Обрії математики

УДК 510.3:517.5:512 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.7**

Тарас ЮСИПІВ, Д-р філос. (мат.)
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЗЕЛЕНСЬКА, Д-р філос. (мат.)
ORCID ID: 0000-0002-7784-1030
e-mail: kopchuk@gmail.com
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

ПАРАДОКСИ ТА НЕСКІНЧЕННІСТЬ У МАТЕМАТИЦІ: МІЖ СУПЕРЕЧНІСТЮ Й НОВИМИ МОДЕЛЯМИ РЕАЛЬНОСТІ

Анотація. *Стаття присвячена аналізу некласичних та парадоксальних аспектів сучасної математики, що виникають у ситуаціях, де звичні логічні та арифметичні принципи перестають бути застосовними. Розглянуто низку концептуальних проблем, пов'язаних із невизначеними формами, нескінченними степеневими структурами та порівняннями виразів зі степенями, а також феноменологію нескінченних множин на прикладі парадоксу Гільберта про «нескінченний готель». Особливу увагу приділено методам роботи з розбіжними рядами. У роботі розкриваються принципові відмінності між скінченними й нескінченними операціями: при переході до нескінченності інтуїтивні правила елементарної арифметики втрачають чинність, формуючи «точки розриву», у яких виникають нові математичні структури. На основі історичних прикладів – від Ейлера й Рімана до Рамануджана та Гільберта – показано, що поява таких суперечностей не руйнує математичну систему, а навпаки, стимулює формування нових методів, концепцій і моделей реальності. Стаття демонструє, що саме конфронтація з «неможливим» становить один із ключових механізмів розвитку математичної думки.*

Ключові слова: *математичні парадокси; дзета-функція Рімана; аналітичне продовження; нескінченні операції; нескінченні суми; нескінченний готель Гільберта.*

1. Вступ

Математика, як і будь-яка інша аксіоматична теорія, функціонує лише за умови внутрішньої узгодженості її вихідних положень. Якщо з двох аксіом (базових припущень) можна логічно вивести несумісні твердження, то виникає суперечність, що свідчить про необхідність перегляду або уточнення відповідної аксіоматичної системи (Юсипів, 2024). З іншого боку, застосування операцій, для яких у межах традиційного формалізму неможливо встановити однозначний результат, породжує невизначеність і також ставить під сумнів дієвість базових правил.

Таким чином, математична теорія не допускає ні суперечностей, ні невизначеностей у фундаментальних операціях. Найпростіший і найвідоміший приклад – неможливість ділення на нуль, про що навчають ще в молодшій школі.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розглянемо це детальніше. Нехай потрібно визначити значення виразу $a \div 0$ для деякого дійсного числа a. Оскільки дію ділення можна перевірити за допомогою множення, маємо:

- $6 \div 2 = 3$, оскільки $6 = 2 \times 3$;
- $6 \div 3 = 2$, бо $6 = 3 \times 2$.

Аналогічно, твердження $a \div 0 = b$ еквівалентне рівності $a = 0 \times b$. Якщо $a \neq 0$, виникає очевидна суперечність, оскільки добуток $0 \times b$ завжди дорівнює нулю. Якщо ж $a = 0$, рівняння $0 = 0 \times b$ істинне для будь-якого значення b, що означає *невизначеність*: результат операції неможливо встановити однозначно.

Виникає питання: що відбувається у ще складніших ситуаціях, наприклад при спробі обчислити 0^0, підносити число до самого себе нескінченну кількість разів, чи здійснювати операції з нескінченними сумами? Ці, на перший погляд елементарні, запитання відкривають доступ до цілого спектра математичних феноменів і парадоксів, що будуть розглянуті нижче.

2. Від 0^0 до нескінченних степеневих веж

Серед функцій, що виглядають цілком «невинними», однією з найпарадоксальніших є $\boldsymbol{x^x}$.

У ній поєднано одразу кілька класичних прикладів невизначеності.

Як відомо, $a^0 = 1$ для всіх $a > 0$. З іншого боку, $0^b = 0$ для будь-якого $b > 0$. Постає запитання: яке значення можна було б вважати «природним» для виразу 0^0?

Для відповіді на це запитання розглянемо функцію

$$f(x) = x^x, \qquad x > 0.$$

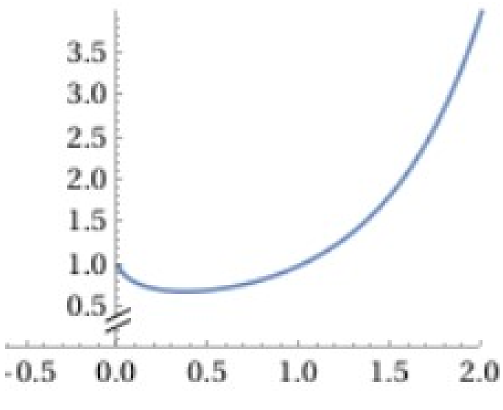


Рис. 1. Графік функції $f(x) = x^x, x > 0$, побудований у середовищі WolframAlpha

Нас цікавить значення границі цієї функції при наближенні x до нуля справа, тобто величина

$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$

З графіка, побудованого за допомогою системи комп'ютерної алгебри WolframAlpha, видно, що ця границя дорівнює 1 (див. рис.1).

Дамо формальне доведення цього факту. Перепишемо функцію у вигляді

$$f(x) = x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}.$$

Отже, для знаходження границі *достатньо*[1] обчислити

$$\lim_{x\to+0} x\ln(x).$$

Власне це – класична невизначеність типу $0\cdot(-\infty)$. Перетворимо її до дробу та застосуємо правило Лопіталя[2]:

$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to0+} x\ln(x) = \lim_{x\to0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0+}(-x) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{x\to0+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Таким чином, значення 1 є «природним» регуляризованим значенням для виразу 0^0 у відповідному аналітичному контексті.

З графіка видно, що функція x^x має єдиний (*глобальний*) мінімум. Відомо, що у точках мінімуму та максимуму похідна дорівнює нулю. Для знаходження похідної скористаємося рівністю, яка випливає з властивостей логарифма:

$$\ln(x^x) = x\ln(x).$$

Знайдемо похідні обох частин рівності: лівої частині – як похідну складеної функції та правої – як похідну добутку:

$$\frac{(x^x)'}{x^x} = \ln(x) + 1.$$

Відтак,

$$(x^x)' = x^x(\ln(x) + 1).$$

---

[1] Йдеться про те, що $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to0+} x\ln(x)}$.

[2] Правило Лопіталя, опубліковане в 1696 році, стверджує, що за деяких умов (які в даному прикладі мають місце) границя частки двох функцій дорівнює границі частки їхніх похідних.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Прирівнюючи похідну до нуля та враховуючи, що $x^x \neq 0$, отримуємо

$$\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}.$$

Значення функції у точці мінімуму:

$$(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.6922.$$

Розглянемо тепер загальніший випадок, коли основа та показник степеня відрізняються. Інтуїтивно може здаватися, що твердження

$$a^b > b^a,$$

для $a > b > 0$ є логічним, оскільки «значення виразу сильніше залежить від основи, ніж від показника». Проте це припущення виявляється хибним.

Для всіх $a, b > 0$, де $a \neq b$, запишемо нерівність

$$a^b > b^a.$$

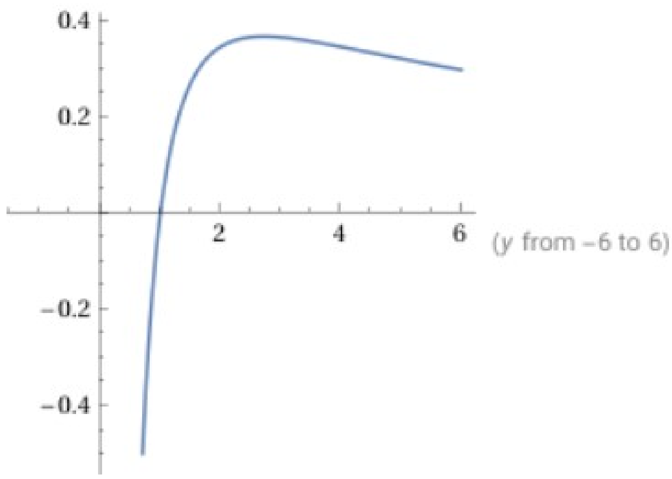


Рис. 2. Графік функції $f/g(y) = \ln(y)/y$, побудований у середовищі WolframAlpha

Прологарифмуємо її (знак нерівності не змінюється, оскільки логарифм – монотонно зростаюча функція):

$$\ln(a^b) > \ln(b^a),$$

$$b\ln(a) > a\ln(b),$$

$$\frac{\ln(a)}{a} > \frac{\ln(b)}{b}.$$

Отже, задача зводиться до порівняння значень функції

$$g(y) = \frac{\ln(y)}{y}.$$

Графік цієї функції для $y \in [-6,6]$ наведено на рисунку 2.

Як видно з графіка (рис. 2), функція $g(y)$ спочатку монотонно зростає від $-\infty$ до свого єдиного максимального значення, після чого спадає до 0 (оскільки $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$).

Знайдемо максимальне значення, прирівнюючи до нуля похідну $g'(y)$:

$$g'(y) = \frac{1 - \ln(y)}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = e, \qquad g(e) = \frac{1}{e}.$$

Отже, для всіх $a, b > 0$, $a \neq b$, маємо:

- якщо $a = e$, то $a^b > b^a$ (аналогічно, якщо $b = e$, то $a^b < b^a$);
- якщо $0 < a$, $b < e$, то з двох виразів a^bта b^a більшим є той, чия основа більша;
- якщо $a, b > e$, то з двох виразів a^b та b^a більшим є той, чия основа менша;
- якщо $a < e < b$ або $b < e < a$, то знак нерівності визначається «віддаленістю» чисел a і b від числа e. Ця залежність описується функцією Ламберта[3].

Графік також пояснює рівність

$$2^4 = 4^2,$$

оскільки числа 2 і 4 виявляються однаково «близькими» до числа e у сенсі порівняння значень функції $g(y)$ (рис. 3).

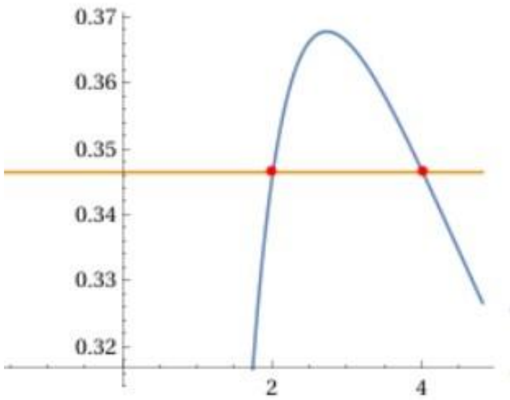


Рис. 3. Графічний розв'язок рівняння $\ln(y)/y = 2$, побудований у середовищі WolframAlpha

[3] Розв'язки рівняння $\ln(y)/y = c$ можна отримати з функції Ламберта: $y_1 = -\frac{1}{c}W_0(-c)$, $y_2 = -\frac{1}{c}W_1(-c)$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розглянемо подальше узагальнення – піднесення x до степеня x нескінченну кількість разів:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

Постає запитання: *для яких значень змінної x такий вираз має зміст?*

Позначимо цей вираз через $y(x)$. Тоді повинна виконуватися функціональна рівність:

$$y(x) = x^{y(x)}, \qquad x > 0, \qquad y(x) > 0.$$

Позначимо $y(x)$ як y та прологарифмуємо останню рівність. Отримуємо:

$$\ln(x) = \frac{\ln(y)}{y}.$$

Знову маємо справу з функцією $g(y) = \ln(y)/y$, з огляду на поведінку якої можемо відзначити наступне:

1)Коли $-\infty < \ln(x) \le 0$, тобто $0 < x \le 1$ – тут значення $y \in (0;\ 1]$ визначається однозначно; також, коли $\ln(x) = \frac{1}{e}$, $x = e^{1/e} \approx\ 1{,}444667$, $y = e$ – однозначно;

2)Коли $0 < \ln(x) < \frac{1}{e}$, тобто $1 < x < e^{1/e}$ – функція $\ln(y)/y$ набуває однакових значень вже при двох можливих значеннях змінної $y \in (1, +\infty)$.

Отже, вираз $x^{x^{x^{x\dots}}}$ має одне значення для всіх $0 <\ x \le 1$ та $x = e^{1/e}$ і два – для всіх $1 < x < e^{1/e}$, а при $x > e^{1/e}$ цей вираз не має сенсу.

Обчисливши декілька можливих значень, отримуємо:

$$0{,}5^{0{,}5^{0{,}5^{0{,}5\dots}}} \approx 0{,}641186, \qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\dots}}} \approx 2 \text{ або } 4,$$

а от значення $\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}\dots}}}$ – не визначено.

Як бачимо, перехід до «нескінченних» операцій руйнує традиційні підходи.

3. Парадокс Гільберта про Grand Hotel

Давид Гільберт (23.01.1862 – 14.02.1943) (рис. 4) посідає чільне місце серед провідних математиків світового рівня (Bell, 1937). На II Міжнародному конгресі математиків, що відбувся в Парижі у 1900 році, він представив програмний список із 23 фундаментальних проблем, який визначив траєкторію розвитку математичної науки на наступні десятиліття. Станом на сьогодні дев'ять із цих проблем мають загальновизнані розв'язання; ще дев'ять вважаються частково розв'язаними; дві сформульовані настільки неконкретно, що їх формалізація видається неможливою; три залишаються відкритими.

З метою продемонструвати нетривіальні властивості нескінченних множин, Гільберт у 1920-х роках запропонував відомий логічний парадокс, що згодом отримав назву «*готелю Гільберта*». Він показує, що до повністю заповненого готелю з нескінченною кількістю номерів можна поселити не лише додаткового гостя, але й нескінченну кількість нових гостей.

Розглянемо уявний готель (рис. 5) зі зліченною множиною кімнат, кожна з яких зайнята. Інтуїтивно може здатися, що заселення нових відвідувачів неможливе, як це має місце у випадку зі скінченною кількістю кімнат. Однак нескінченність відкриває несподівані можливості. Щоб розмістити одного нового гостя, достатньо переселити мешканця кімнати 1 до кімнати 2, мешканця кімнати 2 – до кімнати 3 і т.д., звільнивши тим самим кімнату 1. Повторення цього процесу дає змогу звільнити місця для будь-якої скінченної кількості нових гостей.

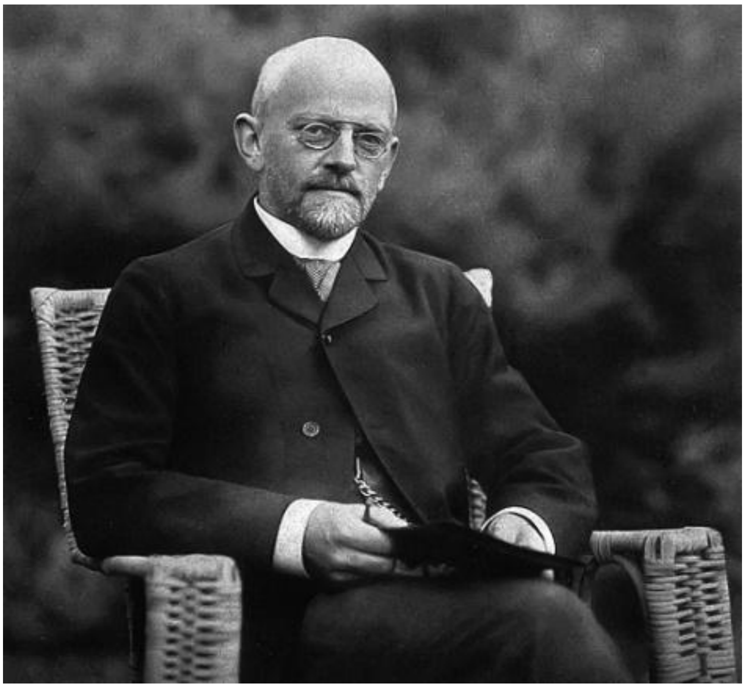


Рис. 4. Давид Гільберт

Більше того, у готелі можна розмістити й зліченну кількість додаткових гостей. Для цього кожного мешканця кімнати з номером n переселяють до кімнати з номером $2n$. У результаті всі непарні номери залишаються вільними для нових відвідувачів.

Парадоксальна природа нескінченності проявляється ще виразніше, коли йдеться про розміщення пасажирів зі зліченної кількості повних автобусів, у кожному з яких також міститься зліченна кількість людей. Після звільнення непарних кімнат можна застосувати нумерацію на основі простих чисел: пасажирів першого автобуса розселяють у кімнати з номерами 3^n, де $n = 1,2,3,\ldots$; пасажирів другого – у кімнати з номерами 5^m, де $m = 1,2,3,\ldots$, і так далі. Для автобуса з номером *i* використовують

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

номери вигляду p^k, де p – $(i+1)$-е просте число, а $k \in \mathbb{N}$. Такий підхід гарантує однозначне розміщення всіх пасажирів без конфліктів.

Концепція нескінченного готелю, запропонована Гільбертом, набула значного резонансу і стала популярною не лише в академічному середовищі, а й у художній літературі та кінематографі, де вона слугує образною ілюстрацією парадоксальних властивостей нескінченності.

Рис. 5. Готель Гільберта, візуалізований засобами Google Cemini

4. Розподіл простих чисел та проблема на мільйон доларів

Прості числа відіграють фундаментальну роль не лише в теорії чисел, а й у багатьох інших галузях математики. Одним із найдавніших і найвідоміших методів їх обчислення є алгоритм, запропонований давньогрецьким математиком Ератосфеном Киренським (див. рис. 6). Так зване *решето Ератосфена* дає змогу ефективно виписати всі прості числа, послідовно викреслюючи кратні вже знайдених простих чисел. Попри свою давність, цей алгоритм і сьогодні залишається одним із базових інструментів елементарної теорії чисел та початкових курсів алгоритмів.

Однак інтерес математиків до простих чисел з часом лише поглиблювався: від обчислювальних методів – до вивчення їхніх аналітичних властивостей. Важливий етап у цьому переході пов'язаний з роботами Леонарда Ойлера (15.04.1707 – 07(18).09.1783) (рис. 7 a)), який досліджував так звану дзета-функцію для дійсних значень s:

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots .$$

Ойлер встановив (Euler, 1758), що ця функція може бути представлена у формі нескінченного добутку, який безпосередньо пов’язує її зі структурою простих чисел:

$$e(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\cdots . \tag{1}$$

Установлене Ойлером представлення, відоме сьогодні як *добуток Ойлера*, є однією з центральних властивостей дзета-функції та підкреслює її фундаментальну роль у дослідженні розподілу простих чисел. Воно також стало ключовим кроком на шляху до формування аналітичної теорії чисел, що пізніше привела до робіт Йоганна Петера Густава Лежена Діріхле (13.02.1805 – 05.05.1859), Георга Фрідріха Бенграда Рімана (17.09.1826 – 20.07.1866) (рис. 7 б)) та інших дослідників.

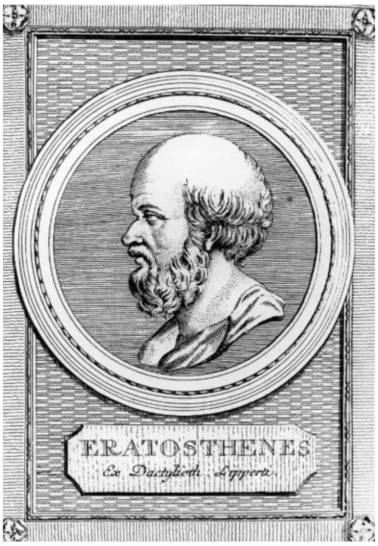


Рис. 6. Ератосфен Киренський (275-194 рр. до н.е.)

Розглянемо міркування, що приводять до добуткової формули Ойлера для дзета-функції. Якщо помножити вихідний ряд для дзета-функції на $\frac{1}{2^s}$, то отримаємо ряд, у якому в знаменниках містяться лише парні числа:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s)=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\cdots .$$

Віднімемо цей вираз від початкового ряду. У результаті залишаються лише члени з непарними знаменниками:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots .$$

Далі помножимо праву частину отриманого рівняння на $\frac{1}{3^s}$:

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\cdots .$$

Віднімемо цей ряд від попереднього:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\cdots .$$

а)

б)

Рис. 7. Леонард Ойлер та Георг Фрідріх Бенград Ріман

Продовжуючи цю процедуру для наступних простих чисел $5,7,11,13,17,\ldots$, ми послідовно виключаємо всі доданки, окрім першого, що дорівнює 1. Таким чином, нескінченний добуток набуває вигляду

$$\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots=1,$$

звідки отримуємо класичну формулу Ойлера:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\cdots}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\cdots.$$

Це подання встановлює глибинний зв'язок між дзета-функцією та простими числами і стало одним з ключових результатів ранньої аналітичної теорії чисел.

Леонард Ойлер також обчислив значення дзета-функції для парних додатних цілих аргументів. Зокрема, він розв'язав знамениту *базельську проблему*, показавши, що

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Дзета-функція відіграє центральну роль у сучасних дослідженнях і має фундаментальне значення не лише в теорії чисел, але й у математичній фізиці, теорії ймовірностей та прикладній статистиці. У відкритому доступі існують спеціалізовані ресурси, що надають можливість чисельно обчислювати нулі дзета-функції та досліджувати їх властивості (Zeroes of the zeta function, 2025).

У 1859 році Бернгард Ріман сформулював функціональне рівняння для дзета-функції, використовуючи гамма-функцію (Riemann, 1859):

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{\,s-1} e^{-t}\,dt,$$

що дозволило продовжити $\zeta(s)$ на всю комплексну площину. Отримане рівняння має вигляд

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{\,s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$$

Із цього співвідношення випливає, що $\zeta(s) = 0$ для всіх парних від'ємних цілих s. Такі значення отримали назву *тривіальних нулів дзета-функції*. Крім того, було встановлено, що *всі можливі нетривіальні нулі функції* можуть знаходитися лише в так званій *критичній смузі* – комплексних числах із дійсною частиною в інтервалі від 0 до 1. Подальші дослідження показали, що дзета-функція набуває нульового значення у певних точках, дійсна частина яких дорівнює $\frac{1}{2}$.

Ріманівська гіпотеза стверджує, що всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину саме $\frac{1}{2}$. Це припущення було пізніше включено до списку проблем Гільберта під номером 8, а згодом – до переліку «Проблем тисячоліття» (англ. *Millennium Prize Problems*), які характеризують як «*важливі класичні задачі, розв'язання яких не знайдено впродовж багатьох років*». За розв'язання кожної з них Математичний інститут Клея у 2000 році встановив премію у розмірі 1 мільйона доларів США.

Вивчаючи прості числа, Леонард Ойлер встановив ще один цікавий факт. Він показав, що кількість простих чисел, не більших за n, позначається $\pi(n)$ та приблизно описується функцією $n/\ln(n)$. Питання про точність цієї апроксимації досліджував у своїх роботах 1848–1850 років відомий математик Пафнутій Чебишов (4(16).05.1821 –

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

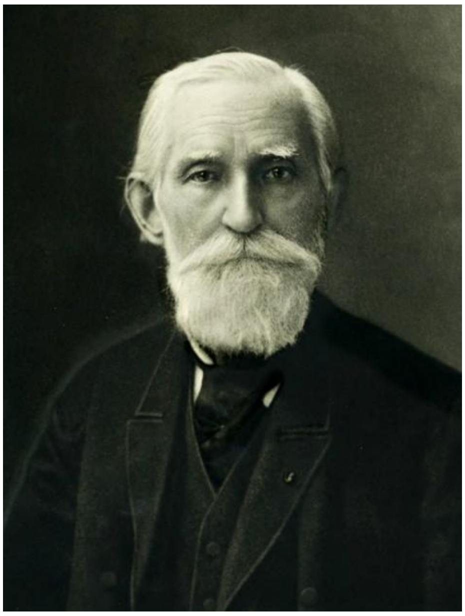
26.11.(08.12).1894) (див. рис. 8 а)) (Ball, 1937). Ним було доведено, що для всіх достатньо великих x значення відношення

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$$

лежить між двома сталими m та M, які задовольняють нерівності

$$0{,}92129 \leq m \leq M \leq 1{,}10555.$$

Цікаво, що в цій оцінці з'являється обернена до логарифмічної функція $x/\ln(x)$, про яку вже йшлося раніше у зв'язку з представленням дзета-функції та розподілом простих чисел.



а)

б)

Рис. 8. Пафнутій Чебишов та Жак Соломон Адамар

У 1896 році, використовуючи властивості дзета-функції Рімана $\zeta(s)$ та показавши, що вона не має нулів на прямій $\Re(s) = 1$, Жаком Адамаром (08.12.1865 – 17.10.1963) (рис. 8 б)) доведено *теорему про розподіл простих чисел* (Zagier, 1997). Її ж незалежно довів Шарль Жан-Етьєн де ла Валле-Пуссен (14.07.1866 – 02.03.1962). Теорема *стверджує*, що функція $\pi(x)$, яка позначає кількість простих чисел, менших або рівних x, *зростає асимптотично* так само, як функція $x/\ln(x)$ (рис. 9).

Останнє відношення формально виражається так:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \qquad \text{коли} \quad x \to \infty.$$

Це означає, що відношення $\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$ прямує до 1 зі зростанням x.

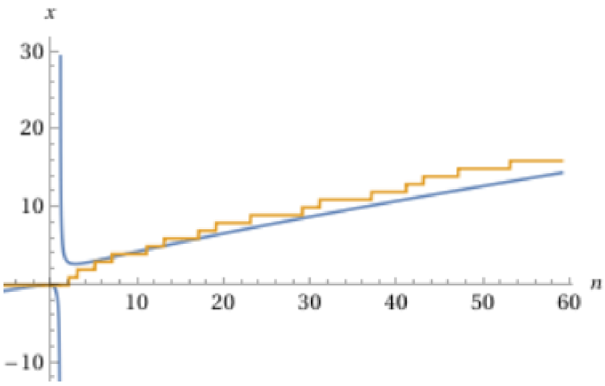


Рис. 9. Функції $\pi(n)$ та $n/\ln(n)$, побудовані у середовищі WolframAlpha

Власне теорема про розподіл простих чисел є наріжним каменем у розумінні того, як прості числа розподіляються серед натуральних чисел, підтверджуючи інтуїтивну гіпотезу Карла Фрідріха Гаусса.

5. Нескінченна сума натуральних чисел

У січні 1913 року відбулася одна з найбільш значущих подій у математичній історії XX століття: індійський математик-самоук Срініваса Аєнґар Рамануджан (22.12.1887 – 26.04.1920) (рис. 10 а)), який на той час працював клерком у Мадрасі, ініціював листування з видатним британським математиком Ґодфрі Гарольдом Харді (07.02.1877 – 01.12.1947), професором Кембриджського університету (рис. 10 б)).

а)

б)

Рис. 10. Срініваса Аєнґар Рамануджан та Ґодфрі Гарольд Харді

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Рамануджан надіслав Харді дев'ятисторінковий манускрипт, який містив близько 120 нетривіальних математичних теорем і формул без жодних супровідних доведень.

Лист починався скромно (Ramanujan's First Letter to G.H. Hardy, 1913): «Я ніхто, не маю університетської освіти, але відкрив багато нових істин».

Ця самохарактеристика підкреслювала статус Рамануджана як генія-самоука та його унікальний, інтуїтивний підхід до математики, який поєднував «початковий запас математичних фактів з величезною кількістю спостережень над конкретними числами».

Спочатку Харді скептично поставився до листа, проте після ретельного аналізу, проведеного спільно з Дж. Е. Літлвудом, він визнав, що формули були настільки глибокими та неординарними, що могли бути створені лише математиком «найвищого калібру». Це визнання стало кульмінацією, що привела до запрошення Рамануджана до Триніті-коледжу в Кембриджі, що знаменувало початок їхньої легендарної співпраці.

Серед іншого, Рамануджан у листі подає значення дзета-функції у від'ємних цілих точках, в стилі:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \tag{2}$$

Іншими словами, сума, яка за інтуїтивними уявленнями повинна бути нескінченною, дорівнює деякому дробовому числу, і до того ж – від'ємному. Дійсно, якщо згадати формальне визначення дзета-функції як

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

то при підстановці $s = -1$ виходить, що

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}.$$

Але все не так просто… Справа в тому, що дзета-функція початково визначена лише для тих чисел, дійсна частина яких більша 1. Аналітичне продовження на всі числа, які лежать поза цією областю, не має того початкового сенсу і не може бути інтерпретоване настільки вільно.

Отже, сума $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ як була так і є нескінченною, а значення $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. І ці два факти не є суперечливими.

Найцікавіше, що значення дзета функції $\zeta(-1)$ використовується в кількох глибоких математичних і фізичних контекстах (хоча у «звичайній» математиці це не має сенсу):

по-перше, аналітичне продовження у точці $s = -1$ дзета-функції

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

дає значення саме $-\frac{1}{12}$;

по-друге, квантова теорія поля – обчислення сили Казимира між двома паралельними пластинами у вакуумі приводить до формальної суми натуральних чисел і результату $-\frac{1}{12}$, що добре узгоджується з результатами численних фізичних експериментів;

по третє, якщо поставити будь-яке інше значення для $\zeta(-1)$, крім $-\frac{1}{12}$ у бозонній теорії струн для розмірності простору-часу 26, то теорія стає неконзистентною, тобто з'являються серйозні фізичні та математичні суперечності, що руйнують саму можливість існування цієї теорії.

Хоч це й видається парадоксальним, але наступна сума (яку називають *гармонічним рядом*)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

є нескінченною навіть з точки зору дзета-функції, оскільки $\zeta(1) = +\infty$. Щоправда, зростання суми є дуже повільним: для того, щоб вона перевищила 100, необхідно близько 1043 доданків. Нескінченність цієї суми[4] можна довести, згрупувавши доданки:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty.$$

Леонард Ойлер довів, що *сума обернених величин простих чисел* також *розбігається до нескінченності* (як і гармонічний ряд)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots.$$

Він встановив нерівність

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots \geq \ln\ln(n+1) - \ln\frac{\pi^2}{6}.$$

[4] Розглядаючи суму $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ та переходячи до границі при $x \to 1$, маємо $1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{0} = +\infty$, що не суперечить міркуванням.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Цей результат підтверджує, що *множина простих чисел нескінченна*, хоча щільність їхнього розподілу надзвичайно повільно зменшується, що відображає *подвійний логарифм* у нерівності.

6. Висновки

Проведене дослідження демонструє, що математика є не статичною системою аксіом і теорем, а динамічною дисципліною, розвиток якої часто стимулюється зіткненням із внутрішніми суперечностями та невизначеностями.

При переході до нескінченних операцій традиційні підходи, що застосовуються до скінченних операцій, перестають діяти: ми не можемо просто виконати скінченну операцію та перейти до границі. Ця обставина призводить до руйнування класичних інтуїтивних уявлень і відкриває шлях до виявлення нових, неочікуваних математичних структур та явищ, зокрема, до множинності розв'язків або їхньої повної відсутності в певних діапазонах.

Виявлені парадокси та ситуації невизначеності не повинні розглядатися як кінцеві обмеження, а скоріше як індикатори потенційного прориву. Неможливість традиційного тлумачення чи обчислення певних об'єктів часто свідчить про необхідність розробки нових теоретичних фреймворків.

Таким чином, математика являє собою багатогранний всесвіт, де суперечність і невизначеність функціонують як каталізатори, перетворюючи проблемні ситуації на інструменти для глибшого розуміння реальності та розширення меж наукового пізнання. Імовірність того, що черговий «неможливий» математичний об'єкт у майбутньому переверне наше розуміння дійсності, залишається високою, підтверджуючи її постійну еволюційну природу.

Список використаних джерел

Юсипів Т.В. (2024). Цеглини математичних досліджень: від античності до епохи штучного інтелекту. У світі математики, Том 1 №2 – С. 26-32. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.4

Bell E.T. (1937). Men of Mathematics. Simon & Schuster, Ink., New York. 608 p.

Euler, L. "Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que réciproques."Mémoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 83-106, 1768. Reprinted in Opera Omnia, Series 1, Vol 15 pp. 70-90.

Google. Gemini [Електронний ресурс]. Режим доступу: [ai.google/gemini/]

Ramanujan's First Letter to G.H. Hardy. (1913). – Режим доступу: Ramanujan's First Letter to G.H. Hardy - by Jørgen Veisdal

Riemann B. (1859). On the number of primes below a given magnitude. – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ueber_die_Anzahl_der_Primzahlen_unter_einer_gegebenen.pdf

Zagier D. (1997). Newman's short proof of the prime number theorem. American Mathematical Monthly. 104 (8): 705—708. DOI: https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990704

Zeroes of zeta function [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.lmfdb.org/zeros/zeta. – Дата перегляду: 01.12.2025.

Отримано редакцією журналу: 04.11.2025
Прорецензовано: 10.12.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Taras YUSYPIV, Ph.D. in Mathematics
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna Zelenska, Ph.D. in Mathematics
ORCID ID: 0000-0002-7784-1030
e-mail: kopchuk@gmail.com
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

PARADOXES AND INFINITY IN MATHEMATICS: BETWEEN CONTRADICTION AND NEW MODELS OF REALITY

Abstract. *The article is devoted to the analysis of nonclassical and paradoxical aspects of modern mathematics that emerge in situations where conventional logical and arithmetic principles cease to be applicable. A range of conceptual issues is examined, including indeterminate forms, infinite power structures, comparisons of expressions involving exponentiation, and the phenomenology of infinite sets illustrated through Hilbert's "infinite hotel" paradox. Particular attention is given to methodological approaches for handling divergent series. The study highlights the fundamental differences between finite and infinite operations: upon transitioning to the infinite case, intuitive rules of elementary arithmetic lose their validity, creating "points of rupture" at which new mathematical structures arise. Drawing on historical examples – from Euler and Riemann to Ramanujan and Hilbert – the article demonstrates that the emergence of such contradictions does not undermine the mathematical system; rather, it stimulates the development of novel methods, concepts, and models of reality. The article argues that engagement with the "impossible" constitutes one of the key mechanisms driving the evolution of mathematical thought.*

Keywords: *mathematical paradoxes; Riemann zeta function; analytic continuation; infinite operations; divergent and infinite sums; Hilbert's infinite hotel.*