, яка складається із деякої області (тіло густого з'єднання) та великої кількості тонких областей, що ε-періодично розташовані вздовж деякої множини (зона приєднання) на межі тіла густого з'єднання. Тип $k:p:d$ густого з'єднання відповідає граничним розмірностям ($\varepsilon \to 0$) тіла з'єднання, зони приєднання та кожної з приєднуваних тонких областей відповідно.

Різні конструкції, які мають форму густого з'єднання (див. Рис.1 та Рис.2), успішно використовуються в нанотехнологіях [79], [86], мікротехніці [88], сучасних інженерних конструкціях, а також багатьох інших фізичних та біологічних системах, наприклад, в ефективних датчиках (див. огляд

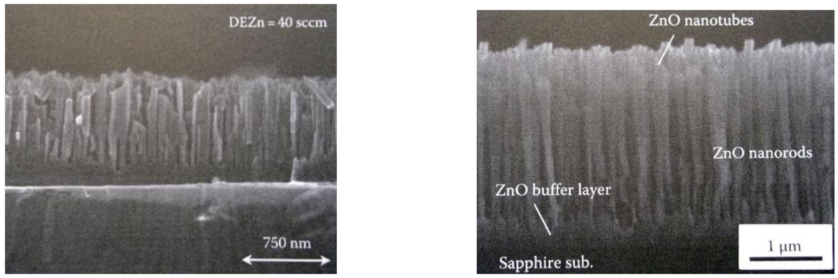

Рис. 1. Наноструктури у формі густих з'єднань

Рис. 2. Теплові радіатори у формі густих з'єднань

[48]), густих абсорберах для очищення води від шкідливих органічних домішок [85], тощо.

Першими роботами, в яких досліджувалися крайові задачі в густих з'єднаннях, були праці Є.Я.Хруслова [46] та його спільні роботи з В.П.Котляровим [22], В.А.Марченком [25] та Г.В.Сузіковим [44].

В роботах Т.А.Мельника та С.О.Назарова [100], [102], [104], Т.А.Мельника [95], [91], С.О.Назарова [106] дана класифікація густих з'єднань, розроблено строгі математичні методи аналізу крайових задач в густих з'єднаннях різних типів. В цих роботах показано, що властивості розв'язків істотно залежать від типу густого з'єднання і від типу крайових умов, заданих на межах тонких областей.

У крайових задачах в густих з'єднаннях вивчається асимптотична поведінка розв'язків при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких приєднуваних областей необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Успішні застосування структур, що мають форму густих з'єднань, стимулювали активне вивчення крайових задач з сильно контрастними фізичними властивостями (див. [104], [37], [77]). Зокрема, в останні роки з'явилося багато робіт, присвячених асимптотичному аналізу крайових задач в густих багаторівневих з'єднаннях, в каскадних з'єднаннях, в густих з'єднаннях з розгалуженою структурою.

Огляд наукової літератури свідчить, що відсутні роботи, де б розглядалися задачі в густих з'єднаннях з крайовими умовами типу Сіньоріні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертація виконана у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка в рамках державних бюджетних наукових тем № 06 БФ 038-01 <<Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико-механічних полів>> (керівник: академік НАН України, професор М.О. Перестюк, номер державної реєстрації 0106U005863) та № 11 БФ 038-04 <<Варіаційні та асимптотичні методи в задачах механіки суцільних середовищ>> (керівник: д.ф.-м.н., професор О.С. Лимарченко, номер державної реєстрації 0111U004956).

Мета й завдання дослідження.

Мета дослідження --- вивчення асимптотичної поведінки розв'язків еліптичних та параболічних варіаційних нерівностей як лінійних так і квазілінійних в густих з'єднаннях різних типів, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Завдання дослідження:

1. Довести теореми збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язків лінійних еліптичних крайових задач Сіньоріні в плоскому густому з'єднанні типу 2:1:1 та густому з'єднанні типу 3:2:1.

2. Довести теореми збіжності для розв'язків лінійних параболічних крайових задач Сіньоріні в плоскому густому з'єднанні типу 2:1:1 та густому з'єднанні типу 3:2:1.

3. Довести теореми збіжності для розв'язку квазілінійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1 та дослідити вплив нелінійних сингулярно збурених крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку.

Об'єкт дослідження: еліптичні та параболічні (як лінійні, так і квазілінійні) варіаційні нерівності в густих з'єднаннях різних типів.

Предмет дослідження: асимптотична поведінка розв'язків еліптичних та параболічних варіаційних нерівностей в густих з'єднаннях різних типів, при $\varepsilon \to 0$.

Методи дослідження

Для розв'язання сформульованих задач дисертаційної роботи використовуються методи теорії усереднення диференціальних рівнянь з частинними похідними, методи асимптотичного та нелінійного функціонального аналізу. При доведенні апріорних оцінок для параболічних крайових задач використовується метод штрафу. При доведенні теорем збіжності для всіх задач використовується метод спеціальних інтегральних тотожностей (Мельник Т. А.).

Наукова новизна одержаних результатів

В дисертації вперше одержано такі результати:

1. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в плоскому густому з'єднанні типу 2:1:1.

2. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.

3. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 2:1:1.

4. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.

5. Доведено теореми збіжності для розв'язку квазілінійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1 та досліджено вплив нелінійних сингулярно збурених крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку.

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та є ваговим внеском у теорію усереднення диференціальних рівнянь з частинними похідними в густих з'єднаннях. Вони можуть бути застосовані в різноманітних прикладних задачах, які моделюють фізичні та біологічні процеси в тонких складних конструкціях, які мають форму густих з'єднань. Результати можуть бути використані для подальших досліджень в Інституті НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Особистий внесок здобувача

Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником працях Т.А. Мельнику належать постановка задач, визначення загальної схеми дослідження та аналіз отриманих результатів. Крім того, в статті [99] професору В.Л. Вендланду належать результати пунктів 7-10.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на наступних наукових семінарах, міжнародних та всеукраїнських конференціях:

1. Науковий семінар кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи математичної фізики" (керівники: д.ф.-м.н., професор

Т.А.Мельник, д.ф.-м.н., професор В.Г.Самойленко), Київ, 6 жовтня 2009 р., 3 квітня 2012 р., 27 травня 2015р., 26 травня 2016 р.

2. Навчально-науковий семінар кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника "Прикладний нелінійний аналіз" (керівники: д.ф.-м.н., професор А.В.Загороднюк, к.ф.-м.н., доцент С.В.Шарин), Івано-Франківськ, 26 вересня 2012 р.

3. Семінар механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка "Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь" (керівники: професор М.І.Іванчов, професор П.І.Каленюк, член-кореспондент НАН України, професор Б.Й.Пташник), Львів, 5 жовтня 2012р.

4. Четверта всеукраїнська наукова конференція: Нелінійні проблеми аналізу, 10-12.09 2008, м. Івано-Франківськ.

5. Second international conference for young mathematicians on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii, Donetsk, 11-14.11.2008.

6. Humboldt Kolleg " Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits" , 05-08.08.2010, Kyiv.

7. Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, 28-29.04.2011, м. Київ.

8. П'ята всеукраїнська наукова конференція: Нелінійні проблеми аналізу, 19-21.09.2013, м. Івано-Франківськ.

9. Міжнародна математична конференція: Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки, 23-24.04.2014, м. Київ.

10. Міжнародна міждисциплінарна конференція молодих вчених: Шевченківська весна, 1-3.04.2015, м. Київ.

Публікації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у п'яти статтях у наукових фахових виданнях [81, 99, 29, 97, 98] та додатково висвітлені в 1 препринті [80], а також в семи тезах, опублікованих у матеріалах конференцій [13, 14, 105, 38, 39, 40, 41].

Структура дисертації

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 143 сторінки. Список використаних джерел містить 116 найменувань. Дисертація містить 5 рисунків.

Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Тарасу Анатолійовичу Мельнику за знання, отримані під його керівництвом, постановку розглянутих в дисертаційній роботі задач, постійну увагу та підтримку при їх розв'язанні.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури й основних результатів

1.1 Огляд літератури

Багато математичних моделей явищ і процесів у фізиці, механіці, техніці та біології описуються задачами для рівнянь в частинних похідних, які залежать від малого параметра ε. Одним із класів таких задач є задачі в областях складної структури, локальні характеристики яких залежать від малого параметра ε (перфоровані області, каркасні конструкції, тонкі області, з'єднання тонких областей різних конфігурацій тощо). Безпосередній розв'язок задач в таких областях аналітичними або чисельними методами є складним, або практично неможливим. Тому, виникає задача заміни складної моделі простішою і обгрунтування правильності такої заміни, що приводить до доведення теорем про близькість розв'язку вихідної задачі до розв'язку простішої.

Як зазначено у вступі, одним з типів крайових умов, які можуть бути заданими на межах областей складної структури, є умови Сіньоріні. Математичним апаратом дослідження крайових задач з такими умовами є теорія варіаційних нерівностей. Варіаційні нерівності виникають при розгляді явищ, для яких зв'язки, рівняння стану, формулювання фізичних законів змінюються при досягненні певними величинами деякого порогу (званого вільною межею). Першою задачею, сформульованою у вигляді варіаційної нерівності, була задача Сіньоріні, поставлена ним в 1959 році в роботі [112]. Ця задача була досліджена та розв'язана в статті [71]. Результати статті [71] були анонсовані в [72], [74], [75]. В задачі Сіньоріні є два альтернативних набори крайових умов та апріорі невідомо який з двох наборів умов виконується для кожної точки. Математично така ситуація описується наступними співвідношеннями:

$$u \le g, \quad \partial_\nu u \le d, \quad (u-g)(\partial_\nu u - d) = 0 \quad \text{íà} \quad \partial\Omega.$$

Для цих умов, що характеризують стан односторонніх зв'язків, Сіньоріні запропонував термін "сумнівні граничні умови". Згодом ці умови стали називати умовами Сіньоріні. Цей тип умов найбільше відповідає моделюванню різних процесів в областях із складною структурою межі, оскільки наперед невідомо, яка з умов (умова Діріхле чи умова Неймана) на якій частині складної межі виконується.

Варіаційні нерівності виникають природнім чином із умов розв'язності задач мінімізації з обмеженнями (див. [73]). Нехай дано функціонал

$$I[w] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \right) dx,$$

де функції w належать множині $A := \{ w \in H_0^1(\Omega) : w \ge h \quad \text{ì.ñ.íà } \Omega \}$. Тут h та f -- задані гладкі функції в області Ω.

Теорема 1.1 *([73], розд. 8) Якщо* $u \in A$ *-- єдиний мінімізатор функціоналу* I *з множини* A*, тобто*

$$I[u] = \min_{w \in A} I[w],$$

тоді u задовольняє варіаційну нерівність

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (w-u)\, dx \ge \int_\Omega f(w-u)\, dx \qquad \forall w \in A. \tag{1.1}$$

В [73] (розд. 8) показано, що на множині $O := \{x \in \Omega : u(x) > h(x)\}$ функція задовольняє рівнянню Пуассона $-\Delta u = f$, а на множині $C := \{x \in \Omega : u(x) = h(x)\}$ нерівності $-\Delta u \ge f$. Таким чином, маємо

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{íà} \quad \Omega \cap \{u > h\}, \\ u \ge h, \quad -\Delta u \ge f \quad \text{ì.ñ.íà } \Omega. \end{cases}$$

Множина $F := \partial O \cap \Omega$ називається вільною межею.

Детальний виклад теорії варіаційних нерівностей із застосуваннями в прикладних задачах можна знайти в книгах таких математиків: Ж.-Л. Ліонса, Г. Стампаккьї, Р. Гловінскі, Р. Тремольєрі, Г.Дюво, Д. Кіндерлерера, К. Байокки, А. Капелло, А. Фрідмана та інших (див. [87], [24], [78], [11], [15], [49], [45]).

В роботі Фрідмана [45] доведені існування та єдиність варіаційної нерівності за наступних припущень. Нехай V -- дійсний гільбертовий простір, V^* -- спряжений до нього, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ -- дужки двоїстості між V і V^*. Розглянемо в V замкнену, опуклу множину K. Нехай $a(u,\varphi)$ -- білінійна форма на $V \times V$. Припустимо, що вона обмежена та коерцитивна, тобто

$$\exists c > 0 \quad \forall u, \varphi \in V: \quad |a(u,\varphi)| \le c\|u\|\|\varphi\|,$$

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in V: \quad a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2.$$

Теорема 1.2 *([45], глава 1) Нехай $f \in V^*$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in K$ такої варіаційної нерівності*

$$a(u, \varphi - u) \ge \langle f, \varphi - u \rangle \quad \forall \varphi \in K.$$

В роботі Ж.-Л. Ліонса [24] доведені теореми існування та єдиності для еліптичних нелінійних варіаційних нерівностей.

Теорема 1.3 *([24], глава 2) Нехай K - опукла замкнена необмежена множина в V. Нехай $A: K \to V'$ - псевдомонотонний оператор, коерцитивний в наступному сенсі: існує таке $v_0 \in K$, що*

$$\frac{(A(v), v - v_0)}{\|v\|} \to +\infty, \quad \text{якщо} \quad \|v\| \to \infty, \quad \forall v \in K, \tag{1.2}$$

Тоді для заданого f із V' існує $u \in K$, для якого виконується

$$(A(u), v - u) \ge (f, v - u) \quad \forall v \in K. \tag{1.3}$$

Теорема 1.4 *([24], глава 2) Якщо припустити, що*

$$(A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) > 0 \quad \text{при} \quad u_1 \ne u_2, \quad u_1, u_2 \in K, \tag{1.4}$$

то нерівність (3) буде допускати не більше одного розв'язку.

Зауваження 1.1 *Якщо* A *- обмежений та семінеперервний оператор, то* A *- псевдомонотонний оператор.*

Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності розглядалися в роботах [1], [2]. Еліптичні варіаційні нерівності в областях складної структури розглядались в працях О.А.Ковалевського ([20], [21], [84]). Для нелінійних еліптичних операторів ним в областях складної структури була розвинута теорія G-збіжності операторів та G-збіжності функціоналів, яка тісно пов'язана з теорією усереднення диференціальних рівнянь з частинними похідними (див. [16], [17], [18], [19], [82], [83]).

В роботі Р. Гловінскі, Ж.-Л. Ліонса, Р. Тремольєрі [78] доведені існування та єдиність параболічної варіаційної нерівності за наступних умов:

1) V і H - два гільбертових простори, причому $V \subset H$, V щільно та неперервно вкладається в H. Тоді $\|v\|_H \le c\|v\|_V \quad \forall v \in V$. Простір H ототожнимо з його спряженим, тоді будемо мати $V \subset H \subset V'$ (V' - спряжений до V). Визначимо простір $W(0,T)$ за формулою

$$W(0,T) = \left\{ v \mid \quad v \in L^2(0,T;V), v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V') \right\}.$$

Визначимо підпростір простору $W(0,T)$ за формулою

$$W_0(0,T) = \left\{ v \mid \quad v \in W(0,T), v(0) = u_0, u_0 - \text{çàäàíèéåëåìåíò} \quad H \right\}.$$

2) K - замкнена опукла множина в V,

3) u_0 - елемент, який фігурує в початкових умовах,

4) $A \in \mathcal{L}(V;V)$,

5) $(Av,v)_H \ge \alpha \|v\|^2, \quad \alpha = const > 0$,

6) $a(u,v) = (Au,v)_H, \quad a(u) = (Au,u)_H$,

7) $j : K \to R, \ne \pm\infty$ на K; крім того цей функціонал напівнеперервний знизу, опуклий на K та інтегровний для будь-якого $v \in L^2(0,T;K)$, тобто $\left| \int_0^T j(v)dt \right| < +\infty$,

8) $f \in L^2(0,T;V')$,

9) $\mathrm{K} = \{v \mid v \in W(0,T), v(t) \in K \quad \text{äëÿ ì.â.} \quad t \in [0,T]\}$,

$\mathrm{K}_0 = \{v \mid v \in W_0(0,T), v(t) \in K \quad \text{äëÿ ì.â.} \quad t \in [0,T]\}$.

За даних умов розглядається задача: знайти $u \in \mathrm{K}_0$ таке, що

$$\int_0^T (u' + Au - f, v - u)_H \, dt + \int_0^T [\, j(v) - j(u)] dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathrm{K}, \tag{1.5}$$

або еквівалентне формулювання цієї задачі: знайти $u \in \mathrm{K}_0$ таке, що

$$(u' + Au - f, v - u)_H + j(v) - j(u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathrm{K}, \tag{1.6}$$

для майже всіх $t \in [0,T]$.

Теорема 1.5 *([78], глава 6) Якщо виконані умови 1)-9) і крім того,*

$$f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0,T;V'), \quad j(v) \equiv 0, \quad f(0) - Au_0 \in H,$$

то задача (5) (або (6)) має єдиний розв'язок u такий, що

$$u, u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H).$$

Знаходженню класів існування та єдиності розв'язків для нових типів параболічних варіаційних нерівностей присвячені роботи [3], [4], [5], [6], [7], [23], [54].

В останні роки успішно розвивається теорія усереднення варіаційних нерівностей, які відповідають крайовим задачам в перфорованих областях з крайовими умовами Сіньоріні (див. [8], [9],[10], [43], [109],[42], [50]).

Так у роботі А.Ю. Воробйова і Т.А. Шапошнікової [8] було розглянуто задачу

$$-\Delta u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{íà} \quad \Gamma_\varepsilon;$$

$$u_\varepsilon \leq g(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(x) \leq h(x), \quad (u_\varepsilon - g(x))\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(x) - h(x)\right) \quad \text{íà} \quad S_\varepsilon \tag{1.7}$$

в ε- періодичній перфорованій області Ω_ε. В (7) $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \omega_\varepsilon$, Ω - обмежена область в $\mathrm{R}^n, n \geq 3$, з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q =$

$x \in n^n, 0 < x_j < 1, j = \overline{1,n}$ - одиничний куб в R^n, G_0 - область в Q, $\overline{G_0}$ дифеоморфне замкненій кулі, $\overline{G_0} \subset Q$, $T_\varepsilon = a_\varepsilon G_0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon^{n-1} \varepsilon^{-n} = C_1 = const > 0, \qquad (1.8)$$

$$Y_\varepsilon = \varepsilon Q \setminus \overline{T_\varepsilon}, \qquad \overline{\omega_\varepsilon} = \Sigma_{z \in Z} (\overline{Y_\varepsilon} + \varepsilon z), \qquad S_\varepsilon = \Omega \cap \partial\Omega_\varepsilon, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon,$$

$f \in L_2(\Omega)$, $h \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in H_1^0(\Omega)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ - зовнішня одинична нормаль до S_ε.

Узагальненим розв'язком задачі (1.7) називається функція $u_\varepsilon \in K_\varepsilon = \{v(x) \in H_1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon) : v(x) \le g(x)\}$, яка задовольняє нерівність

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx \ge \int_{\Omega_\varepsilon} f (v - u_\varepsilon) dx + \int_{S_\varepsilon} (v - u_\varepsilon) dx$$

для довільного елемента $v \in K_\varepsilon$

Узагальненим розв'язком задачі з перешкодою

$$-\Delta u_0 \le f + C_0 h, \quad u_0 \le g, \quad (u_0 - g)(\Delta u_0 + f + C_0 h) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega. \qquad (1.9)$$

є функція $u_0 \in K_0 = \{u \in H_1^0(\Omega) : u(x) \le g(x)$ ì.â. â $\Omega\}$, яка задовольняє варіаційну нерівность

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla (w - u_0) dx \ge \int_\Omega (f + C_0 h (w - u_0) dx$$

для довільного елемента $w \in K_0$

В цій роботі доведено, що узагальнений розв'язок u_ε задачі (1.7) при виконанні умови (1.8) слабко збігається до функції u_0, яка є узагальненим розв'язком усередненої задачі (1.9), при $\varepsilon \to 0$. Також отримані оцінки швидкості збіжності розв'язків вихідної задачі до розв'язку усередненої.

А.Ю. Воробйов в [10] розглядає періодично перфоровану область, яка має дві порожнини різного масштабу в комірці періодичності. На межі однієї з цих порожнин задана змішана крайова умова, а на іншій - умова Сіньоріні, причому порожнини зі змішаними крайовими умовами мають так званий, "критичний" розмір. Отримана гранична варіаційна задача і доведена теорема про збіжність розв'язку u_ε вихідної задачі до задачі усередненої при $\varepsilon \to 0$.

Для випадку перфорованого 2-зв'язного ε - періодичного $(\varepsilon \in (0,1))$ простору, в якому виділена обмежена область Ω_ε, С.Є. Пастуховою в [42] усереднено при $\varepsilon \to 0$ крайову задачу в області Ω_ε для еліптичного оператора другого порядку з односторонніми умовами типу Сіньоріні на межі "дирок" і з умовою Діріхле на зовнішній межі.

В статті Г.В. Сандракова [109] розглядається усереднення варіаційних нерівностей для задач з умовою Сіньоріні на внутрішній межі періодично перфорованих областей, і однорідними умовами Діріхле на зовнішній межі. Розглядаються також варіаційні нерівності для задач з перешкодою в перфорованих областях. Доведені твердження про відповідну збіжність розв'язків цих задач до розв'язків двохмасштабних та макромасштабних граничних варіаційних нерівностей та представлені методи їх виведення. Для потенціальних операторів доведені твердження про зв'язок граничних варіаційних нерівностей з двохмасштабними та макромасштабними задачами мінімізації.

Усередненню параболічної крайової задачі Сіньоріні в періодично та випадково перфорованій області присвячена робота А.Ю. Бєляєва [50]. В ній припускається, що межа області напівпроникна, що і демонструють крайові умови Сіньоріні для шуканої змінної. Збіжність розв'язку вихідної задачі до розв'язку усередненої задачі доведена за мінімальних припущень на початкові умови та геометрію межі.

В роботах Т.А.Шапошнікової і М.М.Зубової [12], [114] та М.М.Зубової [115], [116] досліджувалась асимптотична поведінка розв'язків варіаційних нерівностей з односторонніми обмеженнями для бігармонічного оператора та оператора Лапласа на періодично розташованих підмножинах, що приєднуються вздовж межі області, коли діаметр підмножин, на яких задані обмеження, а також період, з яким розташовані ці підмножини, прямують до нуля.

Як було зазначено у вступі багато конструкцій мають форму густих з'єднань. Крайові задачі в таких областях вперше досліджувались в роботах Є.Я.Хруслова [46] та його спільних роботах з В.П.Котляровим [22], В.А.Марченком [25] та Г.В.Сузіковим [44], в яких вивчена асимптотична поведінка функції Гріна задачі Неймана для рівняння Гельмгольца в необмеженому густому з'єднанні.

В працях F. Fleury і E.Sanchez-Palencia [76], J. Sanchez-Hubert і E.Sanchez-Palencia [108] були знайдені усереднені рівняння, які описують акустичні коливання в густих з'єднаннях, але не було доведено теорем збі- жності.

В роботах Т.А. Мельника та С.О. Назарова [100], [103], [102], [104], Т.А. Мельника [95], [91], [90], С.О. Назарова [106] дана класифікація густих з’єднань. Густе з'єднання має особливий характер зв'язності: є точки в густому з'єднанні, відстань між якими є порядку $O(\varepsilon)$, в той час як довжина всіх кривих, які з'єднують ці точки і належать густому з'єднанню, є величиною порядку $O(1)$. В результаті не існує операторів продовження, які б були рівномірно обмеженими у відповідних просторах Соболєва (див. [89]). В той же час наявність рівномірно обмеженої сім'ї операторів продовження є типовим припущенням в переважній більшості існуючих схем усереднення для задач в перфорованих областях з крайовими умовами Неймана або Робіна (див., наприклад, [60], [61]). Крім того, густі з'єднання є неопуклими областями з негладкими межами. Отже, розв'язки крайових задач в таких областях мають лише мінімальну H^1-гладкість, хоча для доведення теорем збіжності в перфорованих областях деякі дослідники вимагають H^2-гладкість розв'язку (див.[61]). Всі ці фактори створюють особливі труднощі при асимтотичному аналізі крайових задач в густих з'єднаннях. У згаданих працях Т.А. Мельника та С.О. Назарова розроблено асимптотичні методи дослідження основних крайових задач математичної фізики в густих з’єднаннях різних типів, а саме використовуючи метод двохмасштабних розвинень та метод узгоджених асимптотичних розвинень, побудовано перші члени асимптотики та доведено асимптотичні оцінки, вивчено вплив крайових умов, які задаються на межах густих з'єднань, та геометричної конфігурації густих з’єднань на асимптотичну поведінку розв’язків (див. також [51], [52], [53])). Іншим шляхом асимптотичного аналізу крайових задач в густих з'єднаннях, запропонованим в цих роботах, є доведення теорем збіжності за допомогою спеціальних операторів продовження для розв'язків з простору $H^1(\Omega_\varepsilon)$ в простір $H^1(D_0)$, де D_0 - область, що містить густе з'єднання Ω_ε.

Для усереднення задач з неоднорідними крайовими умовами Неймана та Фур'є, умовами Стеклова та нелінійними умовами третього роду в густих з'єднаннях Т.А. Мельником в [95], [91], [89], [93], [26] було запропоновано новий підхід з використанням спеціальних інтегральних тотожностей (тип густого з'єднання визначає вид інтегральної тотожності).

В останні роки активно вивчаються крайові задачі в з'єднаннях більш складної структури, а саме в густих багаторівневих з'єднаннях([27], [30], [32], [33], [34], [35], [65], [66],[70],[91], [94],[96]), в каскадних з'єднаннях ([31], [36], [37], [47], [55], [56], [57]), [58], [59],в густих з'єднаннях з розгалуженою структурою ([101]).

Густе багаторівневе з'єднання – це густе з'єднання, в якому тонкі області, які приєдуються, поділені на скінченне число рівнів в залежності від їх геометричної конфігурації і крайових умов, заданих на їх межах. Крім того, тонкі області кожного рівня ε-періодично чергуються вздовж зони приєднання.

В роботах Т.А. Мельника [94], [91] та його спільних роботах з T.Durante, U. De Maio, C. Perugia [66], [65] розглядались задачі в плоских дворівненых з’єднаннях, а в [69] в дворівневому густому з'єднанні типу 3:2:1. В [94],

[91] досліджувалась спектральна задача у плоскому дворівнєвому з'єднанні. Тонкі стержні товщиною порядку ε з кожного рівня, який залежить від довжини, ε-періодично чергуються. На вертикальних сторонах тонких стержнів задано крайові умови Фур'є. Вивчено асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій при $\varepsilon \to 0$. В роботі [66] на межах тонких стержнів густого з'єднання задавались крайові умови Робіна. Використовуючи спеціальні оператори продовження для розв'язку рівняння Пуассона в такому з'єднанні, доведено теорему збіжності.

Асимптотична поведінка узагальнених розв'язків еліптичних крайових задач з почерговою зміною крайових умов в густих дворівневих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 досліджувалась в роботах Т.А. Мельника, П.С. Ващука [27], [28], [96] та Т.А. Мельника, П.С. Ващука та T. Durante [70].

Усередненням крайових задач в густих дворівневих з'єднаннях типу 3:2:2 присвячено праці Т.А. Мельника та U. De Maio [64], Т.А. Мельника, C. D'Apice, U. De Maio [62], Т.А. Мельника та Д.Ю. Садового [30], [35], [34], [33]. Такі з'єднання складаються з циліндра Ω_0, на який ε-періодично нанизано тонкі диски зі змінною товщиною. Тонкі диски поділяються на два класи в залежності від їх геометричної структури, а також від крайових умов, заданих на їх межах. В цих працях досліджено асимптотичну поведінку розв'язку лінійних та квазілінійних еліптичних та параболічних задач. Вивчено вплив геометричної конфігурації з'єднання та різних сингулярно збурених крайових умов, що чергуються, на асимптотичну поведінку розв'язку таких задач.

Каскадне густе з'єднання складається з тіла з'єднання і двох класів приєднаних тонких областей, перші з яких мають скінченну висоту, а другі – малу. Крім того, області з різних класів періодично чергуються. В такому з'єднанні Т.А. Мельник та Г.А. Чечкін в [31] розглянули лінійну еліптичну задачу, в якій тонкі стержні мають форму прямокутників, на поверхнях яких задаються умови Фур'є, різні для різних класів стержнів. Ці умови залежать від деяких параметрів. За допомогою методу спеціальних інтегральних тотожностей досліджується асимптотична поведінка розв'язку задачі, коли число тонких стержнів з кожного класу необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Виявлено істотний вплив параметрів в крайових умовах на асимптотичну поведінку розв'язку. В подальшому різні типи задач в густих каскадних з'єднаннях розглядались в роботах [32], [36], [47], [55], [56], [57], [58], [59], [37].

Густе з'єднання з розгалуженою структурою є об'єднанням тіла з'єднання та великої кількості тонких розгалужень, які ε-періодично розташовані вздовж зони приєднання. В статті Т.А. Мельника [101] розглядалася квазілінійна параболічна задача в такому з'єднанні. Розгалуження мають скінченне число рівнів. На розгалуженнях i-го рівня задаються нелінійні крайові умови Робіна $\partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_i}\mu(t, x_2, v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon$, де $\alpha_i, \beta -$ дійсні параметри. Виконано асимптотичний аналіз цієї задачі, коли кількість тонких розгалужень нескінченно зростає, а їх товщина прямує до нуля. Знайдено усереднену задачу та доведена теорема існування і єдиності розв'язку в анізотропному просторі Соболева. Побудовано асимптотичне наближення для розв'язку і вивчено вплив параметрів α_i, β.

З наведеного огляду видно, що в науковій літературі відсутні роботи, в яких би досліджувалися варіаційні нерівності в густих з'єднаннях.

2 Основні результати дисертації

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі обгрунтовано актуальність, визначено мету і завдання дослідження, розкрито сутність та наукову новизну отриманих результатів.

В першому розділі подано огляд літератури за темою дисертації і попередні відомості про отримані в дисертації результати.

У другому розділі досліджуються дві лінійні еліптичні задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1.

У підрозділі 2.1 розглядається крайова задача в плоскому густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості тонких стержнів, на вертикальних сторонах яких задано крайові умови Сіньоріні (густе з'єднання типу 2:1:1). Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку такої задачі при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких стержнів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Знайдено усереднену (граничну при $\varepsilon \to 0$) крайову задачу, яка є симбіозом звичайної крайової задачі для рівняння Пуассона в тілі густого з'єднання та варіаційної нерівності в прямокутнику, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході. В зоні з'єднання виставляються спеціальні умови спряження. Доведено теорему про існування та єдиність розв'язку такої нестандартної крайової задачі. Основним результатом цього підрозділу є доведення теореми збіжності послідовності розв'язків вихідної задачі до розв'язку усередненої задачі. Також доводиться збіжність інтегралів енергії вихідної задачі до інтегралів енергії усередненої задачі.

У підрозділі 2.2 розглядається крайова задача в густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої просторової області Ω_0 та великої кількості тонких криволінійних циліндрів, на бічних поверхнях яких задано крайові умови Сіньоріні (густе з'єднання типу 3:2:1). Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку такої задачі при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Знайдено усереднену (граничну при $\varepsilon \to 0$) крайову задачу, яка є симбіозом звичайної крайової задачі для рівняння Пуассона в тілі густого з'єднання та варіаційної нерівності в паралелепіпеді, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами в граничному переході. В зоні з'єднання виставляються спеціальні умови спряження. Досліджується вплив геометрії циліндрів, які мають змінну товщину, на асимптотичну поведінку узагальненого розв'язку. Доведено теорему про існування та єдиність розв'язку такої нестандартної крайової задачі. Основним результатом цього підрозділу є доведення теореми збіжності послідовності розв'язків вихідної задачі до розв'язку усередненої задачі. Також доводиться збіжність інтегралів енергії вихідної задачі до інтегралу енергії усередненої задачі.

У третьому розділі досліджуються дві лінійні параболічні задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях, які описані в другому розділі (типу 2:1:1 та 3:2:1). За допомогою методу інтегральних тотожностей доведено теореми збіжності та показано, що умови Сіньоріні трансформуються (при $\varepsilon \to 0$) в диференціальні співвідношення в областях, що заповнюється тонкими стержнями чи тонкими криволінійними циліндрами відповідно.

У четвертому розділі розглядається квазілінійна еліптична крайова задача в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1, яке є об'єднанням деякої області (тіла з'єднання) та великої кількості тонких циліндрів. Тонкі циліндри поділені на m класів в залежності від їх геометричних характеристик і циліндри кожного класу ε-періодично чергуються вздовж деякої частини на межі тіла густого з'єднання. На їх бічних поверхнях задані крайові умови типу Сіньоріні.

Вивчалась асимптотична поведінка розв'язку цієї задачі при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких циліндрів з кожного класу нескінченно зростає і їх товщина прямує до 0. Встановлено два якісно різних випадки асимптотичної поведінки розв'язку, що залежать від значення коефіцієнтів збурення $\{\varepsilon^{\alpha_k}\}_{k=1}^{m}$ в крайових умовах. Для кожного випадку доведено теорему збіжності.

До кожного розділу (розділи 2-4) зроблені висновки щодо якісних характеристик отриманих результатів. В кінці дисертаційної роботи наведені загальні висновки.

РОЗДІЛ 2

Усереднення еліптичних крайових задач Сіньоріні в густих з'єднаннях

В цьому розділі розгладаються лінійні еліптичні крайові задачі в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1. Густе з'єднання Ω_ε типу 2:1:1 складається з деякої плоскої області Ω_0, яка є тілом з'єднання, та великої кількості тонких стержнів з товщиною порядку $\varepsilon = O(N^{-1})$. Густе з'єднання типу 3:2:1 складається з деякої просторової області Ω_0 та великої кількості тонких криволінійних циліндрів. В кожному із густих з'єднань розглядається крайова задача для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами Сіньоріні. Для задачі в плоскому густому з'єднанні крайові умови Сіньоріні задаються на бічних сторонах тонких стержнів, а для задачі в з'єднанні типу 3:2:1 крайові умови Сіньоріні задаються на бічних поверхнях тонких криволінійних цидіндрів. Досліджується асимптотична поведінка розв'язків таких задач при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких стержнів або тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля.

2.1 Усереднення еліптичної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 2:1:1

2.1.1 Постановка задачі

Розглянемо плоске густе модельне з'єднання Ω_ε (Рис.2.1), яке складається з області

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < \gamma(x_1)\},$$

де $\gamma \in C^1([0,a])$, та великої кількості тонких стержнів

$$G_j(\varepsilon) = \left\{ x : \left| \frac{x_1}{\varepsilon} - (j + \frac{1}{2}) \right| < \frac{h}{2}, \quad x_2 \in [-l, 0] \right\}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

тобто $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon$, де $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} G_j(\varepsilon)$.

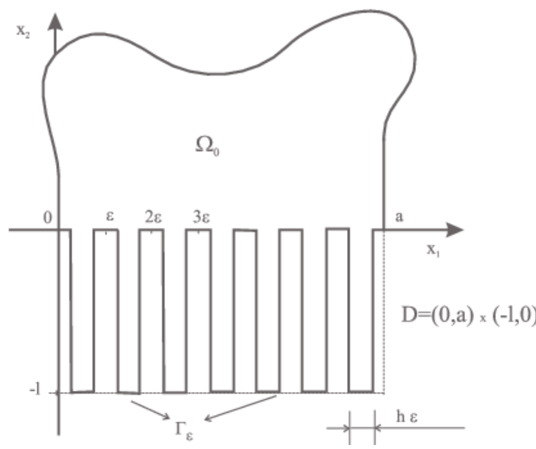

Рис. 2.1. Модельне плоске з'єднання типу 2:1:1.

Тут a, l - додатні дійсні числа; h - фіксоване число з інтервалу $(0,1)$; N - велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = \dfrac{a}{N}$ - малий дискретний параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими стержнями, товщина яких рівна εh.

Позначимо через S_ε об'єднання вертикальних сторін тонких стержнів G_ε, а через Γ_ε - основи тонких стержнів.

В області Ω_ε розглядається задача

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon), \end{cases} \tag{2.1}$$

з неоднорідними крайовими умовами Сіньоріні на S_ε

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) \le g(x), \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x) \le \varepsilon d(x), \\ \left(u_\varepsilon(x) - g(x)\right)\left(\partial_\nu u_\varepsilon(x) - \varepsilon d(x)\right) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ - зовнішня нормальна похідна.

Вважаємо, що f,g,d -- задані функції , причому $f\in L^2(\Omega_1), d\in H^1(D_0), g\in H^1(D_0;I_l\cup I_0)$. Тут $\overline{\Omega_1}=\overline{\Omega_0}\cup\overline{D_0}$, де $D_0=(0,a)\times(-l,0)$ -- прямокутник, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході, $H^1(D_0)$ - простір Соболєва, $H^1(D_0;I_l\cup I_0)=\{v\in H^1(D_0),\ v|_{I_l\cup I_0}=0\}$, $I_l=\{x: x_1\in(0,a),\ x_2=-l\}$, $I_0=\{x: x_1\in(0,a),\ x_2=0\}$.

2.1.2 Різні означення узагальненого розв'язку та їх еквівалентність

В цьому пункті наведемо два різних означення узагальненого розв'язку задачі (2.1) -- (2.2) і доведемо їх еквівалентність.

Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (2.1) -- (2.2). Нехай $g=0$ в Ω_0, домножимо рівняння задачі (2.1) на функцію $(u_\varepsilon-g)$ та проінтегруємо по Ω_ε. Використавши формулу Гріна-Остроградського, маємо

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds+\int_{\Omega_0}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon dx+\int_{G_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla(u_\varepsilon-g)dx=$$

$$=\int_{\Omega_0}fu_\varepsilon dx+\int_{G_\varepsilon}f(u_\varepsilon-g)dx, \qquad (2.3)$$

де $\nabla v=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)$. Інтеграл по межі $\partial\Omega_\varepsilon$ запишемо у вигляді суми:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds=$$

$$=\int_{S_\varepsilon}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds+\int_{\Gamma_\varepsilon}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds+\int_{\partial\Omega_\varepsilon\backslash(\Gamma_\varepsilon\cup S_\varepsilon)}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds.$$

Оскільки $u_\varepsilon=g=0$ на Γ_ε, то $\int_{\Gamma_\varepsilon}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds=0$.

З того, що $\partial_\nu u_\varepsilon=0$ на $\partial\Omega_\varepsilon\backslash(\Gamma_\varepsilon\cup S_\varepsilon)$, маємо

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon\backslash(\Gamma_\varepsilon\cup S_\varepsilon)}\partial_\nu u_\varepsilon(u_\varepsilon-g)ds=0.$$

З умови $(u_\varepsilon - g)(\partial_\nu u_\varepsilon - \varepsilon d) = 0$ на S_ε випливає, що

$$\int_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon (u_\varepsilon - g) ds = \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g) ds.$$

Таким чином, інтегральна рівність (12) набуде вигляду

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (u_\varepsilon - g) dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} f u_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon} f (u_\varepsilon - g) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g) ds. \tag{2.4}$$

Візьмемо довільну функцію $\varphi \in K_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon): \quad \varphi \le g$ м. с. на $S_\varepsilon\}$ та домножимо тепер рівняння задачі (2.1) на функцію $(\varphi - g)$ і проінтегруємо по Ω_ε. Аналогічно як це було зроблено вище, отримаємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - g) dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} f \varphi dx + \int_{G_\varepsilon} f (\varphi - g) dx + \int_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon (\varphi - g) ds.$$

Додамо і віднімемо в правій частині рівності інтеграл $\varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - g) ds$:

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - g) dx = \int_{\Omega_0} f \varphi dx +$$

$$+ \int_{G_\varepsilon} f (\varphi - g) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - g) ds + \int_{S_\varepsilon} (\partial_\nu u_\varepsilon - \varepsilon d(x))(\varphi - g) ds. \tag{2.5}$$

Оскільки $\partial_\nu u_\varepsilon(x) \le \varepsilon d(x), \quad \varphi(x) \le g(x)$ м.с. на S_ε, то

$$\int_{S_\varepsilon} (\partial_\nu u_\varepsilon - \varepsilon d(x))(\varphi - g) ds \ge 0. \tag{2.6}$$

На підставі (2.6) з рівності (2.5) випливає нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - g) dx \ge$$

$$\ge \int_{\Omega_0} f \varphi dx + \int_{G_\varepsilon} f (\varphi - g) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - g) ds. \tag{2.7}$$

Означення 2.1 *Узагальненим розв'язком задачі (2.1) -- (2.2) називається функція* $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, *яка задовольняє інтегральну рівність (2.4) та нерівність (2.7) для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$.

Означення 2.2 *Узагальненим розв'язком задачі (2.1) -- (2.2) називається функція* $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, *яка задовольняє таку інтегральну нерівність*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon)dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - u_\varepsilon)ds \qquad (2.8)$$

для довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$.

Покажемо еквівалентність даних означень. Віднімаючи від нерівності (2.7) рівність (2.4), отримуємо нерівність (2.8). І навпаки, поклавши

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ g, & x \in G_\varepsilon, \end{cases}$$

(нагадаємо, що $g = 0$ на Ω_0) в (2.8), отримаємо

$$-\int_{\Omega_0} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(g - u_\varepsilon)dx \geq$$

$$\geq -\int_{\Omega_0} f u_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon} f(g - u_\varepsilon)dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(g - u_\varepsilon)ds. \qquad (2.9)$$

Взявши

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2u_\varepsilon(x), & x \in \Omega_0, \\ 2u_\varepsilon(x) - g, & x \in G_\varepsilon, \end{cases}$$

в (2.8), маємо

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - g)dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f u_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon} f(u_\varepsilon - g)dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g)ds. \qquad (2.10)$$

З нерівностей (2.9) та (2.10) випливає рівність

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - g)dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} f u_\varepsilon \, dx + \int_{G_\varepsilon} f (u_\varepsilon - g) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g) ds,$$

яка співпадає з (2.4). Поклавши

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) + u_\varepsilon(x), & x \in \Omega_0, \\ \psi(x) + u_\varepsilon(x) - g, & x \in G_\varepsilon, \end{cases}$$

в (2.8), де ψ довільна функція з K_ε, отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\psi - g) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f \psi \, dx + \int_{G_\varepsilon} f (\psi - g) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\psi - g) ds$$

для довільної функції $\psi \in K_\varepsilon$, яка співпадає з (2.7). Тобто означення 2.1 та 2.2 еквівалентні.

2.1.3 Існування та єдиність узагальненого розв'язку

В просторі Соболєва $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon)$ поряд з нормою

$$\| u \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

введемо нову норму $\| \cdot \|_\varepsilon$, яка породжується скалярним добутком

$$(u, v)_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon).$$

Лема 2.1 *([92]) Норми* $\| \cdot \|_\varepsilon$ *та* $\| \cdot \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ *є рівномірно еквівалентні, тобто існують константи* $C_1 > 0$ *та* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що для всіх значень* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *та для довільних функцій* $u \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon)$

$$\| u \|_\varepsilon \leq \| u \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \| u \|_\varepsilon. \tag{2.11}$$

Зауваження 2.1 *Тут і надалі в роботі всі константи* C_i *та* c_i *не залежать від* ε.

Застосуємо теорему 1.2 до задачі (2.1) -- (2.2). Простір V -- простір $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)$, а $K = K_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon):\ \varphi \le g$ м. с. на $S_\varepsilon\}$,

$$a(u,\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \langle F,\varphi\rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d\varphi dx.$$

Покажемо, що для кожного фіксованого значення ε множина K_ε -- замкнена. Нехай послідовність $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ належить до K_ε та збігається до деякої функції φ в $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)$. Із збіжності в $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)$ і компактності оператора сліду випливає збіжність в $L^2(S_\varepsilon)$, а отже і збіжність м. с. до φ по деякій підпослідовності в S_ε. Тому, переходячи до границі в нерівності $\varphi_n \le g$ на S_ε, отримаємо, що $\varphi \le g$ м. с. на S_ε.

Покажемо, що множина K_ε -- опукла. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in K_\varepsilon$, $\alpha \in [0,1]$. Очевидно, що $(1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2 \in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)$. Крім того,

$$(1-\alpha)\varphi_1(x) + \alpha\varphi_2(x) \le (1-\alpha)g(x) + \alpha g(x) = g(x) \text{ м. с. на } S_\varepsilon.$$

Коерцитивність $a(u,\varphi)$ випливає з леми 2.1 та з рівності

$$a(u,u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2\, dx = \|u\|_\varepsilon^2, \quad (\alpha = 1).$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, доводимо обмеженість:

$$|a(u,\phi)| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \right| < \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le \|u\|_\varepsilon \|\phi\|_\varepsilon.$$

Лінійність фукціоналу F випливає з лінійності інтегралів, а обмеженість з нерівності Коші-Буняковського та нерівності (2.11).

Таким чином, на підставі теореми 1.2 існує єдиний розв'язок варіаційної нерівності (2.8), а значить і задачі (2.1) -- (2.2).

2.1.4 Апріорна оцінка

Крайові задачі в густих з'єднаннях з неоднорідними крайовими умовами Неймана, Фур'є, чи нелінійними крайовими умовами на границях тонких областей мають свої специфічні труднощі. Для усереднення таких крайових задач в роботах [95],[93] був запропонований новий підхід з використанням спеціальних інтегральних тотожностей. Будемо використовувати наступну інтегральну тотожність (див. [93], Лема 1):

$$\frac{\varepsilon h}{2}\int_{S_\varepsilon} v\,dx_2 = \int_{G_\varepsilon} v\,dx - \varepsilon\int_{G_\varepsilon} Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1} v\,dx \qquad \forall v\in H^1(G_\varepsilon), \tag{2.12}$$

де $Y(\xi) = -\xi + [\xi] + \dfrac{1}{2}$, $[\xi]$ - ціла частина ξ.

Оскільки $\max_{\mathbb{R}}|Y|\le 1$, з (2.12) випливає нерівність

$$\|v\|_{L^2(S_\varepsilon)} \le C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1(G_\varepsilon)}. \tag{2.13}$$

Використовуючи інтегральну нерівність Коші-Буняковського та нерівність Коші з $\delta > 0$ ($2ab \le \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$, $a > 0, b > 0$), за допомогою (2.13) та нерівності Фрідріхса, з (2.4) отримаємо

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \le c_0(\delta_1+\delta_2+\delta_3)\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_1(1+\delta_1^{-1})\|g\|^2_{H^1(D_0)} +$$

$$+ c_2(1+\delta_2^{-1})\|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_3(1+\delta_3^{-1})\|d\|^2_{H^1(D_0)}. \tag{2.14}$$

Вибираючи $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ так щоб $c_1(\delta_1+\delta_2+\delta_3) < \dfrac{1}{2}$, отримаємо

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \le c_4\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|g\|^2_{H^1(D_0)} + \|d\|^2_{H^1(D_0)}\right). \tag{2.15}$$

На підставі (2.11) з (2.15) випливає, що існують $C_3 > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$:

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_3. \tag{2.16}$$

Зауваження 2.2 *Тут і надалі записуючи* $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *розуміємо всі значення дискретного параметра* ε *з інтервалу* $(0,\varepsilon_0)$.

Нашою метою є вивчення асимтотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (2.1) -- (2.2) при $\varepsilon\to 0$, тобто коли кількість стержнів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

2.1.5 Формулювання основного результату

Введемо операцію продовження нулем для функцій з простору $H^1(G_\varepsilon)$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in D_0 \setminus G_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.17}$$

де $D_0 = (0,a)\times(-l,0)$ - прямокутник, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході при $\varepsilon \to 0$. Очевидно, що внаслідок прямолінійності меж тонких стержнів продовження $\tilde{u}_\varepsilon$ належить анізотропному простору Соболєвавс

$$H^{0,1}(D_0;I_l) = \{v \in L^2(D_0) : \exists \partial_{x_2} v \in L^2(D_0), \quad v|_{I_l} = 0\} \tag{2.18}$$

та

$$\partial_{x_2}(\tilde{u}_\varepsilon) = \partial_{x_2}\tilde{u}_\varepsilon \quad \text{ì.ñ.} \quad \text{â} \quad D_0. \tag{2.19}$$

Теорема 2.1 *Для розв'язку* u_ε *задачі (2.1) -- (2.2) мають місце такі співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{lcll} u_\varepsilon|_{\Omega_0} & \overset{w}{\to} & u_0^+ & \text{ñëàáêî â} \quad H^1(\Omega_0), \\ \tilde{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & hu_0^- & \text{ñëàáêî â} \quad H^{0,1}(D_0;I_l), \\ \partial_{x_1}\tilde{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & 0 & \text{ñëàáêî â} \quad L^2(D_0), \end{array}\right\} \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.20}$$

де функція $u_0(x) := \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^-(x), & x \in D_0, \end{cases}$ є єдиним узагальненим розв'язком задачі (2.21) -- (2.22)

$$\begin{cases} -\Delta u_0^+(x) & = f(x), & x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu u_0^+(x) & = 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus [0,a], \\ u_0^-(x_1,-l) & = 0, & x_1 \in [0,a], \\ u_0^+(x_1,0) & = u_0^-(x_1,0), & x_1 \in [0,a], \\ \partial_{x_2}u_0^+(x_1,0) & = h\partial_{x_2}u_0^-(x_1,0), & x_1 \in [0,a], \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} -h\partial_{x_2}^2 u_0^-(x) & \le hf(x) + 2d(x), \\ u_0^-(x) & \le g(x), \\ (u_0^-(x) - g(x))(h\partial_{x_2}^2 u_0^-(x) & + hf(x) + 2d(x)) = 0, \end{cases} \qquad x \in D_0, \tag{2.22}$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (2.1) -- (2.2). Крім того, має місце збіжність інтегралів енергії

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_0(u_0),$$

де

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \quad E_0(u_0) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_0^+|^2 dx + h\int_{D_0} |\partial_{x_2} u_0^-|^2 dx.$$

Усереднена крайова задача є симбіозом звичайної крайової задачі для рівняння Пуассона в області Ω_0 (тіло густого з'єднання) та одновимірних варіаційних співвідношень в прямокутнику, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході. В зоні з'єднання виставляються спеціальні умови спряження. Спочатку дамо означення узагальненого розв'язку цієї задачі та за допомогою загальної теорії варіаційних нерівностей доведемо його існування та єдиність.

2.1.6 Різні означення узагальненого розв'язку усередненої задачі та їх еквівалентність

Введемо поняття узагальненого розв'язку для задачі (2.21) -- (2.22). Домножимо перше рівняння задачі (2.21) на функцію u_0^+ та проінтегруємо по Ω_0. Маємо

$$-\int_{\partial\Omega_0} \partial_\nu u_0^+ u_0^+ ds + \int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla u_0^+ dx = \int_{\Omega_0} f u_0^+ dx. \qquad (2.23)$$

Інтеграл по межі $\partial\Omega_0$ запишемо у вигляді:

$$\int_{\partial\Omega_0} \partial_\nu u_0^+ u_0^+ ds = \int_{\partial\Omega_0 \setminus [0,a]} \partial_\nu u_0^+ u_0^+ ds - \int_0^a (\partial_{x_2} u_0^+ u_0^+)\Big|_{x_2=0} dx_1.$$

Враховуючи те, що $\partial_\nu u_0^+ = 0$ на $\partial\Omega_0 \setminus [0,a]$, (2.23) запишемо у наступному вигляді

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla u_0^+ dx = \int_{\Omega_0} f u_0^+ dx - \int_0^a (\partial_{x_2} u_0^+ u_0^+)\Big|_{x_2=0} dx_1. \qquad (2.24)$$

Проінтегруємо тепер рівняння задачі (2.22) по області D_0, отримаємо

$$-h\left(\int_0^a(\partial_{x_2}u_0^-(u_0^- - g))\Big|_{x_2=0}dx_1 - \int_0^a(\partial_{x_2}u_0^-(u_0^- - g))\Big|_{x_2=-l}dx_1\right)+$$

$$+h\int_{D_0}\partial_{x_2}u_0^-\partial_{x_2}(u_0^- - g)dx = h\int_{D_0}f(u_0^- - g)dx + 2\int_{D_0}d(u_0^- - g)dx. \qquad (2.25)$$

Враховуючи те, що $u_0^- = 0$ на I_l, а $g = 0$ на $I_0 \cup I_l$ одержимо

$$-h\int_0^a(\partial_{x_2}u_0^-u_0^-)\Big|_{x_2=0}dx_1 + h\int_{D_0}\partial_{x_2}u_0^-\partial_{x_2}(u_0^- - g)dx =$$

$$= h\int_{D_0}f(u_0^- - g)dx + 2\int_{D_0}d(u_0^- - g)dx. \qquad (2.26)$$

Додавши рівності (2.24) та (2.26), а також врахувавши умови спряження задачі (2.21), отримаємо наступну інтегральну рівність

$$\int_{\Omega_0}\nabla u_0^+ \cdot \nabla u_0^+ dx + h\int_{D_0}\partial_{x_2}u_0^-\partial_{x_2}(u_0^- - g)dx =$$

$$= \int_{\Omega_0}fu_0^+ dx + h\int_{D_0}f(u_0^- - g)dx + 2\int_{D_0}d(u_0^- - g)dx. \qquad (2.27)$$

Визначимо частково анізотропний простір Соболєва

$$\mathsf{H}(\Omega_1, D_0; I_l) = \{u \in L^2(\Omega_1) : \exists \partial_{x_2}u \in L^2(\Omega_1),$$

$$u|_{\Omega_0} \in H^1(\Omega), u|_{D_0} \in H^{0,1}(D_0; I_l)\},$$

де $H^{0,1}(D_0; I_l)$ визначений в (27). Із властивостей анізотропного простору Соболєва (див. [113]) випливає, що сліди $u^+ := u|_{\Omega_0}$ та $u^- := u|_{D_0}$ на I_0 рівні. Крім того, оскільки сліди функцій з $H^{0,1}(D_0; I_l)$ дорівнюють нулю на I_l, то існує така стала C_0, що

$$\int_{\Omega_1}u^2dx \le C_0\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u^+|^2 dx + \int_{D_0}|\partial_{x_2}u^-|^2 dx\right) \quad \forall u \in \mathsf{H}(\Omega_1, D_0; I_l).$$

В $\mathrm{H}(\Omega_1, D_0; I_l)$ розглянемо норму $\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{H}}$, яка генерується скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathrm{H}} = \int_{\Omega_0} \nabla u^+ \cdot \nabla v^+ + h \int_{D_0} \partial_{x_2} u^- \partial_{x_2} v^- \, dx, \quad u, v \in \mathrm{H}(\Omega_1, D_0; I_l).$$

Визначимо множину $K_0 = \{\varphi \in \mathrm{H}(\Omega_1, D_0; I_l) : \varphi^- \le g \quad \text{ì.ñ.â} \quad D_0\}$ в $\mathrm{H}(\Omega_1, D_0; I_l)$. Замкненість та опуклість K_0 доводиться аналогічно тому як це було зроблено в розділі 2.1.3.

Візьмемо довільну функцію $\varphi \in K_0$. Домножимо тепер перше рівняння задачі (2.21) на функцію φ і проінтегруємо по Ω_0, а рівняння задачі (2.22)домножимо на $(\varphi - g)$ та проінтегруємо по D_0. Аналогічно як це було зроблено вище, отримаємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_0} f \varphi dx - \int_0^a (\partial_{x_2} u_0^+ \varphi)\Big|_{x_2=0} dx_1, \tag{2.28}$$

$$h \int_{D_0} \partial_{x_2} u_0^- \partial_{x_2} (\varphi - g) dx \ge$$

$$\ge h \int_0^a (\partial_{x_2} u_0^- \varphi)\Big|_{x_2=0} dx_1 + h \int_{D_0} f(\varphi - g) dx + 2 \int_{D_0} d(\varphi - g) dx. \tag{2.29}$$

Додаючи рівність (2.28) та нерівність (2.29), отримуємо нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla \varphi dx + h \int_{D_0} \partial_{x_2} u_0^- \partial_{x_2} (\varphi - g) dx \ge$$

$$\ge \int_{\Omega_0} f \varphi dx + h \int_{D_0} f(\varphi - g) dx + 2 \int_{D_0} d(\varphi - g) dx. \tag{2.30}$$

Нехай

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^-(x), & x \in D_0. \end{cases}$$

Означення 2.3 *Узагальненим розв'язком задачі (2.21) -- (2.22) називається функція* $u_0 \in K_0$*, яка задовольняє інтегральну рівність (2.27) та інтегральну нерівність (2.30) для довільної функції* $\varphi \in K_0$.

Означення 2.4 *Узагальненим розв'язком задачі (2.21) -- (2.22) називається функція* $u_0 \in K_0$*, яка задовольняє таку інтегральну нерівність:*

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla(\varphi - u_0^+)dx + h\int_{D_0} \partial_{x_2} u_0^- \partial_{x_2}(\varphi - u_0^-)dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(\varphi - u_0^+)dx + h\int_{D_0} f(\varphi - u_0^-)dx + 2\int_{D_0} d(\varphi - u_0^-)dx \qquad (2.31)$$

для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Аналогічно до доведення еквівалентності означень 2.1 і 2.2 можна довести еквівалентність означень 2.3 і 2.4.

Дамо третє означення узагальненого розв'язку задачі (2.21) -- (2.22).

Означення 2.5 *Узагальненим розв'язком задачі (2.21) -- (2.22) називається функція* $u_0 \in K_0$*, яка задовольняє таку інтегральну нерівність*

$$\int_{\Omega_0} \nabla \varphi \cdot \nabla(\varphi - u_0^+)dx + h\int_{D_0} \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2}(\varphi - u_0^-)dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(\varphi - u_0^+)dx + h\int_{D_0} f(\varphi - u_0^-)dx + 2\int_{D_0} d(\varphi - u_0^-)dx \qquad (2.32)$$

для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Доведемо еквівалентність означення 2.4 та означення 2.5. Додаючи до нерівності (2.31) нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla(\varphi - u_0^+) \cdot \nabla(\varphi - u_0^+)dx + \int_{D_0} \partial_{x_2}(\varphi - u_0^-)\partial_{x_2}(\varphi - u_0^-) \geq 0,$$

отримаємо нерівність (2.32).

Нехай $\psi \in K_0$. Тоді взявши $\varphi = u_0 + t(\psi - u_0) \in K_0$, $t \in [0,1]$ в нерівності (2.32), отримаємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla(u_0^+ + t(\psi - u_0^+)) \cdot \nabla(t(\psi - u_0^+))dx + h\int_{D_0} \partial_{x_2}(u_0 + t(\psi - u_0^-))\partial_{x_2}(t(\psi - u_0^-))dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(t(\psi - u_0^+))dx + h\int_{D_0} f(t(\psi - u_0^-))dx + 2\int_{D_0} d(t(\psi - u_0^-))dx.$$

Оскільки $t \geq 0$, то дана нерівність еквівалентна наступній

$$\int_{\Omega_0} \nabla(u_0^+ + t(\psi - u_0^+)) \cdot \nabla(\psi - u_0^+) dx + h \int_{D_0} \partial_{x_2}(u_0^- + t(\psi - u_0^-)) \partial_{x_2}(\psi - u_0^-) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(\psi - u_0^+) dx + h \int_{D_0} f(\psi - u_0^-) dx + 2 \int_{D_0} d(\psi - u_0^-) dx.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $t \to 0$, використавши теорему Лебега, отримаємо нерівність (2.31).

Тобто означення 2.3, 2.4, 2.5 еквівалентні.

2.1.7 Існування та єдиність узагальненого розв'язку усередненої задачі

В нашому випадку простір V -- простір $\mathrm{H}(\Omega_1, D_0; I_l)$, а $K = K_0$,

$$a(u,\varphi) = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + h \int_{D_0} \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \varphi dx, \quad u, \varphi \in K$$

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{\Omega_0} f\varphi dx + h \int_{D_0} f\varphi dx + 2 \int_{D_0} d\varphi dx, \quad \varphi \in K.$$

Коерцитивність $a(u,\varphi)$ випливає з рівності

$$a(u,u) = \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + h \int_{D_0} |\partial_{x_2} u|^2 dx = \|u\|_{\mathrm{H}}^2.$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, доводиться обмеженість:

$$|a(u,\varphi)| \leq \left| \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \right| + \left| h \int_{D_0} \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \varphi dx \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_0} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(h \int_{D_0} |\partial_{x_2} u|^2 dx \right)^{1/2} \left(h \int_{D_0} |\partial_{x_2} \varphi|^2 dx \right)^{1/2} \leq$$

$$\le\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u|^2dx+h\int_{D_0}|\partial_{x_2}u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_0}|\nabla\varphi|^2dx+h\int_{D_0}|\partial_{x_2}\varphi|^2dx\right)^{1/2}=$$

$$=\|u\|_H\|\varphi\|_H,\quad\forall u,v\in K.$$

Лінійність фукціоналу F випливає з лінійності інтегралів, а обмеженість з нерівності Коші-Буняковського.

Таким чином, на підставі теореми (1.2) існує єдиний розв'язок варіаційної нерівності (2.31), а значить і задачі (2.21) -- (2.22).

2.1.8 Доведення теореми збіжності

1. З (2.16) випливає, що $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}\le C_3$, $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(D_0)}\le C_3$ і $\|\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(D_0)}\le C_3$, $i=1,2$. Тому існує така підпослідовність $\{\varepsilon'\}\subset\{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо через ε), що

$$\left.\begin{array}{lll} u_\varepsilon\,\big|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} u_0^+ & \text{в} & H^1(\Omega_0),\\ \tilde{u}_\varepsilon\,\big|_{D_0} \xrightarrow{w} hu_0^- & \text{в} & L^2(D_0),\\ \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\,\big|_{D_0} \xrightarrow{w} \gamma_i & \text{в} & L^2(D_0),\quad i=1,2, \end{array}\right\}\ \text{при}\ \varepsilon\to0, \tag{2.33}$$

де u_0^+, u_0^-, γ_1, γ_2 - деякі функції з відповідних просторів, які будуть визначені далі.

Знайдемо γ_2. Для довільної функції $\psi\in C_0^\infty(D_0)$ на підставі (2.19) маємо

$$\int_{D_0}\partial_{x_2}\tilde{u}_\varepsilon\psi\,dx=\int_{D_0}\partial_{x_2}\tilde{u}_\varepsilon\psi\,dx=\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_2}u_\varepsilon\psi\,dx=$$

$$=-\int_{G_\varepsilon}u_\varepsilon\partial_{x_2}\psi\,dx=-\int_{D_0}\tilde{u}_\varepsilon\partial_{x_2}\psi\,dx.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $\varepsilon\to0$, отримаємо

$$\int_{D_0}\gamma_2\psi\,dx=-h\int_{D_0}u_0^-\partial_{x_2}\psi\,dx,\qquad\forall\psi\in C_0^\infty(D_0), \tag{2.34}$$

звідки випливає, що $\gamma_2=h\partial_{x_2}u_0^-$ майже скрізь в D_0.

Знайдемо γ_1. Розглянемо таку тестову функцію

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0, & x\in\Omega_0, \\ \varepsilon Y_1\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi(x)+g, & x\in G_\varepsilon, \end{cases} \qquad \forall\psi\in C_0^\infty(D_0),\quad \psi\ge 0,$$

де функція $Y_1(\xi)=-\xi+[\xi]$. Легко бачити, що $\Phi\in K_\varepsilon$ і

$$\nabla(\Phi-g)=\left(-\psi+\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi,\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi\right),\qquad x\in G_\varepsilon.$$

Інтегральна нерівність (2.7) для розв'язку u_ε з тестовою функцією $\Phi-g$ має вигляд

$$\int_{G_\varepsilon}\left(-\partial_{x_1}u_\varepsilon\psi+\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\psi\right)dx\ge$$

$$\ge\int_{G_\varepsilon}\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)f\psi\,dx-\frac{\varepsilon^2(1\pm h)}{2}\int_{S_\varepsilon^\pm}d\psi\,dx_2, \tag{2.35}$$

де знаки + та - в S_ε визначають об'єднання правих чи лівих сторін тонких стержнів відповідно. Тоді за допомогою (2.13) та (2.16) маємо

$$\begin{aligned}\left|\int_{D_0}\partial''_{x_1}u_\varepsilon\psi\,dx\right| &\le\varepsilon\Big(\int_{G_\varepsilon}\left|Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\left(\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\psi-f\psi\right)\right|dx+\frac{\varepsilon(1+h)}{2}\int_{S_\varepsilon}|d\psi|dx_2\Big)\le\\ &\le\varepsilon c_1\Big(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)}\|\nabla\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)}+\|f\|_{L^2(G_\varepsilon)}\|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)}+\\ &+\|\sqrt{\varepsilon}d\|_{L^2(S_\varepsilon)}\|\sqrt{\varepsilon}\psi\|_{L^2(S_\varepsilon)}\Big)\le\varepsilon c_1\Big(\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\|\psi\|_{H^1(D_0)}+\\ &+\|f\|_{L^2(\Omega_1)}\|\psi\|_{L^2(D_0)}+\|d\|_{H^1(D_0)}\|\psi\|_{H^1(D_0)}\Big)\le\varepsilon c_3\|\psi\|_{H^1(D_0)},\end{aligned}$$

звідки в граничному переході при $\varepsilon\to 0$ отримаємо

$$\int_{D_0}\gamma_1\psi\,dx=0\qquad\forall\psi\in C_0^\infty(D_0),\quad\psi\ge 0. \tag{2.36}$$

Тобто $\gamma_1=0$ майже скрізь в D_0.

2. Покажемо, що сліди функцій u_0^+ та u_0^- на I_0 рівні. Внаслідок компактності оператора сліду і першого співвідношення в (2.33), маємо

$$u_\varepsilon(x_1,0)\xrightarrow{s}u_0^+(x_1,0)\quad \text{в}\quad L^2(0,a)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0, \tag{2.37}$$

Розглянемо рівність

$$\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x_1,0)=\chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon}(x_1,0) \quad \text{äëÿ ì. â. } x_1\in(0,a), \tag{2.38}$$

де $\chi_h(\xi), \xi\in\mathrm{R}$, -- 1-періодична функція, яка на відрізку $[0,1]$ задається таким чином:

$$\chi_h(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi-\dfrac{1}{2}|\le\dfrac{h}{2},\\ 0, & \dfrac{h}{2}<|\xi-\dfrac{1}{2}|\le 1.\end{cases}$$

Відомо, що $\chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\overset{w}{\rightarrow}h$ â $L^2(0,1)$ ïðè $\varepsilon\rightarrow 0$. Тому, використовуючи цей факт а також (2.37) та (2.38), отримаємо

$$\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x_1,0)\overset{w}{\rightarrow}hu_0^{+}(x_1,0) \quad \text{â} \quad L^2(0,a) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon\rightarrow 0. \tag{2.39}$$

З другого боку

$$\int_0^a \overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x_1,0)\psi(x_1)\,dx_1=\frac{1}{l}\int_{D_0}\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x)\psi(x_1)\,dx_1dx_2+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{D_0}(x_2+l)\partial_{x_2}\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}\cdot\psi(x_1)\,dx_1dx_2 \quad \forall\psi\in C_0^{\infty}(0,a). \tag{2.40}$$

Перейшовши до границі в (2.40) при $\varepsilon\rightarrow 0$, та врахувавши (2.34), одержимо

$$h\int_0^a u_0^{+}(\cdot,0)\psi(x_1)\,dx_1=\frac{1}{l}\int_{D_0}hu_0^{-}\psi(x_1)\,dx_1dx_2+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{D_0}(x_2+l)h\partial_{x_2}v_0^{-}\cdot\psi(x_1)\,dx_1dx_2 \quad \forall\psi\in C_0^{\infty}(0,a), \tag{2.41}$$

звідки випливає, що

$$\int_0^a u_0^{+}(\cdot,0)\psi(x_1)\,dx_1=\int_0^a u_0^{-}(\cdot,0)\psi(x_1)\,dx_1 \quad \forall\psi\in C_0^{\infty}(0,a).$$

Таким чином,

$$u_0^{+}(x_1,0)=u_0^{-}(x_1,0) \quad \text{äëÿ ì.â. } x_1\in(0,a). \tag{2.42}$$

Аналогічно можна показати, що слід $u_0^- |_{I_l}$ дорівнює 0.

3. Додамо до нерівності (2.8) нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla(\varphi - u_\varepsilon)\cdot\nabla(\varphi - u_\varepsilon)dx + \int_{G_\varepsilon} \partial_{x_2}(\varphi - u_\varepsilon)\partial_{x_2}(\varphi - u_\varepsilon) + \int_{G_\varepsilon} \partial_{x_1} u_\varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon \geq 0,$$

де φ довільна функція з $C^1(\overline{\Omega_1})$, така що $\varphi\,|_{I_l} = 0$ та $\varphi \leq g$ в D_0 $(\varphi|_{\Omega_\varepsilon} \in K_\varepsilon)$, отримаємо нерівність:

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_\varepsilon)dx + \int_{G_\varepsilon} \partial_{x_1} u_\varepsilon \partial_{x_1}\varphi dx + \int_{G_\varepsilon} \partial_{x_2}\varphi \partial_{x_2}(\varphi - u_\varepsilon)dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)dx + \varepsilon\int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - u_\varepsilon)ds. \qquad (2.43)$$

Використовуючи (2.12), перепишемо нерівність (2.43) в наступній формі

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_\varepsilon)\,dx + \int_{D_0} \partial_{x_1} u_\varepsilon'' \partial_{x_1}\varphi dx + \int_{D_0} \chi_h\!\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\varphi\partial_{x_2}\varphi dx -$$

$$-\int_{D_0} \partial_{x_2}\varphi\partial_{x_2} u_\varepsilon''\,dx \geq \int_{\Omega_0} f(\varphi - u_\varepsilon)\,dx + \int_{D_0} \chi_h\!\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) f\varphi\,dx - \int_{D_0} f\,u_\varepsilon''\,dx +$$

$$+\frac{2}{h}\int_{D_0} \chi_h\!\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) d\varphi dx - \frac{2}{h}\int_{D_0} d u_\varepsilon''\,dx - \frac{2\varepsilon}{h}\int_{G_\varepsilon} Y\!\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}(d(\varphi - u_\varepsilon))dx. \qquad (2.44)$$

Перейшовши в (2.44) до границі, коли $\varepsilon \to 0$, і врахувавши всі отримані вище результати, маємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_0^+)dx + h\int_{D_0} \partial_{x_2}\varphi\partial_{x_2}(\varphi - u_0^-)dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(\varphi - u_0^+)dx + h\int_{D_0} f(\varphi - u_0^-)dx + 2\int_{D_0} d(\varphi - u_0^-)dx. \qquad (2.45)$$

для довільної функції $\varphi \in K_1 = \{\varphi \in C^1(\overline{\Omega_1}) :\ \varphi\,|_{I_l} = 0,\ \ \varphi \leq g \ \ \text{íà}\ \ D_0\}$.

Зрозуміло,що множина K_1 є щільною у K_0, тому нерівність (2.45) має місце для довільної функції $\varphi \in K_0$. Оскільки усереднена задача має єдиний розв'язок, то всі міркування наведені вище мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon'\}$ послідовності $\{\varepsilon\}$. Отже, співвідношення (2.20) виконуються, і функція $u_0(x)$ є єдиним узагальненим розв'язком крайової задачі (2.21) -- (2.22).

4. З рівностей (2.4) та (2.27) одержимо:

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int\limits_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla g\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} f u_\varepsilon dx + \int\limits_{G_\varepsilon} f(u_\varepsilon - g) dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g) ds, \qquad (2.46)$$

$$E_0(u_0) = \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u_0^+|^2 dx + h \int\limits_{D_0} |\partial_{x_2} u_0^-|^2 dx = h \int\limits_{D_0} \partial_{x_2} u_0^- \partial_{x_2} g\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} f u_0^+ dx + h \int\limits_{D_0} f(u_0^- - g) dx + 2 \int\limits_{D_0} d(u_0^- - g) dx. \qquad (2.47)$$

Переходячи в рівності (2.46) до границі при $\varepsilon \to 0$, врахувавши (2.47), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_0(u_0).$$

Теорема доведена.

2.2 Усереднення еліптичної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.

В даному підрозділі буде розглядатися еліптична крайова задача Сіньоріні в просторовому густому з'єднанні, яке є об'єднанням деякої просторової області та великої кількості тонких криволінійних циліндрів. В порівнянні з попереднім підрозділом маємо інший тип густих з'єднань (3:2:1) та тонкі області, що густо та періодично приєднуються до тіла з'єднання, мають змінну товщину. Досліджується також вплив геометрії тонких циліндрів на асимптотичну поведінку узагальненого розв'язку.

2.2.1 Постановка задачі

Нехай a та h -- додатні дійсні числа, а N -- велике натуральне число. Визначимо малий параметр наступним чином $\varepsilon = \frac{a}{N}$.

Розглянемо тепер густе з'єднання Ω_ε типу $3:2:1$ (Рис. 2.2), що складається з області

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x' = (x_1, x_2) \in \Xi_0 = (0,a) \times (0,a),$$
$$-\gamma(x') < x_3 < 0\}$$

та великої кількості тонких криволінійних циліндрів $G_\varepsilon = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} G_\varepsilon(i,j)$,

$$G_\varepsilon(i,j) = \left\{ x \in R^3 : 0 < x_3 < h, (\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - i)^2 + (\frac{x_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - j)^2 < \rho^2(x_3) \right\}, \qquad (2.48)$$

де функції γ та ρ - гладкі та додатні на $[0,a] \times [0,a]$ та $[0,h]$ відповідно. Крім того $0 < \rho < \frac{1}{2}$. Зрозуміло, що тонкі криволінійні циліндри заповнюють парелелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h)$ в граничному переході при $N \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0)$.

Зауваження 2.3 *Можливий і більш загальний випадок криволінійних циліндрів*

$$G_\varepsilon(i,j) = \{x \in \mathrm{R}^3 : \quad 0 < x_3 < h, \quad (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in \omega(x_3)\}, \qquad (2.49)$$

де $\omega(x_3)$ -- *плоска область, що належить внутрішності квадрата* $\{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1\}$ *для всіх* $x_3 \in [0,h]$ *та поверхня* $\{(\xi', x_3) : \xi' \in \partial\omega, x_3 \in [0,h]\}$ -- *гладка.*

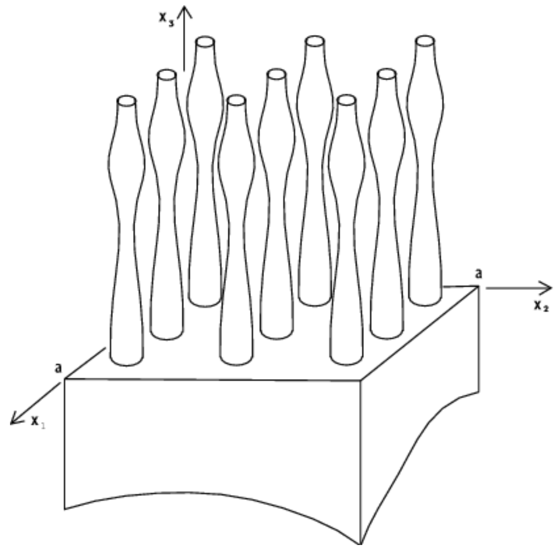

Рис. 2.2. Модельне густе з'єднання типу 3:2:1.

В області Ω_ε розглядається задача:

$$\begin{cases} -\Delta_x u_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon), \end{cases} \tag{2.50}$$

з неоднорідними крайовими умовами Сіньоріні на S_ε

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) \le g(x), \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x) \le \varepsilon d(x), \\ (u_\varepsilon(x) - g(x))(\partial_\nu u_\varepsilon(x) - \varepsilon d(x)) = 0, \end{cases} \tag{2.51}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ – зовнішня нормальна похідна. Через S_ε позначено об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів, а об'єднання основ тонких циліндрів G_ε при $x_3 = h$ позначено через Γ_ε.

Нехай f, g, d -- задані функції. Припускаємо, що $f \in L^2(\Omega_1)$, де

$$\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega^+},\ \Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h),$$

$$\Xi_0 = \{x : x' = (x_1, x_2) \in (0,a)\times(0,a),\ x_3 = 0\},$$

а функція $g \in H^1(\Omega^+;\Xi_h \cup \Xi_0) = \{v \in H^1(\Omega^+) : v|_{\Xi_h \cup \Xi_0} = 0\}$, де $\Xi_h = \{x : x' \in (0,a)\times(0,a),\ x_3 = h\}$, та $d \in H^1(\Omega^+)$.

2.2.2 Різні означення узагальненого розв'язку та їх еквівалентність, існування та єдиність узагальненого розв'язку

В просторі Соболєва $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u|_{\Gamma_\varepsilon} = 0\}$, визначимо підмножину

$$K_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon) :\quad \varphi|_{S_\varepsilon} \le g|_{S_\varepsilon}\ \text{ì.ñ.íà}\, S_\varepsilon\},$$

де $\psi|_S$ -- слід функціїї ψ на поверхні S. Аналогічно як в пункті 2.1.3 можна показати, що K_ε замкнена та опукла для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$ і як в пункті 2.1.2 даємо такі еквівалентні означення узагальнененого розв'язку.

Означення 2.6 *Узагальненим розв'язком задачі (2.50) -- (2.51) називається функція* $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, *що задовольняє інтегральну рівність*

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\, dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (u_\varepsilon - g)\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} f u_\varepsilon\, dx + \int_{G_\varepsilon} f(u_\varepsilon - g)\, dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g)\, d\sigma. \qquad (2.52)$$

та інтегральну нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi\, dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - g)\, dx \ge$$

$$\ge \int_{\Omega_0} f\varphi\, dx + \int_{G_\varepsilon} f(\varphi - g)\, dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - g)\, d\sigma. \qquad (2.53)$$

для довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$.

Означення 2.7 *Узагальненим розв'язком задачі (2.50) -- (2.51) називається функція* $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, *що задовольняє інтегральну нерівність*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon)dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - u_\varepsilon)d\sigma \qquad (2.54)$$

для довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$.

Аналогічно як в пункті 2.1.3 обгрунтовуємо, що для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі *(2.50)* -- *(2.51)*.

2.2.3 Апріорна оцінка

Для доведення апріорної оцінки використаємо інтегральну тотожність ([89])

$$\varepsilon \int_{S_\varepsilon} \frac{\varphi(x)d\sigma_x}{\sqrt{1+\varepsilon^2 |\rho'(x_3)|^2}} = \int_{G_\varepsilon} \zeta(x_3)\varphi dx + \varepsilon \int_{G_\varepsilon} \nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}\varphi dx \qquad (2.55)$$

для всіх $\varphi \in H^1(G_\varepsilon)$. Тут

$$\zeta(x_3) = \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|}, \qquad \omega(x_3) = \{\xi' \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 - \tfrac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \tfrac{1}{2})^2 < \rho^2(x_3)\}, \qquad (2.56)$$

$|\omega(x_3)|$ - площа круга $\omega(x_3)$, $l_\omega(x_3)$ - довжина $\partial\omega(x_3)$ для кожного фіксованого $x_3 \in [0,h]$. Допоміжна функція Y є єдиним розв'язком наступної задачі Неймана:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi'} Y = \zeta(x_3) \quad \text{â} \quad \omega(x_3), \\ \partial_{\mathbf{v}'(\xi')} Y = 1 \quad \text{íà} \quad \partial\omega(x_3), \\ \int_{\omega(x_3)} Y(\xi', x_3) d\xi' = 0, \end{cases}$$

яка потім 1-періодично продовжується по ξ_1 та ξ_2; $\xi' = x'/\varepsilon$, $\mathbf{v}'(\xi') = (\nu_1(\xi'), \nu_2(\xi'))$.

Щоб отримати (2.55) потрібно проінтегрувати останній інтеграл в (64) та використати крайові умови для Y та координати зовнішньої нормалі до бічних поверхонь для кожного з циліндрів $G_\varepsilon(i,j)$, $i, j = 1, \ldots, N-1$:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 |\rho'(x_3)|^2}} (\nu_1(x'/\varepsilon), \nu_2(x'/\varepsilon), -\varepsilon\rho'(x_3)). \qquad (2.57)$$

Зауваження 2.4 *Функцію* ζ *не спрощуємо в* (2.55) *щоб прийняти до уваги загальний вигляд тонких криволінійних циліндрів* (2.49).

В [89] також були доведені наступні нерівності

$$\sup_{x\in G_\varepsilon} |\nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)\ |_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}| \le C_0, \tag{2.58}$$

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi^2\, d\sigma_x \le C_1 \left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla_{x'}\varphi|^2\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon} \varphi^2\, dx \right), \tag{2.59}$$

$$\int\limits_{G_\varepsilon} \varphi^2\, dx \le C_2 \left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla_{x'}\varphi|^2\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi^2\, d\sigma_x \right), \tag{2.60}$$

$$\mathrm{P}\varphi\mathrm{P}_{L^2(S_\varepsilon)} \le C_3 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathrm{P}\varphi\mathrm{P}_{H^1(G_\varepsilon)} \quad \text{äëÿâñ³õ}\,\varphi \in H^1(G_\varepsilon). \tag{2.61}$$

Використовуючи інтегральну нерівність Коші-Буняковського та нерівність Коші $2ab \le \delta a^2 + \delta^{-1} b^2$ з $\delta > 0$ для додатніх a та b, та за допомогою (2.61) і нерівності Фрідріхса отримаємо з (2.52), що

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \le c_0(\delta_1+\delta_2+\delta_3)\mathrm{P}\nabla u_\varepsilon \mathrm{P}^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} +$$

$$+ c_1(1+\delta_1^{-1})\mathrm{P}g\mathrm{P}^2_{H^1(D_0)} + c_2(1+\delta_2^{-1})\mathrm{P}f\mathrm{P}^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_3(1+\delta_3^{-1})\mathrm{P}d\mathrm{P}^2_{H^1(D_0)}. \tag{2.62}$$

Вибираючи $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ так, щоб $c_0(\delta_1+\delta_2+\delta_3) < \dfrac{1}{2}$, маємо

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \le c_4 \left(\mathrm{P}f\mathrm{P}^2_{L^2(\Omega_1)} + \mathrm{P}g\mathrm{P}^2_{H^1(D_0)} + \mathrm{P}d\mathrm{P}^2_{H^1(D_0)} \right). \tag{2.63}$$

На підставі (2.11) з (2.63) випливає, що існують $C_3 > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$\mathrm{P}u_\varepsilon\mathrm{P}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_3. \tag{2.64}$$

Нашою метою є вивчення асимтотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (2.50), (2.51) при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

2.2.4 Формулювання основного результату

Надалі через $\overset{\prime\prime}{u}$ позначено продовження нулем u в паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h)$, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами в граничному переході при $\varepsilon \to 0$, а саме

$$\overset{\prime\prime}{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^+ \setminus G_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.65}$$

Також визначимо характеристичну функцію

$$\chi_{G_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^+ \setminus G_\varepsilon. \end{cases}$$

В ([89]) було доведено, що

$$\chi_{G_\varepsilon} \overset{w}{\to} |\omega| \quad \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(\Omega^+) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.66}$$

Теорема 2.2 *Для розв'язку* u_ε *задачі (59) -- (60) мають місце наступні співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{rcrl} u_\varepsilon\,|_{\Omega_0} & \overset{w}{\to} & u_0^- & \text{ñëàáêîâ} \quad H^1(\Omega_0), \\ \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & |\omega(x_3)|u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(\Omega^+), \\ \partial_{x_3}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & |\omega(x_3)|\partial_{x_3}u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(\Omega^+), \\ \partial_{x_i}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & 0 & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(\Omega^+) \quad (i=1,2) \end{array}\right\} \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.67}$$

де функція

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^-(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^+(x), & x \in \Omega^+, \end{cases}$$

є єдиним узагальненим розв'язком задачі (2.68) -- (2.69)

$$\begin{cases} -\Delta_x u_0^-(x) & = f(x), & x \in \Omega_0, \\ \partial_{\mathbf{v}} u_0^-(x) & = 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus \Xi_0, \\ u_0^+(x',h) & = 0, & (x',h) \in \Xi_h, \\ u_0^-(x',0) & = u_0^+(x',0), & (x',0) \in \Xi_0, \\ \partial_{x_3} u_0^-(x',0) & = |\omega(0)|\partial_{x_3} u_0^+(x',0), & (x',0) \in \Xi_0, \end{cases} \tag{2.68}$$

$$\begin{cases} -\partial_{x_3}(|\omega(x_3)|\partial_{x_3}u_0^+(x)) & \le |\omega(x_3)| f(x) + l_\omega(x_3)d(x), \\ u_0^+(x) & \le g(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\Omega^+, \\ (u_0^+(x)-g(x))(\partial_{x_3}(|\omega(x_3)| & \partial_{x_3}u_0^+(x)) + |\omega(x_3)| f(x) + l_\omega(x_3)d(x)) = 0, \end{cases}$$

(2.69)

яка називається усередненою задачею. Крім того, має місце збіжність інтегралів енергії

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_0(u_0),$$

де

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \quad E_0(u_0) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_0^-|^2 dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| |\partial_{x_3}u_0^+|^2 dx.$$

2.2.5 Різні означення узагальненого розв'язку та їх еквівалентність, існування та єдиність узагальненого розв'язку усередненої задачі

Бачимо, що (2.68) -- (2.69) є нестандартною крайовою задачею, яка містить рівняння Пуассона в тілі з'єднання Ω_0, варіаційні співвідношення в паралелепіпеді Ω^+ та умови спряження в зоні з'єднання Ξ_0.

Розглянемо частково анізотропний простір Соболєва

$$\mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h) = \{u \in L^2(\Omega_1) \mid \quad \partial_{x_3}u \in L^2(\Omega_1), \quad u|_{\Omega_0} \in H^1(\Omega_0), \quad u|_{\Xi_h} = 0\}.$$

Із властивостей анізотропного простору Соболєва (див. [113]) випливає, що сліди $u^+ := u|_{\Omega^+}$ та $u^- := u|_{\Omega_0}$ на Ξ_0 рівні. Крім того, оскільки сліди функцій з $H(\Omega_1;\Xi_h)$ дорівнють нулю на Ξ_h, то існує стала C_0 така, що

$$\int_{\Omega_1} u^2 dx \le C_0\Big(\int_{\Omega_0} |\nabla u^-|^2 dx + \int_{\Omega^+} |\partial_{x_3}u^+|^2 dx\Big) \quad \text{äëÿâñ³õ}\, u \in \mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h).$$

В просторі $\mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h)$ розглянемо норму $\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}_H$, що породжується скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathrm{H}} = \int_{\Omega_0} \nabla u^- \cdot \nabla v^- dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3}u^+ \partial_{x_3}v^+ dx, \quad u,v \in \mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h). \qquad (2.70)$$

Визначимо підмножину

$$K_0 = \{\varphi \in \mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h): \quad \varphi \le g \quad \text{ì.ñ.â} \quad \Omega^+\}.$$

Зрозуміло, що K_0 є замкненою та опуклою в $\mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h)$.

Нехай існує класичний розв'язок усередненої задачі (77) -- (78). Домножимо перше рівняння задачі (2.68) на функцію u_0^-, проінтегруємо в Ω_0 та використаємо формулу Гріна-Остроградського, маємо

$$-\int\limits_{\partial\Omega_0} \partial_\nu u_0^- u_0^- \, d\sigma_x + \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^- \, dx = \int\limits_{\Omega_0} f u_0^- \, dx. \qquad (2.71)$$

Інтеграл по $\partial\Omega_0$ може бути записаний у вигляді

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} \partial_\nu u_0^- u_0^- \, d\sigma_x = \int\limits_{\partial\Omega_0 \setminus \Xi_0} \partial_\nu u_0^- u_0^- \, d\sigma_x - \int\limits_{\Xi_0} (\partial_{x_3} u_0^- u_0^-)\Big|_{x_3=0} dx'.$$

Використовуючи крайову умову: $\partial_\nu u_0^- = 0$ в $\partial\Omega_0 \setminus \Xi_0$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^- \, dx = \int\limits_{\Omega_0} f\, u_0^- \, dx - \int\limits_{\Xi_0} (\partial_{x_3} u_0^- u_0^-)\Big|_{x_3=0} dx'. \qquad (2.72)$$

Проінтегруємо рівняння задачі (2.69) в Ω^+, маємо

$$-\int\limits_{\Xi_0} (|\omega(x_3)|\partial_{x_3} u_0^+ (u_0^+ - g))\Big|_{x_3=0} dx' + \int\limits_{\Xi_h} (|\omega(x_3)|\partial_{x_3} u_0^+ (u_0^+ - g))\Big|_{x_3=h} dx' +$$

$$+\int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} (u_0^+ - g) dx = \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f (u_0^+ - g) dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(x) (u_0^+ - g) dx. \qquad (2.73)$$

Оскільки $u_0^+ = 0$ на Ξ_h та $g = 0$ в $\Xi_0 \cup \Xi_h$, тому

$$-\int\limits_{\Xi_0} (|\omega(x_3)|\partial_{x_3} u_0^+ u_0^+)\Big|_{x_3=0} dx' + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} (u_0^+ - g) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f (u_0^+ - g) dx + \int\limits_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(x) (u_0^+ - g) dx. \qquad (2.74)$$

Додамо (2.72) та (2.74). Використовуючи умови спряження для u_0^+ та u_0^-, маємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^- dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3}(u_0^+ - g) dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} f u_0^- dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(u_0^+ - g) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(u_0^+ - g) dx. \qquad (2.75)$$

Тепер візьмемо довільну функцію φ з K_0 та домножимо першу рівність задачі (2.68) на φ і проінтегруємо по Ω_0. Перше та третє співвідношення (2.69) домножимо на функцію $(\varphi - g)$ і проінтегруємо по Ω^+. Аналогічно як зроблено вище, маємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_0} f \varphi dx - \int_{\Xi_0} (\partial_{x_3} u_0^- \varphi)\Big|_{x_3=0} dx', \qquad (2.76)$$

$$\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3}(\varphi - g) dx \geq \int_{\Xi_0} (|\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \varphi)\Big|_{x_3=0} dx' +$$

$$+ \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(x)(\varphi - g) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(x)(\varphi - g) dx. \qquad (2.77)$$

Додамо (2.76) та (2.77). Тоді

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3}(\varphi - g) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f \varphi dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(\varphi - g) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(\varphi - g) dx. \qquad (2.78)$$

Нехай

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^-(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^+(x), & x \in \Omega^+. \end{cases}$$

Означення 2.8 *Узагальненим розв'язком задачі (2.68) -- (2.69) називається функція $u_0 \in K_0$, яка задовольняє таку інтегральну рівність*

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^- dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3}(u_0^+ - g) dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} f u_0^- dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(u_0^+ - g) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(u_0^+ - g) dx \qquad (2.79)$$

та інтегральну нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} (\varphi - g) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f \varphi dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(\varphi - g) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(\varphi - g) dx \qquad (2.80)$$

для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Аналогічно до доведення еквівалентності означень 2.1 та 2.2, можна показати еквівалентність означення 2.8 та наступного означення.

Означення 2.9 *Узагальненим розв'язком задачі (2.68) -- (2.69) називається функція* $u_0 \in K_0$, *яка задовольняє таку інтегральну нерівність*

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla(\varphi - u_0^-) dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} (\varphi - u_0^+) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(\varphi - u_0^-) dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(\varphi - u_0^+) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(\varphi - u_0^+) dx \qquad (2.81)$$

для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Дамо ще одне означення узагальненого розв'язку (2.68) -- (2.69).

Означення 2.10 *Узагальненим розв'язком задачі (2.68) -- (2.69) називається функція* $u_0 \in K_0$, *яка задовольняє таку інтегральну нерівність*

$$\int_{\Omega_0} \nabla \varphi \cdot \nabla(\varphi - u_0^-) dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} \varphi \partial_{x_3} (\varphi - u_0^+) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_0} f(\varphi - u_0^-) dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(x)(\varphi - u_0^+) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(x)(\varphi - u_0^+) dx \qquad (2.82)$$

для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Еквівалентність означень 2.9 та 2.10 показується аналогічно як в пункті 2.1.6.

Нерівність (2.81) можна переписати в наступній формі

$$(u,\varphi-u)_{\mathsf{H}} \geq \langle F,\varphi-u\rangle \quad \forall\,\varphi\in K_0, \tag{2.83}$$

де F -- лінійний неперервний функціонал над $\mathsf{H}(\Omega_1;\Xi_h)$, який визначений наступним чином

$$\langle F,w\rangle = \int\limits_{\Omega_0} f\,w^- \,dx + \int\limits_{\Omega^+} |\,\omega(x_3)\,|\,f\,w^+ \,dx + \int\limits_{\Omega^+} l_\omega(x_3)\,d\,w^+ \,dx \quad \forall w\in \mathsf{H}(\Omega_1;\Xi_h).$$

Застосовуючи теорему (1.2) аналогічно як це було зроблено в підрозділі 2.1.7, обгрунтовуємо існування та єдиність варіаційної нерівності (2.83) а, отже, усередненої задачі (2.68) -- (2.69).

2.2.6 Доведення теореми збіжності

1. З апріорної оцінки (2.64) випливає, що

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)},\quad \|\overset{''}{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^+)},\quad \|\partial_{x_i}\overset{''}{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^+)} \quad (i=1,2,3)$$

є рівномірно обмеженими по ε. Отже, існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}\subset\{\varepsilon\}$, яку знову позначимо через ε, така що

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon|_{\Omega_0} & \overset{w}{\rightarrow} & u_0^- & \text{в}\quad H^1(\Omega_0), \\ \overset{''}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\rightarrow} & |\,\omega(x_3)\,|(|\,\omega(x_3)\,|^{-1}\,u) =: |\,\omega\,|u_0^+ & \text{в}\quad L^2(\Omega^+), \\ \partial_{x_i}\overset{''}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\rightarrow} & \gamma_i & \text{в}\quad L^2(\Omega^+),\quad i=1,2,3 \end{array}\right\}\ \varepsilon\to 0, \tag{2.84}$$

де u_0^-, u_0^+, γ_1, γ_2, γ_3 деякі функції, які будуть визначені далі.

Спочатку визначимо γ_3. Візьмемо довільну функцію $\psi\in C_0^\infty(\Omega^+)$ та за допомогою (2.55) виконаємо наступні обчислення:

$$\int\limits_{\Omega^+} \partial_{x_3}\overset{''}{u}_\varepsilon\psi\,dx = \int\limits_{G_\varepsilon} \partial_{x_3}u_\varepsilon\psi\,dx = -\int\limits_{G_\varepsilon} u_\varepsilon\partial_{x_3}\psi\,dx -$$

$$-\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\rho'(x_3)u_\varepsilon\psi}{\sqrt{1+\varepsilon^2\,|\,\rho'(x_3)\,|^2}}\,d\sigma_x = -\int\limits_{\Omega^+} \overset{''}{u}_\varepsilon\partial_{x_3}\psi\,dx -$$

$$-\int_{\Omega^+}\rho'(x_3)g(x_3)\overset{\prime\prime}{u_\varepsilon}\psi\,dx+\varepsilon\int_{G_\varepsilon}\rho'(x_3)\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\;\Big|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(u_\varepsilon\psi)dx. \qquad (2.85)$$

Використовуючи (2.58) та (2.64), і переходячи до границі в цій тотожності при $\varepsilon\to 0$, отримаємо

$$\int_{\Omega^+}\gamma_3\psi\,dx=-\int_{\Omega^+}(|\,\omega(x_3)\,|u_0^+\partial_{x_3}\psi+|\,\omega(x_3)\,|'u_0^+\psi)dx \quad \text{äëÿâñ³õ}\,\psi\in C_0^\infty(\Omega^+), \qquad (2.86)$$

звідки одержимо, що існує узагальнена похідна $\partial_{x_3}u_0^+$ та

$$\gamma_3=|\,\omega(x_3)\,|\partial_{x_3}u_0^+ \quad \text{ì. ñ. â} \quad x\in\Omega^+.$$

Тепер визначимо $\gamma_i, i=1,2$. Розглянемо функції

$$Y_i(\xi_i)=-\xi_i+[\xi_i],\quad i=1,2 \qquad (2.87)$$

де $[t]$ -- ціла частина t. За допомогою цих функцій виберемо наступні тестові функції:

$$\Phi_i(x)=\begin{cases}0, & x\in\Omega_0,\\ \varepsilon Y_i\left(\dfrac{x_i}{\varepsilon}\right)\psi(x)+g, & x\in G_\varepsilon,\quad i=1,2,\end{cases}\qquad \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega^+),\quad \psi\geq 0$$

Оскільки $Y_i\leq 0$ та $\psi\geq 0$, $\Phi_i\in K_\varepsilon, i=1,2.$ Легко переконатися, що

$$\nabla(\Phi_1-g)=\left(-\psi+\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi,\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi,\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}\psi\right),x\in G_\varepsilon,$$

$$\nabla(\Phi_2-g)=\left(\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi,-\psi+\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi,\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}\psi\right),x\in G_\varepsilon.$$

Підставляючи функції Φ_i-g, i=1,2 в нерівність (2.53) для розв'язку u_ε, маємо

$$\int_{G_\varepsilon}\left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\psi\quad+\varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)dx$$

$$\geq\int_{G_\varepsilon}\varepsilon f\,Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\psi\,dx+\varepsilon^2\int_{S_\varepsilon}dY_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\psi\,d\sigma_x,\quad i=1,2.$$

За допомогою (2.59) та (2.64) з попередньої нерівності отримаємо оцінку

$$\left|\int_{\Omega^+}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\psi\,dx\right| \le \varepsilon\left(\int_{G_\varepsilon}|Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\psi - f\psi\,|dx - \right.$$

$$\left. -\varepsilon\int_{S_\varepsilon}|Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)d\psi\,|d\sigma_x\right)\le \varepsilon c_1\Big(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)}\|\nabla\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)}+$$

$$+\|f\|_{L^2(G_\varepsilon)}\|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)}+\varepsilon\|d\|_{L^2(S_\varepsilon)}\|\psi\|_{L^2(S_\varepsilon)}\Big)\le\varepsilon c_1(\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\|\psi\|_{H^1(\Omega^+)}+$$

$$+\|f\|_{L^2(\Omega_1)}\|\psi\|_{L^2(\Omega^+)}+\|d\|_{H^1(\Omega^+)}\|\psi\|_{H^1(\Omega^+)})\le\varepsilon c_2,$$

звідки, переходячи до границі при $\varepsilon\to0$, маємо $\int_{\Omega^+}\gamma_i\psi\,dx=0$ для всіх функцій $\psi\in C_0^\infty(\Omega^+),\psi\ge0$. Це означає, що $\gamma_i=0$ м. с. в Ω^+, $i=1,2$.

2. Покажемо, що сліди функцій $u_0^+|_{\Xi_0}$ та $u_0^-|_{\Xi_0}$ рівні. Використовуючи неперервність оператора сліду, компактність вкладення $H^{1/2}(\Xi_0)\subset L^2(\Xi_0)$ та перше співвідношення в (2.84), маємо

$$u_\varepsilon(x',0)\xrightarrow{s}u_0^-(x',0)\quad \text{â}\quad L^2(\Xi_0)\quad \text{ïðè}\quad \varepsilon\to0. \tag{2.88}$$

Розглянемо рівність

$$\overset{\circ}{u}_\varepsilon(x',0)=\chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x',0)\quad \text{äëÿ ì. â.}(x',0)\in\Xi_0, \tag{2.89}$$

де $\chi_{\omega_0}(\xi')$, $\xi'\in\mathbb{R}^2$, -- 1-періодична функція, яка визначена в квадраті Ξ_0 наступним чином:

$$\chi_{\omega_0}(\xi')=\begin{cases}1, & \xi'\in\overline{\omega(0)},\\ 0, & [0,1]\times[0,1]\setminus\overline{\omega(0)}.\end{cases}$$

Зрозуміло, що $\chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\xrightarrow{w}|\omega(0)|$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon\to0$. Використовуючи (2.88), отримаємо, що права частина в (98) слабко збігається до $|\omega(0)|u_0^-$ в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon\to0$.

З іншої сторони, за допомогою (2.55) маємо

$$\int_{\Xi_0}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x',0)\psi(x')\,dx'=\frac{1}{h}\left(\int_{\Omega^+}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x)\psi(x')\,dx\right.$$

$$+\int_{\Omega^+}(x_3-h)\partial_{x_3}^{\prime\prime}u_\varepsilon(x)\psi(x')\,dx+\int_{\Omega^+}g(x_3)\rho'(x_3)(x_3-h)u_\varepsilon^{\prime\prime}\psi(x')dx$$

$$\left.+\varepsilon\int_{G_\varepsilon}\rho'(x_3)(x_3-h)\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\;\Big|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(u_\varepsilon\psi)dx\right) \qquad (2.90)$$

для довільної функції $\psi\in C_0^\infty(\Xi_0)$. Використовуючи результати отримані вище, та переходячи до границі в (2.90) при $\varepsilon\to 0$, отримаємо:

$$\int_{\Xi_0}|\,\omega(0)|u_0^-(x',0)\psi(x')dx=\frac{1}{h}\left(\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|u_0^+(x)\psi(x')dx+\right.$$

$$+\int_{\Omega^+}(x_3-h)\,|\,\omega(x_3)\,|\partial_{x_3}u_0^+(x)\psi\,dx+$$

$$\left.+\int_{\Omega^+}(x_3-h)g(x_3)\rho'(x_3)|\,\omega(x_3)\,|u_0^+(x)\psi(x')dx\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{\Omega^+}(|\,\omega(x_3)\,|u_0^+\psi(x')+(x_3-h)\psi(x')\partial_{x_3}(|\,\omega(x_3)\,|u_0^+(x)))dx=$$

$$=\int_{\Xi_0}|\,\omega(0)|u_0^+(x',0)\psi(x')dx\quad \text{äëÿ âñ³õ}\quad \psi\in C_0^\infty(\Xi_0), \qquad (2.91)$$

звідки

$$u_0^+(x',0)=u_0^-(x',0)\quad \text{äëÿ ì. â.}\quad x'\in\Xi_0.$$

3. Додамо до нерівності (2.54) нерівність

$$\int_{\Omega_0}\nabla(\varphi-u_\varepsilon)\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dx+\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)dx+$$

$$+\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_1}u_\varepsilon\partial_{x_1}u_\varepsilon\,dx+\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_2}u_\varepsilon\partial_{x_2}u_\varepsilon\,dx\ge 0$$

де φ – довільна функція з $C^1(\overline{\Omega_1})$ така, що $\varphi|_{\Xi_h}=0$ та $\varphi\le g$ в Ω^+ $(\varphi|_{\Omega_\varepsilon}\in K_\varepsilon)$. Отже, маємо

$$\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dx+\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_1}u_\varepsilon\partial_{x_1}\varphi dx+\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_2}u_\varepsilon\partial_{x_2}\varphi dx+\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)dx$$

$$\geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi-u_\varepsilon)dx+\varepsilon\int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi-u_\varepsilon)d\sigma_x, \tag{2.92}$$

звідки за допомогою (2.55) маємо

$$\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)\,dx+\int_{\Omega^+}\partial_{x_1}\overset{''}{u}_\varepsilon\partial_{x_1}\varphi dx+\int_{\Omega^+}\partial_{x_2}\overset{''}{u}_\varepsilon\partial_{x_2}\varphi dx+$$

$$+\int_{\Omega^+}\chi_{G_\varepsilon}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}\varphi dx-\int_{\Omega^+}\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}\overset{''}{u}_\varepsilon\,dx\geq\int_{\Omega_0}f(\varphi-u_\varepsilon)\,dx+$$

$$+\int_{\Omega^+}\chi_{G_\varepsilon}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)f\varphi\,dx-\int_{\Omega^+}f\,\overset{''}{u}_\varepsilon dx+$$

$$+\int_{\Omega^+}\zeta(x_3)\sqrt{1+\varepsilon^2\,|\,\rho'(x_3)\,|^2}\,\chi_{G_\varepsilon}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)d(x)\varphi dx+$$

$$+\varepsilon\int_{G_\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon^2\,|\,\rho'(x_3)\,|^2}\,\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\,|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(d\varphi)dx-$$

$$-\int_{\Omega^+}\zeta(x_3)\sqrt{1+\varepsilon^2\,|\,\rho'(x_3)\,|^2}\,d(x)\overset{''}{u}_\varepsilon dx+$$

$$+\varepsilon\int_{G_\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon^2\,|\,\rho'(x_3)\,|^2}\,\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\,|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(du_\varepsilon)dx. \tag{2.93}$$

Враховуючи (2.58) та (2.64), п'ятий та сьомий доданок з правої сторони нерівності (2.93) прямують до нуля. За допомогою (2.84) та результатів отриманих вище, можна перейти до границі в (2.93) при $\varepsilon\to 0$. В результаті отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_0^-)dx+\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}(\varphi-u_0^+)dx\geq$$

$$\geq\int_{\Omega_0}f(\varphi-u_0^-)dx+\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,f(\varphi-u_0^+)dx+\int_{\Omega^+}l_\omega(x_3)d(x)(\varphi-u_0^+)dx. \tag{2.94}$$

для довільної функції $\varphi\in K_1=\{\psi\in C^1(\overline{\Omega_1}):\psi\,|_{\Xi_h}=0,\psi\leq g\ \text{ в }\ \Omega^+\}$. Зрозуміло, що K_1 є щільною в K_0, тому нерівність (2.94) виконується для довільної функції $\varphi \in K_0$. Оскільки усереднена задача має єдиний розв'язок, то всі міркування наведені вище мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon'\}$ послідовності $\{\varepsilon\}$. Отже, співвідношення (2.67) виконуються, і функція $u_0(x)$ є єдиним узагальненим розв'язком крайової задачі (2.68)-(2.69).

4. З рівностей (2.52) та (2.79) маємо

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{G_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla g\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega_0} f u_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon} f(u_\varepsilon - g) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(u_\varepsilon - g) d\sigma_x, \tag{2.95}$$

$$E_0(u_0) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_0^-|^2 dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| |\partial_{x_3} u_0^+|^2 dx = \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} g\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega_0} f u_0^- dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f(u_0^+ - g) dx + \int_{\Omega^+} l_\omega(x_3) d(x)(u_0^+ - g) dx. \tag{2.96}$$

Переходячи до границі в (2.95) аналогічно як в (2.93) та беручи до уваги (2.96), маємо $\lim_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_0(u_0)$.

Висновки до розділу 2

В цьому розділі досліджено асимптотичну поведінку розв'язків варіаційних нерівностей в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1. Ці розв'язки є узагальненими розв'язками відповідних крайових задач Сіньоріні (2.1) -- (2.2), (2.50) -- (2.51). Доведено, що при $\varepsilon \to 0$ розв'язок задачі (2.1) -- (2.2) прямує в сенсі (2.20) до розв'язку усередненої задачі (2.21) -- (2.22). А розв'язок задачі (2.50) -- (2.51) прямує в сенсі (2.67) до розв'язку усередненої задачі (2.68) -- (2.69) при $\varepsilon \to 0$. При цьому крайові умови Сіньоріні трансформуються в співвідношення (2.22) в прямокутнику D_0, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході для задачі в плоскому з'єднанні та в співвідношення (2.69) в паралепіпеді Ω^+, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами в граничному переході для задачі в з'єднанні типу 3:2:1. В результаті отримано нестандартні усереднені крайові задачі, які є симбіозом звичайної крайової задачі для рівняння Пуассона в тілі густого з'єднання та варіаційних співвідношень в прямокутнику або паралелепіпеді відповідно, а в зоні з'єднання фігурують спеціальні умови спряження. Доведено існування та єдиність таких нестандартних усереднених задач. Крім того, для задачі (2.50) -- (2.51) в підрозділі 2.2 вивчено вплив геометрії тонких криволінійних циліндрів (2.48). В результаті усереднені співвідношення залежать від функції ρ, яка описує змінну товщину тонких циліндрів (див. (2.56)) та мають вигляд (2.69).

Основним результатом цього розділу є доведення теорем збіжності послідовності розв'язків вихідних задач до розв'язків усереднених задач.

Також доведено збіжність інтегралів енергії вихідних задач до інтегралів енергії усереднених задач, що є важливим результатом, оскільки єдиним природнім означенням збіжності для функціоналів, які задані на рефлексивних просторах і ростуть швидше за норму, є означення через збіжність інтегралів енергії. Тому доведення збіжності інтегралів енергії та збіжності розв’язків – дуже важливий результат, який дає можливість вивчати варіаційні задачі і задачі оптимального керування в густих з’єднаннях, використовуючи прямий метод варіаційного числення (див. [63]).

З отриманих результатів випливає, що усереднені задачі є адекватними моделями задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях. Цей факт дає можливість використовувати усереднені задачі, які є набагато простішими замість вихідних задач в різних прикладних задачах природознавства.

Результати другого розділу опубліковано в статтях [81], [99] і додатково висвітлені в препринті [80] та доповідалися на конференціях [13], [14] і наукових семінарах кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи математичної фізики" та семінарі механіко-математичного факультету Львівського національного університету "Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь".

РОЗДІЛ 3

Усереднення параболічних крайових задач Сіньоріні в густих з'єднаннях.

В цьому розділі розглядаються лінійні параболічні крайові задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях, які описані в розділі 2. Як було показано в [67], [68] для усереднення параболічних задач в перфорованих областях потрібно вимагати додаткові припущення на початкові умови параболічної задачі (див. також [110]). Подібна ситуація зберігається для параболічних задач в густих з’єднаннях. Досліджується асимптотична поведінка розв'язків параболічних задач при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких стержнів або тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля.

3.1 Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 2:1:1.

3.1.1 Постановка задачі

В області Ω_ε (густе з'єднання типу 2:1:1, яке детально описане в 1.1.1) розглянемо наступну крайову задачу

$$\begin{cases} u'_\varepsilon(x,t) &= \Delta_x u_\varepsilon(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,t) &= 0, & (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) &= 0, & (x,t) \in (\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega_0) \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &= 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

з однорідними умовами Сіньоріні на $S_\varepsilon \times (0,T)$

$$u_\varepsilon(x,t) \le 0, \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) \le 0, \quad u_\varepsilon(x,t)\partial_\nu u_\varepsilon(x,t) = 0, \tag{3.2}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\mathbf{v}$ -- зовнішня нормальна похідна, $u'_\varepsilon = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$.

Задана функція f належить простору $L^2(\Omega_1\times(0,T))$ та існує узагальнена похідна f' така, що

$$f'\in L^2(\Omega_1\times(0,T)), \tag{3.3}$$

де Ω_1 -- внутрішність $\overline{\Omega_0}\cup\overline{D_0},\quad D_0=(0,a)\times(-l,0).$

3.1.2 Різні означення узагальненого розв'язку та їх еквівалентність, існування та єдиність узагальненого розв'язку

Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ – дужки спряження між $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon):=\{u\in H^1(\Omega_\varepsilon):\ u|_{\Gamma_\varepsilon}=0\}$ та спряженим до нього $\left(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)\right)^*$. Нехай існує класичний розв'язок задачі (3.1) -- (3.2). Домножуючи рівняння задачі (3.1) на функцію u_ε, інтегруючи в Ω_ε та беручи до уваги крайові умови, отримаємо

$$\langle u'_\varepsilon,u_\varepsilon\rangle_\varepsilon+\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\,dx=\int_{\Omega_\varepsilon}f\,u_\varepsilon\,dx. \tag{3.4}$$

Розглянемо наступні функціональні простори:

$$W^\varepsilon(0,T)=\{v\in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)):\quad \exists v'\in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*)\},$$

$$W_0^\varepsilon(0,T)=\{v\in W(0,T):\quad v(\cdot,0)=0\}.$$

Зауваження 3.1 *Простір* $W(0,T)$ *належить простору* $C([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))$*, а отже рівність* $v(\cdot,0)=0$ *має сенс (див. пропозицію 1.2 ([111, p. 106]).*

Також визначимо функціональні множини:

$$K_\varepsilon=\{v\in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon):\quad v|_{S_\varepsilon}\le 0\quad \text{ì. ñ. íà}\quad S_\varepsilon\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon=\{v\in W^\varepsilon(0,T):\quad v(\cdot,t)\in K_\varepsilon\quad \text{äëÿìàéæåâñ³õ}\quad t\in[0,T]\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon^0=\{v\in W_0^\varepsilon(0,T):\quad v(\cdot,t)\in K_\varepsilon\quad \text{äëÿìàéæåâñ³õ}\quad t\in[0,T]\},$$

де $v|_S$ позначає слід v на поверхні S.

Зрозуміло, що K_ε -- замкнена та опукла в $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)$.

Тепер візьмемо довільну функцію $\varphi \in K_\varepsilon$, домножимо рівняння задачі (3.1) на φ та проінтегруємо в Ω_ε. Враховуючи крайові умови, аналогічно як раніше отримаємо:

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \varphi dx + \int_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \varphi ds. \qquad (3.5)$$

Оскільки $\partial_\nu u_\varepsilon \le 0$ та $\varphi \le 0$ м. с. в $S_\varepsilon \times (0,T)$, маємо

$$\int_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \varphi ds \ge 0. \qquad (3.6)$$

Враховуючи (3.6), з рівності (3.5) випливає

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \ge \int_{\Omega_\varepsilon} f \varphi dx. \qquad (3.7)$$

Означення 3.1

Узагальненим розв'язком задачі (3.1) -- (3.2) називається така функція $u_\varepsilon \in \mathrm{K}^0_\varepsilon$, *що задовольняє рівність (3.4) та нерівність (3.7) для майже всіх* $t \in (0,T)$ *та довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$.

Означення 3.2 *Узагальненим розв'язком задачі* (3.1) -- (3.2) *називається така функція* $u_\varepsilon \in \mathrm{K}^0_\varepsilon$, *що задовольняє нерівність*

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx \ge \int_{\Omega_\varepsilon} f (\varphi - u_\varepsilon) dx \qquad (3.8)$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ *та довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$, *або, що еквівалентно, наступну нерівність*

$$\int_0^T \langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx dt \ge \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f (\varphi - u_\varepsilon) dx dt \quad \forall \varphi \in K_\varepsilon. \qquad (34.9)$$

Аналогічно як в розділі 2 можна показати, що означення 3.1 та 3.2 еквівалентні.

Зрозуміло, що наступний функціонал

$$\int_0^T \langle F, v \rangle_\varepsilon dt := \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f v dx dt, \quad v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon)),$$

належить простору $L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*)$ та із умов (3.3) існує узагальнена похідна F', така, що

$$F' \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*) \quad \text{òà} \tag{3.10}$$

$$\int_0^T \langle F',v\rangle_\varepsilon\, dt = \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f'v\,dx\,dt, \quad v \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)).$$

Легко переконатися, що всі умови (одна із них включає (3.10)) теореми 1.5 для задачі (3.1) -- (3.2) в сенсі означення 3.2 виконуються, отже для задачі (3.1) -- (3.2) існує єдиний розвязок u_ε такий, що

$$u_\varepsilon, u'_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

3.1.3 Апріорна оцінка

Використовуючи інтегральну нерівність Коші-Буняковського та нерівність Коші з $\delta > 0$ $(2ab \le \delta a^2 + \delta^{-1}b^2,\, a>0, b>0)$, та за допомогою (2.13) та нерівності Фрідріхса отримаємо з (3.4) наступне

$$\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \le c_0\delta_1 \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_1(1+\delta_1^{-1})\|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

для м. в. $t \in (0,T)$. Вибираючи δ_1 так, щоб $c_0\delta_1 < \frac{1}{2}$, одержимо

$$\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \le c_2\|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.11}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Інтегруючи (3.11) по t та використовуючи рівність $\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))} \le c_3\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}. \tag{3.12}$$

Оцінимо $\|u'_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}$. Для цього застосуємо метод штрафу. Розглянемо таку наближену задачу:

$$
\begin{cases}
\partial_t u_\varepsilon^\delta(x,t) &= \Delta_x u_\varepsilon(x,t) + f(x,t), & (x,t)\in\Omega_\varepsilon\times(0,T),\\
\partial_\nu u_\varepsilon^\delta &= -\dfrac{1}{\delta}(u_\varepsilon^\delta)^+, & (x,t)\in S_\varepsilon\times(0,T),\\
u_\varepsilon^\delta(x,t) &= 0, & (x,t)\in\Gamma_\varepsilon\times(0,T),\\
\partial_\nu u_\varepsilon^\delta(x,t) &= 0, & (x,t)\in(\partial\Omega_\varepsilon\cap\partial\Omega_0)\times(0,T),\\
u_\varepsilon^\delta(x,0) &= 0, & x\in\Omega_\varepsilon,
\end{cases}
\tag{3.123}
$$

де δ -- довільне додатне число та

$$
(u_\varepsilon^\delta)^+ = \begin{cases} u_\varepsilon^\delta, & \text{ÿêùî } u_\varepsilon^\delta \ge 0;\\ 0, & \text{â ³íøîìó âèïàäêó.}\end{cases}
$$

Нагадаємо, що $u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$ така, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*)$ -- узагальнений розв'язок задачі (3.13), якщо $u_\varepsilon^\delta(\cdot,0)=0$ та виконується наступна інтегральна тотожність:

$$
\langle \partial_t u_\varepsilon^\delta, \varphi\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^\delta \cdot \nabla\varphi dx + \frac{1}{\delta}\int_{S_\varepsilon}(u_\varepsilon^\delta)^+\varphi ds = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx \tag{3.14}
$$

для довільної функції $\varphi\in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$ та для майже всіх $t\in(0,T)$.

Знову внаслідок (3.3) маємо, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$. Отже, можна взяти $\varphi = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ в (3.14) та отримати для майже всіх $t\in(0,T)$

$$
\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t u_\varepsilon^\delta(x,\tau)|^2\, dxd\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta(x,t)|^2\, dx +
$$

$$
+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{S_\varepsilon}(u_\varepsilon^\delta)^+\partial_t u_\varepsilon^\delta ds d\tau = \int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon} f\,\partial_t u_\varepsilon^\delta\, dxd\tau. \tag{3.15}
$$

Оскільки

$$
\int_0^t\int_{S_\varepsilon}(u_\varepsilon^\delta)^+\partial_t u_\varepsilon^\delta dsdt = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{S_\varepsilon}\partial_t\left((u_\varepsilon^\delta)^+\right)^2 dsdt \ge 0,
$$

то з (3.15) одержимо наступну оцінку

$$\|\partial_t u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_1. \tag{3.16}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (3.14), маємо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon^\delta u_\varepsilon^\delta dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2 dx + \frac{1}{\delta}\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon^\delta dx \tag{3.17}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Враховуючи те, що $\int_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta ds \ge 0$, аналогічно як при доведенні оцінки (3.12) отримаємо з (3.17) наступну оцінку

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))} \le C_2. \tag{3.18}$$

Використовуючи (3.16) та (3.18), маємо

$$\|u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_3.$$

Отже, існує функція $w_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ така, що

$$u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{w} w_\varepsilon \quad \text{ñëàáêî â} \quad H^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T)), \tag{3.19}$$

$$u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{s} w_\varepsilon \quad \text{ñèëüíî â} \quad L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T)) \tag{3.20}$$

при $\varepsilon \to 0$. Доведемо, що w_ε є розв'язком задачі (106)-(107).

Перейдемо до границі при $\delta \to 0$ в тотожності (3.14), та проінтегруємо її по $(0,T)$ з довільною тестовою функцією $\varphi = v \in K_\varepsilon$. Беручи до уваги $\frac{1}{\delta}\int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ v ds dt \le 0$ та збіжності (3.19) і (3.20), маємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon v dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla v dx dt \ge \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx dt \quad \forall\, v \in K_\varepsilon. \tag{3.21}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (3.14) та враховуючи

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx dt \le \liminf_{\delta\to 0} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2 dx dt \le \liminf_{\delta\to 0} \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon^\delta dx dt - \right.$$

$$-\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon^\delta u_\varepsilon^\delta\,dxdt \Bigg\} = \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon w_\varepsilon\,dxdt,$$

отримуємо, що w_ε задовольняє нерівність

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon w_\varepsilon\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla w_\varepsilon|^2\,dxdt \le \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f\,w_\varepsilon\,dxdt. \tag{3.22}$$

Віднімаючи нерівність (3.22) від (3.21), маємо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon (v-w_\varepsilon)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon\cdot\nabla(v-w_\varepsilon)\,dxdt \ge$$

$$\ge \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f(v-w_\varepsilon)\,dxdt \quad \forall\, v\in K_\varepsilon. \tag{3.23}$$

Це означає, що w_ε -- узагальнений розв'язок задачі (3.1) -- (3.2). Оскільки (3.1) -- (3.2) має єдиний розв'язок, то $w_\varepsilon = u_\varepsilon$ та $u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$, $u'_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))$.

Використовуючи (3.12) та (3.16), одержимо наступну оцінку

$$\max_{t\in(0,T)}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))} + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_4. \tag{3.24}$$

Нашою метою є вивчення асимтотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (3.2) -- (3.2) при $\varepsilon\to 0$, тобто коли кількість стержнів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

3.1.4 Формулювання основного результату

Визначимо продовження нулем в D_0 для функцій, визначених на G_ε:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t)\in G_\varepsilon\times(0,T), \\ 0, & (x,t)\in (D_0\setminus G_\varepsilon)\times(0,T). \end{cases} \tag{3.25}$$

Внаслідок прямолінійності меж тонких стержнів для розв'язку u_ε маємо

$\tilde{u}_\varepsilon := \tilde{u}_{\varepsilon|_{G_\varepsilon}} \in L^2(0,T;H^{0,1}(D_0;I_l))$ та $\partial_{x_2}(\tilde{u}_\varepsilon) = \partial_{x_2}\tilde{u}_\varepsilon$, де

$$H^{0,1}(D_0;I_l) = \left\{ v \in L^2(D_0) : \exists \ \text{óçàã.ïîõ³äíà} \quad \partial_{x_2} v \in L^2(D_0), \quad v_{|_{I_l}} = 0 \right\}, \tag{3.26}$$

$$I_l = \{x : x_1 \in (0,a), \quad x_2 = -l\}, \ I_0 = \{x : x_1 \in (0,a), \quad x_2 = 0\}. \tag{3.27}$$

Теорема 3.1 *Для розв'язку u_ε задачі (3.1) -- (3.2) виконуються наступні співвідношення:*

$$\left. \begin{array}{rcll} u_{\varepsilon|_{\Omega_0}} & \xrightarrow{w} & u_0^+ & \text{ñëàáêî} \quad H^1(\Omega_0 \times (0,T))), \\ \tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & h u_0^- & \text{ñëàáêî} \quad L^2(0,T;H^{0,1}(D_0;I_l)), \\ \partial_{x_1}\tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & 0 & \text{ñëàáêî} \quad L^2(0,T;L^2(D_0)), \\ \partial_t \tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & h\partial_t u_0^- & \text{ñëàáêî} \quad L^2(D_0 \times (0,T)), \end{array} \right\} \ \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.28}$$

та функція

$$u_0(x,t) := \begin{cases} u_0^+(x,t), & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ u_0^-(x,t), & (x,t) \in D_0 \times (0,T), \end{cases} \tag{3.29}$$

є єдиним розв'язком задачі (3.30) -- (3.31):

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u_0^+(x,t) - \Delta_x u_0^+(x,t) & = & f(x,t), & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ u_0^+(x_1,0,t) & = & u_0^-(x_1,0,t), & (x_1,t) \in (0,a) \times (0,T), \\ \partial_{x_2} u_0^+(x_1,0,t) & = & h\partial_{x_2} u_0^-(x_1,0,t), & (x_1,t) \in (0,a) \times (0,T), \\ \partial_\nu u_0^+(x,t) & = & 0, & (x,t) \in (\partial\Omega_0 \setminus I_0) \times (0,T), \\ u_0^-(x_1,-l,t) & = & 0, & (x_1,t) \in (0,a) \times (0,T), \\ u_0(x,0) & = & 0, & x \in \Omega_1, \end{array} \right. \tag{3.30}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u_0^-(x,t) - \partial_{x_2}^2 u_0^-(x,t) & \le & f(x,t), & \\ u_0^-(x,t) & \le & 0, & (x,t) \in D_0 \times (0,T), \\ u_0^-\left(\partial_t u_0^- - \partial_{x_2}^2 u_0^- - f\right) & = & 0, & \end{array} \right. \tag{3.31}$$

яка називається усередненою задачею для задачі (3.1) -- (3.2).

3.1.5 Різні означення узагальненого розв'язку усередненої задачі та їх еквівалентність, існування та єдиність узагальненого розв'язку

Розглянемо частково анізотропний простір Соболєва

$$V(\Omega_1, D_0; I_l) = \Big\{\varphi \in L^2(\Omega_1) : \exists \partial_{x_2}\varphi \in L^2(\Omega_1), \quad \varphi_{|\Omega_0} \in H^1(\Omega_0),$$
$$\varphi_{|D_0} \in H^{0,1}(D_0; I_l), \quad \varphi(\cdot,0+) = \varphi(\cdot,0-) \quad \text{íà} \quad I_0\Big\},$$

де $H^{0,1}(D_0; I_l)$ визначений в (131), I_0 та I_l визначені в (132). В цьому просторі розглянемо норму $\|\cdot\|_V$, що породжується скалярним добутком

$$(u,\varphi)_V = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + h \int_{D_0} \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \varphi dx, \quad u, \varphi \in V(\Omega_1, D_0; I_l).$$

Також визначимо простір $H(\Omega_1) = L^2(\Omega_1)$ із скалярним добутком

$$(u,v)_H = \int_{\Omega_0} uv dx + h \int_{D_0} uv dx.$$

Зрозуміло, що вкладення $V(\Omega_1, D_0; I_l) \subset H(\Omega_1)$ щільне та неперервне ([104]). Отже, розглянемо трійку просторів $V \subset H \subset V^*$ з дужками спряження $\langle \cdot,\cdot \rangle_0$ між V та V^*, де $V := V(\Omega_1, D_0; I_l)$, $H := H(\Omega_1)$, та $V^* := \big(V(\Omega_1, D_0; I_l)\big)^*$.

Припустимо, що існує гладка функція u_0, що задовольняє співвідношення усередненої задачі (3.30) -- (3.31). Домноживши перше рівняння задачі (3.30) на функцію u_0^+, проінтегрувавши по Ω_0 та використавши крайову умову на $\partial\Omega_0 \setminus [0,a]$, знаходимо

$$\int_{\Omega_0} \partial_t u_0^+ u_0^+ dx + \int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla u_0^+ dx = \int_{\Omega_0} f u_0^+ dx - \int_0^a \partial_{x_2} u_0^+ \big|_{x_2=0} u_0^+ \big|_{x_2=0} dx_1. \qquad (3.32)$$

Проінтегруємо рівняння $u_0^- \big(\partial_t u_0^- - \partial_{x_2}^2 u_0^- - f\big) = 0$ задачі (3.31) по D_0 та, використавши крайову умову на $x_2 = -l$, отримаємо

$$-h \int_0^a \partial_{x_2} u_0^- \big|_{x_2=0} u_0^- \big|_{x_2=0} dx_1 +$$

$$+h\int\limits_{D_0}\partial_t u_0^- u_0^- dx + h\int\limits_{D_0}\partial_{x_2} u_0^- \partial_{x_2} u_0^- dx = h\int\limits_{D_0} f u_0^- dx. \tag{3.33}$$

Додамо (3.32) та (3.33). Використовуючи умови спряження для u_0^+ та u_0^- на I_0, маємо

$$(\partial_t u_0, u_0)_H + (u_0, u_0)_V = (f, u_0)_H. \tag{3.34}$$

Розглянемо функціональні простори

$$W(0,T) = \{v \in L^2(0,T;V(\Omega_1, D_0; I_l)),\quad \exists v' \in L^2(0,T;(V(\Omega_1, D_0; I_l))^*)\},$$

$$W_0(0,T) = \{v \in W(0,T):\quad v(\cdot,0) = 0\}.$$

Також визначимо наступні функціональні множини:

$$K_0 = \{v \in V(\Omega_1, D_0; I_l):\quad v \le 0 \quad \text{ì.ñ.â} \quad D_0\},$$

$$\mathcal{K}_0 = \{v \in W(0,T):\quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{äëÿìàéæåâñ³õ} \quad t \in [0,T]\},$$

$$\mathcal{K}_0^0 = \{v \in W_0(0,T):\quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{äëÿìàéæåâñ³õ} \quad t \in [0,T]\}.$$

Зрозуміло, що K_0 замкнена та опукла в $V(\Omega_1, D_0; I_l)$.

Тепер візьмемо довільну функцію φ з K_0 та домножимо перше рівняння задачі (3.30) на φ та проінтегруємо по Ω_0. Аналогічно як раніше, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_0}\partial_t u_0^+ \varphi dx + \int\limits_{\Omega_0}\nabla u_0^+ \cdot \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega_0} f\varphi dx - \int\limits_0^a \partial_{x_2} u_0^+ \,|_{x_2=0}\, \varphi\,|_{x_2=0}\, dx_1. \tag{3.35}$$

Домножимо рівняння (3.31) на φ та проінтегруємо по D_0. Оскільки $\varphi \le 0$, маємо

$$h\int\limits_{D_0}\partial_t u_0^- \varphi dx + h\int\limits_{D_0}\partial_{x_2} u_0^- \partial_{x_2}\varphi dx \ge h\int\limits_{D_0} f\varphi dx + h\int\limits_0^a \partial_{x_2} u_0^- \,|_{x_2=0}\, \varphi\,|_{x_2=0}\, dx_1. \tag{3.36}$$

Додамо (3.35) та (3.36) та використовуючи другу умову спряження на I_0, маємо

$$(\partial_t u_0, \varphi)_H + (u_0, \varphi)_V \ge (f, \varphi)_H. \tag{3.37}$$

Означення 3.3 *Узагальненим розв'язком задачі (3.30) -- (3.31) називається функція* $u_0 \in \mathsf{K}_0^0$*, яка задовольняє рівність*

$$\langle \partial_t u_0, u_0 \rangle_0 + (u_0, u_0)_V = (f, u_0)_H,$$

та нерівність

$$\langle \partial_t u_0, \varphi \rangle_0 + (u_0, \varphi)_V \geq (f, \varphi)_H$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Означення 3.4 *Узагальненим розв'язком задачі (3.30) -- (3.31) називається функція* $u_0 \in \mathsf{K}_0^0$*, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 + (u_0, \varphi - u_0)_V \geq (f, \varphi - u_0)_H \tag{3.38}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Аналогічно до доведення еквівалентності означень 2.1 та 2.2, можна показати еквівалентність означень 3.3 та 3.4. Наведемо ще одне означення.

Означення 3.5 *Узагальненим розв'язком задачі (3.30) -- (3.31) називається функція* $u_0 \in K_0^0$*, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 + (\varphi, \varphi - u_0)_V \geq (f, \varphi - u_0)_H \tag{3.39}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_0$*, або, що еквівалентно, наступну нерівність*

$$\int_0^T \langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 \, dt + \int_0^T (\varphi, \varphi - u_0)_V \, dt \geq \int_0^T (f, \varphi - u_0)_H \, dt \quad \forall \varphi \in K_0. \tag{3.40}$$

Щоб показати еквівалентність означень 3.4 та 3.5, додамо нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla(\varphi - u_0^+) \cdot \nabla(\varphi - u_0^+) dx + h \int_{D_0} \partial_{x_2}(\varphi - u_0^-) \partial_{x_2}(\varphi - u_0^-) dx \geq 0,$$

до нерівності (3.38) та отримаємо (3.39). Взявши $\varphi = u_0 + s(\psi - u_0)$ в (3.39), де ψ довільна функція з K_0 та $s \in [0,1]$, маємо

$$\langle \partial_t u_0, \psi - u_0 \rangle_0 + (u_0 + s(\psi - u_0), \psi - u_0)_V \geq (f, \psi - u_0)_H.$$

Переходячи до границі при $s \to 0$, отримаємо (3.38).

Розглянемо наступний функціонал

$$\int_0^T \langle F_0, v\rangle_0 \, dt := \int_0^T \Big(\int_{\Omega_0} f\, v dx + h \int_{D_0} f\, v dx \Big) dt, \quad v \in L^2(0,T;V).$$

Зрозуміло, що F_0 належить простору $L^2(0,T;V^*)$ та використовуючи (3.3) існує узагальнена похідна F_0' така, що

$$F_0' \in L^2(0,T;V^*) \quad \text{òà} \tag{3.41}$$

$$\int_0^T \langle F_0', v\rangle_0 \, dt = \int_0^T \Big(\int_{\Omega_0} f' v dx + h \int_{D_0} f' v dx \Big) dt, \quad v \in L^2(0,T;V).$$

Отже, всі умови (одна з них -- це включення (3.41)) теореми 1.5 виконуються для усередненої задачі (3.30) -- (3.31) в сенсі означення 3.4, і, як наслідок з цієї теореми, задача (3.30) -- (3.31) має єдиний узагальнений розв'язок u_0 такий, що

$$u_0, u_0' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)).$$

3.1.6 Доведення теореми збіжності

1. З апріорної оцінки (3.24) випливає, що

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_0))} \le C_0, \quad \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0 \times (0,T))} \le C_0, \quad \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(D_0))} \le C_0,$$

$$\|\partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(D_0))} \le C_0, \, i = 1,2, \quad \|\partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(D_0 \times (0,T))} \le C_0.$$

Тому ми можемо вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (яку знов позначимо через ε) таку, що

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{\varepsilon|_{\Omega_0}} & \xrightarrow{w} & u_0^+ & \text{â} \quad H^1(\Omega_0 \times (0,T)), \\ \tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & h u_0^- & \text{â} \quad L^2(D_0 \times (0,T)), \\ \partial_{x_1} \tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & \gamma_1 & \text{â} \quad L^2(D_0 \times (0,T)), \\ \widetilde{\partial_{x_2} u_\varepsilon} = \partial_{x_2} \tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & \gamma_2 & \text{â} \quad L^2(D_0 \times (0,T)), \\ \widetilde{\partial_t u_\varepsilon} = \partial_t \tilde{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & \gamma_3 & \text{â} \quad L^2(D_0 \times (0,T)), \end{array}\right\} \quad \text{ïðè } \varepsilon \to 0, \tag{3.42}$$

де u_0^+, u_0^-, γ_1, γ_2, γ_3 -- деякі функції, які будуть визначені далі.

Спочатку визначимо γ_2. Для довільної функції $\psi \in C_0^\infty(D_0)$ маємо

$$\int_{D_0} \partial_{x_2} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon \psi\, dx = \int_{D_0} \partial_{x_2} (\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon) \psi\, dx = -\int_{D_0} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon \partial_{x_2} \psi\, dx \quad \text{äëÿ ìàéæå âñ³õ} \quad t \in (0,T).$$

Переходячи до границі в цій рівності при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$\int_{D_0} \gamma_2 \psi\, dx = -h \int_{D_0} u_0^- \partial_{x_2} \psi\, dx \quad \text{äëÿ ìàéæå âñ³õ} \quad t \in (0,T), \tag{3.43}$$

звідки випливає, що $\gamma_2 = h\partial_{x_2} u_0^-$ м.с. на $D_0 \times (0,T)$.

Аналогічно визначимо γ_3. Легко переконатися, що

$$\int_0^T \int_{D_0} \partial_t \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon \psi\, dxdt = -\int_0^T \int_{D_0} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon \partial_t \psi\, dxdt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_0 \times (0,T)).$$

Переходячи до границі в цій рівності при $\varepsilon \to 0$, використовуючи другу та останню границі в (3.42), одержимо

$$\int_0^T \int_{D_0} \gamma_3 \psi\, dxdt = -h \int_0^T \int_{D_0} u_0^- \partial_t \psi\, dxdt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_0 \times (0,T)), \tag{3.44}$$

звідки випливає, що $\gamma_3 = h\partial_t u_0^-$ м. с. в $D_0 \times (0,T)$.

Тепер визначимо γ_1. Розглянемо функцію

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ \varepsilon Y_1\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi, & (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T), \end{cases} \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_0 \times (0,T)), \psi \ge 0,$$

де $Y_1(\xi) = -\xi + [\xi]$. Легко бачити, що $\Phi \in K_\varepsilon$ та

$$\nabla_x \Phi(x,t) = \left(-\psi + \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi, \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi\right), \qquad (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T).$$

Підставляючи Φ в (3.7) для розв'язку u_ε та беручи до уваги те, що $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$, маємо

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_t u_\varepsilon \psi dx + \int_{G_\varepsilon} \left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\psi + \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi\right) dx \ge$$

$$\geq \int_{G_\varepsilon} \varepsilon f Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi dx.$$

Використовуючи (3.24), отримаємо з попередньої нерівності наступну оцінку

$$\left| \int_{D_0\times(0,T)} \partial_{x_1} \overset{''}{u}_\varepsilon \psi \, dxdt \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon(\int_{G_\varepsilon\times(0,T)} |Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\psi - f\psi + \partial_t u_\varepsilon \psi)| dxdt) \leq$$

$$\leq \varepsilon c_1 \int_0^T \Big(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\nabla\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \|f\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} +$$

$$+ \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} \Big) dt \leq \varepsilon c_2 \|\psi\|_{L^2(0,T;H^1(D_0))},$$

звідки отримаємо в граничному переході (при $\varepsilon \to 0$)

$$\int_{D_0\times(0,T)} \gamma_1 \psi \, dxdt = 0 \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(D_0\times(0,T)), \quad \psi \geq 0. \tag{3.45}$$

Отже, $\gamma_1 = 0$ м. с. в $D_0 \times (0,T)$.

2. Покажемо, що сліди $u_0^+|_{I_0}$ and $u_0^-|_{I_0}$ рівні. Внаслідок компактності оператора сліду та першого співвідношення в (3.42) маємо

$$u_\varepsilon(x_1,0,t) \overset{s}{\to} u_0^+(x_1,0,t) \quad \text{â} \quad L^2(I_0) \quad \text{äëÿ ì.â.} \quad t\in(0,T) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon\to 0. \tag{3.46}$$

Розглянемо наступну рівність

$$\overset{''}{u}_\varepsilon(x_1,0,t) = \chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x_1,0,t) \quad (x_1,t)\in I_0\times(0,T), \tag{3.47}$$

де $\chi_h(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$, -- 1-періодична функція визначена на $[0,1]$ наступним чином:

$$\chi_h(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - \frac{1}{2}| \leq \frac{h}{2}, \\ 0, & \frac{h}{2} < |\xi - \frac{1}{2}| \leq 1. \end{cases}$$

Відомо, що $\chi_h\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\right)\overset{w}{\to} h \quad \text{â} \quad L^2(0,1) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon\to 0$. Використовуючи цей факт та (3.47), отримаємо для майже всіх $t\in(0,T)$

$$\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x_1,0,t)\overset{w}{\to} h\, u_0^{+}(x_1,0,t) \quad \text{â} \quad L^2(I_0) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon\to 0. \tag{3.48}$$

З іншої сторони

$$\int_0^a \overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x_1,0,t)\psi(x_1)dx_1 =$$

$$=\frac{1}{l}\int_{D_0}\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x,t)\psi(x_1)dx_1dx_2+\frac{1}{l}\int_{D_0}(x_2+l)\,\partial_{x_2}\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x,t)\psi(x_1)\,dx_1dx_2 \tag{3.49}$$

для майже всіх $t\in(0,T)$ та для довільної функції $\psi\in C_0^{\infty}(I_0)$. Переходячи до границі в (3.49) при $\varepsilon\to 0$, використовуючи (3.43), маємо

$$h\int_0^a u_0^{+}(x_1,0,t)\psi(x_1)\,dx_1 =$$

$$=\frac{1}{l}\int_{D_0} h u_0^{-}(x,\cdot)\psi(x_1)\,dx+\frac{1}{l}\int_{D_0}(x_2+l)h\partial_{x_2}u_0^{-}(x,t)\psi(x_1)\,dx$$

звідки

$$\int_0^a u_0^{+}(x_1,0,t)\psi(x_1)\,dx_1=\int_0^a u_0^{-}(x_1,0,t)\psi(x_1)\,dx_1 \quad \forall\psi\in C_0^{\infty}(I_0)$$

для майже всіх $t\in(0,T)$, тобто

$$u_0^{+}(x_1,0,t)=u_0^{-}(x_1,0,t) \quad \text{äëÿ ìàéæå âñ³õ} \quad x_1\in I_0 \quad \text{òà} \quad t\in(0,T).$$

3. В першому пункті ми по суті довели, що для майже всіх $x\in D_0$

$$\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x,\cdot)\overset{w}{\to} hu_0^{-}(x,\cdot) \quad \text{ñëàáêî â} \quad H^1(0,T) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon\to 0. \tag{3.50}$$

Оскільки $\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}|_{t=0}=0,$ границя (3.50) означає, що $u_0^{-}|_{t=0}=0$. Очевидно, що і $u_0^{+}|_{t=0}=0$ виконується. З (2.12) випливає, що для майже всіх $t\in(0,T)$ має місце наступна нерівність

$$0\le\int_{D_0}\overset{\prime\prime}{u}_{\varepsilon}(x,t)\phi(x)\,dx-\varepsilon\int_{G_\varepsilon}Y\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}(u_\varepsilon(x,t)\phi(x))dx \tag{3.51}$$

для довільної функції $\phi \in C_0^\infty(D_0)$ такої, що $\phi \le 0$ в D_0. Переходячи до границі в (3.51) при $\varepsilon \to 0$, отримаємо наступну нерівність

$$0 \le h \int_{D_0} u_0^-(x,t)\phi(x)\,dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(D_0),\ \phi \le 0,$$

яка означає, що $u_0^- \le 0$ м. с. в $D_0 \times (0,T)$. Отже, функція u_0 визначена в (3.29) належить множині K_0^0.

4. З (3.24) та першої границі в (3.42) випливає, що $u_\varepsilon(\cdot,T)|_{\Omega_0} \xrightarrow{s} u_0^+(\cdot,T)$ сильно в $L^2(\Omega_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Також з (3.24) випливає, що існує підпослідовність $\{\varepsilon\}' \subset \{\varepsilon\}$ (яку знов позначимо через ε) така, що

$$\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(\cdot,T) \xrightarrow{w} w_0^-(\cdot,T) \quad \text{ñëàáêî â } L^2(D_0), \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0.$$

Покажемо, що $w_0^-(x,T) = hu_0^-(x,T), x \in D_0$. Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ в наступній рівності

$$\int_0^T \int_{D_0} \partial_t \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,t)v(x)\,dxdt = \int_{D_0} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,T)v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(D_0),$$

ми отримаємо

$$h\int_0^T \int_{D_0} \partial_t u_0^-(x,t)v(x)\,dxdt = \int_{D_0} w_0^-(x,T)v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(D_0),$$

чи

$$h \int_{D_0} u_0^-(x,T)v(x)\,dx = \int_{D_0} w_0^-(x,T)v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(D_0).$$

Використовуючи слабку напівнеперервність норми в Гільбертовому просторі, маємо

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (\mathrm{P} u_\varepsilon(\cdot,T) \mathrm{P}^2_{L^2(\Omega_0)} + \mathrm{P} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(\cdot,T) \mathrm{P}^2_{L^2(D_0)}) \ge$$

$$\ge \mathrm{P} u_0^+(\cdot,T) \mathrm{P}^2_{L^2(\Omega_0)} + h \mathrm{P} u_0^-(\cdot,T) \mathrm{P}^2_{D_0} = \mathrm{P} u_0(\cdot,T) \mathrm{P}^2_H.$$

З цієї нерівності отримаємо

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon u_\varepsilon dxdt \ge \int_0^T(\partial_t u_0, u_0)_H\, dt. \tag{3.52}$$

5. Додамо нерівність

$$\int_{\Omega_0}|\nabla(\varphi-u_\varepsilon)|^2dx+\int_{G_\varepsilon}|\partial_{x_2}(\varphi-u_\varepsilon)|^2dx+\int_{G_\varepsilon}|\partial_{x_1}u_\varepsilon|^2dx\ge 0$$

до (3.8) та проінтегруємо по $(0,T)$. Тут $\varphi-$ довільна функція з наступної множини

$$K_0^1=\{\varphi\in C^1(\overline{\Omega_1}\times[0,T]):\varphi\le 0 \text{ íà } D_0,\ \varphi=0 \text{ íà } I_l \text{ äëÿâñ³õ } t\in[0,T]\}.$$

Використовуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))$, маємо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon(\varphi-u_\varepsilon)dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dxdt+\int_0^T\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_1}u_\varepsilon\partial_{x_1}\varphi dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_2}\varphi\partial_{x_2}(\varphi-u_\varepsilon)dxdt\ge\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f(\varphi-u_\varepsilon)dxdt,$$

яка може бути переписана в наступній формі

$$\int_0^T\int_{\Omega_0}\partial_t u_\varepsilon\varphi dxdt+\int_0^T\int_{D_0}\overset{''}{\partial_t u_\varepsilon}\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{D_0}\partial_{x_1}\overset{''}{u_\varepsilon}\partial_{x_1}\varphi dxdt+\int_0^T\int_{D_0}\chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)(\partial_{x_2}\varphi)^2dxdt-\int_0^T\int_{D_0}\partial_{x_2}\varphi\partial_{x_2}\overset{''}{u_\varepsilon}dxdt\ge$$

$$\ge\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon u_\varepsilon dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_0}f(\varphi-u_\varepsilon)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{D_0}\chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)f\varphi dxdt-\int_0^T\int_{D_0}f\overset{''}{u_\varepsilon}dxdt. \tag{3.53}$$

Переходячи до границі в (3.53) при $\varepsilon \to 0$ та використовуючи (3.52) та (3.42), маємо наступну інтегральну нерівність

$$\int_0^T\int_{\Omega_0}\partial_t u_0^+\varphi dxdt + h\int_0^T\int_{D_0}\partial_t u_0^-\varphi dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_0^+)\,dxdt$$

$$+h\int_0^T\int_{D_0}(\partial_{x_2}\varphi)^2\,dxdt - h\int_0^T\int_{D_0}\partial_{x_2}\varphi\partial_{x_2}u_0^-\,dxdt \ge \int_0^T(\partial_t u_0, u_0)_H\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_0} f(\varphi - u_0^+)\,dxdt + h\int_0^T\int_{D_0} f\varphi\,dxdt - h\int_0^T\int_{D_0} f u_0^-\,dxdt,$$

яка може бути записана наступним чином

$$\int_0^T(\partial_t u_0, \varphi - u_0)_H\,dt + \int_0^T(\varphi, \varphi - u_0)_V\,dt \ge \int_0^T(f, \varphi - u_0)_H\,dt \quad \forall\,\varphi\in K_1. \qquad (3.54)$$

Оскільки K_1 є щільною в K_0^0, то інтегральна нерівність (159) виконується для довільної функції $\varphi\in\mathrm{K}_0^0$, звідки разом із включенням $u_0\in K_0^0$ доведеним в третьому пункті випливає, що функція u_0 є узагальненим розв'язком усередненої задачі (3.30) -- (3.31) (див. означення 3.5).

Враховуючи єдиність розв'язку задачі (3.30) -- (3.31) зрозуміло, що всі міркування, описані вище мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яку ми обрали на початку доведення.

3. 2 Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.

3.2.1 Постановка задачі

В області Ω_ε (густе з'єднання Ω_ε типу $3:2:1$, яке розглядалося в 2.2.1) розглянемо наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} u'_\varepsilon(x,t) &= \Delta_x u_\varepsilon(x,t) + f(x,t), & (x,t)\in\Omega_\varepsilon\times(0,T), \\ u_\varepsilon(x,t) &= 0, & (x,t)\in\Gamma_\varepsilon\times(0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) &= 0, & (x,t)\in(\partial\Omega_\varepsilon\setminus(S_\varepsilon\cup\Gamma_\varepsilon))\times(0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &= 0, & x\in\Omega_\varepsilon\times\{t=0\}, \end{cases} \tag{3.55}$$

з однорідними умовами Сіньоріні на $S_\varepsilon\times(0,T)$

$$u_\varepsilon(x,t)\le 0,\quad \partial_\nu u_\varepsilon(x,t)\le 0,\quad u_\varepsilon(x,t)\partial_\nu u_\varepsilon(x,t)=0, \tag{3.56}$$

де $\partial_\nu = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ -- зовнішня нормальна похідна, $u'_\varepsilon := \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$.

Дана функція f належить простору $L^2(\Omega_1\times(0,T))$ та існує узагальнена похідна f' така, що

$$f'\in L^2(\Omega_1\times(0,T)), \tag{3.57}$$

де $\overline{\Omega_1}=\overline{\Omega_0}\cup\overline{\Omega^+}$, $\Omega^+=\Xi_0\times(0,h)$, $\Xi_0=\{x: x'=(x_1,x_2)\in(0,a)\times(0,a),\ x_3=0\}$. Будемо також використовувати позначення $\Xi_h=\{x:\ x'\in(0,a)\times(0,a),\ x_3=h\}$.

3.2.2 Різні означення узагальненого розв'язку та їх еквівалентність. Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі

Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ -- дужки спряження між простором $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)=\{u\in H^1(\Omega_\varepsilon): u|_{\Gamma_\varepsilon}=0\}$ та спряженим до нього $\left(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)\right)^*$. Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (3.55) -- (3.56). Домноживши рівняння задачі (3.55) на функцію u_ε, проінтегрувавши в Ω_ε та використавши крайові умови для u_ε, отримаємо таку рівність

$$\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, u_\varepsilon \, dx. \tag{3.58}$$

Розглянемо наступні функціональні простори

$$W^\varepsilon(0,T) = \{ v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon)), \quad \exists v' \in L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon))^*) \},$$

$$W_0^\varepsilon(0,T) = \{ v \in W^\varepsilon(0,T) : \quad v(\cdot,0) = 0 \}.$$

Зауваження 3.2 *З огляду на твердження 1.2 ([111], с. 106) простір* $W^\varepsilon(0,T)$ *вкладається в простір* $C([0,T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$, *тому рівність* $v(\cdot,0) = 0$ *має сенс.*

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_\varepsilon = \{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon) : \quad v|_{S_\varepsilon} \le 0 \quad \text{íà} \quad S_\varepsilon \},$$

$$\mathrm{K}_\varepsilon = \{ v \in W^\varepsilon(0,T) : \quad v(\cdot,t) \in K_\varepsilon \quad \text{äëÿ ìàéæå âñ³õ} \quad t \in (0,T) \},$$

$$\mathrm{K}_\varepsilon^0 = \{ v \in W_0^\varepsilon(0,T) : \quad v(\cdot,t) \in K_\varepsilon \quad \text{äëÿ ìàéæå âñ³õ} \quad t \in (0,T) \},$$

де $v|_S$ позначає слід функції v на поверхні S.

Очевидно, що K_ε -- замкнена та опукла множина в $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon)$.

Домножимо рівняння задачі (3.55) на довільну функцію $\varphi \in K_\varepsilon$ та проінтегруємо в Ω_ε. Аналогічно як це було зроблено раніше, використавши крайові умови, отримаємо

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \varphi \, dx + \int\limits_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \varphi \, d\sigma. \tag{3.59}$$

Оскільки $\partial_\nu u_\varepsilon \le 0$ та $\varphi \le 0$ м. с. на $S_\varepsilon \times (0,T)$, то

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \varphi \, d\sigma \ge 0. \tag{3.60}$$

Використовуючи (3.60), з рівності (3.59) маємо, що

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \varphi \, dx. \tag{3.61}$$

Означення 3.6 *Узагальненим розв'язком задачі (3.55) -- (3.56) називається функція* $u_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon^0$*, яка задовольняє рівність (3.58) та нерівність (3.61) для майже всіх* $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$.

Наведемо еквівалентне означення узагальненого розв'язку.

Означення 3.7 *Узагальненим розв'язком задачі* (3.55) -- (3.56) *називається функція* $u_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon^0$*, яка задовольняє нерівність*

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon)dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)dx \tag{3.62}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$*, або, що еквівалентно, наступну нерівність*

$$\int_0^T \langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon)dxdt \geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)dxdt \quad \forall \varphi \in K_\varepsilon. \tag{3.63}$$

Аналогічно як в розділі 2 можна показати еквівалентність означень 3.6 та 3.7.

Очевидно, що наступний функціонал

$$\int_0^T \langle F, v \rangle_\varepsilon dt := \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f v dxdt, \quad v \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)),$$

належить простору $L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*)$. Крім того, на підставі (3.57) існує узагальнена похідна F' така, що

$$F' \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*) \quad \text{òà} \tag{3.64}$$

$$\int_0^T \langle F', v \rangle_\varepsilon dt = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f' v dxdt, \quad v \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)).$$

Тепер легко переконатися, що всі умови (одна із них це є включення (3.64)) теореми 1.5 для задачі (3.55) -- (3.56) виконуються в сенсі означення 3.6, і, як наслідок з цієї теореми, задача (3.55) -- (3.56) має єдиний розв'язок u_ε такий, що

$$u_\varepsilon, u'_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

3.2.3 Апріорна оцінка

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та нерівність Коші $2ab \le \delta a^2 + \delta^{-1} b^2$ з $\delta > 0$ та довільними додатніми числами a та b, за допомогою (2.11) отримаємо з (3.58), що

$$\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \le c_0 \delta_1 \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_1 (1 + \delta_1^{-1}) \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Вибираючи δ_1 так, щоб $c_0 \delta_1 < \dfrac{1}{2}$, маємо

$$\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \le c_2 \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.65}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Інтегруючи (3.65) по $(0,t)$ та використовуючи співвідношення

$$\langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right),$$

виводимо

$$\max_{t \in (0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))} \le c_3 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}. \tag{3.66}$$

Оцінимо $\|u'_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))}$. Для цього застосуємо метод штрафу. Розглянемо таку наближену задачу:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^\delta (x,t) &= \Delta_x u_\varepsilon^\delta (x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon^\delta &= -\dfrac{1}{\delta} (u_\varepsilon^\delta)^+, & (x,t) \in S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta (x,t) &= 0, & (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon^\delta (x,t) &= 0, & (x,t) \in (\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega_0) \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta (x,0) &= 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.67}$$

де δ - довільне додатнє число,

$$(u_\varepsilon^\delta)^+ = \begin{cases} u_\varepsilon^\delta, & \text{ÿêùî } u_\varepsilon^\delta \ge 0; \\ 0, & \text{â ïðîòèëåæíîìó âèïàäêó.} \end{cases}$$

Нагадаємо, що функція $u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$ така, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))^*)$ -- узагальнений розв'язок (3.67), якщо $u_\varepsilon^\delta(\cdot,0)=0$ та виконується наступна інтегральна тотожність:

$$\langle \partial_t u_\varepsilon^\delta, \varphi\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^\delta \cdot \nabla\varphi dx + \frac{1}{\delta}\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \varphi d\sigma = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx \tag{3.68}$$

для довільної функції $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$ та для майже всіх $t\in(0,T)$.

Знову, внаслідок (3.57), маємо, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$. Тому можна взяти $\varphi = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ в (3.68) та отримати для всіх $t\in(0,T)$, що

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t u_\varepsilon^\delta(x,\tau)|^2\, dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta(x,t)|^2\, dx +$$

$$+\frac{1}{\delta}\int\limits_0^t\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+\partial_t u_\varepsilon^\delta d\sigma d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\,\partial_t u_\varepsilon^\delta dxd\tau. \tag{3.69}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^t\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+\partial_t u_\varepsilon^\delta d\sigma dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{S_\varepsilon} \partial_t\left((u_\varepsilon^\delta)^+\right)^2 d\sigma dt \geq 0,$$

то внаслідок (3.69) має місце наступна оцінка

$$\|\partial_t u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \leq C_1. \tag{3.70}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (3.68), маємо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon^\delta u_\varepsilon^\delta dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2 dx + \frac{1}{\delta}\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta d\sigma = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon^\delta dx \tag{3.71}$$

для майже всіх $t\in(0,T)$. Враховуючи те, що

$$\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta d\sigma \geq 0, \tag{3.72}$$

аналогічно як при доведенні оцінки (3.66), виводимо з (3.71)

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} \leq C_2. \tag{3.73}$$

Використовуючи оцінки (3.70) та (3.73), отримуємо

$$\|u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}\le C_3.$$

Тому, існує функція $w_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T))$ така, що

$$u_\varepsilon^\delta\xrightarrow{w}w_\varepsilon\quad \text{ñëàáêî}\quad H^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T)),\tag{3.74}$$

$$u_\varepsilon^\delta\xrightarrow{s}w_\varepsilon\quad \text{ñèëüíî}\quad L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))\tag{3.75}$$

при $\varepsilon\to 0$. Доведемо, що w_ε -- розв'язок задачі (3.55) -- (3.56).

Перейдемо до границі при $\delta\to 0$ в тотожності (3.68) та проінтегруємо її по $(0,T)$ з довільною тестовою функцією $\varphi=v\in K_\varepsilon$. Використовуючи те, що

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}(u_\varepsilon^\delta)^+ v\,d\sigma dt\le 0$$

та збіжності (3.74) і (3.75), виводимо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon v\,dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon\cdot\nabla v\,dxdt\ge\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f\,v\,dxdt\quad\forall\, v\in K_\varepsilon.\tag{3.76}$$

Взявши $\varphi=u_\varepsilon^\delta$ в (3.68) та враховуючи (3.72), виводимо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla w_\varepsilon|^2dxdt\le\liminf_{\delta\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon^\delta|^2dxdt\le\liminf_{\delta\to 0}\left\{\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f\,u_\varepsilon^\delta\,dxdt-\right.$$

$$\left.-\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon^\delta u_\varepsilon^\delta\,dxdt\right\}=\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f w_\varepsilon\,dxdt-\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon w_\varepsilon\,dxdt.$$

Отже, w_ε задовольняє нерівність

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon w_\varepsilon\,dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla w_\varepsilon|^2dxdt\le\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f\,w_\varepsilon\,dxdt.\tag{3.77}$$

Віднімаючи нерівність (3.77) від (3.76), маємо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t w_\varepsilon(v-w_\varepsilon)dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon\cdot\nabla(v-w_\varepsilon)dxdt\ge\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f(v-w_\varepsilon)dxdt\tag{3.78}$$

для довільної $v \in K_\varepsilon$. Отже, w_ε -- узагальнений розв'язок задачі (3.55) -- (3.56). Оскільки задача (3.55) -- (3.56) має єдиний розв'язок, то $w_\varepsilon = u_\varepsilon$ та $u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))$, $u'_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$.

З (3.66) та (3.70) випливає нерівність

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_\varepsilon))} + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_4. \tag{3.79}$$

Нашою метою є вивчення асимптотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (3.55) -- (3.56) при $\varepsilon \to 0$, тобто коли число тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

3.2.4 Формулювання основного результату та його обговорення

Позначимо через $\tilde{u}$ продовження нулем функції u на паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h) \times (0,T)$, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами при $\varepsilon \to 0$, а саме

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T), \\ 0, & (x,t) \in (\Omega^+ \setminus G_\varepsilon) \times (0,T). \end{cases} \tag{3.80}$$

Нехай

$$\zeta(x_3) = \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|}, \qquad \omega(x_3) = \left\{ \xi' \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < \rho^2(x_3) \right\},$$

де $|\omega(x_3)|$ -- площа $\omega(x_3)$, а $l_\omega(x_3)$ -- довжина $\partial\omega(x_3)$ для кожного фіксованого $x_3 \in [0,h]$.

Також визначимо характеристичну функцію

$$\chi_{G_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^+ \setminus G_\varepsilon. \end{cases}$$

Відомо (див. [89]), що

$$\chi_{G_\varepsilon} \xrightarrow{w} |\omega| \quad \text{слабко} \quad L^2(\Omega^+) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.81}$$

Теорема 3.2 *Послідовність розв'язків* u_ε *задачі (3.55) -- (3.56) задовольняє співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon\,|_{\Omega_0} & \overset{w}{\to} & u_0^- & \text{ñëàáêîâ} \quad H^1(\Omega_0\times(0,T)), \\ \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & |\,\omega(x_3)\,|u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), \\ \partial_{x_3}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & |\,\omega(x_3)\,|\partial_{x_3}u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), \\ \partial_{x_i}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & 0 & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), \quad (i=1,2) \\ \partial_t\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \overset{w}{\to} & |\,\omega(x_3)\,|\partial_t u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(\Omega^+\times(0,T)), \end{array}\right\} \tag{3.82}$$

при $\varepsilon\to 0$ та функція

$$u_0(x,t)=\begin{cases} u_0^-(x,t), & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T), \\ u_0^+(x,t), & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T) \end{cases} \tag{3.83}$$

є єдиним узагальненим розв'язком задачі (3.84) -- (3.85)

$$\begin{cases} \partial_t u_0^-(x,t)-\Delta_x u_0^-(x,t) & = f(x,t), & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T), \\ u_0^-(x',0,t) & = u_0^+(x',0,t), & (x',0,t)\in\Xi_0\times(0,T), \\ \partial_{x_3}u_0^-(x',0,t) & =|\,\omega(0)|\partial_{x_3}u_0^+(x',0,t), & (x',0,t)\in\Xi_0\times(0,T), \\ \partial_\nu u_0^-(x,t) & = 0, & (x,t)\in(\partial\Omega_0\setminus\Xi_0)\times(0,T), \\ u_0^+(x',h,t) & = 0, & (x',h,t)\in\Xi_h\times(0,T), \\ u_0(x,0,t) & = 0, & x\in\Omega_1 \end{cases}$$

(3.84)

$$\begin{cases} |\,\omega(x_3)\,|\partial_t u_0^+(x,t)-\partial_{x_3}(|\,\omega(x)_3\,| \quad \partial_{x_3}u_0^+(x,t))\le|\,\omega(x_3)\,|\,f(x,t), \\ u_0^+(x,t) \qquad\qquad\qquad\qquad \le 0, \\ u_0^+(-|\,\omega(x_3)\,|\partial_t u_0^+ +\partial_{x_3}(|\,\omega(x_3)\,| \quad \partial_{x_3}u_0^+)+|\,\omega(x_3)\,|\,f)=0, \end{cases} \qquad (x,t)\in\Omega^+\times(0,T),$$

(3.85)

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (3.55) -- (3.56).

3.2.5 Різні означення узагальненого розв'язку усередненої задачі та їх еквівалентність. Існування та єдиність узагальненого розв'язку усередненої задачі

Розглянемо частково анізотропний простір Соболєва

$$\mathrm{H}(\Omega_1;\Xi_h)=\{u\in L^2(\Omega_1)\,|\quad \partial_{x_3}u\in L^2(\Omega_1), \quad u\,|_{\Omega_0}\in H^1(\Omega_0), \quad u\,|_{\Xi_h}=0\}.$$

З властивостей анізотропних просторів Соболєва (див. [113]) випливає, що сліди обмежень $u^+ := u|_{\Omega^+}$ та $u^- := u|_{\Omega_0}$ на Ξ_0 рівні. Крім того, оскільки сліди функцій з $H(\Omega_1;\Xi_h)$ дорівнюють нулю на Ξ_h, існує стала C_0 така, що

$$\int_{\Omega_1} u^2\,dx \le C_0\Big(\int_{\Omega_0} |\nabla u^-|^2\,dx + \int_{\Omega^+} |\partial_{x_3} u^+|^2\,dx\Big) \quad \text{äëÿ âñ³õ}\, u \in \mathsf{H}(\Omega_1;\Xi_h).$$

В просторі $\mathsf{H}(\Omega_1;\Xi_h)$ введемо норму $\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}_H$, що породжена скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathsf{H}} = \int_{\Omega_0} \nabla u^- \cdot \nabla v^-\,dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\,\partial_{x_3} u^+ \partial_{x_3} v^+\,dx, \quad u,v \in \mathsf{H}(\Omega_1;\Xi_h). \qquad (3.86)$$

Також розглянемо простір $V(\Omega_1) = L^2(\Omega_1)$ із скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathsf{V}} = \int_{\Omega_0} uv\,dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\,uv\,dx.$$

Очевидно, що вкладення $H(\Omega_1;\Xi_h) \subset V(\Omega_1)$ щільне та неперервне. Тому можна розглянути трійку просторів $H \subset V \subset H^*$ з відповідними дужками спряження $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ між H та H^*, де $H := H(\Omega_1;\Xi_h)$, $V := V(\Omega_1)$, та $H^* := \left(H(\Omega_1;\Xi_h)\right)^*$.

Припустимо, що існує гладка функція u_0, що задовольняє співвідношення усередненої задачі (3.84) -- (3.85). Домноживши рівняння задачі (3.84) на функцію u_0^-, проінтегрувавши по Ω_0 та використавши крайову умову на $\partial\Omega_0 \setminus \Xi_0$, знаходимо

$$\int_{\Omega_0} \partial_t u_0^- u_0^-\,dx + \int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^-\,dx = \int_{\Omega_0} f\,u_0^-\,dx - \int_{\Xi_0} (\partial_{x_3} u_0^- u_0^-)\Big|_{x_3=0}\,dx'. \qquad (3.87)$$

Проінтегрувавши рівняння задачі (3.85) в Ω^+ та використавши крайову умову на Ξ_h, маємо

$$-\int_{\Xi_0} (|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3} u_0^+ u_0^+)\Big|_{x_3=0}\,dx' + \int_{\Omega_+} |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+ u_0^+\,dx +$$

$$+\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} u_0^+ dx = \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f u_0^+ dx. \tag{3.88}$$

Додамо (3.87) та (3.88). Використовуючи умови спряження для u_0^+ та u_0^-, отримаємо

$$(\partial_t u_0, u_0)_{\mathsf{V}} + (u_0, u_0)_{\mathsf{H}} = (f, u_0)_{\mathsf{V}}. \tag{3.89}$$

Розглянемо функціональні простори

$$W(0,T) = \{v \in L^2(0,T;H), \exists v' \in L^2(0,T;H^*)\},$$

$$W_0(0,T) = \{v \in W(0,T): \quad v(\cdot,0) = 0\}.$$

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_0 = \{v \in H: \quad v \le 0 \quad \text{ì. ñ.íà} \quad \Omega^+\},$$

$$\mathsf{K}_0 = \{v \in W(0,T): \quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{äëÿìàéæåâñ³õ} \quad t \in (0,T)\},$$

$$\mathsf{K}_0^0 = \{v \in W_0(0,T): \quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{äëÿìàéæåâñ³õ} \quad t \in (0,T)\}.$$

Очевидно, шо K_0 -- замкнена та опукла в $\mathsf{H}(\Omega_1;\Xi_h)$.

Домножимо перше рівняння задачі (3.84) на φ з K_0 та проінтегруємо в Ω_0. Аналогічно, як описано вище, маємо

$$\int_{\Omega_0} \partial_t u_0^- \varphi dx + \int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_0} f \varphi dx - \int_{\Xi_0} (\partial_{x_3} u_0^- \varphi)\Big|_{x_3=0} dx', \tag{3.90}$$

Першу нерівність (3.85) домножимо на φ та проінтегруємо по Ω^+. Оскільки $\varphi \le 0$, виводимо

$$\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_t u_0^+ \varphi dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \partial_{x_3} \varphi dx \ge$$

$$\ge \int_{\Xi_0} (|\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ \varphi)\Big|_{x_3=0} dx' + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f \varphi dx. \tag{3.91}$$

Додавши (3.90) та (3.91) та використавши другу умову спряження на Ξ_h, маємо

$$(\partial_t u_0, \varphi)_{\mathsf{V}} + (u_0, \varphi)_{\mathsf{H}} \ge (f, \varphi)_{\mathsf{V}}. \tag{3.92}$$

Отже, розв'язок усередненої задачі (3.84) -- (3.85) задовольняє співвідношення (3.89) та (3.92). Використовуючи їх, можна дати наступні означення узагальненого розв'язку задачі (3.84) -- (3.85).

Означення 3.8 *Узагальненим розв'язком задачі (3.84) -- (3.85) називається функція* $u_0 \in \mathsf{K}_0^0$*, яка задовольняє рівність*

$$\langle \partial_t u_0, u_0 \rangle_0 + (u_0, u_0)_{\mathsf{H}} = (f, u_0)_{\mathsf{V}},$$

та нерівність

$$\langle \partial_t u_0, \varphi \rangle_0 + (u_0, \varphi)_{\mathsf{H}} \geq (f, \varphi)_{\mathsf{V}}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Означення 3.9 *Узагальненим розв'язком задачі (3.84) -- (3.85) називається функція* $u_0 \in \mathsf{K}_0^0$*, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 + (u_0, \varphi - u_0)_{\mathsf{H}} \geq (f, \varphi - u_0)_{\mathsf{V}} \tag{3.93}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Можна показати еквівалентність означень 3.8 та 3.9, як це показано в розділі 2. Наведемо ще одне означення.

Означення 3.10 *Узагальненим розв'язком задачі (3.84) -- (3.85) називається функція* $u_0 \in K_0^0$*, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 + (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathsf{H}} \geq (f, \varphi - u_0)_{\mathsf{V}} \tag{3.94}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$ або, що еквівалентно, наступну нерівність

$$\int_0^T \langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 dt + \int_0^T (\varphi, \varphi - u_0)_H \, dt \geq \int_0^T (f, \varphi - u_0)_V \, dt \quad \forall \varphi \in K_0. \tag{3.95}$$

Щоб показати еквівалентність означень 3.9 та 3.10, додамо нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla(\varphi - u_0^-) \cdot \nabla(\varphi - u_0^-) dx + \int_{\Omega^+} |\,\omega(x_3)\,| \partial_{x_3}(\varphi - u_0^+) \partial_{x_3}(\varphi - u_0^+) dx \geq 0$$

до нерівності (3.93) та отримаємо (3.94).

Взявши $\varphi = u_0 + s(\psi - u_0)$ в нерівності (3.94), де ψ довільна функція з K_0 та $s \in [0,1]$, маємо

$$\langle \partial_t u_0, \psi - u_0 \rangle_0 + (u_0 + s(\psi - u_0), \psi - u_0)_{\mathrm{H}} \ge (f, \psi - u_0)_{\mathrm{V}}.$$

Перейшовши до границі при $s \to 0$, одержимо (3.93).

Розглянемо наступний функціонал

$$\int_0^T \langle F_0, v \rangle_0 \, dt := \int_0^T \Big(\int_{\Omega_0} f v dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \, f v dx \Big) dt, \quad v \in L^2(0,T;H).$$

Очевидно, що F_0 належить простору $L^2(0,T;H^*)$. Завдяки (3.57) існує узагальнена похідна F_0' така, що

$$F_0' \in L^2(0,T;H^*) \quad \text{та} \tag{3.96}$$

$$\int_0^T \langle F_0', v \rangle_0 \, dt = \int_0^T \Big(\int_{\Omega_0} f' v dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \, f' v dx \Big) dt, \quad v \in L^2(0,T;H).$$

Отже, всі умови (одна з них -- це включення (3.96)) теореми 1.5 виконуються для усередненої задачі (3.84) -- (3.85) в сенсі означення 3.9 і, як наслідок з цієї теореми, задача (3.84) -- (3.85) має єдиний узагальнений розвязок u_0, такий що

$$u_0, u_0' \in L^2(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)).$$

3.2.6 Доведення теореми збіжності

1. Використовуючи (3.79), маємо

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_0))} \le C_0, \quad \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0 \times (0,T))} \le C_0, \quad \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^+))} \le C_0,$$

$$\|\partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^+))} \le C_0, \ i = 1,2,3, \quad \|\partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^+ \times (0,T))} \le C_0.$$

Тому можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо ε) таку, що

$$
\left.\begin{array}{llll}
u_\varepsilon|_{\Omega_0} & \xrightarrow{w} & u_0^- & \text{â} \quad H^1(\Omega_0\times(0,T)), \\
\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & |\omega(x_3)|(|\omega(x_3)|^{-1}u) =: |\omega|u_0^+ & \text{â} \quad L^2(\Omega^+\times(0,T)), \\
\partial_{x_i}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & \gamma_i & \text{â} \quad L^2(\Omega^+\times(0,T)), \\
\partial_t\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon & \xrightarrow{w} & \gamma_4 & \text{â} \quad L^2(\Omega^+\times(0,T)),
\end{array}\right\} \tag{3.97}
$$

при $\varepsilon\to 0$, де $i=1,2,3$, а u_0^-, u_0^+, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 -- деякі функції, які будуть визначені згодом.

Спочатку визначимо γ_3. Використовуючи (2.55), для довільної функції $\psi\in C_0^\infty(\Omega^+)$ маємо:

$$
\int_{\Omega^+}\partial_{x_3}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon\psi\,dx = \int_{G_\varepsilon}\partial_{x_3}u_\varepsilon\psi\,dx = -\int_{G_\varepsilon}u_\varepsilon\partial_{x_3}\psi\,dx - \varepsilon\int_{S_\varepsilon}\frac{\rho'(x_3)u_\varepsilon\psi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\rho'(x_3)|^2}}d\sigma_x =
$$

$$
= -\int_{\Omega^+}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon\partial_{x_3}\psi\,dx - \int_{\Omega^+}\rho'(x_3)\zeta(x_3)\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon\psi\,dx +
$$

$$
+\varepsilon\int_{G_\varepsilon}\rho'(x_3)\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\Big|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(u_\varepsilon\psi)dx \quad \text{äëÿ ì.â.} \quad t\in(0,T). \tag{3.98}
$$

Використовуючи (2.58) та (3.79), перейдемо до границі в даній тотожності при $\varepsilon\to 0$ та отримаємо

$$
\int_{\Omega^+}\gamma_3\psi\,dx = -\int_{\Omega^+}(|\omega(x_3)|u_0^+\partial_{x_3}\psi\,dx + |\omega(x_3)|'u_0^+\psi)dx \quad \text{äëÿ ì.â.} \quad t\in(0,T), \tag{3.99}
$$

звідки маємо, що існує узагальнена похідна $\partial_{x_3}u_0^+$ та $\gamma_3 = |\omega(x_3)|\partial_{x_3}u_0^+$ м. с. в $\Omega^+\times(0,T)$.

Аналогічно визначимо γ_4. Легко переконатися, що

$$
\int_0^T\int_{\Omega^+}\partial_t\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon\psi\,dxdt = -\int_0^T\int_{\Omega^+}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon\partial_t\psi\,dxdt \quad \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega^+\times(0,T)).
$$

Перейдемо до границі в даній тотожності, використовуючи другу та останню границю в (3.97), одержимо

$$\int_0^T\int_{\Omega^+}\gamma_4\psi\,dxdt = -\int_0^T\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,u_0^-\partial_t\psi\,dxdt \quad \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega^+\times(0,T)), \qquad (3.100)$$

звідки випливає, що $\gamma_4 = |\,\omega(x_3)\,|\,\partial_t u_0^-$ м. с. в $\Omega^+\times(0,T)$.

Тепер визначимо $\gamma_i, i=1,2$. Розглянемо функції

$$Y_i(\xi_i) = -\xi_i + [\xi_i], \quad i=1,2 \qquad (3.101)$$

де $[t]$ -- ціла частина t. За допомогою цих функцій виберемо наступні тестові функції:

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T), \\ \varepsilon Y_i\left(\dfrac{x_i}{\varepsilon}\right)\psi(x,t), & (x,t)\in G_\varepsilon\times(0,T), \quad i=1,2, \end{cases}$$

для довільної $\psi\in C_0^\infty(\Omega^+\times(0,T)), \psi\ge 0$. Оскільки $Y_i\le 0$ та $\psi\ge 0$, $\Phi_i\in K_\varepsilon, i=1,2$. Легко переконатися, що

$$\nabla\Phi_1 = \left(-\psi+\varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi, \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi, \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}\psi\right),$$

$$\nabla\Phi_2 = \left(\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\psi, -\psi+\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\psi, \varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}\psi\right),$$

де $(x,t)\in G_\varepsilon\times(0,T)$. Підставляючи Φ_i, i=1,2 в нерівність (166) для розв'язку u_ε та враховуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))$, одержимо

$$\varepsilon\int_{G_\varepsilon} Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_t u_\varepsilon\psi\,dx + \int_{G_\varepsilon}\left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\psi + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)dx \ge \int_{G_\varepsilon}\varepsilon f Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right)\psi\,dx, \quad i=1,2.$$

За допомогою (3.79), з попередньої нерівності виводимо нерівність

$$
\left| \int\limits_{\Omega^+\times(0,T)} \partial_{x_i} \widetilde{u}_\varepsilon \, \psi \, dxdt \right| \le \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon\times(0,T)} \left| Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \right| \left(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi - f\psi + \partial_t u_\varepsilon \psi \right) dxdt \le
$$

$$
\le \varepsilon c_1 \int\limits_0^T \Big(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\nabla \psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \|f\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} +
$$

$$
+ \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} \Big) dt \le \varepsilon c_2 \|\psi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega^+))}, \quad i = 1,2,
$$

звідки, перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$, одержимо

$$
\int\limits_{\Omega^+\times(0,T)} \gamma_i \psi \, dxdt = 0 \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)), \quad \psi \ge 0. \qquad (3.102)
$$

З (3.102) отримаємо, що $\gamma_i = 0$, i=1,2 м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

2. Покажемо, що сліди $u_0^+|_{\Xi_0}$ та $u_0^-|_{\Xi_0}$ рівні. За допомогою неперервності оператору сліду, компактного вкладення $H^{1/2}(\Xi_0) \subset L^2(\Xi_0)$ та першого співвідношення в (3.97), маємо

$$
u_\varepsilon(x',0,t) \xrightarrow{s} u_0^-(x',0,t) \quad \text{в} \quad L^2(\Xi_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{для м.в.} \quad t \in (0,T). \qquad (3.103)
$$

Розглянемо рівність

$$
\widetilde{u}_\varepsilon(x',0,t) = \chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x',0,t) \quad \text{для м.в.} \ (x',0,t) \in \Xi_0 \times (0,T), \qquad (3.104)
$$

де $\chi_{\omega_0}(\xi')$, $\xi' \in \mathbb{R}^2$, -- 1-періодична функція визначена на квадраті Ξ_0 наступним чином

$$
\chi_{\omega_0}(\xi') = \begin{cases} 1, & \xi' \in \overline{\omega(0)}, \\ 0, & [0,1]\times[0,1] \setminus \overline{\omega(0)}. \end{cases}
$$

Відомо, що $\chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{w} |\omega(0)|$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Використовуючи цей факт та (3.103), отримаємо, що права частина (3.104) збігається до $|\omega(0)| u_0^-$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon \to 0$.

З другого боку, за допомогою (2.55) маємо

$$\int\limits_{\Xi_0} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x',0,t)\psi(x')\,dx' = \frac{1}{h}\Bigg(\int\limits_{\Omega^+} \overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,t)\psi(x')\,dx +$$

$$\int\limits_{\Omega^+}(x_3-h)\partial_{x_3}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,t)\psi(x')\,dx + \int\limits_{\Omega^+}\zeta(x_3)\rho'(x_3)(x_3-h)\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon\psi(x')dx$$

$$+\varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon}\rho'(x_3)(x_3-h)\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\ \Big|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(u_\varepsilon\psi)dx\Bigg) \tag{3.105}$$

для майже всіх $t\in(0,T)$ та для довільної функції $\psi\in C_0^\infty(\Xi_0)$. Використовуючи результати збіжності, отримані вище, та переходячи до границі в (210) при $\varepsilon\to 0$, отримаємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Xi_0}|\,\omega(0)|\quad u_0^-(x',0,t)\psi(x')dx &= \frac{1}{h}\Bigg(\int\limits_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|u_0^+(x,t)\psi(x')dx \\
&+\int\limits_{\Omega^+}(x_3-h)\,|\,\omega(x_3)\,|\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\psi\,dx \\
&+\int\limits_{\Omega^+}(x_3-h)\zeta(x_3)\rho'(x_3)|\,\omega(x_3)\,|u_0^+(x,t)\psi(x')dx\Bigg) \\
&=\frac{1}{h}\int\limits_{\Omega^+}(|\,\omega(x_3)\,|u_0^+\psi(x')+(x_3-h)\psi(x')\partial_{x_3}(|\,\omega(x_3)\,|u_0^+(x,t)))dx \\
&=\int\limits_{\Xi_0}|\,\omega(0)|u_0^+(x',0,t)\psi(x')dx
\end{aligned}$$

для всіх $\psi\in C_0^\infty(\Xi_0)$ та для майже всіх $t\in(0,T)$, звідки

$$u_0^+(x',0,t)=u_0^-(x',0,t)\quad \text{äëÿ ìàéæå âñ³õ}\quad x'\in\Xi_0\quad \text{òà}\quad t\in(0,T).$$

3. В першому пункті фактично доведено, що для майже всіх $x\in\Omega^+$

$$\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,\cdot)\xrightarrow{w}|\,\omega\,|u_0^+(x,\cdot)\quad \text{ñëàáêî â}\ \ H^1(0,T)\quad \text{ïðè}\ \ \varepsilon\to 0. \tag{3.106}$$

Оскільки $\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon|_{t=0}=0,$ границя (3.106) означає, що $u_0^+|_{t=0}=0$. Очевидно, що і $u_0^-|_{t=0}=0$.

З (2.55) маємо, що для майже всіх $t\in(0,T)$ виконується наступна нерівність

$$0\le \int_{\Omega^+}\zeta(x_3)\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,t)\phi(x)\,dx+\varepsilon\int_{G_\varepsilon}\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(u_\varepsilon(x,t)\phi(x))dx \qquad (3.107)$$

для всіх $\phi\in C_0^\infty(\Omega^+)$ таких, що $\phi\le 0$ в Ω^+. Переходячи до границі в (3.107) при $\varepsilon\to 0$, отримаємо

$$0\le \int_{\Omega^+}\zeta(x_3)u_0^+(x,t)\phi(x)\,dx \qquad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega^+),\ \phi\le 0,$$

яка означає, що $u_0^+\le 0$ м. с. в $\Omega^+\times(0,T)$.

Отже, функція u_0 визначена в (3.83) належить до множини K_0^0.

4. З (3.79) та першої границі (3.97) виводимо, що $u_\varepsilon(\cdot,T)|_{\Omega_0}\overset{s}{\to}u_0^-(\cdot,T)$ сильно в $L^2(\Omega_0)$ при $\varepsilon\to 0$. Також з (3.79) випливає, що можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon\}'\subset\{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо через ε) таку, що

$$\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(\cdot,T)\overset{w}{\to}w_0^+(\cdot,T) \quad \text{ñëàáî â}\ L^2(\Omega^+) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon\to 0.$$

Покажемо, що $w_0^+(x,T)=|\omega(x_3)|u_0^+(x,T),\, x\in\Omega^+$. Перейшовши до границі при $\varepsilon\to 0$ в наступній тотожності

$$\int_0^T\int_{\Omega^+}\partial_t\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,t)v(x)dxdt=\int_{\Omega^+}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon(x,T)v(x)dx \quad \forall v\in L^2(\Omega^+),$$

маємо

$$\int_0^T\int_{\Omega^+}|\omega(x_3)|\partial_t u_0^+(x,t)v(x)dxdt=\int_{\Omega^+}w_0^+(x,T)v(x)dx \quad \forall v\in L^2(\Omega^+),$$

або

$$\int_{\Omega^+}|\omega(x_3)|u_0^+(x,T)v(x)dx=\int_{\Omega+}w_0^+(x,T)v(x)dx \quad \forall v\in L^2(\Omega^+).$$

Використовуючи слабку напівнеперервність норми в гільбертовому просторі, маємо

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\|u_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega_0)}+\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega^+)}\right)\geq$$

$$\geq\|u_0^-(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega_0)}+\||\omega|\,u_0^+(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega^+)}=\|u_0(\cdot,T)\|^2_V .$$

З цієї нерівності отримаємо

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon u_\varepsilon\,dxdt\geq\int_0^T(\partial_t u_0,u_0)_V\,dt. \tag{3.108}$$

5. Додамо нерівність

$$\int_{\Omega_0}|\nabla(\varphi-u_\varepsilon)|^2dx+\int_{G_\varepsilon}|\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)|^2dx+\int_{G_\varepsilon}|\partial_{x_2}u_\varepsilon|^2dx+\int_{G_\varepsilon}|\partial_{x_1}u_\varepsilon|^2dx\geq 0$$

до (3.62) та проінтегруємо її по $(0,T)$. Тут φ -- довільна функція з наступної множини

$$K_0^1=\left\{\varphi\in C^1(\overline{\Omega_1}\times[0,T]):\ \varphi\leq 0\ \text{на}\ \Omega^+,\ \varphi=0\ \text{на}\ \Xi_h\ \ \forall t\in[0,T]\right\}.$$

Використовуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))$, маємо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon(\varphi-u_\varepsilon)dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dxdt+\int_0^T\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_1}u_\varepsilon\partial_{x_1}\varphi dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_2}u_\varepsilon\partial_{x_2}\varphi dxdt+\int_0^T\int_{G_\varepsilon}\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)dxdt\geq\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f(\varphi-u_\varepsilon)dxdt, \tag{3.109}$$

яка може бути переписана у наступній формі

$$\int_0^T\int_{\Omega_0}\partial_t u_\varepsilon\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\Omega^+}\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\,\varphi dxdt-\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon u_\varepsilon dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)\,dxdt+\int_0^T\int_{\Omega^+}\partial_{x_1}\tilde{u}_\varepsilon\partial_{x_1}\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\Omega^+}\partial_{x_2}\tilde{u}_\varepsilon\partial_{x_2}\varphi dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega^+}\chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}^2\varphi dxdt-\int_0^T\int_{\Omega^+}\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon dxdt\geq$$

$$\geq\int_0^T\int_{\Omega_0}f(\varphi-u_\varepsilon)\,dxdt+\int_0^T\int_{\Omega^+}\chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)f\varphi\,dxdt-\int_0^T\int_{\Omega^+}f\,\overset{\prime\prime}{u}_\varepsilon dxdt. \qquad (3.110)$$

Переходячи до границі в (3.110) при $\varepsilon\to 0$ та використовуючи (3.108) та (3.97), отримаємо таку інтегральну нерівність

$$\int_0^T\int_{\Omega_0}\partial_t u_0^-\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,\partial_t u_0^+\varphi dxdt-\int_0^T(\partial_t u_0 u_0)_V\,dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_0}\nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_0^-)\,dxdt+\int_0^T\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,\partial_{x_3}^2\varphi dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,\partial_{x_3}\varphi\partial_{x_3}u_0^+\,dxdt\geq\int_0^T\int_{\Omega_0}f(\varphi-u_0^-)\,dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,f\varphi\,dxdt-\int_0^T\int_{\Omega^+}|\,\omega(x_3)\,|\,fu_0^+\,dxdt. \qquad (3.111)$$

Нерівність (3.111) може бути переписана у вигляді

$$\int_0^T(\partial_t u_0,\varphi-u_0)_V\,dt+\int_0^T(\varphi,\varphi-u_0)_H\,dt\geq\int_0^T(f,\varphi-u_0)_V\,dt\quad\forall\varphi\in K_0^1. \qquad (3.112)$$

Оскільки множина K_0^1 щільна в K_0, інтегральна нерівність (3.112) виконується для всіх $\varphi\in\mathrm{K}_0$. Разом з включенням $u_0\in K_0^0$, яке доведене в пункті 3, це означає, що функція u_0 є узагальненим розв'язком усередненої задачі (3.84) -- (3.85) (див. означення 3.10).

Враховуючи єдиність розв'язку задачі (3.84) -- (3.85), зрозуміло, що всі міркування, описані вище, мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яку було обрано на початку доведення. Отже, теорему 4.2 доведено.

Висновки до розділу 3

В цьому розділі досліджено асимптотичну поведінку узагальнених розв'язків параболічних варіаційних нерівностей в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1. Ці розв'язки є узагальненими розв'язками відповідних крайових задач Сіньоріні (3.1) -- (3.2), (3.55) -- (3.56). Для отримання рівномірної оцінки для $\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}$ відносно параметра ε використовувався метод штрафу. Як було показано в [67], [68] для усереднення параболічних задач в перфорованих областях потрібно вимагати додаткові припущення на початкові умови параболічної задачі (див. також [110]). Подібна ситуація зберігається для параболічних задач в густих з’єднаннях. Тому припускалося, що функція $f(x,t)$ належить простору $L^2(\Omega_1\times(0,T))$ та існує узагальнена похідна f' така, що

$$f'\in L^2(\Omega_1\times(0,T)), \tag{3.113}$$

де Ω_1 – об'єднання тіла з'єднання та прямокутника, що заповнюється тонкими стержнями в граничному переході, або паралелепіпеда, що заповнюється тонкими циліндрами в граничному переході, для задач в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 відповідно. Здійснено перехід до границі в варіаційній нерівності (3.8), що відповідає вихідній задачі (3.1) -- (3.2), та отримано варіаційну нерівність (3.54), що відповідає усередненій задачі (3.30) -- (3.31) для густого з'єднання типу 2:1:1. Для з'єднання типу 3:2:1 здійснено перехід до границі в варіаційній нерівності (3.62), що відповідає вихідній задачі (3.55) -- (3.56), та отримано варіаційну нерівність (3.112), що відповідає усередненій задачі (3.84) -- (3.85).

Основним результатом цього розділу є доведення теорем збіжності послідовності розв'язків вихідних задач до розв'язків усереднених задач.

З отриманих результатів випливає, що усереднені задачі є адекватними моделями задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях. Цей факт дає можливість використовувати усереднені задачі, які є набагато простішими, замість вихідних задач в різних прикладних задачах природознавства.

Результатати третього розділу опубліковано в статтях [29],[97] та доповідалися на конференціях [38], [105], а також наукових семінарах кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи математичної фізики" та навчально-науковому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника "Прикладний нелінійний аналіз".

РОЗДІЛ 4

Усереднення квазілінійних нерівностей в багаторівневому густому з'єднанні

У даному розділі розглядається квазілінійна еліптична крайова задача в багаторівневому густому з'єднанні, яке є об'єднанням деякої області (тіла з'єднання) та великої кількості тонких циліндрів. Тонкі циліндри поділені на m класів в залежності від їх геометричних характеристик та крайових умов, які задаються на бічних поверхнях циліндрів. Крім того, циліндри кожного класу ε-періодично чергуються вздовж деякої поверхні на межі тіла густого з'єднання. На бічних поверхнях тонких циліндрів задані нелінійні граничні умови типу Сіньоріні, в яких введено спеціальні коефіцієнти збурення $\{\varepsilon^{\alpha_k}\}_{k=1}^{m}$.

Досліджується асимптотична поведінка розв'язку такої задачі при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких циліндрів необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля, а також вплив параметрів збурення $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ на поведінку розв'язків.

4.1 Постановка задачі

Нехай B -- об'єднання скінченної кількості плоских однозв'язних областей $B_1,\dots,B_m$, що не перетинаються та не дотикаються. Крім того, $\partial B_k \in C^\infty, k=1,\dots,m$ та множина B строго розміщується в квадраті $\Omega = \{\xi = (\xi_1,\xi_2) : 0<\xi_1<1, 0<\xi_2<1\}$, тобто $B = \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \Omega$.

Розглянемо модельне багаторівневе густе з'єднання Ω_ε типу $3:2:1$ (Рис. 4.1), яке складається з області

$$\Omega_0 = \{x \in R^3 : x' = (x_1,x_2) \in Q = (0,a)\times(0,a), \quad 0 < x_3 < \gamma(x')\},$$

де $\gamma \in C^1(\overline{Q})$ та $\min_{x' \in \overline{Q}} \gamma(x') = \gamma_0 > 0$, та великої кількості тонких циліндрів

$$G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{m} G_\varepsilon(k),$$

які розділені на m класів:

$$G_\varepsilon(k) = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} \left\{ x : \left(\frac{x_1}{\varepsilon} - i, \frac{x_2}{\varepsilon} - j\right) \in B_k, x_3 \in (-d_k, 0] \right\}, k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (4.1)$$

Тут N -- велике натуральне число, $\varepsilon = \dfrac{a}{N}$ -- малий дискретний параметр, що характеризує відстань між сусідніми тонкими циліндрами та їхню товщину. Кожен клас характеризується площею поперечного перерізу B_k та довжиною тонких циліндрів d_k.

Позначимо через $S_\varepsilon(k)$ -- об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів $G_\varepsilon(k)$ та через $S_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^{m} S_\varepsilon(k)$. Також нехай $Q_\varepsilon(k) = \partial\Omega_0 \cap \partial G_\varepsilon(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ -- множина на $\partial\Omega_0$ по якій приєднуються тонкі циліндри $G_\varepsilon(k)$ до Ω_0.

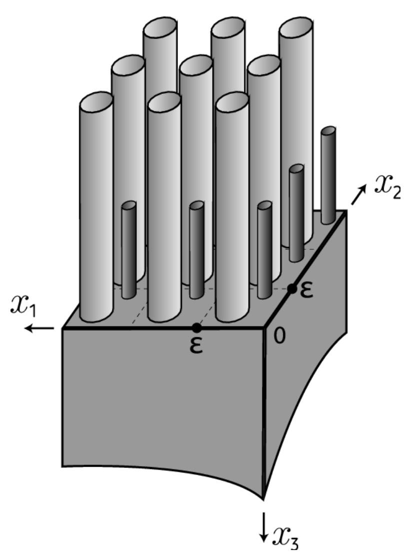

Рис. 4.1. Густе багаторівневе з'єднання типу 3:2:1.

В області Ω_ε розглядається наступна крайова задача:

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \mu_0(u_\varepsilon) = f, & x \in \Omega_0, \\ -a_k \Delta u_\varepsilon + \mu_k(u_\varepsilon) = 0, & x \in G_\varepsilon(k), \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{v}} u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\Gamma_0 \cup S_\varepsilon), \\ u_\varepsilon |_{x_3=0+0} = u_\varepsilon |_{x_3=0-0}, \partial_{x_3} u_\varepsilon |_{x_3=0+0} = a_k \partial_{x_3} u_\varepsilon |_{x_3=0-0} & x \in Q_\varepsilon(k), \end{cases} \tag{4.2}$$

з квазілінійними крайовини умовами на $S_\varepsilon(k)$

$$\begin{cases} u_\varepsilon \le g_k, \quad a_k \partial_{\mathbf{v}} u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon) \le 0, \\ (u_\varepsilon - g_k)(a_k \partial_{\mathbf{v}} u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon)) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

де $\partial_{\mathbf{v}} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ -- зовнішня нормальна похідна, $\Gamma_0 \in \partial\Omega_0 \cap \{x : x_3 > 0\}$,

$|\Gamma_0|_2 > 0$, $a_k > 0$, де $|\Gamma_0|_2$ - поверхнева міра Лебега Γ_0.

Нехай $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D_k}$. Тут $D_k = Q \times (-d_k, 0)$, $k = 1,\ldots,m$ -- паралелепіпеди, що заповнюються циліндрами k-го рівня відповідно в граничному переході при $\varepsilon \to 0$.

Відносно функцій заданих в постановці задачі будемо вважати, що виконуються наступні умови:

1) функція f належить простору $L^2(\Omega_1)$;

2) функції $\{g_k\}_{k=1}^m$ належать простору $H^1(D_k; Q) = \{\varphi \in H^1(D_k), \quad \varphi|_Q = 0\}$;

3) функції $\{\mu_k\}_{k=0}^m, \{h_k\}_{k=1}^m$ неперервні за Ліпшицем (що еквівалентно умові $\mu_k, h_k \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$) та існують додатні сталі $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що

$$c_1 \le \mu_k'(s) \le c_2, \quad c_1 \le h_k'(s) \le c_2, \quad \text{äëÿ ì.â.} \quad s \in \mathbb{R}, \quad k = 1,\ldots,m; \tag{4.4}$$

4) у випадку $\alpha_{k_0} < 1$ припускаємо, що $g_{k_0} \equiv 0$ та

$$h_{k_0}(0) = 0 \ \text{(óìîâèíóëüîâî¿ àáñîðáö³¿)} \tag{4.5}$$

4.2 Варіаційні постановки крайової задачі

В просторі Соболєва $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$, визначимо підмножину

$$\mathrm{K}_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0): \quad \varphi|_{S_\varepsilon(k)} \le g_k|_{S_\varepsilon(k)} \text{ ì.ñ.íà } S_\varepsilon(k), \quad k = 1,\ldots,m\},$$

де через $\psi|_S$ позначено слід функції ψ на поверхні S. Множина K_ε -- замкнена та опукла для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$.

Оскільки для кожного $k \in \{1,\ldots,m\}$ функція g_k належить до $H^1(D_k;Q)$, то можна вважати, що $g_k = 0$ в Ω_0. Отже, функція

$$\mathrm{G}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ g_k, & x \in G_\varepsilon(k), \quad k = 1,\ldots,m \end{cases}$$

належить до $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0)$ та $\mathrm{G} \in \mathrm{K}_\varepsilon$.

Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (4.2) -- (4.3). Домножимо рівняння задачі (220) на $u_\varepsilon - \mathrm{G}$, та проінтегруємо в Ω_ε. Використавши крайові умови, маємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\, dx + \sum_{k=1}^{m} a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (u_\varepsilon - g_k) dx + \int\limits_{\Omega_0} \mu_0(u_\varepsilon) u_\varepsilon\, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \mu_k(u_\varepsilon)(u_\varepsilon - g_k) dx = \int\limits_{\Omega_0} f u_\varepsilon\, dx - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{\alpha_k} \int\limits_{S_\varepsilon(k)} h_k(u_\varepsilon)(u_\varepsilon - g_k) d\sigma_x. \qquad (4.6)$$

Тепер візьмемо довільну функцію $\varphi \in \mathrm{K}_\varepsilon$ та домножимо рівняння задачі (4.2) на $\varphi - \mathrm{G}$. Аналогічно до зробленого вище отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx + \sum_{k=1}^{m} a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - g_k) dx + \int\limits_{\Omega_0} \mu_0(u_\varepsilon) \varphi dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \mu_k(u_\varepsilon)(\varphi - g_k) dx + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{\alpha_k} \int\limits_{S_\varepsilon(k)} h_k(u_\varepsilon)(\varphi - g_k) d\sigma +$$

$$= \int_{\Omega_0} f\varphi dx + \sum_{k=1}^{m} \int_{S_\varepsilon(k)} (\varphi - g_k)(a_k \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon)) d\sigma_x. \quad (4.7)$$

Оскільки $\varphi \le g_k$, $a_k \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon) \le 0$, $x \in S_\varepsilon(k)$, $k = 1,\dots,m$, то

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{S_\varepsilon(k)} (\varphi - g_k)(a_k \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon)) d\sigma_x \ge 0. \quad (4.8)$$

Використовуючи (4.8) з рівності (4.7) випливає нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx + \sum_{k=1}^{m} a_k \int_{G_\varepsilon(k)} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - g_k) dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(u_\varepsilon)\varphi dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{G_\varepsilon(k)} \mu_k(u_\varepsilon)(\varphi - g_k) dx + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{\alpha_k} \int_{S_\varepsilon(k)} h_k(u_\varepsilon)(\varphi - g_k) d\sigma_x . \ge \int_{\Omega_0} f\varphi dx. \quad (4.9)$$

Означення 4.1 *Узагальненим розв'язком задачі (4.2) -- (4.3) називається функція* $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, *яка задовольняє рівність (4.6) та нерівність (4.9) для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$.

Дамо тепер варіаційну операторну постановку задачі (4.2) -- (4.3). Позначимо через $(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0))^*$ спряжений простір до $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0)$ та визначимо нелінійний оператор $A_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0) \to (H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0))^*$ наступним співвідношенням

$$\langle A_\varepsilon(u), v\rangle_\varepsilon = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{k=1}^{m} a_k \int_{G_\varepsilon(k)} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(u) v dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{G_\varepsilon(k)} \mu_k(u) v dx + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{\alpha_k} \int_{S_\varepsilon(k)} h_k(u) v d\sigma_x \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0),$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ дужки спряження між $(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0))^*$ та $H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0)$.

Тоді означення 4.1 може бути переписане в наступній формі.

Означення 4.2 *Узагальненим розв'язком задачі (4.2) -- (4.3) називається функція* $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, *яка задовольняє таку рівність*

$$\langle A_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - G\rangle_\varepsilon = \langle F, u_\varepsilon - G\rangle_\varepsilon \quad (4.10)$$

та нерівність

$$\langle \mathsf{A}_\varepsilon(u_\varepsilon),\varphi-\mathsf{G}\rangle_\varepsilon \geq \langle F,\varphi-\mathsf{G}\rangle_\varepsilon \quad \forall\varphi\in\mathsf{K}_\varepsilon. \qquad (4.11)$$

В (4.10) та (4.11) функціонал $F\in(H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0))^*$ визначається наступним чином $\langle F,v\rangle_\varepsilon := \int_{\Omega_0} fvdx$ для довільної функції $v\in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0)$. Зрозуміло, що $\|F\|\leq C\|f\|_{L^2(\Omega_0)}$. Наведемо еквівалентне означення узагальненого розв'язку.

Означення 4.3 *Узагальненим розв'язком задачі (4.2) -- (4.3) називається функція* $u_\varepsilon\in\mathsf{K}_\varepsilon$, *яка задовольняє таку нерівність*

$$\langle \mathsf{A}_\varepsilon(u_\varepsilon),\varphi-u_\varepsilon\rangle_\varepsilon \geq \langle F,\varphi-u_\varepsilon\rangle_\varepsilon \quad \forall\varphi\in\mathsf{K}_\varepsilon. \qquad (4.12)$$

Покажемо, що означення 4.2 та 4.3 еквівалентні. Віднімаючи рівність (4.10) від нерівності (4.11), отримаємо (4.12). Підставляючи $\varphi=\mathsf{G}$ в (4.12), одержимо

$$\langle \mathsf{A}_\varepsilon(u_\varepsilon),\mathsf{G}-u_\varepsilon\rangle_\varepsilon \geq \langle F,\mathsf{G}-u_\varepsilon\rangle_\varepsilon.$$

Взявши $\varphi=2u_\varepsilon-\mathsf{G}$ в (230), отримаємо обернену нерівність

$$\langle \mathsf{A}_\varepsilon(u_\varepsilon),u_\varepsilon-\mathsf{G}\rangle_\varepsilon \geq \langle F,u_\varepsilon-\mathsf{G}\rangle_\varepsilon.$$

Отже (4.10) виконується. Поклавши $\varphi=\psi+u_\varepsilon-\mathsf{G}$ в (4.12), де ψ -- довільна функція з K_ε, маємо (4.11).

4.3 Існування та єдиність узагальненого розв'язку.

Апріорна оцінка

Надалі часто будемо використовувати наступні тотожності (див. [95])

$$\varepsilon\int_{S_\varepsilon(k)} vd\sigma_x = \frac{l_k}{|B_k|}\int_{G_\varepsilon(k)} vdx+\varepsilon\int_{G_\varepsilon(k)}\nabla_{\xi'}Y_k(\xi')|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}vdx \quad \forall v\in H^1(G_\varepsilon(k)), \qquad (4.13)$$

$k=1,\ldots,m.$ Тут $|B_k|$ -- площа плоскої області B_k, l_k -- довжина ∂B_k, а Y_k -- єдиний розв'язок наступної задачі:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi} Y_k(\xi') = l_k |B_k|^{-1}, & \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in B_k, \\ \partial_{\mathbf{v}(\xi')} Y_k(\xi') = 1, & \xi' \in \partial B_k, \\ \int_{B_k} Y_k(\xi') d\xi' = 0, & \end{cases} \tag{4.14}$$

який потім ε-періодично продовжується по ξ_1 та ξ_2. В [95] доведено, що

$$\sup_{\xi' \in B_k} |\nabla_{\xi'} Y_k(\xi')| \le c_k'' . \tag{4.15}$$

Використовуючи нерівність Коші з δ ($ab \le \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}, a, b > 0$) та (4.15), отримаємо з (4.13) наступні нерівності:

$$\varepsilon \int_{S_\varepsilon(k)} v^2 d\sigma_x \le C_1 \left(\varepsilon^2 \int_{G_\varepsilon(k)} |\nabla_{x'} v|^2 dx + \int_{G_\varepsilon(k)} v^2 dx \right), \tag{4.16}$$

$$\int_{G_\varepsilon(k)} v^2 dx \le C_2 \left(\varepsilon^2 \int_{G_\varepsilon(k)} |\nabla_{x'} v|^2 dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon(k)} v^2 d\sigma_x \right) \tag{4.17}$$

для довільної функції $v \in H^1(G_\varepsilon(k)), \quad k = 1,...,m.$

З умови (4.4) так само як в [89]), виводимо нерівності

$$c_1 s^2 + \mu_k(0) s \le \mu_k(s) s \le c_2 s^2 + \mu_k(0) s, \quad |\mu_k(s)| \le |\mu_k(0)| + c_3 |s|, \tag{4.18}$$

$$c_1 s^2 + h_k(0) s \le h_k(s) s \le c_2 s^2 + h_k(0) s, \quad |h_k(s)| \le |h_k(0)| + c_3 |s| \tag{4.19}$$

які виконуються для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $k = 1,...,m.$

Встановимо деякі властивості оператора A_ε.

1. Використовуючи (4.18) та (4.19) та нерівність Коші з $\delta > 0$, маємо

$$\langle \mathsf{A}_\varepsilon(v), v \rangle_\varepsilon \ge c_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^2 dx + c_1 \int_{\Omega_0} v^2 dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(0) v dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^m c_1 \int_{G_\varepsilon(k)} v^2 dx + + \sum_{k=1}^m \int_{G_\varepsilon} \mu_k(0) v dx + \sum_{k=1}^m c_1 \varepsilon^{\alpha_k} \int_{S_\varepsilon(k)} v^2 d\sigma_x +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \varepsilon^{\alpha_k} \int_{S_\varepsilon(k)} h_k(0) v d\sigma_x \ge c_4 \| v \|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \delta \Bigg(|\mu_0(0)| \int_{\Omega_0} v^2 dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}|\mu_k(0)|\int_{G_\varepsilon(k)} v^2\,dx+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k}\,|h_k(0)|\int_{S_\varepsilon(k)} v^2\,d\sigma_x\Bigg)-$$

$$-\frac{1}{4\delta}\left(|\mu_0(0)|\,|\Omega_0|_3+\sum_{k=1}^{m}|\mu_k(0)|\,|G_\varepsilon(k)|+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k}\,|h_k(0)|\,|S_\varepsilon(k)|\right),$$

де $c_0=\min(1,a_1,...,a_m)$ та $c_4=\min(c_0,c_1)$. Тут варто зазначити, що загальна міра $|G_\varepsilon(k)|$ тонких циліндрів має порядок $O(1)$, а загальна міра $|S_\varepsilon(k)|$ бічних поверхонь тонких циліндрів $G_\varepsilon(k)$ має порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

Тоді, враховуючи умову нульової абсорбції у випадку якщо $\alpha_{k_0}<1$, та використовуючи (234), можна обрати потрібне δ, щоб виконувалася нерівність

$$\langle A_\varepsilon v,v\rangle_\varepsilon \ge C_1\|v\|_\varepsilon^2-C_2 \quad \forall v\in H^1(\Omega_\varepsilon;\Gamma_0). \tag{4.20}$$

Ця нерівність означає, що оператор A_ε коерцитивний.

2. Покажемо, що оператор A_ε монотонний. Враховуючи умову (4.4), маємо

$$\langle A_\varepsilon(u_1)-A_\varepsilon(u_2),u_1-u_2\rangle_\varepsilon \ge$$

$$\ge\int_{\Omega_0}|\nabla(u_1-u_2)|^2\,dx+\sum_{k=1}^{m}a_k\int_{G_\varepsilon(k)}|\nabla(u_1-u_2)|^2\,dx+c_1\int_{\Omega_0}(u_1-u_2)^2\,dx+$$

$$+c_1\sum_{k=1}^{m}\int_{G_\varepsilon(k)}(u_1-u_2)^2\,dx+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k}c_1\int_{S_\varepsilon(k)}(u_1-u_2)^2\,d\sigma\ge c_0\|u_1-u_2\|_\varepsilon^2.$$

Отже, оператор A_ε -- строго монотонний.

3. Покажемо, що оператор A_ε семінеперервний. Справді, дійснозначна функція

$$[0,1]\ni\tau\to\langle A_\varepsilon(u_1+\tau v),u_2\rangle_\varepsilon$$

є неперервною на [0,1] для всіх фіксованих $u_1,u_2,v\in K_\varepsilon$, оскільки функції μ_0,μ_k,h_k є неперервними, та має місце теорема Лебега про мажоровану збіжність.

4. Покажемо, що оператор A_{ε} обмежений. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, (2.11) та (4.18), (4.19), отримаємо наступну нерівність:

$$\left|\langle \mathrm{A}_{\varepsilon}(u),v\rangle_{\varepsilon}\right| \le c_5 \int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla u\cdot\nabla v dx + \int_{\Omega_0} (|\mu_0(0)|+c_3|u|)|v|dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{G_{\varepsilon}(k)}(|\mu_k(0)|+c_3|u|)|v|dx+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k}\int_{S_{\varepsilon}(k)}(|h_k(0)|+c_3|u|)|v|d\sigma_x \le$$

$$\le c_5\|u\|_{\varepsilon}\|v\|_{\varepsilon} + + c_6\|v\|_{\varepsilon}+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k-1}|h_k(0)|\sqrt{\varepsilon|S_{\varepsilon(k)}|}\sqrt{\varepsilon\int_{S_{\varepsilon}(k)}v^2d\sigma_x}+$$

$$+c_3\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k-1}\sqrt{\int_{S_{\varepsilon}(k)}\varepsilon u^2 d\sigma_x}\sqrt{\varepsilon\int_{S_{\varepsilon}(k)}v^2 d\sigma_x}. \qquad (4.21)$$

Використовуючи (4.16) та умову нульової абсорбції у випадку якщо $\alpha_{k_0}<1$, маємо

$$\left|\langle \mathrm{A}_{\varepsilon}(u),v\rangle_{\varepsilon}\right| \le C_0\left(1+\|u\|_{\varepsilon}+\|u\|_{\varepsilon}\Big(\sum_{k=1}^{k_0-1}\varepsilon^{\alpha_k-1}+\sum_{k=k_0+1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k-1}\Big)\right)\|v\|_{\varepsilon}\le$$

$$\le C_1(1+\|u_{\varepsilon}\|_{\varepsilon})\|v_{\varepsilon}\|_{\varepsilon} \quad \forall u,v\in H^1(\Omega_{\varepsilon};\Gamma_0).$$

Отже, оператор A_{ε} -- обмежений, строго монотонний, та семінеперервний, тобто є псевдомонотонним (див. зауваження 1.1.) Отже, на підставі теорем 1.3, 1.4 існує єдиний розв'язок варіаційної нерівності (4.12) для кожного фіксованого ε .

5. Використовуючи (4.20), (4.21) та умову нульової абсорбції (4.5), отримаємо з (4.10), що

$$C_1\|u_{\varepsilon}\|_{\varepsilon}^2 - C_2 \le 3\delta\|u_{\varepsilon}\|_{\varepsilon}^2 + c_4 + \frac{c_5}{4\delta}\|G\|_{\varepsilon}^2 + \frac{C_6}{4\delta}\|f\|_{L^2(\Omega_0)}^2.$$

Обираючи $\delta>0$, так щоб $\dfrac{3\delta}{C_1}<\dfrac{1}{2}$ одержимо наступну апріорну оцінку:

$$\|u_{\varepsilon}\|_{\varepsilon}^2 \le C_0\left(1+\|f\|_{L^2(\Omega_0)}^2+\sum_{k=1}^{m}\|g_k\|_{H^1(D_k)}^2\right). \qquad (4.22)$$

Нашою метою є вивчення асимптотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (4.2) -- (4.3) при $\varepsilon \to 0$, тобто, коли число тонких циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля, та вивчення впливу параметрів $\{\alpha_k\}$ на асимптотичну поведінку розв'язків.

4 Теорема збіжності у випадку $\alpha_k \geq 1, k = 1,\dots,m$

Продовження нулем функції, визначеної на $G_\varepsilon(k)$, позначимо через:

$$\tilde{v}_\varepsilon^{(k)}(x) = \begin{cases} v_\varepsilon(x), & x \in G_\varepsilon(k), \\ 0, & x \in D_k \setminus G_\varepsilon(k), \end{cases} \tag{4.23}$$

де $D_k = Q \times (-d_k, 0)$ -- паралелепіпеди, що заповнюються тонкими циліндрами $G_\varepsilon(k)$ в граничному переході при $\varepsilon \to 0$, $k = 1,\dots,m$. Зрозуміло, що продовження належать анізотропному простору Соболєва $W^{0,0,1}(D_k) = \{v \in L^2(D_k) : \exists \quad \partial_{x_3} v \in L^2(D_k)\}$ із скалярним добутком

$$(u,v)_{W^{0,0,1}(D_k)} = \int_{D_k} (uv + \partial_{x_3} u \partial_{x_3} v) dx.$$

Теорема 4.1 (випадок $_k, k=1,...,m$) *Послідовність розв'язків* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *задачі (4.2) -- (4.3) задовольняє співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon\big|_{\Omega_0} & \xrightarrow{w} & u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad H^1(\Omega_0;\Gamma_0), \\ \tilde{u}_\varepsilon^{(k)} & \xrightarrow{w} & |B_k| u_0^{(k)} & \text{ñëàáêîâ} \quad W^{0,0,1}(D_k), \\ \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon^{(k)} & \xrightarrow{w} & 0 & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(D_k), i = 1,2 \end{array}\right\} \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.24}$$

для $k = 1,\dots,m$. *Тут багатолиста функція*

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^{(k)}(x), & x \in D_k, \ k = 1,\dots,m, \end{cases} \tag{4.25}$$

є єдиним розв'язком задачі (4.26) -- (4.27):

$$\begin{cases} -\Delta_x u_0^+ + \mu_0(u_0^+) = f, \quad x \in \Omega_0, \\ u_0^+ = 0, \quad x \in \Gamma_0 \in \partial\Omega_0, \qquad \partial_\nu u_0^+(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_0 \cup Q), \\ u_0^{(k)} \big|_{x_3=0} = u_0^+ \big|_{x_3=0}, \quad k = 1,\ldots,m, \\ \partial_{x_3} u_0^+(x',0) = \sum\limits_{k=1}^{K_0} a_k \,|\, B_k \,|\, \partial_{x_3} u_0^{(k)}(x',0), \quad (x',0) \in Q, \\ (\partial_{x_3} u_0^{(k)}) \big|_{x_3=-d_k} = 0, \quad k = 1,\ldots,m, \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} a_k \,|\, B_k \,|\, \partial^2_{x_3 x_3} u_0^{(k)} + |\, B_k \,|\, \mu_k(u_0^{(k)}) \le -\delta_{\alpha_k,1} l_k h_k(u_0^{(k)}), \qquad u_0^{(k)} \le g_k, \\ (u_0^{(k)} - g_k)(-a_k \,|\, B_k \,|\, \partial^2_{x_3 x_3} u_0^{(k)} + |\, B_k \,|\, \mu_k(u_0^{(k)}) + \delta_{\alpha_k,1} l_k h_k(u_0^{(k)})) = 0, \end{cases} \quad x \in D_k, \tag{4.27}$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (4.2) -- (4.3).

4.5 Варіаційні постановки для усередненої задачі, існування та єдиність її узагальненого розв'язку

Розглянемо простір $\mathsf{V}_0 := L^2(\Omega_0) \times L^2(D_1) \times \ldots \times L^2(D_m)$ із скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathsf{V}_0} = \int_{\Omega_0} u_0 v_0 \, dx + \sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} u_k v_k \, dx,$$

де $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$ та $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$. Також визначимо гільбертовий простір

$$\mathsf{H}_0 := \{ u \in \mathsf{V}_0 : u_0 \in H^1(\Omega_0; \Gamma_0), \ u_k \in W^{0,0,1}(D_k) \ \text{òà}$$

$$u_0^+(x',0) = u_k(x',0) \ \text{äëÿ ì.â.} \ x' \in Q, \ k = 1,\ldots,m\}$$

з скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathsf{H}_0} = \int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla v_0^+ \, dx + \sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} \left(u_k v_k + \partial_{x_3} u_k \partial_{x_3} v_k \right) dx.$$

Зауважимо, що для функції з анізотропного простору $W^{0,0,1}(D_k)$ існує слід на Q, який позначаємо $u_k(x',0)$. Також визначимо підмножину

$$\mathsf{K}_0 = \{ \ \in \mathsf{H}_0 : \ \varphi_k \le g_k \ \ \text{ì.ñ.â} \ \ D_k, \ \ k = 1,\ldots,m\}.$$

Зрозуміло, що K_0 -- замкнена та опукла в H_0.

Для усередненої задачі (4.26) -- (4.27) визначимо оператор $\mathsf{A}:\mathsf{H}_0 \ \alpha \ \mathsf{H}_0^*$

$$\langle \mathsf{A}u,v\rangle_0 := \int\limits_{\Omega_0}\nabla u_0\cdot\nabla v_0\,dx+\sum_{k=1}^{m}a_k|\,B_k\,|\int\limits_{D_k}\partial_{x_3}u_k\,\partial_{x_3}v_k\,dx+\int\limits_{\Omega_0}\mu_0(u_0)v_0\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{m}|\,B_k\,|\int\limits_{D_k}\mu_k(u_k)v_k\,dx+\sum_{k=1}^{m}\delta_{\alpha_k,1}l_k\int\limits_{D_k}h_k(u_k)v_k\,dx \quad \forall u,v\in\mathsf{H}_0,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ -- дужки спряження між H_0^* та H_0. За допомогою (4.18), (4.19) аналогічно як в підрозділі 3 доводимо, що оператор A коерцитивний, строго монотонний, обмежений та семінеперервний.

Аналогічно як для вихідної задачі можна дати еквівалентні означення узагальненого розв'язку задачі (4.26) -- (4.27). Для цього визначимо багатолисту функцію

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in\Omega_0,\\ g_k(x), & x\in D_k, k=1,\ldots,m.\end{cases}$$

Зрозуміло, що $g\in\mathsf{K}_0$.

Означення 4.4 *Узагальненим розв'язком задачі (4.26) -- (4.27) називається функція* $u_0\in\mathsf{K}_0$*, яка задовольняє таку рівність*

$$\langle \mathsf{A}u_0,u_0-g\rangle_0=\langle F,u_0\rangle_0$$

та нерівність

$$\langle \mathsf{A}u_0,\ \ -g\rangle_0\geq\langle F,\ \ \rangle_0 \quad \forall \ \ \in\mathsf{K}_0,$$

де лінійний функціонал $F\in\mathsf{H}_0^*$ *визначений наступним чином:*

$$\langle F,v\rangle_0 := \int_{\Omega_0} f\,v_0\,dx \quad \forall v\in\mathsf{H}_0.$$

Означення 4.5 *Узагальненим розв'язком задачі (4.26) -- (4.27) називається така функція* $u_0\in\mathsf{K}_0$*, яка задовольняє таку нерівність*

$$\langle \mathsf{A}u_0,\ \ -u_0\rangle_0\geq\langle F,\ \ -u_0\rangle_0 \quad \forall \ \ \in\mathsf{K}_0. \tag{4.28}$$

З (4.4) виводимо таку нерівність:

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla(\varphi - u_0^+)|^2 dx + \sum_{k=1}^{m} a_k |B_k| \int\limits_{D_k} |\partial_{x_3}(\varphi_k - u_0^{(k)})|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} (\mu_0(\varphi_0) - \mu_0(u_0^+))(\varphi_0 - u_0^+) dx + \sum_{k=1}^{m} |B_k| \int\limits_{D_k} (\mu_k(\varphi_k) - \mu_k(u_0^{(k)}))(\varphi_k - u_0^{(k)}) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \delta_{\alpha_k,1} l_k \int\limits_{D_k} (h_k(\varphi_k) - h_k(u_0^{(k)}))(\varphi_k - u_0^{(k)}) dx \ge 0 \quad \forall \varphi \in \mathsf{K}_0. \qquad (4.29)$$

Використовуючи цю нерівність, можна дати ще одне означення узагальненого розв'язку.

Означення 4.6 *Узагальненим розв'язком задачі (4.26) -- (4.27) називається така функція* $u_0 \in \mathsf{K}_0$*, яка задовольняє таку нерівність*

$$\langle \mathsf{A}\ \ ,\ \ - u_0 \rangle_0 \ge \langle F,\ \ - u_0 \rangle_0 \quad \forall \ \ \in \mathsf{K}_0. \qquad (4.30)$$

Покажемо, що дані означення еквівалентні. Взявши довільну багатолисту функцію $\ \ = u_0 + t(\psi - u_0) \in \mathsf{K}_0$ $(t \in [0,1], \psi \in \mathsf{K}_0)$ в нерівності (4.30), маємо

$$\langle \mathsf{A}(u_0 + t(\psi - u_0)), \psi - u_0 \rangle_0 \ge \langle F, \psi - u_0 \rangle_0,$$

звідки, використовуючи семінеперервність оператора A, отримаємо (4.28). Додаючи нерівність (4.29) до (4.28), маємо (4.30).

Отже, на підставі теорем 1.3 та 1.4 та властивостей оператора A робимо висновок, що усереднена задача (4.26) -- (4.27) має єдиний розв'язок.

6 Доведення теореми збіжності

З апріорної оцінки (4.22) випливає, що $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}$, $\|u_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(D_k)}$, $\|\partial_{x_i} u_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(D_k)}$ $(i = 1,2,3,\ \ k = 1,\ldots m,)$ рівномірно обмежені відносно ε. Тому можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (знову позначимо через

ε) таку, що

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon|_{\Omega_0} & \xrightarrow{w} & u_0^+ & \text{ñëàáêîâ} \quad H^1(\Omega_0), \\ \tilde{u}_\varepsilon^{(k)} & \xrightarrow{w} & |B_k|(|B_k|^{-1}u^{(k)}) =: |B_k| u_0^{(k)} & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(D_k), \\ \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon^{(k)} & \xrightarrow{w} & \gamma_i^{(k)} & \text{ñëàáêîâ} \quad L^2(D_k), \end{array}\right\} \qquad (4.31)$$

при $\varepsilon \to 0$, де u_0^+, $u_0^{(k)}$, $\gamma_i^{(k)}$, $k=1,\ldots,m$, $i=1,2,3$ -- деякі функції, які будуть визначені далі.

1. Спочатку визначимо $\{\gamma_i^{(k)}\}$. Розглянемо довільну функцію $\psi \in C_0^\infty(D_k)$. Оскільки $\partial_{x_3}(\tilde{u}_\varepsilon^{(k)}) = \partial_{x_3}\tilde{u}_\varepsilon^{(k)}$, то

$$\int_{D_k} \partial_{x_3}\tilde{u}_\varepsilon^{(k)} \psi\, dx = -\int_{D_k} \tilde{u}_\varepsilon^{(k)} \partial_{x_3}\psi\, dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_k), \quad k=1,\ldots,m.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ в цій тотожності, отримаємо

$$\int_{D_k} \gamma_3^{(k)}\psi\, dx = -|B_k| \int_{D_k} u_0^{(k)}\partial_{x_3}\psi\, dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_k), \qquad (4.32)$$

звідки випливає, що існує узагальнена похідна $\partial_{x_3}u_0^{(k)}$ та $\gamma_3^{(k)} = |B_k|\partial_{x_3}u_0^{(k)}$ м. с. в D_k, $k=1,\ldots,m.$

Розглянемо функції $Z_j(\xi_j) = -\xi_j + [\xi_j]$, $j=1,2,$ де $[t]$ -- ціла частина t. За допомогою даних функцій визначимо для кожного $k_0 \in \{1,\ldots,m\}$ наступні тестові функції:

$$\Phi_j^{(k_0)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ \varepsilon Z_j\left(\dfrac{x_j}{\varepsilon}\right)\psi_{k_0}(x) + g_{k_0}(x), & x \in G_\varepsilon(k_0), \\ g_k(x), & x \in G_\varepsilon(k), \end{cases} \qquad (4.33)$$

де $j=1,2,$ $k \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{k_0\}$, ψ_{k_0} -- довільна додатня функція з $C_0^\infty(D_{k_0})$.

Оскільки $Z_j \le 0$ та $\psi_k \ge 0$, функції $\{\Phi_1^{(k_0)}, \Phi_2^{(k_0)}\}_{k_0=1}^m \subset \mathcal{K}_\varepsilon$ та

$$\Phi_j^{(k_0)}(x) - G(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_\varepsilon \setminus G_\varepsilon(k_0), \\ \varepsilon Z_j\left(\dfrac{x_j}{\varepsilon}\right)\psi_{k_0}(x), & x \in G_\varepsilon(k_0), \end{cases} \quad j=1,2,$$

$$\nabla(\Phi_1^{(k_0)}-g_{k_0})=\left(-\psi_{k_0},0,0\right)+\varepsilon Z_1(\tfrac{x_1}{\varepsilon})\nabla\psi_{k_0}\quad \text{â}\quad G_\varepsilon(k_0),$$

$$\nabla(\Phi_2^{(k_0)}-g_{k_0})=\left(0,-\psi_{k_0},0\right)+\varepsilon Z_2(\tfrac{x_2}{\varepsilon})\nabla\psi_{k_0}\quad \text{â}\quad G_\varepsilon(k_0).$$

Підставляючи $\{\Phi_j^{(k_0)}\}$ в інтегральну нерівність (4.9), отримаємо

$$-a_{k_0}\int\limits_{G_\varepsilon(k_0)}\partial_{x_j}u_\varepsilon\psi_{k_0}\,dx+\varepsilon a_{k_0}\int\limits_{G_\varepsilon(k_0)}Z_j(\tfrac{x_j}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\psi_{k_0}\,dx$$

$$+\varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon(k_0)}\mu_{k_0}(u_\varepsilon)Z_j(\tfrac{x_j}{\varepsilon})\psi_{k_0}\,dx\geq-\varepsilon^{\alpha_{k_0}+1}\int\limits_{S_\varepsilon(k_0)}h_{k_0}(u_\varepsilon)Z_j(\tfrac{x_j}{\varepsilon})\psi_{k_0}\,d\sigma_x. \qquad (4.34)$$

Використовуючи (4.18), (4.19), (4.16) та (4.22), з (4.34) отримаємо оцінку:

$$|\int_{D_{k_0}}\partial_{x_j}\overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k_0)}\psi_{k_0}\,dx|\leq\varepsilon c_1\|u_\varepsilon\|_\varepsilon\|\psi_{k_0}\|_{H^1(D_{k_0})}+\varepsilon c_2(|\mu_{k_0}(0)|+\|u_\varepsilon\|_\varepsilon)\|\psi_{k_0}\|_{H^1(D_{k_0})}$$

$$+\varepsilon^{\alpha_{k_0}}c_3(|h_{k_0}(0)|+\|u_\varepsilon\|_\varepsilon)\|\psi_{k_0}\|_{H^1(D_{k_0})}=C_1\varepsilon,$$

звідки маємо, що $\gamma_1^{(k_0)}=\gamma_2^{(k_0)}=0$ м. с. в D_{k_0}, $k_0=1,\ldots,m.$

2. З неперервності оператору сліду, компактності вкладення $H^{1/2}(Q)\subset L^2(Q)$ та першого співвідношення (4.31), маємо

$$u_\varepsilon(x',0+0)\to u_0^+(x',0)\quad \text{ñèëüíî â}\quad L^2(Q)\quad \text{ïðè}\quad \varepsilon\to 0.$$

Розглянемо 1-періодичні функції

$$\chi_k(\xi')=\begin{cases}1, & \xi'\in B_k,\\ 0, & \xi'\in[0,1]\times[0,1]\setminus B_k.\end{cases}\qquad k=1,\ldots,m.$$

Відомо, що

$$\chi_k(\tfrac{x'}{\varepsilon})\overset{w}{\to}|B_k|\quad \text{ñëàáêî â}\ L^2(Q)\quad \text{ïðè}\,\varepsilon\to 0. \qquad (4.35)$$

Оскільки $\overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)}(x',0-0)=\chi_k(\dfrac{x'}{\varepsilon})u_\varepsilon(x',0+0)$ м. с. в Q,

$$\overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)}(x',0-0)\overset{w}{\to}|B_k|u_0^+(x',0)\quad \text{ñëàáêî â}\quad L^2(Q)\quad \text{ïðè}\quad \varepsilon\to 0.$$

З іншої сторони,

$$\int_Q\overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)}(x',0)\psi(x')dx'=\frac{1}{d_k}\int_{D_k}(\overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)}(x)\psi(x')+(x_3+d_k)\partial_{x_3}\overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)}(x)\psi(x'))dx$$

для довільної функції $\psi \in C_0^\infty(Q)$ та $k \in \{1,\ldots,m\}$. Переходячи до границі в цій рівності та беручи до уваги друге співвідношення (4.31) та результати, отримані вище, одержимо

$$|B_k| \int_Q u_0^+(x',0)\psi(x')dx' = \frac{|B_k|}{d_k} \int_{D_k} (u_0^{(k)}(x)\psi(x') + (x_3 + d_k)\partial_{x_3} u_0^{(k)}(x)\psi(x'))dx,$$

де

$$u_0^+(x',0) = u_0^{(k)}(x',0) \quad \text{äëÿ ì. â.} \quad x' \in Q, \quad k = 1,\ldots,m.$$

3. Покажемо, що

$$u_0^{(k)} \le g_k \quad \text{ì. ñ. â} \ \ D_k, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{4.36}$$

Для цього візьмемо невід'ємну функцію $\phi \in C^\infty(\overline{D_k})$ та підставимо $u_\varepsilon \phi$ в (4.13) замість v. Оскільки $\phi \ge 0$ та $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, отримаємо

$$\frac{l_k}{|B_k|} \int_{D_k} \overset{\,\,\,(k)}{u_\varepsilon''} \phi dx + \varepsilon \int_{G_\varepsilon(k)} \nabla_{\xi'} Y_k(\xi')|_{\xi' = \frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(u_\varepsilon \phi)dx \le \varepsilon \int_{S_\varepsilon(k)} g_k \phi d\sigma_x$$

$$= \frac{l_k}{|B_k|} \int_{D_k} \chi_k(\tfrac{x'}{\varepsilon}) g_k \phi dx + \varepsilon \int_{G_\varepsilon(k)} \nabla_{\xi'} Y_k(\xi')|_{\xi' = \frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(g_k \phi)dx. \tag{4.37}$$

Враховуючи (4.22), другу границю (4.31) та (4.15), перейдемо до границі (4.37) при $\varepsilon \to 0$. Отже, маємо

$$\int_{D_k} u_0^{(k)} \phi dx \le \int_{D_k} g_k \phi dx, \quad \forall \phi \in C^\infty(\overline{D_k}),\ \phi \ge 0,$$

звідки випливає (4.36).

4. Розглянемо наступну множину багатозначних функцій:

$$\begin{aligned} C_G^\infty(\Omega_0, D_1,\ldots,D_m) := \quad & \{(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_m) : \varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega_0}), \quad \varphi_0|_{\Gamma_0} = 0, \\ & \varphi_k \in C^\infty(\overline{D_k}), \quad \varphi_k \le g_k \quad \text{â} \quad D_k, \quad k = 1,\ldots,m, \\ & \varphi_0^+(x',0) = \varphi_k(x',0) \quad \text{äëÿ} \quad x' \in Q, \quad k = 1,\ldots,m\}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Очевидно, що для всіх $\in C_G^{\infty}(\Omega_0, D_1,\ldots,D_m)$ звуження $(\varphi_0, \varphi_1|_{G_\varepsilon(1)},\ldots,\varphi_m|_{G_\varepsilon(m)})$ належить до K_ε.

Тепер додамо до (4.12) нерівність

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla(\varphi-u_\varepsilon)|^2 dx + \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} |\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)|^2 dx +$$

$$+\sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} |\partial_{x_1} u_\varepsilon|^2 dx + \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} |\partial_{x_2} u_\varepsilon|^2 dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_0} (\mu_0(\varphi)-\mu_0(u_\varepsilon))(\varphi-u_\varepsilon)dx + \sum_{k=1}^m \int\limits_{G_\varepsilon(k)} (\mu_k(\varphi)-\mu_k(u_\varepsilon))(\varphi-u_\varepsilon)dx +$$

$$+\sum_{k=1}^m \varepsilon^{\alpha_k} \int\limits_{S_\varepsilon(k)} (h_k(\varphi)-h_k(u_\varepsilon))(\varphi-u_\varepsilon)d\sigma_x \ge 0,$$

де -- довільна функція з $C_G^{\infty}(\Omega_0, D_1,\ldots,D_m)$. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dx + \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \partial_{x_1}u_\varepsilon \partial_{x_1}\varphi dx + \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \partial_{x_2}u_\varepsilon \partial_{x_2}\varphi dx$$

$$+\sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \partial_{x_3}\varphi \partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)dx + \int\limits_{\Omega_0} \mu_0(\varphi)(\varphi-u_\varepsilon)dx + \sum_{k=1}^m \int\limits_{G_\varepsilon(k)} \mu_k(\varphi)(\varphi-u_\varepsilon)dx$$

$$+\sum_{k=1}^m \varepsilon^{\alpha_k} \int\limits_{S_\varepsilon(k)} h_k(\varphi)(\varphi-u_\varepsilon)d\sigma_x \ge \int\limits_{\Omega_0} f(\varphi-u_\varepsilon)dx, \qquad (4.39)$$

яку за допомогою (4.13) можна переписати у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla\varphi_0\cdot\nabla(\varphi_0-u_\varepsilon)dx + \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{D_k} \partial_{x_1} \overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)} \partial_{x_1}\varphi_k dx + \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{D_k} \partial_{x_2} \overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)} \partial_{x_2}\varphi_k dx +$$

$$+\sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{D_k} \chi_k\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3}\varphi_k \partial_{x_3}\varphi_k dx - \sum_{k=1}^m a_k \int\limits_{D_k} \partial_{x_3}\varphi_k \partial_{x_3} \overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)} dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_0} \mu_0(\varphi_0)(\varphi_0-u_\varepsilon)dx + \sum_{k=1}^m \int\limits_{D_k} \chi_k\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \mu_k(\varphi_k)\varphi_k dx - \sum_{k=1}^m \int\limits_{D_k} \mu_k(\varphi_k) \overset{\prime\prime}{u}{}_\varepsilon^{(k)} dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k-1}\frac{l_k}{|B_k|}\int_{D_k}\chi_k\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)h_k(\varphi_k)\varphi_k\,dx-\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k-1}\frac{l_k}{|B_k|}\int_{D_k}h_k(\varphi_k)u_{\varepsilon}^{\prime\prime\,(k)}\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k}\int_{D_k}\chi_k\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\nabla_{\xi'}Y_k(\xi')|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(\varphi_k h_k(\varphi_k))dx$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{\alpha_k}\int_{G_\varepsilon(k)}\nabla_{\xi'}Y_k^{(m)}(\xi')|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(h_k(\varphi_k)u_\varepsilon)dx\geq\int_{\Omega_0}f(\varphi_0-u_\varepsilon)dx. \qquad (4.40)$$

Враховуючи (4.15), (4.22), (4.35), результати збіжності (4.24) отримані в першому пункті доведення та припущення, що $\alpha_k \geq 1$, перейдемо до границі в (4.40) при $\varepsilon \to 0$. Одержимо наступну нерівність

$$\int_{\Omega_0}\nabla\varphi_0\cdot\nabla(\varphi_0-u_0^+)dx+\sum_{k=1}^{m}a_k|B_k|\int_{D_k}\partial_{x_3}\varphi_k\partial_{x_3}(\varphi_k-u_0^{(k)})dx+$$

$$+\int_{\Omega_0}\mu_0(\varphi_0)(\varphi_0-u_0^+)dx+\sum_{k=1}^{m}|B_k|\int_{D_k}\mu_k(\varphi_k)(\varphi_k-u_0^{(k)})dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\delta_{\alpha_k,1}l_k\int_{D_k}h_k(\varphi_k)(\varphi_k-u_0^{(k)})dx\geq\int_{\Omega_0}f(\varphi_0-u_0^+)dx \qquad (4.41)$$

для довільної багатолистої функції $\in C_G^\infty(\Omega_0,D_1,\ldots,D_m)$.

Оскільки $C_G^\infty(\Omega_0,D_1,\ldots,D_m)$ є щільною в K_0, інтегральна нерівність (4.41) виконується для довільної багатолистої функції $\in \mathrm{K}_0$. Дана нерівність та нерівність (4.36) означають, що багатолистна функція u_0 визначена в (243) є єдиним розв'язком в нерівності (4.30)(означення 4.6) та, отже, є узагальненим розв'язком усередненої задачі (4.26) -- (4.27). Враховуючи єдиність розв'язку задачі (4.26) -- (4.27) зрозуміло, що всі міркування, описані вище, мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon\}$, обраної на початку доведення. Отже, теорему збіжності доведено.

7 Теорема збіжності, випадок $\alpha_{k_0} < 1$

Тепер припустимо, що для деякого $k = k_0$ параметр $\alpha_{k_0} < 1$ та інші параметри $\{\alpha_k\}$ більші або рівні 1; для визначеності нехай $k_0 = 1$, тобто,

$\alpha_1 < 1, \alpha_k \geq 1, k = 2,\mathrm{K}, m.$ У цьому випадку додатково припустимо, що виконується умова нульової абсорбції (4.5).

Теорема 4.2 (випадок $_1<1, _k 1, k=2,,m$) *Нехай виконуються умови 1)-4). Послідовність розв'язків* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *задачі (4.2) -- (4.3) задовольняє співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon \,|_{\Omega_0} & \overset{w}{\to} & u_0^+ & \text{ñëàáêî} \quad H^1(\Omega_0;\Gamma_0), \\ {}^{''}u_\varepsilon^{(1)} & \overset{s}{\to} & 0 & \text{ñèëüíî} \quad L^2(D_1), \\ {}^{''}u_\varepsilon^{(k)} & \overset{w}{\to} & |B_k|\, u_0^{(k)} & \text{ñëàáêî} \quad W^{0,0,1}(D_k), \quad k = 2,\ldots,m \\ \partial_{x_i} {}^{''}u_\varepsilon^{(k)} & \overset{w}{\to} & 0 & \text{ñëàáêî} \quad L^2(D_k), \quad i = 1,2, \quad k = 2,\ldots,m \end{array}\right\} \qquad (4.42)$$

при $\varepsilon \to 0$, де u_0^+ є єдиним узагальненим розв'язком наступної задачі:

$$\begin{cases} -\Delta_x u_0^+ + \mu_0(u_0^+) = f \quad \text{â} \ \Omega_0, \\ u_0^+ = 0 \quad \text{íà} \ \Gamma_0 \cup Q, \quad \text{òà} \quad \partial_\nu u_0^+ = 0 \quad \text{íà} \ \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_0 \cup Q), \end{cases} \qquad (4.43)$$

а функція $u_0^{(k)}$ для всіх $k \in \{2,..,m\}$ є єдиним узагальненим розв'язком такої задачі:

$$\begin{cases} \begin{cases} -a_k\,|B_k|\,\partial^2_{x_3x_3} u_0^{(k)} + |B_k|\,\mu_k(u_0^{(k)}) \leq -\delta_{\alpha_k,1} l_k h_k(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(k)} \leq g_k, \\ (u_0^{(k)} - g_k)(-a_k\,|B_k|\,\partial^2_{x_3x_3} u_0^{(k)} + |B_k|\,\mu_k(u_0^{(k)}) + \delta_{\alpha_k,1} l_k h_k(u_0^{(k)})) = 0, \end{cases} \quad x \in D_k, \\ u_0^{(k)} \,|_{x_3=0} = 0, \quad (\partial_{x_3} u_0^{(k)}) \,|_{x_3=-d_k} = 0. \end{cases} \qquad (4.44)$$

8 Узагальнені розв'язки усереднених задач

Означення 4.7 *Узагальненим розв'язком задачі (4.43) називається така функція* $u_0^+ \in H^1(\Omega_0;\Gamma_0 \cup Q)$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla\varphi dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(u_0^+) v dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_0;\Gamma_0 \cup Q), \qquad (4.45)$$

де $H^1(\Omega_0;\Gamma_0 \cup Q) := \{u \in H^1(\Omega_0) : u\,|_{\Gamma_0 \cup Q} = 0\}.$

Використовуючи (4.4) та основні результати з теорії квазілінійних крайових задач, доводимо, що задача (4.43) має єдиний розв'язок.

Для задачі (4.44) при фіксованому $k \in \{2,..,m\}$ визначимо анізотропний простір Соболєва $W^{0,0,1}(D_k;Q) := \{u \in W^{0,0,1}(D_k) : u|_Q = 0 \text{ âñåíñ³ñë³äó}\}$ та визначимо оператор $\mathsf{A}_k : W^{0,0,1}(D_k;Q) \alpha \ (W^{0,0,1}(D_k;Q))^*$ наступним співвідношенням

$$\langle \mathsf{A}_k u, v \rangle_k = a_k | B_k | \int_{D_k} \partial_{x_3} u \partial_{x_3} v dx + | B_k | \int_{D_k} \mu_k(u) v dx + \delta_{\alpha_k,1} l_k \int_{D_k} h_k(u) v dx$$

для всіх $u,v \in W^{0,0,1}(D_k;Q)$, де $\langle \cdot,\cdot \rangle_k$ -- дужки спряження між $(W^{0,0,1}(D_k;Q))^*$ та $W^{0,0,1}(D_k;Q)$.

Також визначимо підмножину

$$\mathsf{K}_k = \{u \in W^{0,0,1}(D_k;Q) : \quad u \le g_k \quad \text{ì.ñ.â } D_k\}.$$

Зрозуміло, що K_k -- замкнена та опукла в $W^{0,0,1}(D_k;Q)$.

Використовуючи (4.18), (4.19) та нерівність Коші з $\delta > 0$, аналогічно як в підрозділі 3, доводимо, що оператор A_k - коерцитивний, строго монотонний, обмежений та семінеперервний. Тоді, аналогічно як для вихідної задачі, можна дати еквівалентні означення узагальненого розвязку задачі (4.44) для довільного фіксованого $k \in \{2,..,m\}$.

Означення 4.8 *Узагальненим розв'язком задачі (4.44) називається така функція* $u_0^{(k)} \in \mathsf{K}_k$, *яка задовольняє рівність*

$$\langle \mathsf{A}_k u_0^{(k)}, u_0^{(k)} - g_k \rangle_k = 0$$

та нерівність

$$\langle \mathsf{A}_k u_0^{(k)}, \varphi - g_k \rangle_k \ge 0 \quad \forall \varphi \in \mathsf{K}_k.$$

Означення 4.9 *Узагальненим розв'язком задачі (4.44) називається така функція* $u_0^{(k)} \in \mathsf{K}_k$, *яка задовольняє нерівність*

$$\langle \mathsf{A}_k u_0^{(k)}, \varphi - u_0^{(k)} \rangle_k \ge 0 \quad \forall \varphi \in \mathsf{K}_k.$$

Означення 4.10 *Узагальненим розв'язком задачі (4.44) називається така функція* $u_0^{(k)} \in \mathsf{K}_k$, *яка задовольняє нерівність*

$$\langle \mathsf{A}_k \varphi, \varphi - u_0^{(k)} \rangle_k \ge 0 \quad \forall \varphi \in \mathsf{K}_k.$$

Використовуючи Теореми 1.3, 1.4, задача (4.44) має єдиний розв'язок.

4.9 **Доведення теореми збіжності ($\alpha_{k_0} < 1$).**

1. Апріорна оцінка (4.22) була доведена для довільних значень параметрів $\{\alpha_k\}$. Тому переходячи до підпослідовності, яку знову позначимо через $\{\varepsilon\}$ так само, як це було зроблено в першому пункті доведення теореми 4.1, отримаємо такі границі:

$$\left.\begin{array}{lll} u_\varepsilon\big|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} u_0^+ & \text{ñëàáêî â} & H^1(\Omega_0;\Gamma_0), \\ \tilde{u}_\varepsilon^{(k)} \xrightarrow{w} |B_k|\,u_0^{(k)} & \text{ñëàáêî â} & W^{0,0,1}(D_k), \quad k=2,\ldots,m \\ \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon^{(k)} \xrightarrow{w} 0 & \text{ñëàáêî â} & L^2(D_k), \quad i=1,2 \quad k=2,\ldots,m \end{array}\right\}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Використовуючи (4.18), (4.19), (4.22) та умову абсорбції (4.5), отримаємо з інтегральної нерівності (4.5) наступну нерівність:

$$c_1\varepsilon^{\alpha_1}\int\limits_{S_\varepsilon(1)} u_\varepsilon^2\,d\sigma_x \le \|f\|_{L^2(\Omega_0)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} + c_5\|u_\varepsilon\|_\varepsilon^2 + \int\limits_{\Omega_0}(|\mu_0(0)| + c_3|u_\varepsilon|)|u_\varepsilon|dx$$

$$+\sum_{k=1}^m\int\limits_{G_\varepsilon(k)}(|\mu_k(0)| + c_3|u_\varepsilon|)|u_\varepsilon|dx + \sum_{k=2}^m\varepsilon^{\alpha_k}\int\limits_{S_\varepsilon(k)}(|h_k(0)| + c_3|u_\varepsilon|)|u_\varepsilon|d\sigma_x \le C_1. \qquad (4.46)$$

Тоді за допомогою (4.17) маємо

$$\int_{G_\varepsilon(1)} u_\varepsilon^2\,dx \le C_2\left(\varepsilon^2\int_{G_\varepsilon(1)}|\nabla_{x'}u_\varepsilon|^2dx + \varepsilon^{1-\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_1}\int_{S_\varepsilon(1)}u_\varepsilon^2\,d\sigma_x\right) \le C_3\varepsilon^\theta,$$

де $\theta := \min\{2;1-\alpha_1\} > 0$. Отже

$$\tilde{u}_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{s} 0 \quad \text{ñèëüíî â } L^2(D_1) \quad \text{ïðè} \quad \varepsilon \to 0. \qquad (4.47)$$

2. Міркуючи аналогічно як в другому пункті доведення теореми 4.1, доводимо $u_0^+(x',0) = u_0^{(k)}(x',0)$ $\text{äëÿ ì. â. } x' \in Q,$ $k = 1,..m.$ Однак тепер з (4.48) випливає, що $u_0^{(1)}(x',0) = 0$ $\text{äëÿ ì. â. } x' \in Q.$ Тому

$$u_0^+(x',0) = u_0^{(k)}(x',0) = 0 \quad \text{äëÿ ì. â. } x' \in Q, \quad k = 1,..m. \qquad (4.48)$$

3. Так само як в пункті 3 доведення теореми 4.3 доводимо включення

$$u_0^{(k)} \in K_k, \quad k = 2,\ldots,m. \tag{4.49}$$

4. Розглянемо довільну функцію $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ таку, що $\varphi_0|_{\Gamma_0 \cup Q} = 0$. Зрозуміло, що функція

$$\phi_\tau(x) = \begin{cases} \tau\varphi_0(x), & x \in \Omega_0; \\ 0, & x \in G_\varepsilon(1); \\ g_k(x), & x \in G_\varepsilon(k), \quad k = 2,\ldots,m, \end{cases}$$

де $\tau \in \mathbb{R}$, належить до K_ε. Записуючи нерівність (4.11) з $\varphi = \phi_\tau$, одержимо

$$\tau \int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi_0 \, dx + \tau \int_{\Omega_0} \mu_0(u_\varepsilon)\varphi_0 \, dx \ge \tau \int_{\Omega_0} f\varphi_0 \, dx.$$

Замінюючи τ на $-\tau$, та враховуючи описану вище нерівність, отримаємо

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi_0 \, dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(u_\varepsilon)\varphi_0 \, dx = \int_{\Omega_0} f\varphi_0 \, dx. \tag{4.50}$$

Оскільки $u_\varepsilon|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} u_0^+$ слабко в $H^1(\Omega_0;\Gamma_0)$ та сильно в $L^2(\Omega_0)$, можна перейти до границі по підпослідовності послідовності $\{\varepsilon\}$ в (4.50). В результаті маємо тотожність

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^+ \cdot \nabla\varphi_0 \, dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(u_0^+)\varphi_0 \, dx = \int_{\Omega_0} f\varphi_0 \, dx, \quad \forall \varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega_0}), \ \varphi_0|_{\Gamma_0 \cup Q} = 0.$$

Оскільки слід функції u_0^+ на Q рівний нулю (див. 4.48), то u_0^+ є єдиним узагальненим розв'язком задачі (4.43).

5. Позначимо через $C^\infty_{G,0}(\Omega_0, D_1,\ldots,D_m;Q)$ підмножину $C^\infty_G(\Omega_0, D_1,\ldots,D_m)$ (див. (4.38)), яка має додаткову властивість: компонента $\varphi_1 \equiv 0$ (нагадаємо, що $g_1 \equiv 0$). Зрозуміло, що

$$\varphi_0^+(x',0) = \varphi_k(x',0) = 0, \qquad x' \in Q, \quad k = 2,\ldots,m,$$

для всіх $\in C^\infty_{G,0}(\Omega_0, D_1,\ldots,D_m;Q)$.

Підставляючи звуження $(\varphi_0, 0|_{G_\varepsilon(1)}, \ldots, \varphi_m|_{G_\varepsilon(m)})$ для довільної $\in C^\infty_{G,0}(\Omega_0, D_1, \ldots, D_m; Q)$ в нерівність (4.39) та переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ аналогічно як в четвертому пункті доведення теореми 4.1, знаходимо

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla(\varphi_0 - u_0^+)dx + \sum_{k=2}^{m} a_k |B_k| \int_{D_k} \partial_{x_3}\varphi_k \partial_{x_3}(\varphi_k - u_0^{(k)})dx +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \mu_0(\varphi_0)(\varphi_0 - u_0^+)dx + \sum_{k=2}^{m} |B_k| \int_{D_k} \mu_k(\varphi_k)(\varphi_k - u_0^{(k)})dx$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \delta_{\alpha_k, 1} l_k \int_{D_k} h_k(\varphi_k)(\varphi_k - u_0^{(k)})dx \geq \int_{\Omega_0} f(\varphi_0 - u_0^+)dx \qquad (4.51)$$

для довільної багатолистої функції $\in C^\infty_{G,0}(\Omega_0, D_1, \ldots, D_m; Q)$. Тут суттєво використано умову $h_1(0) = 0$ та (4.47).

Тепер візьмемо довільне $k_0 \in \{2, \ldots, m\}$. Використовуючи (4.48) та (4.49), можна розглянути (4.51) з наступною багатолистою функцією:

$$_{k_0}(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ 0, & x \in G_\varepsilon(1) \\ \varphi_{k_0}(x), & x \in G_\varepsilon(k_0), \\ u_0^{(k)}(x), & x \in G_\varepsilon(k), \quad k \in \{2, \ldots, m\} \setminus \{k_0\}, \end{cases}$$

де φ_{k_0} -- довільна функція з K_{k_0}. В результаті маємо

$$a_{k_0} |B_{k_0}| \int_{D_{k_0}} \partial_{x_3}\varphi_{k_0} \partial_{x_3}(\varphi_{k_0} - u_0^{(k_0)})dx + |B_{k_0}| \int_{D_{k_0}} \mu_{k_0}(\varphi_{k_0})(\varphi_{k_0} - u_0^{(k_0)})dx$$

$$+ \delta_{\alpha_{k_0}, 1} l_{k_0} \int_{D_{k_0}} h_{k_0}(\varphi_{k_0})(\varphi_{k_0} - u_0^{(k_0)})dx \geq 0, \quad \forall \varphi_{k_0} \in K_{k_0}.$$

Дана варіаційна нерівність означає, що $u_0^{(k_0)}$ є розв'язком задачі (4.44) (див. означення 4.10). Враховуючи єдиність розв'язку задачі (4.44), зрозуміло, що всі міркування, описані вище, мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon\}$, обраної на початку доведення. Отже, теорему збіжності доведено.

Висновки до розділу 4

В цьому розділі вивчалась асимптотична поведінка розв'язку квазілійної еліптичної задачі (4.2) -- (4.3) в багаторівневому густому з'єднанні Ω_ε при $\varepsilon \to 0$, тобто, коли кількість тонких циліндрів з кожного класу нескінченно зростає і їх товщина прямує до 0. Основними припущеннями на нелінійні члени були умови (4.4). В багатьох наукових роботах для нелінійних членів $\mu(s)$ квазілінійних рівнянь є такі припущення:

$|\mu(s)| \le C(1+|s|)$ для кожного $s \in R$ і деякої сталої C;

$\mu(s)s \ge C_1|s|^2 - C_2$ для всіх $s \in R$ і відповідних констант $C_1 > 0, C_2 \ge 0$.

З нашої умови (4.4) випливають ці стандартні припущення (див. 4.18). Відомо, що багато фізичних процесів, особливо в хімії та медицині, мають монотонний характер. Таким чином, природно розглядати спеціальні монотонні умови для нелінійних членів, які були запропоновані в дисертації. Наприклад, функція

$$\mu(s) = \frac{\lambda s}{1+ks} \quad (\lambda, k > 0),$$

яка відповідає гіпотезі Міхаеліса-Ментена в біохімічних реакціях і моделі Ленгмюра кінетичної абсорбції (див. [61], [107]), задовольняє умову нульової абсорбції (4.5), якщо $f \ge 0$.

Крайові умови (4.3) означають, що існує потік величини через деяку частину бічних сторін тонких циліндрів. Як видно з результатів, ці умови істотно впливають на асимптотичну поведінку розв'язку задачі (4.2) -- (4.3). Для вивчення впливу крайових взаємодій на асимптотичну поведінку розв'язку, ми вводимо спеціальні коефіцієнти збурення $\varepsilon^{\alpha_k}, k = 1,...,m.$

Встановлено два якісно різних випадки асимптотичної поведінки розв'язку задачі (4.2) -- (4.3), які визначаються значеннями коефіцієнтів збурення $\{\varepsilon^{\alpha_k}\}_{k=1}^m$ в крайових умовах. Для кожного випадку доведено теорему збіжності, яка показує, що розв'язок збігається до розв'язку відповідної нестандартної усередненої задачі, а квазілінійні крайові умови трансформуються у відповідні варіаційні співвідношення в області, що заповнюється тонкими циліндрами з кожного класу.

Якщо фізичні властивості тонких циліндрів з різних класів є подібними, тобто $\alpha_k \geq 1, k = 1,...,m$, тоді узагальнений розв'язок усередненої задачі (4.26) -- (4.27) є багатолистою функцією, а тому фізичні процеси в тонких циліндрах багаторівневого з'єднання, які моделюються крайовою задачею (4.2) -- (4.3), мають багатофазну структуру.

Якщо для деякого $\alpha_{k_0} < 1$, тоді взаємодія між бічними поверхнями тонких циліндрів цього класу із зовнішнім середовищем відіграє домінуючу роль в асимптотичній поведінці розв'язку задачі. В результаті розв'язок в тонких циліндрах цього класу прямує до 0, а вихідна задача при $\varepsilon \to 0$ розпадається на крайову задачу в тілі з'єднання та просторові варіаційні нерівності в областях, що заповнюється тонкими циліндрами з кожного класу в граничному переході.

З отриманих результатів випливає, що усереднені задачі є адекватними наближеннями для варіаційної нерівності, що відповідає квазілійній еліптичній задачі в багаторівневому густому з'єднанні. Цей факт дає можливість використовувати усереднені задачі, які є набагато простішими, замість вихідних задач в різних прикладних задачах природознавства.

Результати четвертого розділу опубліковано в статті [98] та доповідалися на конференціях [40], [41], [39] і науковому семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи математичної фізики".

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджена асимптотична поведінка узагальнених розв'язків лінійних еліптичних та параболічних крайових задач Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 та квазілійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні з сингулярно збуреними нелінійними крайовими умовами типу Сіньоріні, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Основні результати дисертаційної роботи:

1. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в плоскому густому з'єднанні типу 2:1:1.
2. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.
3. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 2:1:1.
4. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.
5. Доведено теореми збіжності для розв'язку квазілінійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1 та досліджено вплив нелінійних сингулярно збурених крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку.

З отриманих результатів випливає, що усереднені задачі є адекватними наближеннями для варіаційних нерівностей, що відповідають еліптичним та параболічним крайовим задачам Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 та квазілінійній еліптичній крайовій задачі в багаторівневому густому з'єднанні з сингулярно збуреними нелінійними крайовими умовами типу Сіньоріні. Цей факт дає можливість використовувати усереднені задачі, які є набагато простішими, замість вихідних задач в різних прикладних задачах природознавства.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 . *Бокало М.М.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності / М.М. Бокало ,О.В. Кушнір // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 28-38.

2 . *Бокало М.М.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / М.М. Бокало ,О.В. Кушнір //Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 20-35.

3 . *Бокало Т.М.* Розв'язність подвійно нелінійної параболічної нерівності зі змінним степенем нелінійності / Т.М. Бокало, О.М. Бугрій, Т.М. Савіцька // Нелинейные граничные задачи. – 2012. – Т.21. – С. 1-8.

4 . *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега. / О.М. Бугрій // Наук. зап.Вінницьк.держ.пед.ун-ту імені М.Коцюбинскького. Сер. Фіз.-мат. – 2002. – Вип.1. – С.310-321.

5 . *Бугрій О.М.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації / О.М. Бугрій, С.П. Лавренюк // Укр.мат.журн. – 2001. –Т.53, № 7. – С. 867-868.

6 . *Бугрій О.М.* Деякі параболічні варіаційні нерівності зі змінним степенем нелінійності: однозначна розв'язність і теореми порівняння / О.М.Бугрій, Х.П.Глинянська // Мат.методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 42-57.

7 . *Бугрій О.М.* Деякі властивості розв'язків параболічних варіаційних нерівностей зі змінним степенем нелінійності/ О.М.Бугрій, О.Т.Панат // Мат.методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 2. – С. 99-107.

8 . *Воробьев А.Ю.* Об усреднении неоднородной задачи Синьорини для уравнения Пуассона в периодически перфорированной области / А.Ю. Воробьев, Т. А. Шапошникова // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, №3. С.359-376.

9 . *Воробьев А.Ю.* Об усреднении вариационных неравенств в перфорированных областях с произвольной плотностью перфорации / А.Ю. Воробьев, Т. А. Шапошникова // Вестник Московского университета Сер.1 Математика, механика. – 2005. – № 1. – С.8-16.

10 . *Воробьев А. Ю.* Об усреднении уравнения Пуассона в перфорированной области с условием Синьорини и третьим краевым условием на границе полостей / А. Ю. Воробьев // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, №3 С. 368-379.

11 . *Дюво Г.* Неравенства в механике и физике / Г.Дюво,Ж.Л. Лионс // – М.: Наука, 1980. – 382 с.

12 . *Зубова М.Н.* Об усреднении вариационного неравенства, соответствующего задаче с быстро меняющимся типом граничных условий / М. Н. Зубова, Т. А. Шапошникова // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, №4. С.538-549.

13 . *Казмерчук Ю.А.* Усереднення крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні / Ю.А. Казмерчук // Четверта всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", 10-12 вересня 2008 р.: Тези доповідей.– Івано-Франківськ, 2008. – С. 42.

14 . *Казмерчук Ю. А.* Про асимптотичну поведінку розв'язку крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні / Ю.А. Казмерчук // Second international conference for young mathematicians on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii, 11-14 листопада 2008 р.: Тези доповідей. – Донецьк, 2008 – С. 74.

15 . *Киндерлерер Д.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья // – М.: Мир, 1983. – 256 с.

16 . *Ковалевский А.А.* О G-сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с задачей Дирихле в переменных областях / А.А. Ковалевский // Укр. матем. журнал.– 1993.– Т.45 №7.– С. 948-962.

17 . *Ковалевский А.А.* О необходимом условии сильной G -сходимости нелинейных операторов задач Дирихле с переменной областью определения / А.А. Ковалевский // Дифференциальные уравнения.– 2000. – Т.36 № 4.– С. 537-541.

18 . *Ковалевский А.А.* G -сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения / А.А. Ковалевский // Известия РАН. Сер.матем.– 1995. – Т.58 №3.– С.3-35.

19 . *Ковалевский А.А.* G -компактность последовательностей нелинейных операторов задач Дирихле с переменной областью определения / А.А. Ковалевский // Известия РАН Сер.матем.– 1996. – Т.60 №1.– С.133-164.

20 . *Ковалевский А.А.* О равномерной ограниченности решений нелинейных эллиптических вариационных неравенств в переменных областях / А.А. Ковалевский // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30 №8. – С. 1370-1373.

21 . *Ковалевский А.А.* О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения / А.А. Ковалевский // Современный анализ и его приложения. Наукова думка. Киев. – 1989. – С. 62–70.

22 . *Котляров В. П.* О предельном граничном условии одной задачи Неймана / В.П. Котляров, Е. Я. Хруслов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. науч. сб. Харьковский государственный университет им. А.М. Горького.– Х. : Изд-во Харьк. ун-та, 1970.– Вып. 10. – С. 83–96.

23 . *Лавренюк С.П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий /С.П. Лавренюк // Дифференц. Уравнения.– 1996.– 32 №10– С. 1396-1400.

24 . *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс // М.: Мир, 1972. – 588 с.

25 . *Марченко В.А.*, Краевые задачи с мелкозернистой границей / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов // К.: Наукова думка, 1974. – 279 с.

26 . *Мельник Т. А.* Асимптотика спектру задачі Фур'є в густому з'єднанні типу 2:1:1 / Т.А.Мельник // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – №1. – С. 143-153.

27 . *Мельник Т. А.* Усереднення крайової задачі зі зміною типу крайових умов в густому дворівневому з'днанні / Т.А.Мельник, П.С.Ващук // Нелінійні коливання – 2005. – Т.8, №2. – С. 241-257.

28 . *Мельник Т. А.* Усреднение краевой задачи со сменным типом граничных условий в густом соединении / Т.А.Мельник, П.С.Ващук // Дифференциальные уравнения – 2007. – Т.43, №5. – С. 677-684.

29 . *Мельник Т. А.* Усреднение параболической краевой задачи Синьорини в густом соединении / Т.А. Мельник, Ю.А. Наквасюк // Проблемы математического анализа – 2012. – Т. 63, январь, – С. 67-82, (english translation in Journal of mathematical sciences – 2012. – V.181, № 5. – P. 613-631).

30 . *Мельник Т.А.* Усреднение эллиптических задач с чередующимися краевыми условиями в густом двухуровневом соединении типа 3:2:2 / Т.А. Мельник, Д. Ю. Садовый // Проблемы математического анализа – 2010.– Вып.44. – С.107-125. – Англ. переклад в Journal of Mathematical Sciens (New Yorc). – 2010. – V.165, No.1 – P. 67-90.

31 . *Мельник Т.А.* Усреднение краевой задачи в густом каскадном соединении / Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин // Проблемы математического анализа. – 2008. – т. 37. – С. 47–72.

32 . *Мельник Т.А.* Асимптотический анализ краевых задач в густых трехмерных многоуровневых соединениях / Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин // Матем. сб. – 2009. – т. 200. №3. – С. 49–74.

33 . *Мельник Т.А.* Усреднение краевых задач в двухуровневом соединении, состоящим из тонких дисков с округленными и острыми краями / Т.А. Мельник, Д. Ю. Садовый // Проблемы математического анализа – 2013. – Вып.70. – С.139-160. – Англ. переклад в Journal of Mathematical Sciens (New Yorc). – 2013. – V.191, No.2 – P. 254-279.

34 . *Мельник Т.А.* Усереднення квазілінійних параболічних задач з нелінійними крайовими умовами Фур'є та однорідними крайовими умовами Діріхле, що чергуються, в густому дворівневому з'єднанні типу 3:2:2 / Т.А. Мельник, Д. Ю. Садовий // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т. 7. – С.115-141.

35 . *Мельник Т.А.* Усереднення квазілінійної параболічної задачі з різними нелінійними крайовими умовами Фур'є, що чергуються, в густому дворівневому густому з'єднанні типу 3:2:2 / Т.А. Мельник, Д.Ю. Садовий // Український математичний журнал. – 2011. – Т.63. №12 – С.1632-1656.

36 . *Мельник Т.А.* О новых типах колебаний густых каскадных соединений с концентрированными массами / Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин // Доклады РАН.– 2013. – т. 448, № 6.– С. 642-647.

37 . *Мельник Т.А.* Собственные колебания густых каскадных соединений со "сверхтяжелыми" концентрированными массами / Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин // Изв. РАН. Сер. матем.– 2015. – т. 79, № 3.– С. 41–86.

38 . *Наквасюк Ю. А.* Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні / Ю.А. Наквасюк // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, 28-29 квітня 2011 р.: Тези доповідей. – Київ, 2011 – С. 37-38.

39 . *Наквасюк Ю. А.* Асимптотичний аналіз крайової задачі Сіньоріні в дворівневому густому з'єднанні// П'ята всеукраїнська наукова конфе-

ренція "Нелінійні проблеми аналізу", 19-22 вересня 2013.: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013 – С. 52.

40 . *Наквасюк Ю. А.* Усереднення квазілінійних нерівностей в густих багаторівневих з'єднаннях // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки", 23-24 квітня 2014 р.: Тези доповідей. – Київ, 2014 – С. 95.

41 . *Наквасюк Ю. А.* Усереднення квазілінійних нерівностей в густих багаторівневих з'єднаннях // Міжнародна міждисциплінарна конференція молодих вчених "Шевченківська весна", 1-3 квітня 2015 р.: Тези доповідей. – Київ, 2015 – С. 36-38.

42 . *Пастухова С.Е.* Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области / С.Е.Пастухова // Математический сборник. – 2001. – Т. 192, №2. – С.87-102.

43 . *Сандраков Г. В.* Осреднение вариационных неравенств с условием Синьорини в перфорированных областях [Текст] . / Г. В. Сандраков // Доклады Академии наук.– 2004. – Т. 399, No 5.– С. 601-604.

44 . *Сузиков Г. В.* О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое / Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1976. – №. 5. – С. 35-49.

45 . *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука, 1990. – 536 с.

46 . *Хруслов Е.Я.* О резонансных явлениях в одной задаче дифракции /Е.Я. Хруслов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. науч. сб. Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – Вып. 6. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1968. – С. 111 - 129.

47 . *Чечкина Т.П.* Усреднение в каскадных соединениях с "широкой" трансмиссионной областью / Т.П. Чечкина // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2011. – Том 39. – С. 151–162.

48 . *Anish K.M.* Protein biosensors based on polymer nanowires, carbon nanotubes and zinc oxide nanorods / K.M. Anish, J. Soyoun, J. Taeksoo // Sensors(14248220) – 2011. – Vol. 11 Issue 5, – P. 5087-5111.

49 . *Baiocchi C.* Variational and Quasivariational inequalities, Applications to Free Boundary Problems / C. Baiocchi, A. Capelo // Willey, Chichester, 1984. – 452 p.

50 . *Beliaev A.* Homogenization of a parabolic operator with Signorini boundari conditions in perforated domains / A. Beliaev // Asymptotic Analysis. – 2004. – Vol.40 No 3,4 – P.255-268.

51 . *Blanchard D.* Junction of a periodic family of elastic rods with 3d plate. Part I. II /D. Blanchard, A. Gaudiello, G. Griso // J. Math. Pures Appl. – 2007. – Vol. 88, No. 9, 1-33. – P. 149-190.

52 . *Blanchard D.* Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff-Love plate / D. Blanchard, A. Gaudiello, T. A. Mel'nyk // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – Vol. 39, No. 6. – P. 1764-1787.

53 . *Blanchard D.* Highly oscillating boundaries and reduction of dimension in the critical case / D. Blanchard, A. Gaudiello, J. Mossino// Anal. Appl. – 2007. – Vol. 5. – P. 137-163.

54 . *Bokalo M.M.* Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities / M.M. Bokalo // Nonlinear boundary value problems. – 1998. – No 8. – P. 58-63.

55 . *Chechkin A.G.* Spatial-skin effect for eigenvibrations of a thick cascade junction with ‘heavy’ concentrated masses / A.G. Chechkin, T.A. Mel’nyk // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2014. – Vol. 37, Issue 1. – P.56–74.

56 . *Chechkin A.G.* Asymptotic analysis of a boundary-value problem in a cascade thick junction with a random transmission zone / A.G. Chechkin, T.P. Chechkina, C. D'Apice, U. De Maio, T.A. Mel'nyk // Appl. Anal. – 2009. – Vol. 88. Issue 10-11, – P. 1543–1562.

57 . *Chechkin A.G.* Homogenization of 3D thick cascade junction with a random transmission zone periodic in one direction / A.G. Chechkin, T.P. Chechkina, C. D'Apice, U. De Maio, T.A. Mel'nyk // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2010. – Vol. 17, Issue 1. – P. 35-55.

58 . *Chechkin A.G.*Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses / A.G. Chechkin, T.A. Mel'nyk // Applicable Analysis.– 2012.– v. 91, № 6.– P. 1055-1095.

59 . *Chechkina A.G.* Convergence of solutions of a boundary-value problem in a thick cascade junction with oscillating boundary of the transmission zone in the case of Neumann conditions at the boundary / T. P. Chechkina // Russian Academy of Sciences. – 2010.– Vol. 65, No 5. – P. 195–196.

60 . *Cioranescu D.* Homogenization in open sets with holes / D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin //. J. Math. Anal. Appl.– 1979.– 71.– 590–607.

61 . *Conca C.* Homogenization in chemical reactive flows / C. Conca, J.I. Diaz, A. Linan, C. Timofte // Electron. J. Differential Equations. – 2004.– 40. – 1–22.

62 . *D'Apice C.* Asymptotic analysis of a perturbed parabolic problem in a thick junction of type 3:2:2 / C. D'Apice, U. De Maio, and T. A. Mel'nyk // Networks Heterogen. Media. – 2007. – Vol. 2. – P. 255-277.

63 . *Denkowski Z.* Asymptotic behavior of optimal solution to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations / Denkowski Z., Mortola S. // J. Optim. Theory Appl. – 1993. – 78:2. – P. 365-391.

64 . *De Maio U.* Homogenization of the Robin problem for the Poisson equation in a thick multistructure of type 3:2:2 / U. De Maio, T.A. Mel'nyk // Asymptotic Analysis. – 2005. – vol. 41, no. 2.– P. 161-177.

65 . *De Maio U.* Asymptotic approximation for the solution to the robin problem in a thick multi-level junction / U. De Maio, T. Durante, T.A. Mel'nyk // Mathematical Models and Methods in Aplied Sciences. – 2005. – Vol.15, No 12. – P. 1897-1921.

66 . *De Maio U.* Homogenization of the Robin problem in a thick multi-level junction / U. De Maio, T.A. Mel'nyk, C. Perugia // Нелінійні коливання – 2004. – 7, №. 3. – С. 336-356.

67 . *Donato P.* Homogenization and correctors for the heat equation in perforated domains / P. Donato, A. Nabil // Ricerche di Matematica. – 2001. – L. No 1. – С. 115-144.

68 . *Donato P.* Homogenization of semilinear parabolic equations in perforated domains / P. Donato, A. Nabil // Chin. Ann. Math. – 2004. – 25B. No 2. – С. 143-156.

69 . *Durante T.* Homogenization of quasilinear optimal control problems involving a thick multilevel junction of type 3:2:1 / T.Durante, T.A.Mel'nyk //ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations – 2012. – Vol. 18, Issue: 2. – P. 583-610.

70 . *Durante T.* Asymptotic aproximation for the solution to a boundary-value problem with varyin type of boundary conditions in think two-level junction/ T.Durante, T.A.Mel'nyk, P.S.Vashchuk// Nonlinear oscillations. – 2006.– Vol. 9, №3. – P. 336-355.

71 . *Duvaut G.* Probleme de Signorini en viscoelasticite lineaire, continus. / G. Duvaut // Proceedings of the International Congress of Mathematicions: Nice – 1970.

72 . *Duvaut G.* Probleme de Signorini en viscoelasticite lineaire / G. Duvaut // C.R., 1969. – Vol. 268.

73 . *Evans L. C.* Partial differential equation / L. C. Evans // – American Mathematical Society, 1997. – 662 p.

74 . *Fichera G.* Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno / G. Fichera // Rend. Accad. Naz., Lincei – 1963. – Vol. 34 (2) – P. 138-142.

75 . *Fichera G.* Un teorema generale di semicontinuita per gli integrali multipli e sue applicazioni alla fisica-matematic / G. Fichera // Atti del Convegno Lagrangiano, Acc. Sci. Torino, 1963.

76 . *Fleury F.* Asymptotic and spectral properties of the acoustic vibrations of body, perforated by narrow channels / F. Fleury, E.Sanchez-Palencia // Bull.sci/math. – 1986. – 2. – P.149-176.

77 . *Gaudiello A.* Homogenization of highly oscilating boundaries with strongly contrasting diffusivity /A. Gaudiello, A. Sili // SIAM J. Math. Abal. – 2015. – 47(3). – P. 1671–1692.

78 . *Glowinski R.*, Numerical analysis of variational inequalities / R. Glowinski, J. L. Lions , R. Tre' moli$\grave{e}$ res // Studies in Mathematics and its Applications. North- Holland, Amsterdam: 1981. – V.8 – 776 p.

79 . Handbook of Zinc Oxide and Related Matirial. Devices and Nano-Engineering, Edited by Zhe Chuan Feng, CRC Press, Taylor , Francis Group: 2012 – 1008 p.

80 . *Kazmerchuk Iu. A.* Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction / Iu. A. Kazmerchuk, T. A. Mel'nyk // Preprint. – 2008. – arXiv:0807.2160v.-13 p.

81 . *Kazmerchuk Iu. A.* Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction / Iu. A. Kazmerchuk, T. A. Mel'nyk // Nonlinear oscillations – 2009. V. 12, No. 1. – P. 44-58.

82 . *Kovalevsky A.A.* G -compactness of sequence of nonlinear elliptic high order operators corresponding to Neumann problems in variable domains / A.A.

Kovalevsky //Доповіді Національкої академії наук України.– 1997.– V.5.– P.21-24.

83 . *Kovalevsky A.A.* On strong G-convergence of nonlinear elliptic high order operators corresponding to Dirichlet problems in variable domains / A.A. Kovalevsky //Доповіді Національкої академії наук України.– 1997.– V.6.– P.27-30.

84 . *Kovalevsky A.A.* Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains / A.A.Kovalevsky, O.A. Rudakova // Differ. Equ. Appl.– 2009. – 1 no. 4. – P.517--559.

85 . *Lavrentovich Y. I.* The potential of application of new nanostructural materials of for degradation of pesticides in water / Y. I. Lavrentovich, T. V. Knyzkova, V. V. Pidlisnyuk // Proceedings of the 7-th International HCH and Pesticides Forum "Towards the estaplishment of an absolute POPS pesticeds stockpile fund for Central and Eastern European countries and new independent states". June 5-7, 2003.– Kyiv. – P. 167-169.

86 . *Lenczner M.* Multiscale model for atomic force microscope array mechanical behavior. / M. Lenczner // Applied Physics Letters: 2007. – Vol. 90 Issue 9 (9091908)

87 . *Lions J. L.* Variational inequalities / J. L. Lions, G. Stampaccia // Comm. Pure Appl. Math. 1976 – V. 20 – P. 493--519.

88 . *Lyshevshi S.L.* Mems and Nems: Systems, Devices, and Structures / S.L. Lyshevshi // CRC Press, Boca Raton, FL: 2002. – 461 p.

89 . *Mel'nyk T. A.* Homogenization of a boundary value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1 / T. A. Mel'nyk // Math. Models Meth. Appl. Sci. – 2008.– Vol. 31, No. 9. – P. 1005-1027.

90 . *Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1 / T. A. Mel'nyk // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2000. – Vol. 23. – P. 321-346.

91 . *Mel’nyk T. A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Fourier problem in a thick multi-level junction / T. A. Mel'nyk // Ukranian Math. J. – 2006. – 58, № 2. – С. 220–243.

92 . *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction / T. A. Mel'nyk // Z. Anal. und Anwendungen. – 1999. – V. 23, – P. 953-975.

93 . *Mel'nyk T. A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction / T. A. Mel'nyk // Nonlinear Oscillations. – 2001. – V. 4, No. 1. – P. 91-105.

94 . *Mel'nyk T. A.* Eigenmodes and pseudo-eigenmodes of thick multi-level junctions / T. A. Mel'nyk // Proceedings of the International Conference "Days on Diffraction – 2004". – 2004. – P. 51-52.

95 . *Mel'nyk T. A.*, Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of type 3:2:1 / T. A. Mel'nyk // Ukr. Math. J. - – 2000. – V 52, No. 11 – P. 1737-1748.

96 . *Mel'nyk T. A.* Homogenization of Neumann-Fourier problem in a think two-level junction of type 3:2:1/ T.A.Mel'nyk, P.S.Vashchuk // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. 2006. – Vol. 1, №3, – P. 318-337.

97 . *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction of type 3:2:1 / T. A. Mel'nyk, Iu. A. Nakvasiuk // Carpathian mathematical publications – 2012. – Vol. 4, No. 1, – P. 90-110.

98 . *Mel'nyk T. A.* Homogenization of a semilinear variational inequality in a thick multi-level junction /T. A. Mel'nyk, Iu. A. Nakvasiuk // Journal of Inequalities and Applications – 2016. – V. 2016 № 104 – P. 1-22, DOI: 10.1186/s13660-016-1051-y.

99 . *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick junction and boundary integral equations for the homogenized

problem / T. A. Mel'nyk, Iu. A. Nakvasiuk, W. L.Wendland // Mathematical methods in the applied science – 2011. – T. 34, No. 7 – P. 758-775.

100 . *Mel'nyk T. A.* The asymptotic structure of the spectrum in the problem of harmonic oscillations of a hub with heavy spokes [in Russian] . / T. A. Mel'nyk, S. A. Nazarov // Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk. – 1993. – Vol. 333, No. 1 – P. 13-15; English transl.: Russ. Acad. Sci., Dokl., Math. – 1994 . Vol.48, No. 3. – P. 428-432.

101 . *Mel'nyk T. A.* Asymptotic approximation for the solution to a semi-linear parabolic problem in a thick junction with the branched structure / T. A. Mel'nyk // Journal of Mathematical Analysis and Applications – 2015. – Volume 424, Issue 2. – P. 1237–1260.

102 . *Mel'nyk T. A.* The asymptotics of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the ``dense-comb'' type / T. A. Mel'nyk, S. A. Nazarov // in Russian . , Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo. – 1996. – Vol. 19. – P. 138-173; English transl.: J. Math. Sci., New York – 1997. – Vol. 85, No. 6. – P. 2326-2346.

103 . *Mel'nyk T. A.* Asymptotics structure of the spectrum of the Neumann problem in a comb-like domain / T. A. Mel'nyk, S. A. Nazarov // C.r. Acad sci.Ser.1. – 1994. – 319. – P. 1343-1348.

104 . *Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of the Neumann problem on the junction of a body and thin heavy rods [in Russian] . / T. A. Mel'nyk, S. A. Nazarov // Algebra Anal. – 2000. Vol. 12, No. 2, P. 188-238; English transl.: St. Petersb. Math. J.– 2001. – Vol. 12, No. 2 – P. 317-351.

105 . *Nakvasiuk Iu. A.* Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick plane junction / Iu. A. Nakvasiuk// Humboldt Kolleg "Mathematics and life sciences: possibilities, interlacements and limits", 05-08 August 2010, Kyiv: Book of abstracts. – Kyiv, 2010 – P.71.

106 . *Nazarov S. A.* Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions I, II [in Russian]. / // Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo.

– 1995. Vol.18. – P. 1-78; 1997. – Vol. 2. – P. 155-196; English transl.: J. Math. Sci., New York. – 1996. – Vol. 80, No. 5. – P. 1989-2034; 1999. – Vol. 97, No. 3. – P. 4085-4108.

107 . *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations / C.V. Pao// Plenum Press, New York. – 1992.

108 . *Sanchez-Hubert J* Vibration and Coupling of Continuous Systems / J. Sanchez-Hubert, E.Sanchez-Palencia // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

109 . *Sandrakov G.V.* Homogenization of variotional inequalities for non-linear diffusion problems in perforated domains /G.V. Sandrakov // Izvestiya Mathematics. – 2005. – № 69, No. 5. – P.1035-1059.

110 . *Shaposhnikova T. A.* Homogenization problem for a parabolic variational inequality with constraints on subsets situated on the boundary of the domain / T.A. Shaposhnikova, M.N. Zubova // Networks and Heteregeneous Media. – 2008. – 3. No3. – P. 1-20.

111 . *Showalter R. E.*, Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations / R.E. Showalter // Mathematical Surveys and Monographs American Mathematical Society. – 1997. – V. 49.

112 . *Signorini A.* Questioni di elasticita non linearizzata o semilinearizzata /A. Signorini // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – 18.

113 . *Uspenskii S.V.* The traces of functions the Sobolev space $W_p^{l_1,\dots,l_n}$ on smooth surfaces. / S.V.Uspenskii / Siberian Mathematical Journal. – 1972. – 13. – P. 298--313.

114 . *Zubova M.N.* Homogenization of Some Variational Inequalities with Restrictions on Subsets ε-Periodically Locater Along the Domain Boundary / M.N. Zubova, T.A. Shaposhnikova // Moscow University Mathematics Bulletin - 2007. - Vol. 62. No 2.- P. 67-77.

115 . *Zubova M.N.* Homogenization of the Variational Inequaliti Biharmonic Operator with Constraints on Subsets Arranged ε-Periodically along Manifolds / M.N. Zubova // Doklady Mathematics - 2007. - Vol. 75. No 3.- P.367-369.

116 . *Zubova M.N.* Homogenization of the Variational Inequalities for a Biharmonic Operator with Constraints on Subsets ε-Periodically along a Manifolds of Large Dimentional / M.N. Zubova // Moscow University Mathematics Bulletin - 2007. - Vol. 62. No 5.- P. 192-303.