

В. Лоцицкий, д-р физ.-мат. наук,  
 И. Яковкин, асп.,  
 Е. Кравченко, студ.  
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,  
 В. Тарашчук, канд. физ.-мат. наук  
 Крымская астрофизическая обсерватория, пгт Научный, Украина

### СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЙ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШКАХ

Приведено сравнение возможностей трех методов измерений магнитных полей по эффекту Зеемана, которые чаще всего используются при изучении солнечных вспышек, а именно, метода "центров тяжести", расщепления пиков параметра Стокса V и анализа бисекторов профилей  $I \pm V$ . Кратко представлены новые данные о магнитном поле в лимбовой солнечной вспышке 14 июля 2005 г. По данным в линии H $\alpha$ , усредненное магнитное поле  $B_{\text{eff}}$  на момент 12:02 UT достигало  $850 \pm 100$  Гс на высоте 16 Мм. Для нескольких мест вспышки найдена слабая поляризация разных знаков на расстояниях 1,8–2,2 Å от центра линии, которая может указывать на сверхсильные локальные магнитные поля в диапазоне приблизительно 85–100 кГс.

Ключевые слова: Солнце, солнечная активность, солнечные вспышки, эффект Зеемана, методы измерений, сильные и сверхсильные магнитные поля.

V. Lozitsky, Dr Hab.,  
 I. Yakovkin, PhD Student,  
 E. Kravchenko, Student  
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,  
 V. Tarashchuk, PhD  
 Crimean Astrophysical Observatory, Nauchnij, Ukraine

### COMPARISON OF DIFFERENT METHODS FOR MAGNETIC FIELD MEASUREMENTS IN SOLAR FLARES

We present a comparison of possibilities of three methods of magnetic field measurements using the Zeeman effect, namely, method of "center of gravity", splitting of Stokes V peaks and analysis of bisectors of  $I \pm V$  profiles. We note that first method gives very averaged data in form of effective magnetic field  $B_{\text{eff}}$  which presents the lower limit of local magnetic field in spatially unresolved structures. Splitting of Stokes V peaks  $\Delta\lambda V$  can present local magnetic field B, but only in a case when this splitting exceeds considerably the splitting of peaks of the Stokes I gradient  $dI/d\lambda$ . Analysis of bisectors of  $I \pm V$  profiles presents simple method for rapid diagnostics of magnetic field inhomogeneity. In particular, in case of really weak and homogeneous magnetic field, bisectors of  $I + V$  and  $I - V$  profiles should be parallel to each other. If these bisectors are non-parallel having some extrema, this could be an evidence of hidden presence of strong spatially unresolved magnetic field. Last method is very subtle but needs careful accounting of instrumental effects in line profiles. In this paper, we present also new data related to magnetic fields in limb solar flare of 14 July 2005. Spectral observations of this flare were carried out with the Echelle spectrograph of the Horizontal Solar Telescope of the Astronomical Observatory of Taras Shevchenko National University of Kyiv. In order to measure the magnetic fields in this flare,  $I \pm V$  profiles of H $\alpha$  line were studied. It was found that effective magnetic field  $B_{\text{eff}}$  in the flare reached  $850 \pm 100$  G on height 16 Mm. However, the spectral evidences to yet stronger local fields of 104 - 105 G range were found. In particular, for several places of the flare, a weak circular polarization of opposite signs was found in line wings on distances of 1.8-2.2 Å from line center. If this polarization to interpret as manifestations of the Zeeman effect, the corresponding magnetic field is  $\approx 85-100$  kG.

Key words: Sun, solar activity, solar flares, Zeeman effect, methods of measurements, strong and superstrong magnetic fields.

УДК 524.7

О. Александров, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.  
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

### КОМПЛЕКСНИЙ ФОРМАЛІЗМ У ТЕОРІЇ ГРАВІТАЦІЙНОГО ЛІНЗУВАННЯ І ГЕОМЕТРІЯ КАУСТИК

У комплексному формулюванні теорії гравітаційного лінзування із застосуванням параметризації критичних кривих (Witt, 1990) розроблено загальний метод переходу від локальних координат, пристосованих до точки на каустіці, до глобальних вихідних координат. Метод дозволяє виразити локальні характеристики лінзи через похідні від лінзового потенціалу у вихідних координатах. У цій роботі проаналізовано формулу для кривини каустики, знайдено умову існування точок перегину й умови існування критичних зображень для точок з опуклого або вгнутого боку каустики. Розглянуто умови того, що критична точка є касповою, а також додатності і від'ємності каспів. Властивості каустик проілюстровано на прикладах лінзи Чанг – Рефсдала і спрощеній моделі клампа темної матерії.

Ключові слова: гравітаційне лінзування, комплексне формулювання, критичні криві і каустики.

**1. Вступ.** Найяскравіші прояви гравітаційного лінзування, такі як, кратність зображень і значне збільшення блиску, спостерігаємо, коли джерело міститься поблизу каустики гравітаційно-лінзової системи (ГЛС) [1]. Каустики – це образи критичних точок (особливостей) лінзового відображення (lens mapping), яке встановлює зв'язок між координатами зображення, що лежить у площині лінзи, і координатами більш віддаленого джерела. Згідно з добре званою теоремою Уїтні диференційоване відображення однієї площини на іншу може мати лише два типи стійких особливостей – складки і зборки (напр. [1, п. 6.2.3; 2, с. 328]). Складкам відповідають регулярні точки каустики кривої, а зборкам – так звані каспи (вістря або роги) каустик. Складніші особливості можуть стійко існувати, коли розглядається не одне відображення, а сім'я відображень, що параметризована кількома параметрами. Але зрозуміло, що складки і зборки становлять головний інтерес для теорії гравітаційного лінзування.

Каустики розділяють області площини джерел, які мають різну кількість зображень. Коли точкове джерело наближається до каустики з того боку, якому відповідає більше зображень (так званий додатний бік), деякі зображення прямують до відповідної критичної точки. Причому їхня яскравість необмежено зростає. Ці зображення ми називаємо критичними. Після того як джерело перетне каустику два критичні зображення зникають.

У першому наближенні каустику локально розглядають як пряму лінію. Але розгляд більших областей, або більш тонких деталей процесу лінзування, потребує врахування кривини каустики. Зокрема, кривина каустики необмежено

зростає у разі наближення до каспа. Що ж ми називаємо геометрією каустики? Це насамперед кривина як функція на каустиці, точки перегину, точки повернення (каспи) і їхні типи, умови існування критичних зображень точок із того чи іншого боку каустики.

Коли джерело міститься поблизу каустики, взаємні положення, інтенсивність, полярність і часова затримка найяскравіших (критичних) зображень визначаються властивостями каустики. Тому, використовуючи ті чи інші моделі лінз, доцільно добре розуміти структуру відповідних каустик і поведінку зображень. Зрозуміло, що важливість тонких деталей ГЛС значно зростає, якщо стане можливим спостерігати за динамікою окремих зображень. Зауважимо, що більшість питань геометрії каустик так чи інакше розглядалися у літературі, зокрема у монографіях [1, 2]. Головна відмінність нашої роботи – розроблення підходу, який дозволяє визначати геометричні властивості у довільній точці каустики у вихідних координатах, в яких задано лінзове відображення.

Наш розгляд спирається на комплексне формулювання теорії гравітаційного лінзування. Крім параметризації критичних кривих і каустик, яка у цьому підході виникає цілком природно [3], наведемо переваги комплексного формулювання. Дослідження локальних властивостей лінзового відображення в околі критичної точки спирається на його тейлорівський розклад у спеціальній системі координат, пристосованій до напрямку каустики. Коефіцієнти однорідних членів такого розкладу у сукупності утворюють тензор стосовно обертання системи координат. Саме комплексифікація площини дозволяє виконувати її повороти і відповідні перетворення цих тензорів у найекономніший спосіб.

У другому розділі викладено основи комплексного підходу до теорії лінзування, у третьому розглядається зв'язок локальних координат, пристосованих до точки на каустиці, з глобальними вихідними координатами. Четвертий і п'ятий розділи присвячено власне геометрії каустики. Нарешті у шостому розділі застосування знайдених формул ілюструються на прикладах лінзи Чанг – Рефсдала і моделі клампа темної матерії.

**2. Комплексний формалізм у теорії гравітаційного лінзування.** Багато питань теорії гравітаційного лінзування зручніше розглядати у комплексному формулюванні [1–3], при якому положення джерела характеризується комплексною координатою  $\zeta = Y_1 + iY_2$ , а положення зображення – координатою  $z = X_1 + iX_2$ . Досить докладно комплексний підхід до теорії гравлінування подано в [4]. Тут ми нагадуємо ті співвідношення, які необхідні для повноти викладення.

Модель гравітаційної лінзи задається лінзовим потенціалом – дійсною функцією  $\Psi(z, \bar{z})$ . Рівняння лінзи, або лінзове відображення, має вигляд

$$\zeta = z - 2\Psi_{,z\bar{z}}. \tag{1}$$

Тут і далі індексами після коми ми позначаємо частинні похідні за відповідними змінними. Зауважимо, що при диференціюванні змінні  $z$  і  $\bar{z}$  розглядаються як незалежні, і це ніяк не суперечить тому, що вони є комплексно-спряженими. Це так звані похідні Віртингера, хоча більш слушно їх пов'язувати з ім'ям А. Пуанкаре ([https://en.wikipedia.org/wiki/Wirtinger\\_derivatives](https://en.wikipedia.org/wiki/Wirtinger_derivatives)). Також слід відмітити, що точніше кажучи, рівняння (1) стосується гравітаційно-лінзової системи, яка містить на певних відстанях лінзу і джерело. Коли враховують можливість розташування джерел на суттєво різних відстанях, то лінзове відображення визначається трохи інакше [5].

Потенціал задовольняє рівняння

$$2\Psi_{,z\bar{z}} = \kappa(z, \bar{z}), \tag{2}$$

де  $\kappa(z, \bar{z})$  – нормована поверхнева густина маси в лінзі. Функцію  $\Gamma(z, \bar{z}) = 2\Psi_{,z\bar{z}}$  називають комплексним зсувом, а її модуль  $\gamma = |\Gamma|$  – зсувом.

Як було зазначено, найяскравіші прояви гравітаційного лінзування пов'язані з існуванням критичних точок, які визначаються з умови рівності нулю якобіана

$$J(z, \bar{z}) = (1 - \kappa)^2 - \gamma^2 \tag{3}$$

лінзового відображення  $\zeta(z, \bar{z})$ . У загальному випадку критичні точки утворюють одну або кілька кривих, що є розв'язками рівняння  $J(z, \bar{z}) = 0$ . Образи критичних кривих при відображенні (1) – це каустики. Для скорочення введемо позначення  $\sigma = 1 - \kappa$ . Коли  $\kappa < 1$ , критичні точки визначаються рівнянням  $\sigma = \gamma$ , а при  $\kappa > 1$  у критичних точках  $\sigma = -\gamma$ . Надалі покладемо, що

$$\Gamma = \varepsilon \gamma e^{2i\varphi}, \quad \varepsilon = \begin{cases} -1, & \kappa < 1 \\ +1, & \kappa > 1 \end{cases} \tag{4}$$

Таким чином при  $\kappa > 1$  кут  $2\varphi$  дорівнює  $\arg(\Gamma)$ , а при  $\kappa < 1$  відрізняється від нього на  $\pi$ . Тепер координати критичних точок задовольняють рівняння  $\sigma = -\varepsilon \gamma$ . З рівняння (4) отримуємо (неявну) параметризацію критичних кривих параметром  $\varphi$ . А саме:

$$\Gamma(z, \bar{z}) = -\sigma(z, \bar{z}) e^{2i\varphi}. \tag{5}$$

Завдяки лінійному відображенню ця параметризація переноситься також на каустики. Зокрема, знайдемо вектор дотичний до каустики. Маємо

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = \zeta_{,z} \frac{dz}{d\varphi} + \zeta_{,\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\varphi} = \sigma \frac{dz}{d\varphi} - \Gamma \frac{d\bar{z}}{d\varphi}. \quad (6)$$

Далі внаслідок (5) на каустиці

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = \sigma e^{i\varphi} \left( \frac{dz}{d\varphi} e^{-i\varphi} + \frac{d\bar{z}}{d\varphi} e^{i\varphi} \right). \quad (7)$$

Тут у дужках маємо дійсну величину і бачимо, що кут  $\varphi$  з точністю до  $\pi$  збігається з полярним кутом дотичної до каустики. Таким чином у межах комплексного підходу параметризація каустик відбувається цілком природно. Уперше вона була запропонована в роботі [3].

**3. Розкладання лінійного відображення в ряд Тейлора в дійсних і комплексних змінних.** Якщо деякі маси, що входять до складу гравітаційної лінзи, моделюються точковими тілами, то в цих точках потенціал  $\Psi$  стає сингулярним. В інших точках, де він є гладкою функцією, для вивчення локальних властивостей лінзи та поведінки зображень можна застосовувати наближення поліномами Тейлора. Зокрема такий підхід використовується для дослідження координат зображень, їх підсилення та часової затримки в околах критичних точок. Знайти координати зображень за координатами джерела означає те саме, що певним чином обернути лінійне відображення. Проте у критичній точці вироджується його диференціал, тому така задача стає досить нетривіальною. У базовому наближенні відповідні формули отримано в роботах, які вже давно стали класичними (див. [1]). Вони носять асимптотичний характер, тобто справджуються тим точніше, чим ближче джерело до каустики. Але ці формули не дають уяви про їхню точність. У подальшому були розроблені підходи, які дозволили будувати послідовні наближення за степенями допоміжного параметра. Виявилось, що в обох випадках (складка або касп) можна таким чином увести параметр  $t$  близькості джерела до каустики, що задача пошуку координат зображень може бути розв'язана у формі рядів по степенях цього параметра [6–10]. Причому базові (асимптотичні) формули виконують роль нульового наближення. На цьому шляху у випадку точкового джерела в околі складки були знайдені координати, коефіцієнти підсилення і часові затримки критичних зображень у першому і другому наближеннях [6–14]. У випадку каспа ці ж величини були отримані у першому наближенні для загального лінійного відображення і у другому – для так званого симетричного каспа [10, 11, 14–17]. Також на базі цих розкладів у другому наближенні отримано криві підсилення блиску для протяжних джерел із різним розподілом поверхневої яскравості у випадку перетину ними каустики-складки [8–12, 18]. Вихідною ланкою цих побудов є розклад лінійного потенціалу в ряд Тейлора в околі критичної точки, через коефіцієнти якого алгебраїчно виражаються коефіцієнти розкладів по степенях  $t$ . Наслідком виродженості диференціала є те, що для коректного розгляду другого наближення за параметром  $t$  у певних випадках необхідно враховувати деякі доданки п'ятого і навіть шостого порядку в розкладі потенціалу.

Одна з проблем, що потребувала врахування поправок до коефіцієнта підсилення і часу затримки критичних зображень – це проблема аномальних відношень потоків, яка пов'язана з дослідженнями структури галактик-лінз на малих масштабах [19–21]. Роль поправок першого та другого порядків у формулі для підсилення критичних зображень джерела, що міститься біля каустики-складки, досліджувалася також у [22].

Як зазначено вище, в основі цих робіт лежить розклад лінійного відображення в ряд Тейлора по степенях локальних координат, початок яких розташований у критичній точці  $z_{cr}$ . Причому напрямком координатних осей певним чином прив'язується до напрямку каустики у відповідній точці  $\zeta(z_{cr})$ . Тому, якщо ми хочемо вивчати зміну розглядуваних величин уздовж критичної кривої або каустики, необхідно навчитися переходити від вихідних координат, в яких задано відображення (1), до локальних координат, пристосованих до критичної точки. Саме у цьому моменті стає у пригоді комплексне формулювання.

Розглянемо зв'язок між дійсним і комплексним розкладами Тейлора. Далі функції типу  $f(z, \bar{z})$  будемо позначати заради скорочення як  $f(z)$ . Коефіцієнти розкладу по степенях  $z$  і  $\bar{z}$  звичайним чином виражаються через послідовні похідні Віртингера. З формули (1) знаходимо, що розклад лінійного відображення біля точки  $z = u$  з точністю, скажімо, до третього порядку має вигляд

$$\begin{aligned} \zeta(u+z) - \zeta(u) = z - 2 \left[ \Psi_{,z\bar{z}} z + \Psi_{,\bar{z}\bar{z}} \bar{z} + \frac{1}{2} (\Psi_{,zzz} z^2 + 2\Psi_{,z\bar{z}\bar{z}} z\bar{z} + \Psi_{,\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (\Psi_{,zzz\bar{z}} z^3 + 3\Psi_{,z\bar{z}\bar{z}\bar{z}} z^2\bar{z} + 3\Psi_{,\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}} z\bar{z}^2 + \Psi_{,\bar{z}\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^3) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Похідні потенціалу в цій формулі обчислюють звичайно при  $z = 0$ . Зауважимо, що перехід до комплексних координат дозволяє зокрема виокремити члени, що обумовлені густиною маси  $\kappa \neq 0$  на промені зору від тих, що спричинені іншими масами. Усі змішані похідні від потенціалу зводяться до похідних від  $\kappa$ .

У лінійному наближенні з урахуванням формул (2) і (4) маємо

$$\Delta\zeta = (1 - \kappa)z - \Gamma\bar{z} = \sigma z - \epsilon\gamma e^{2i\varphi}\bar{z}.$$

Далі доцільно зробити одночасний поворот площин джерел і зображень:  $\zeta e^{-i\phi} = \omega = y_1 + iy_2$  і  $z e^{-i\phi} = w = x_1 + ix_2$ . У нових координатах

$$\Delta\omega = \sigma w - \varepsilon \gamma \bar{w},$$

інші доданки з формули (8) зберезуть свій вигляд уже в нових координатах:

$$\begin{aligned} \omega(u + w e^{i\phi}) - \omega(u) &= \sigma w - \varepsilon \gamma \bar{w} - \left[ (\Psi_{,ww\bar{w}} w^2 + 2\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}} w\bar{w} + \Psi_{,\bar{w}\bar{w}\bar{w}} \bar{w}^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} (\Psi_{,www\bar{w}} w^3 + 3\Psi_{,ww\bar{w}\bar{w}} w^2\bar{w} + 3\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}\bar{w}} w\bar{w}^2 + \Psi_{,\bar{w}\bar{w}\bar{w}\bar{w}} \bar{w}^3) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо точка, біля якої виконується розклад, є критичною, то  $\Delta\omega = 2\sigma x_1$ . Відсутність у цьому виразі залежності від однієї з координат наглядно свідчить про критичність опорної точки – уявна частина приросту  $w$  не дає внеску до диференціала  $d\omega$ . У цих координатах вектор (6), дотичний до каустики, має дійсне значення, тобто є паралельним до осі  $y_1$ .

Саме в координатах, початок яких на площині зображень міститься у критичній точці і на площині джерел у відповідній точці на каустиці, та повернутих таким чином, що перша вісь є дотичною до каустики, досліджується поведінка зображень в околі критичних точок. У цьому разі застосовують розклад лінійного відображення в дійсних змінних і для частинних похідних вводять скорочені позначення. З точністю, що є достатньою для розгляду всіх перерахованих величин, цей розклад подано в [16, 17]. Тут ми його наводимо з точністю до членів третього порядку:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sigma x_1 + a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 + 2b_2 x_1 x_2 + c_3 x_1^3 - 3c_1 x_1 x_2^2 - d_1 x_2^3 + 3d_2 x_1^2 x_2 + \dots \\ y_2 &= b_2 x_1^2 - b_1 x_2^2 - 2a_2 x_1 x_2 + d_2 x_1^3 - 3d_1 x_1 x_2^2 + c_2 x_2^3 - 3c_1 x_2 x_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Коефіцієнти мають такий сенс:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\Psi_{,111}/2; \quad a_2 = \Psi_{,122}/2; \quad b_1 = \Psi_{,222}/2; \quad b_2 = -\Psi_{,112}/2; \quad c_1 = \Psi_{,1122}/6; \\ c_2 &= -\Psi_{,2222}/6; \quad c_3 = -\Psi_{,1111}/6; \quad d_1 = \Psi_{,1222}/6; \quad d_2 = -\Psi_{,1112}/6; \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Індексами після коми позначено частинні похідні по координатах  $(x_1, x_2)$ . Позначення введено так, що при  $k = 0$  маємо  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2 = c_3, d_1 = d_2$ .

Установимо зв'язок коефіцієнтів такого розкладу з похідними Віртингера від потенціалу. Для цього потрібно замінити похідні таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = i \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right).$$

Наприклад, наведемо вирази величин, що є суттєвими у подальшому:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^3 \Psi = -\text{Re}(\Psi_{,www} + 3\Psi_{,ww\bar{w}}), \\ a_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^2 \Psi = -\text{Re}(\Psi_{,ww\bar{w}} - \Psi_{,w\bar{w}\bar{w}}), \\ b_1 &= -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^3 \Psi = \text{Im}(\Psi_{,www} - 3\Psi_{,ww\bar{w}}), \\ b_2 &= -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \Psi = \text{Im}(\Psi_{,ww\bar{w}} + \Psi_{,w\bar{w}\bar{w}}), \\ c_2 &= -\frac{1}{6} \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^4 \Psi = -\frac{1}{3} \text{Re}(\Psi_{,wwww} - 4\Psi_{,ww\bar{w}\bar{w}} + 3\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}\bar{w}}). \end{aligned} \quad (12)$$

Підсумуємо алгоритм, запропонований для того, щоб виразити коефіцієнти розкладу (10) лінійного відображення у локальних (адаптованих до точки на каустиці) координатах через вихідні координати.

Похідні (11) від потенціалу  $\Psi$  виражаємо через похідні Віртингера аналогічно (12):

$$\Psi_{,m \dots 122 \dots 2} = i^n \left( \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^n \Psi = i^n \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \frac{m!n!}{k!(m-k)!l!(n-l)!} \Psi_{, \dots \underbrace{w \dots w}_{k+1} \dots \underbrace{\bar{w} \dots \bar{w}}_{n+m-k-l} \dots }.$$

Похідні по комплексних координатах  $w$  і  $z$  зв'язані простими співвідношеннями:

$$\partial/\partial w = e^{i\varphi} \partial/\partial z, \quad \partial/\partial \bar{w} = e^{-i\varphi} \partial/\partial \bar{z}.$$

Звідки маємо

$$\Psi_{\substack{ww\dots w \\ M}} \Psi_{\substack{\bar{w}\bar{w}\dots\bar{w} \\ N}} = \Psi_{\substack{zz\dots z \\ M}} \Psi_{\substack{\bar{z}\bar{z}\dots\bar{z} \\ N}} e^{i(M-N)\varphi}.$$

Для експоненційного множника з рівняння (5) знаходимо, що на критичній кривій

$$e^{i(M-N)\varphi} = \left( -\frac{\Gamma(z)}{\sigma(z)} \right)^{\frac{M-N}{2}}.$$

**4. Кривина каустики.** Нехай  $\zeta(t)$  – комплексна параметризована крива і  $\zeta' = \frac{d\zeta}{dt} = \rho e^{i\chi}$ , тут  $\rho$  і  $\chi$  відповідно модуль и аргумент  $\zeta'$ . Елемент довжини вздовж кривої  $ds = \sqrt{d\zeta d\bar{\zeta}}$ . Будемо вважати, що параметр  $s$  зростає разом із  $t$ , тоді одиничний дотичний вектор  $\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\zeta'}{\sqrt{\zeta'\bar{\zeta}'}} = \frac{\zeta'}{\rho} = e^{i\chi}$ ,  $\frac{ds}{dt} = \rho$ , одиничний вектор нормалі –  $n = i\dot{\zeta}$ .

Кривина  $k$  кривої за визначенням  $k = \frac{d\chi}{ds}$ . Маємо

$$k = \frac{\chi'}{\rho}. \quad (13)$$

Застосуємо цю формулу до каустики, параметризованої кутом  $\varphi$ . У цьому випадку з формули (7)

$$\rho = \left| \frac{d\zeta}{d\varphi} \right| = \left| \sigma \left( \frac{dz}{d\varphi} e^{-i\varphi} + \frac{d\bar{z}}{d\varphi} e^{i\varphi} \right) \right|, \quad \chi = \varphi + \tilde{C}, \quad (14)$$

де  $\tilde{C}$  може дорівнювати нулю або  $\pi$  залежно від знаків  $\sigma$  і  $z'$ . Таким чином знаходимо, що модуль похідної  $d\zeta/d\varphi$  дорівнює радіусу кривини каустики у відповідній точці.

Щоб виразити  $dz/d\varphi$  через лінзове відображення продиференціюємо рівняння критичної кривої (5) і перейдемо до змінної  $w$ . Знаходимо

$$(\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}} - \Psi_{,w\bar{w}w}) z' e^{-i\varphi} + (\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}\bar{w}} - \Psi_{,w\bar{w}\bar{w}w}) \bar{z}' e^{i\varphi} = -i\sigma. \quad (15)$$

Далі для скорочення формул доцільно похідні по  $w$  і  $\bar{w}$  виразити через коефіцієнти розкладу (10), скориставшись такими співвідношеннями

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (16)$$

Маємо  $\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}} = \frac{1}{4} [a_2 - a_1 + i(b_2 - b_1)]$ ,  $\Psi_{,w\bar{w}\bar{w}\bar{w}} = -\frac{1}{4} (a_1 + 3a_2 + i(b_1 + 3b_2))$ .

Підставимо ці вирази в (15) і покладемо

$$z' e^{-i\varphi} = R + iI. \quad (17)$$

Знаходимо

$$I = -\frac{a_2}{b_1} R, \quad R = \frac{\sigma b_1}{b_1 b_2 + a_2^2}.$$

Тепер для вектора, що є дотичним до критичної кривої, отримуємо

$$z' = \frac{\sigma(b_1 - ia_2)}{b_1 b_2 + a_2^2} e^{i\varphi}. \quad (18)$$

Зауважимо, що градієнт якобіана (3) на критичній кривій (який є ортогональним до неї) має такий вираз:

$$\nabla J = -4\sigma(a_2 + ib_1)e^{i\varphi}.$$

Нарешті з формул (14, 13) знаходимо, що кривина каустики дається виразом

$$k = \left| \frac{b_1 b_2 + a_2^2}{2\sigma^2 b_1} \right|. \quad (19)$$

Іншим методом аналогічну формулу отримано в роботі [24], також вона узгоджується з параболічним наближенням рівняння каустики ([1], с. 188).

Додатність кривини (19) свідчить, що при зростанні параметра  $\varphi$  дотичний вектор повертається проти годинникової стрілки, тобто вліво. З формул (7) і (18) знаходимо

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} e^{-i\varphi} = \sigma \left( \frac{dz}{d\varphi} e^{-i\varphi} + \frac{d\bar{z}}{d\varphi} e^{i\varphi} \right) = \frac{2\sigma^2 b_1}{b_1 b_2 + a_2^2}. \quad (20)$$

Це проєкція дотичного вектора  $\zeta'$  на вісь  $y_1$ , що паралельна до нього. Отже знак цієї величини визначає, чи збігається напрямок осі  $y_1$  із напрямком зростання  $\varphi$ . Як відомо (див. наприклад [12, 14]) з рівнянь (10) випливає, що критичні зображення відповідають точкам з того боку каустики, де виконується умова  $b_1 y_2 < 0$  (додатний бік). Разом із формулою (20) (враховуючи, що система координат є правою) це приводить до висновку: коли величина  $D = (b_1 b_2 + a_2^2)$  є додатною, критичні зображення відповідають точкам з опуклого боку каустики, якщо ж від'ємною – то з увігнутого, при  $D = 0$  маємо точку перегину. Тобто існує три види особливостей типу складки залежно від знаку величини  $D$ . Це узгоджується з визначенням додатного і від'ємного боків каустики [1, с. 189]. Сформульований там критерій додатності є умовою на координати точок в околі каустики, тоді як ми пов'язуємо цей критерій із властивостями каустики. Зауважимо, що у деяких широко застосовуваних моделях гравітаційних лінз-галактик говорять про тангенціальну і радіальну каустику. Причому перша з них є додатною, а друга – від'ємною.

Враховуючи формули (11), а також співвідношення (2), яке можна подати у вигляді  $\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = 2\kappa$ , знаходимо, що  $D = b_1^2 + a_2^2 - b_1 \kappa_{,2}$ . Коли  $\kappa = 0$  (або  $\kappa = \text{const.}$ ), наприклад, у моделях із точковими масами,  $D > 0$ , і критичні зображення завжди відповідають точкам з опуклого боку каустики (див. також [1, с. 192]). Також у цьому випадку кривина каустики ніколи не обертається на нуль, отже, не існує точок перегину каустик. Нижче на прикладі буде показано, що в загальному випадку при  $\kappa \neq \text{const.}$  можуть існувати такі точки.

**5. Каспи.** У теорії кривих каспи (точки повернення) – це ті точки, в яких дотичний вектор обертається на нуль. Очевидно, що ця умова не залежить від вибору параметра. Треба зробити деяке застереження. Множина точок повернення, крім зборок, може містити особливості вищого порядку. Але, як уже зазначено вище, серед них стійкими є лише зборки. Тому ми не завжди будемо явно відрізняти точки повернення і зборки.

З формули (13) видно, що умова  $\zeta' \rightarrow 0$  еквівалентна умові  $k \rightarrow \infty$ . З іншого боку, з теорії особливостей диференційованих відображень відомо, що розклад (10) у загальному випадку відповідає околу складки, а при  $b_1 = 0$  – зборки. З рівняння (19) випливає, що остання умова еквівалентна тому, що в таких точках кривина каустики стає нескінченною. З формули (18) отримуємо ще одну ознаку, що характеризує критичні точки, які відповідають каспам. Спрямовуючи  $b_1$  до нуля, знаходимо, що вектор, дотичний до критичної кривої у касповій точці, є ортогональним до вектора, дотичного до каустики, а саме

$$z' = -i \frac{\sigma}{a_2} e^{i\varphi}.$$

Тепер з другого рівняння (12) отримуємо умову касповості у такому вигляді:

$$\text{Im}(\Psi_{,\bar{z}\bar{z}} e^{-3i\varphi} - 3\Psi_{,\bar{z}\bar{z}} e^{-i\varphi}) = 0. \quad (21)$$

Звичайно, має виконуватися рівняння (5).

Зауважимо, що при наближенні точки вздовж каустики до каспа  $b_1 \rightarrow 0$ , і рано чи пізно величина  $D = b_1 b_2 + a_2^2$  стає додатною, оскільки разом обертається на нуль параметри  $b_1$  і  $a_2$  можуть лише в нестійких особливих точках вищого порядку. Таким чином, у безпосередній близькості до каспа точки, яким відповідають критичні зображення, завжди перебувають усередині вістря. Утім, цього треба було очікувати з наочних ілюстрацій зборки.

Зупинимось ще на визначенні додатних і від'ємних каспів. У точці каспа пряма  $y_2 = 0$  (яку ми також називаємо віссю каспа) збігається зі спільною напівдотичною до двох гілок каустики, але та чи інша орієнтація осі  $y_1$  визначається співвідношенням параметрів розкладу (10). В основі розрахунків координат (а також підсилення і часу

затримки) критичних зображень точок поблизу каспа лежать розв'язки  $(x_{10}, x_{20})$  нульового (базового) наближення, що визначаються із системи рівнянь

$$\begin{aligned} 2\sigma x_{10} &= y_1 + a_2 x_{20}^2, \\ (c_2\sigma - a_2^2)x_{20}^3 - a_2 y_1 x_{20} - \sigma y_2 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

перш за все з кубічного рівняння для  $x_{20}$  [14–17]. Кожна точка на прямій  $y_2 = 0$  має одне зображення з  $x_{20}^{(1)} = 0$ , крім того, існують два зображення з  $x_{20}^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{a_2 y_1}{c_2\sigma - a_2^2}}$ , що визначені на тій півпрямій, на якій знак координати  $y_1$  збігається зі знаком виразу  $A = a_2(c_2\sigma - a_2^2)$ . Саме ця півпряма лежить усередині вістря і це визначає напрямок осі  $y_1$ . Два види каспів – додатний і від'ємний – відрізняються парністю критичних зображень [24, 1, 2]. У базовому наближенні якобіан лінзового відображення в околі каспа дорівнює  $J_0 = 2\left[3(c_2\sigma - a_2^2)x_{20}^2 - a_2 y_1\right]$ . Для трьох розглянутих розв'язків маємо  $J_0^{(1)} = -2a_2 y_1$ ,  $J_0^{(2,3)} = 4a_2 y_1$ . Знаходимо, що додатність чи від'ємність каспа визначається знаком виразу  $C = c_2\sigma - a_2^2$  [24]. Зауважимо, що для додатного каспа всередині вістря  $J_0^{(1)} < 0$ ,  $J_0^{(2,3)} > 0$ , для від'ємного – знаки протилежні.

Зазначимо, що внаслідок (22) величина  $C$  суттєво впливає на точність наближених формул в околі каспа.

#### 6. Приклади.

Лінза Чанг – Рефсдала. При  $\kappa = 0$ , наприклад для  $n$ -точкової лінзи, умова (21) спрощується і набуває вигляду

$$\text{Im}(\Psi_{,zzz} e^{3i\varphi}) = 0. \quad (22)$$

Проілюструємо застосування цього рівняння на прикладі моделі Чанг – Рефсдала точкової лінзи із зовнішнім полем [25]. Потенціал цієї моделі дається таким виразом [4]:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \ln(z\bar{z}) + \frac{\gamma_{ex}}{4} (z^2 + \bar{z}^2). \quad (23)$$

Тут  $\gamma_{ex}$  – параметр зовнішнього зсуву, який ми вважаємо додатним.

Лінзове відображення (1) має вигляд

$$\zeta = z - \gamma_{ex} \bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}. \quad (24)$$

Далі маємо  $\kappa = 2\Psi_{,z\bar{z}} = 0$ ,  $\sigma \equiv 1$  і  $\varepsilon = -1$ ,

$$\Gamma = 2\Psi_{,z\bar{z}} = \left(\gamma_{ex} - \frac{1}{\bar{z}^2}\right). \quad (25)$$

Рівняння критичної кривої (5) виглядатиме так:

$$\left(\gamma_{ex} - \frac{1}{\bar{z}}\right) = -e^{2i\varphi}.$$

Це рідкісний випадок, коли вдається отримати аналітичну параметризацію критичних кривих у явному вигляді. З попереднього рівняння локально маємо

$$\bar{z} = \left(\gamma_{ex} + e^{2i\varphi}\right)^{-1/2}. \quad (26)$$

Тут треба зробити таке зауваження. Якщо нас цікавить залежність  $z$  від параметра  $\varphi$  на всьому інтервалі  $[-\pi, \pi)$ , то слід ураховувати існування двох гілок квадратного кореня. Коли  $\gamma_{ex} > 1$ , то при зміні  $\varphi$  підкореневий вираз описує криву, що не охоплює точку розгалуження. Тоді замість (26) матимемо дві незв'язані критичні криві

$$z = \pm 1 / \sqrt{\gamma_{ex} + e^{-2i\varphi}}.$$

При  $\gamma_{ex} < 1$  перепишемо рівняння критичної кривої таким чином [26]:

$$z = e^{i\varphi} / \sqrt{\gamma_{ex} e^{2i\varphi} + 1}.$$

Тут знову точка розгалуження міститься поза областю, що охоплюється підкореневою кривою. У цьому випадку заміна загального знаку еквівалентна зсуву параметра на  $\pi$ . Формула (26) замість цього описує половину критичної кривої, а після заміни знаку – другу половину.

З рівнянь (21) і (26) отримуємо умову касповості

$$\text{Im}\left(e^{3i\varphi} / z^3\right) = \text{Im}\left(\gamma_{ex} e^{2i\varphi} + 1\right)^{\frac{3}{2}} = 0. \tag{27}$$

Далі елементарний геометричний розгляд показує таке [26]. При  $\gamma_{ex} < 1$  рівняння (27) виконується лише при  $2\varphi = 0$  або  $2\varphi = \pi$ . Тепер із (26) отримуємо координати чотирьох критичних точок, що відповідають каспам:

$$z_{(1)}^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_{ex}}}, \quad z_{(2)}^{\pm} = \pm \frac{i}{\sqrt{1 - \gamma_{ex}}}.$$

На рис. 1 показано каустики лінзи Чанг – Рефсдала, що відповідають значенням параметра  $\gamma_{ex} = 0,2$  і  $\gamma_{ex} = 0,8$ . Праворуч угорі показано відповідні критичні криві. Також видно, як змінюються вздовж координати  $Y_1$  величини  $b_1$  і  $C$ . Функція  $b_1(z)$  дорівнює нулю в точках, що відповідають каспам. Функція  $C(z)$  має від’ємні значення в точках  $z_{(1)}^{\pm}$  і додатні в точках  $z_{(2)}^{\pm}$  (уточнимо, що при  $\gamma_{ex} = 0,8$ ,  $C(z_{(2)}^{\pm}) = 0,032$ ), тобто додатні й від’ємні каспи чергуються між собою.

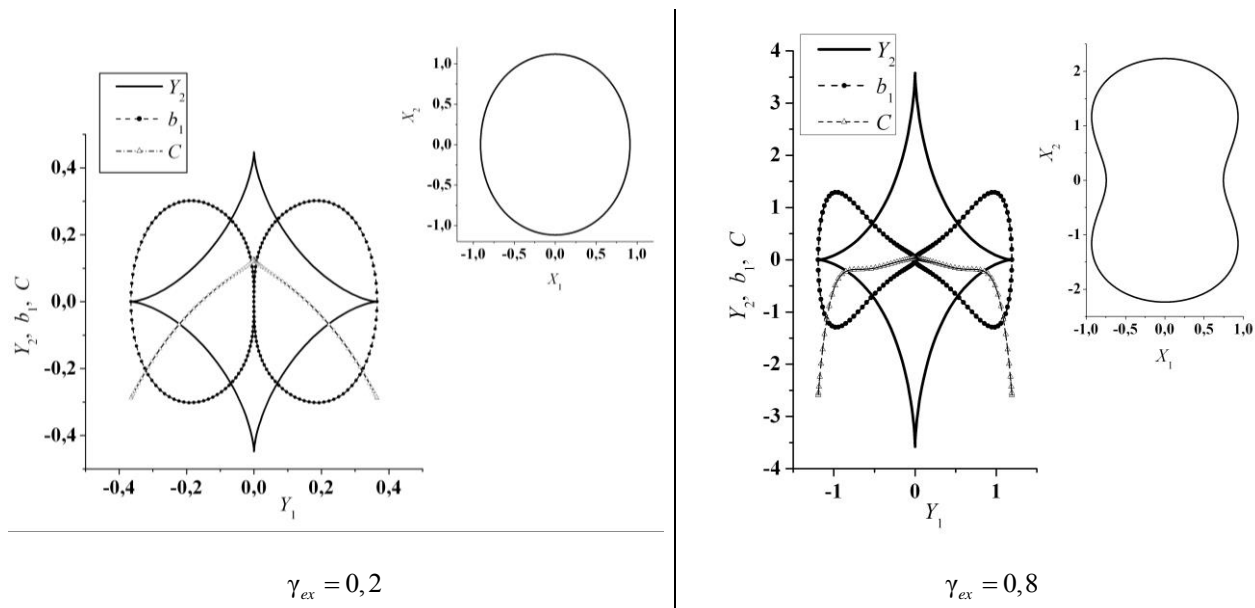


Рис. 1. Критичні криві й каустики лінзи Чанг – Рефсдала для двох значень параметра  $\gamma_{ex} < 1$  та відповідні значення величин  $b_1$  і  $C$  залежно від  $Y_1$

У роботі [16] для цього прикладу отримано явні вирази  $C(z_{(1)}^{\pm}) = -\gamma(1 + \gamma)^2$  і  $C(z_{(2)}^{\pm}) = \gamma(1 - \gamma)^2$ . Підкреслимо, що параметр  $C$  входить як множник у знаменники поправкових доданків у формулах для коефіцієнта підсилення і часу затримки [14–17]. І оскільки його модуль може набувати малих значень, то врахування цих поправок є вельми суттєвим.

При  $\gamma_{ex} > 1$  рівняння (27) справджується лише, коли  $(1 + \gamma_{ex} e^{2i\varphi})^3$  є додатним дійсним числом. Тобто,  $\arg(1 + \gamma_{ex} e^{2i\varphi}) = 2\pi n/3$ . Звідси кут  $2\varphi$  може мати три значення:

$$2\varphi = 0, \quad 2\varphi = \frac{2\pi}{3} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\gamma_{ex}}\right), \quad 2\varphi = -\left[\frac{2\pi}{3} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\gamma_{ex}}\right)\right].$$

У цьому випадку множина критичних точок являє собою дві замкнені криві, які відповідають двом гілкам кореня у формулі (26). Знайдені значення  $\varphi$  відповідають трьом касповим точкам на кожній із критичних кривих [26]. У такому випадку всі каспи від'ємні.

У таблиці подано значення  $C(z)$ , що відповідають каспам лінзи Чанг – Рефсдала за різних значень  $\gamma_{ex}$ . Застосовано такі позначення:  $C_1$  – значення в каспових точках на осі абсцис,  $C_2$  – в інших каспах.

Таблиця

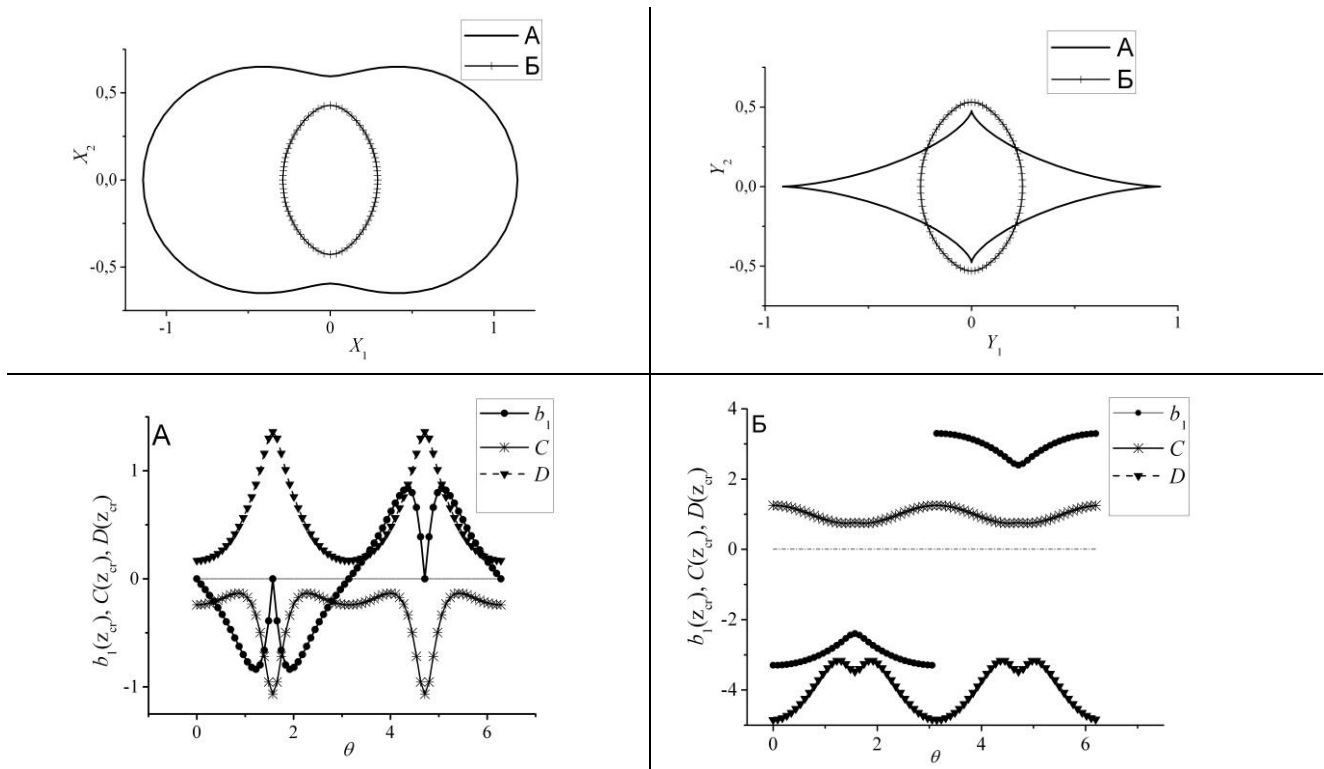
Значення функції  $C(z)$  у каспових точках лінзи Чанг – Рефсдала для різних значень зовнішнього зсуву

$\gamma_{ex}$	$C_1$	$C_2$	$\gamma_{ex}$	$C_1$	$C_2$
0,2	-0,288	0,128	0,95	-3,612	0,0024
0,5	-1,125	0,125	1,1	-4,851	-0,022
0,8	-2,592	0,032	2	-18	-3,060

**Модель клампа.** Тепер розглянемо приклад лінзової моделі, що містить неперервну матерію. Скористаємося спрощеною моделлю клампа темної матерії, яку введено в роботі [28]. Лінзовий потенціал дається таким виразом:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \ln(\tilde{R}^2 + z\bar{z}) - \frac{\gamma_{ex}}{4} (z^2 + \bar{z}^2), \tag{28}$$

де  $\gamma_{ex}$  – зовнішній зсув,  $\tilde{R}$  – параметр, що характеризує розмір клампа. Ця модель є певним узагальненням лінзи Чанг – Рефсдала, яка відповідає значенню  $\tilde{R} = 0$ . Як і в попередньому прикладі, структура критичних кривих і каустик цієї моделі залежить від співвідношень параметрів. Тут ми обмежуємося випадком  $\gamma_{ex} < 1$ . Структура каустик виявляється різною залежно від знаку  $Q = (1 + \gamma_{ex})\tilde{R} - 1$ .



**Рис. 2.** Критичні криві (верхня панель ліворуч) і каустики (верхня панель праворуч) лінзи-моделі клампа з параметрами  $\gamma_{ex} = 0,4$ ;  $\tilde{R} = 0,6$  та відповідні характеристики  $b_1$ ,  $C$  і  $D$  залежно від полярного кута  $\theta$  на критичній кривій (нижня панель)

На рис. 2 показано характеристики цієї моделі з параметрами  $\gamma_{ex} = 0,4$ ;  $\tilde{R} = 0,6$ . На верхній панелі ліворуч подано критичні криві, що позначені як А і Б, а праворуч відповідні каустики. На нижній панелі для кожної каустики зображено графіки функцій  $b_1(z_{cr})$ ,  $C(z_{cr})$ ,  $D(z_{cr})$  залежно від полярного кута на критичній кривій. На кривій А існує чотири каспові точки, в яких  $b_1(z_{cr}) = 0$ ; усі ці каспи від'ємні,  $C < 0$ ; функція  $D$  на всій критичній кривій є додатною, тобто додатна сторона міститься з боку опуклості каустики. На кривій Б відсутні каспи, усюди  $b_1(z_{cr}) \neq 0$ ;  $C > 0$ ;  $D < 0$  – додатний бік відповідає вгнутості каустики.

На рис. 3 те саме показано для моделі з параметрами  $\gamma_{ex} = 0,4$ ;  $\tilde{R} = 0,8$ . У цьому випадку на кожній із критичних кривих є по дві каспові точки, усі каспи є від'ємними. На кожній із каустик існує по чотири точки перегину, в яких  $D = 0$ ; у безпосередньому околі каспових точок  $D > 0$ . Форми каустик на рис. 2 і 3 значно відрізняються, але в обох випадках з аналізу функції  $D$  випливає, що всередині кожної із замкнених каустик А і Б кількість зображень на два більше ніж іззовні.

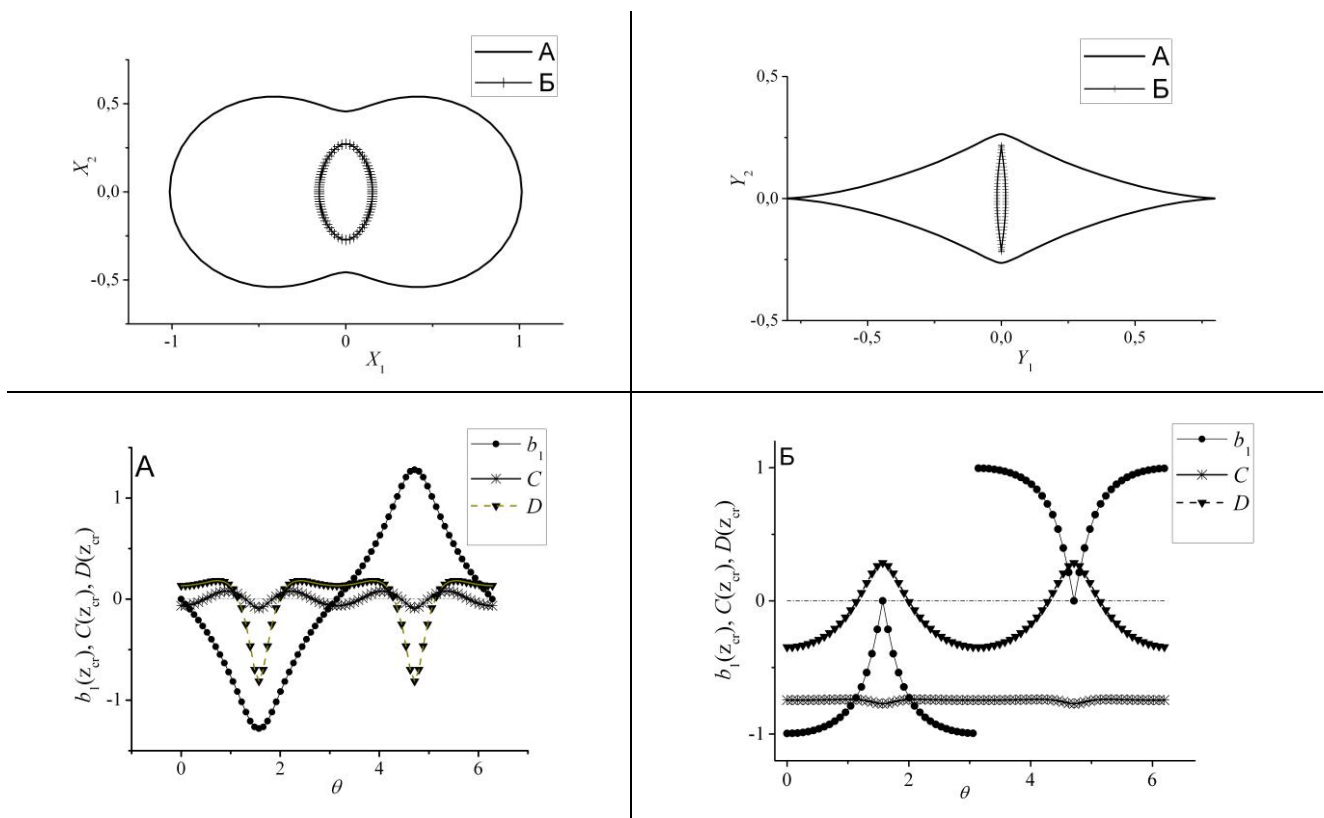


Рис. 3. Критичні криві і каустики лінзи-моделі клампа з параметрами  $\gamma_{ex} = 0,4$ ;  $\tilde{R} = 0,8$  та відповідні характеристики  $b_1$ ,  $C$  і  $D$  залежно від полярного кута  $\theta$

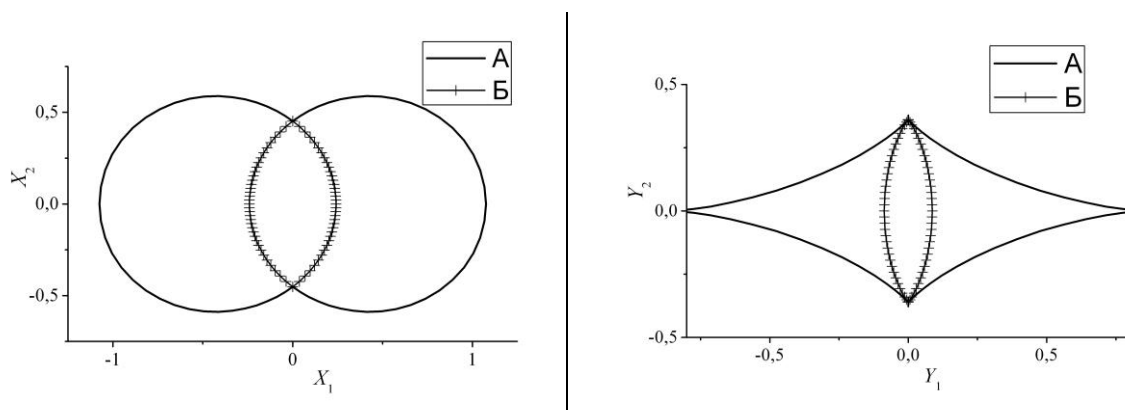


Рис. 4. Критичні криві і каустики лінзи-моделі клампа з параметрами  $\gamma_{ex} = 0,4$ ;  $\tilde{R} \approx 1/(1+\gamma_{ex})$

Виникає питання, яким чином відбувається зміна кількості каспів на каустиці за зміни параметрів, і як це узгоджується з теоремою Уїтні. На рис. 4 показано критичні криві і каустики для випадку  $Q = \dot{R} - 1/(1 + \gamma_{ex}) \approx 0$ . Очевидно, що при  $Q \rightarrow 0$  перетворення каспових точок, що лежать на уявній осі, відбуваються через особливості вищого порядку. У цьому випадку це так звана гіперболічна омбіліка (гаманець) [5]. Зауважимо, що за малих значень  $|Q|$  без дослідження функції  $b_1$  неможливо визначити, якій саме каустиці належать ці каспи.

Наведені приклади демонструють, що запропонований алгоритм дозволяє визначити коефіцієнти розкладу (10) для будь-якої критичної точки і розрахувати всі властивості лінзового відображення в її околі.

#### Список літератури

- Schneider P. Gravitational Lenses / P. Schneider, J. Ehlers, E.E. Falco. – Berlin: Springer, 1992.
- Petters A.O. Singularity theory and gravitational lensing / A.O. Petters, H. Levine, J. Wambsganss. – Boston: Birkhäuser, 2001.
- Witt H.J. Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars / H.J. Witt // Astron. Astrophys. – 1990. – Vol. 236. – P. 311–322.
- Alexandrov A.N. Dynamic systems that describe Chang-Refsdal gravitational lens / Alexandrov A.N. (in Ukr. Динамічні системи, що характеризують гравітаційну лінзу Чанг-Рефсдала) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2017. – Vol. 56. – С.25–33.
- Meena A.K. Finding singularities in gravitational lensing / A.K. Meena, J.S. Bagla // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2020. – Vol. 492. – P. 3294–3305.
- Alexandrov A.N. Analytical relations for gravitational lens mapping in the vicinity of a critical curve / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, E.V. Fedorova (in Ukr. Аналітичні співвідношення для гравітаційно-лінзового відображення в околі критичної кривої) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2003. – Vol. 39-40. – P. 52–59.
- Alexandrov A.N. Analytical theory of gravitational lensing: Asymptotic formulas in the caustic vicinity and quadratic approximation / A.N. Alexandrov (in Ukr. Аналітична теорія гравітаційного лінзування: асимптотичні формули в околі каустики і квадратичне наближення) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2007. – Vol. 44. – P. 21–29.
- Alexandrov A.N. Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, E.V. Fedorova // Astronomy Letters. – 2010. – Vol. 36, No. 5. – P. 329–337.
- Alexandrov A.N. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2011. – Vol. 417. – P. 541–554; arXiv:1006.5903. 2010.
- Zhdanov V.I. Analytical methods in gravitational microlensing / V.I. Zhdanov, A.N. Alexandrov, E.V. Fedorova, V.M. Sliusar // ISRN Astronomy and Astrophysics. – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 906951, doi:10.5402/2012/906951.
- Zhdanov V.I. Qualitative problems in gravitational microlensing / V.I. Zhdanov, A.N. Alexandrov, E.V. Fedorova, V.M. Sliusar // In Dark energy and dark matter in the Universe. Vol. 2 Dark matter: Astrophysical aspects of the problem. Ed. V. Shulga. – Kyiv, Akadempriodyka, 2014. P. 84–130.
- Alexandrov A.N. Asymptotic relations for high magnification events in presence of dark matter / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, S.M. Koval (in Ukr. Асимптотичні формули для подій сильного мікролінзування з урахуванням темної матерії) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2012. – Vol. 49. – P. 16–19.
- Alexandrov A.N. Time delay of critical images of a point source near the gravitational lens fold-caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov (in Ukr. Часова затримка критичних зображень точкового джерела поблизу каустики-складки гравітаційно-лінзової системи) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2016. – Vol. 53. – P. 6–11.
- Alexandrov A.N. Gravitational lens equation: critical solutions and magnification near folds and cusps / A.N. Alexandrov, S.M. Koval, V.I. Zhdanov // Advances in Astronomy and Space Physics. – 2012. – Vol. 2, Is. 2. – P. 184–187.
- Alexandrov A.N. Properties of the gravitational lens mapping in the vicinity of a cusp caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, S.M. Koval // Odessa astronomical publications. – 2013. – V. 26/2. – P. 169–171.
- Alexandrov A.N. Coordinates and magnifications of the gravitational lens critical images: Second order corrections near symmetric cusp / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, S.M. Koval (in Ukr. Координати та підсилення критичних зображень в гравітаційно-лінзових системах: поправки другого порядку в околі симетричного каспа) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2013. – Vol. 50. – P. 5–11.
- Alexandrov A.N. Time delay of critical images in the vicinity of cusp point of gravitational-lens systems / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov (in Ukr. Часова затримка критичних зображень в околі каспової точки гравітаційно-лінзової системи) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2016. – Vol. 54. – P. 41–46.
- Alexandrov A.N. Gravitational microlensing of an elliptical source near a fold caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, A.V. Kuybarov (in Ukr. Гравітаційне мікролінзування еліптичного джерела поблизу каустики-складки) // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, Astronomy. – 2018. – Vol. 57. – P. 10–15.
- Keeton C.R. Identifying lenses with small-scale structure. I. Cusp lenses / C.R. Keeton, B.S. Gaudi, A.O. Petters // Astrophys. J. – 2003. – Vol. 598. – P. 138–161.
- Keeton C.R. Identifying lenses with small-scale structure. II. Fold lenses / C.R. Keeton, B.S. Gaudi, A.O. Petters // Astrophys. J. – 2005. – Vol. 635. – P. 35–59.
- Congdon A.B. Analytic relations for magnifications and time delays in gravitational lenses with fold and cusp configurations / A.B. Congdon, C.R. Keeton, C.E. Nordgren // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2008. – Vol. 389. – P. 398–406.
- Weisenbach L. Magnifications of paired micro-images emerging from a micro-lensing critical curve / L. Weisenbach, P. Schechter, J. Wambsganss // Mon. Not. Royal Astron. Soc. – 2019. – Vol. 488, Iss. 3. – P. 3452–3462.
- Gaudi B.S. Gravitational microlensing near caustics. I. Folds / B.S. Gaudi, A.O. Petters // Astrophys. J. – 2002. – Vol. 574. – P. 970–984.
- Blandford R. Fermat's principle, caustics, and the classification of gravitational lens images / R. Blandford, R. Narayan // Astrophys. J. – 1986. – V. 310. – P. 568–582.
- Chang K. Star disturbances in gravitational lens galaxies / K. Chang, S. Refsdal // Astron. Astrophys. – 1984. – Vol. 132. – P. 168–178.
- An J.H. The Chang-Refsdal lens revisited / J.H. An, N.W. Evans // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2006. – Vol. 369(1). – P. 317–334.
- Sliusar V.M. Statistics of light curves of a distant source microlensed by a system of point and extended masses / V.M. Sliusar, V.I. Zhdanov, A.N. Alexandrov, E.V. Fedorova // Kinematics and Physics of Celestial Bodies. – 2015. – Vol. 31. – P. 82–89.

Надійшла до редколегії 17.06.2021

А. Александров, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.  
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

## КОМПЛЕКСНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ И ГЕОМЕТРИЯ КАУСТИК

*В комплексной формулировке теории гравитационного линзирования с применением параметризации критических кривых (Witt, 1990) разработан общий метод перехода от локальных координат, приспособленных к точке на каустике, к глобальным исходным координатам. Метод позволяет выразить локальные характеристики линзы через производные от линзового потенциала в исходных координатах. В данной работе проанализирована формула для кривизны каустики, найдено условие существования точек перегиба и условия существования критических изображений для точек с выпуклой или вогнутой стороны каустики. Рассмотрены условия того, что критическая точка является касповой, а также положительности и отрицательности каспов. Свойства каустик проиллюстрированы на примерах линзы Чанг – Рефсдала и упрощенной модели клампа темной материи.*

*Ключевые слова: гравитационное линзирование, комплексная формулировка, критические кривые и каустики.*

A. Alexandrov, PhD, Senior Researcher  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

## COMPLEX FORMALISM IN THE THEORY OF GRAVITATIONAL LENSING AND THE GEOMETRY OF CAUSTICS

*In the theory of gravitational lensing, the critical curves and caustics of the lens mapping are of particular interest. The most striking features of this phenomenon take place just when the source is in the vicinity of the caustic of the gravitational lens system. The main method for studying the properties of a lens mapping in the vicinity of a critical point is its approximation by a segment of a Taylor series in a special local coordinate system; this allows one to describe all the necessary properties with sufficient accuracy by means of a certain number of Taylor coefficients. In this article, we propose a general algorithm for calculating the mentioned coefficients directly in the original coordinates. The algorithm essentially uses the complex formulation of the lensing equations and the parameterization of critical curves, which was first proposed by Witt (1990).*

*We analyzed the formula for the curvature of the caustic and introduced a closely related function  $D$ . For  $D > 0$ , the so-called positive side of the caustic neighborhood, whose points have two more images, corresponds to the convexity of the caustic, and for  $D < 0$ , to its concavity. The critical points, at which  $D = 0$ , correspond to the inflection points of the caustic. The conditions for the critical point to be a cusp, as well as the positivity and negativity of the cusps are considered. The properties of caustics are illustrated with examples of the Chang-RRefsdal lens and a simplified dark matter clump model.*

*Key words: gravitational lensing, complex formulation, critical curves and caustics.*

УДК 524.7

I. Ізотова, канд. фіз.-мат. наук  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## КОМПАКТНІ ГАЛАКТИКИ З АКТИВНИМ ЗОРЕУТВОРЕННЯМ: ЗВ'ЯЗОК МІЖ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СПАЛАХУ ЗОРЕУТВОРЕННЯ

*Для вибірки компактних галактик з активним зореутворенням, створеної на основі цифрового огляду неба SDSS DR14, проведено дослідження зв'язку між інтегральними характеристиками процесу зореутворення – темпом  $SFR(H\beta)$  і питомим темпом зореутворення  $sSFR(H\beta)$ , та аналогічними характеристиками  $SFR_0(H\beta)$  та  $sSFR_0(H\beta)$ , приведеними до нульового віку спалаху зореутворення, а також масою молодого населення зір із віком  $< 10$  млн років, віком спалаху зореутворення та вмістом кисню  $12 + \log O/H$  у міжзоряному середовищі цих галактик. Отримано тісну та майже лінійну залежність між темпом зореутворення та масою молодого зоряного населення, а також слабку кореляцію між темпом зореутворення та вмістом кисню. Показано, що питомі темпи зореутворення, середні значення яких  $\langle sSFR(H\beta) \rangle = 8,8 \cdot 10^{-9} \text{ рік}^{-1}$  та  $\langle sSFR_0(H\beta) \rangle = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ рік}^{-1}$ , не залежать від маси молодого зоряного населення та вмісту кисню і тому є універсальною характеристикою компактних галактик з активним зореутворенням.*

*Ключові слова: галактики з активним зореутворенням, темп зореутворення, питомий темп зореутворення.*

**Вступ.** Робота є продовженням мультихвильових досліджень галактик з активним зореутворенням. Серед різноманіття типів галактик особливо цікавими є компактні карликові галактики, які вирізняються наявністю сильних емісійних ліній водню в їхніх спектрах, що свідчить про активні процеси зореутворення, причому еквівалентна ширина ліній часто вказує на відносно молодий спалах зореутворення. Для галактик цього типу є можливість з великою точністю визначити вміст важких елементів, зокрема кисню, та екстинкцію внаслідок поглинання випромінювання пиловою компонентою. Вміст важких елементів  $Z$  у карликових галактиках нижче від вмісту  $Z_\odot$  на Сонці, і в окремих об'єктах він сягає низьких значень  $Z_\odot/12$ , а відношення маси газу до маси зоряного населення високе, що свідчить про їхню еволюційну молодість. Це переважно близькі галактики (червоне зміщення  $z < 1,0$ ), але фізичні умови (світність, темп зореутворення, питомий темп зореутворення, хімічний склад) у деяких із них подібні до умов у галактиках на великих червоних зміщеннях ( $z = 2-3$ , Lyman-break, Ly-alpha галактики), спостерігати які складніше. Тому компактні карликові галактики є перспективними локальними об'єктами для дослідження фізичних умов у молодих галактиках на великих червоних зміщеннях.

Дослідженням галактик із зореутворенням присвячено значну кількість робіт, див. наприклад, [1–8] та посилання в них щодо визначення темпу зореутворення. Результати спектральних досліджень різних вибірок компактних галактик з активним зореутворенням із цифрового огляду неба SDSS (випуски 2007–2020 рр.) викладено у низці робіт, зокрема [9–18]. У роботах [19–28], виконаних в Астрономічній обсерваторії Київського національного університету імені Тараса Шевченка, для різних вибірок галактик з активним зореутворенням із різних випусків SDSS проведено статистичні дослідження випромінювання у різних діапазонах спектра – близькому та далекому ультрафіолетовому (за даними космічної місії GALEX) і близькому інфрачервоному (за даними космічної місії WISE) діапазонах, емісійних лініях  $H\alpha$  та  $H\beta$  (дані SDSS), радіоконтинуумі на 1,4 ГГц (дані NVSS і FIRST); за різними чинниками (мультихвильовими монохроматичними світностями та їхніми комбінаціями) визначено швидкості зореутворення та функції світності, зокрема і для нульового віку спалаху зореутворення.

У цій роботі для компактних галактик з активним зореутворенням з SDSS DR14 проведено дослідження зв'язку темпу зореутворення з характеристиками спалаху зореутворення.

**Вибірка галактик та їхні інтегральні характеристики.** Досліджується вибірка понад 30 тис. компактних галактик з активним зореутворенням (CSFGs) із цифрового спектрального огляду неба SDSS DR14 [29]. Критерії відбору об'єктів вибірки детально описано в [13]. Для повноти та цільності викладу нагадаємо, що до вибірки включено компактні об'єкти (переважно з кутовими діаметрами 6"–10"), у спектрах яких присутні емісійні лінії  $H\beta$  з еквівалентною шириною  $EW(H\beta) \geq 10 \text{ \AA}$  та лінії  $[O III] \lambda 4363 \text{ \AA}$ , для яких похибка у визначенні потоку у лінії  $< 50 \%$  величини, останнє важливо для надійного визначення вмісту важких елементів. У спектрах відібраних галактик також відсутні спектральні ознаки наявності активних галактичних ядер. Галактики вибірки на діагностичній діаграмі для потоків випромінювання у лініях  $[O III] \lambda 5007 \text{ \AA}$ ,  $H\beta \lambda 4861 \text{ \AA}$  –  $[N II] \lambda 6583 / H\alpha \lambda 6563 \text{ \AA}$  розміщуються в областях, притаманних галактикам з активним зореутворенням, а не активних галактичних ядер.